

Équations du second degré

On recherche les racines de la fonction du second degré $f(x) = a.x^2 + b.x + c$ ($a \neq 0$), c'est à dire les valeurs de x telles que $f(x) = 0$, ou telles que $a.x^2 + b.x + c = 0$. Graphiquement, ces points sont les intersections du graphique avec l'axe X , ou encore les points d'ordonnée (hauteur) nulle.

Rappel :

Il est toujours possible de noter $f(x) = a.x^2 + b.x + c$ ($a \neq 0$) sous la forme $f(x) = a.(x+p)^2 + q$, avec $p = \frac{b}{2a}$ et $q = \frac{4ac-b^2}{4a}$

Formules :

On recherche x tel que : $a.x^2 + b.x + c = a.(x+p)^2 + q = 0$

$$a.(x+p)^2 + q = 0$$

$$a.(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a} = 0$$

$$a.(x + \frac{b}{2a})^2 = -\frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{b^2-4ac}{4a}$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Ici, trois cas sont possibles, selon que le membre de droite est positif, nul ou négatif : il y a deux solutions, une seule ou aucune.

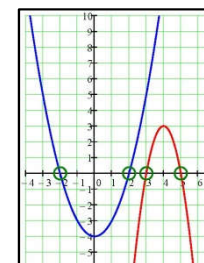
Notons que $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ est du même signe que $b^2 - 4ac$, vu que $4a^2 = (2a)^2$ est toujours positif. Pour la facilité, on convient de noter **$\Delta = b^2 - 4ac$** .

Premier cas : $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$, il y a donc deux solutions qui sont

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

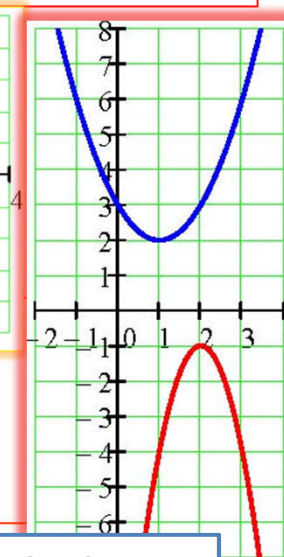
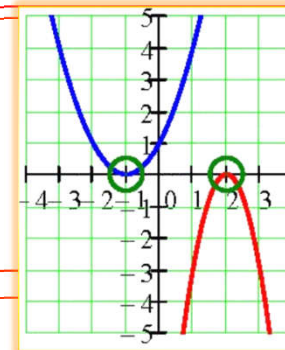
$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ ou bien } x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



Deuxième cas : $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$, il y a donc une seule solution qui est

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} (= -p, \text{ abs. du sommet})$$



Troisième cas : $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} < 0$: c'est impossible (un carré ne peut être négatif),
 il n'y a donc aucune solution, on note $S = \emptyset$

Conclusion :

Pour résoudre l'équation $a.x^2 + b.x + c = 0$ ($a \neq 0$) on calcule d'abord $\Delta = b^2 - 4ac$. Selon le signe de Δ , il y a trois possibilités :

- Si $\Delta > 0$, les deux racines sont $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$, la seule racine est $x = -\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, l'équation est impossible et on note $S = \emptyset$