2010 / 2011

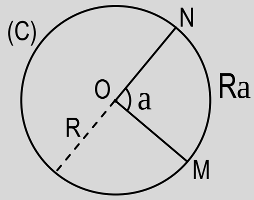
MATHEMATIQUES

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{abc}{2A} = 2R$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$$

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$$



L'ASTUCE

SECONDE S

COURS

DOCUMENT DU PROFESSEUR

Nom et Prénom(s) :…………………………………………………..……

Etablissement :…………………………………………………………

SOMMAIRE

LE VOCABULAIRE DE LA LOGIQUE……………………………………… …..2

ACTIVITES NUMERIQUES

CHAPITRE I : ENSEMBLE DES NOMBRES REELS…………..………… 6

CHAPITRE II : FONCTIONS……………………..…………………..………15

CHAPITRE III : POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES………… 28

CHAPITRE IV : EQUATIONS ET INEQUATIONS DANS ¡ ……………… 38

CHAPITRE V : ETUDES DE FONCTIONS……………………..……… 43

CHAPITRE VI : STATISTIQUES…………………………….…………… 54

ACTIVITES GEOMETRIQUES

CHAPITRE I : ANGLES INSCRITS…………………………………………. 64

CHAPITRE II : VECTEURS ET POINTS DU PLAN….…………………….. 73

CHAPITRE III : ANGLES ORIENTES ET TRIGONOMETRIE……………... 84

CHAPITRE IV : PRODUIT SCALAIRE …………………………………… 91

CHAPITRE V : HOMOTHETIES ET ROTATIONS…………………………. 98

CHAPITRE VI : DROITES ET CERCLES…………………………………… 108

LE VOCABULAIRE DE LA LOGIQUE

Ce chapitre vise à donner à l'élève un raisonnement cohérent et logique. Il est conçu pour qu'on s'y reporte tout au long de l'année scolaire en cas de besoin.

1. Définition d'une proposition

Une proposition est un énoncé (mathématique) qui peut-être vrai ou faux.

2. Implication

Soit (P) et (Q) deux propositions

a) Vocabulaire et notation

Dire que (P) **implique** (Q) signifie que :

- Lorsque (P) est vraie alors (Q) est vraie
- Ou encore (Q) est une conséquence de (P)

On dit que (P) une **condition suffisante** pour que (Q) soit vérifiée
Pour signifier que (P) **implique** (Q) on note : $(P) \Rightarrow (Q)$
L'implication peut se traduire par la formulation usuelle suivante : **si** (P) **alors** (Q)

Exemples : **Si** *je suis vieux* **alors** *j'ai été jeune*
(P) $\Rightarrow$ (Q)

Si *le triangle ABC est équilatéral* **alors** $mesA = mesB = mesC$
(P) $\Rightarrow$ (Q)

Remarques
Si (Q) n'est pas vérifiée alors (P) ne peut pas être vérifiée (puisque (P) implique (Q)).
On dit que (Q) est une **condition nécessaire** pour que (P) soit vérifiée.

Exemple : Si je n'ai pas été jeune alors je ne pas être vieux
Il est donc **nécessaire** d'être jeune pour prétendre devenir vieux

b) Implication réciproque

La réciproque de l'implication $(P) \Rightarrow (Q)$ est l'implication $(Q) \Rightarrow (P)$.
La réciproque de l'implication $(Q) \Rightarrow (P)$ est l'implication $(P) \Rightarrow (Q)$.
Les implications $(P) \Rightarrow (Q)$ et $(Q) \Rightarrow (P)$ sont des implications réciproques

Remarque Une implication peut être vraie et sa réciproque fausse.
Exemple :
Si $x = 2$ **alors** $x^2 = 4$ est une implication **vraie**
(P) $\Rightarrow$ (Q) est vraie

Sa réciproque s'énonce
Si $x^2 = 4$ **alors** $x = 2$; il est facile de voir que cette réciproque est fausse car $(-2)^2 = 4$ or $-2 \neq 2$
(Q) $\Rightarrow$ (P) est fausse

3. Equivalence

(P) et (Q) sont deux propositions. Lorsque les implications réciproques $(P) \Rightarrow (Q)$ et $(Q) \Rightarrow (P)$ sont vraies, on dit que **(P) et (Q) sont équivalentes** ou que (P) est vérifiée **si et seulement si** (Q) vérifiée.
On note : $(P) \Leftrightarrow (Q)$ on lit : « (P) est équivalente à (Q) »

Remarque
Dans ces conditions chacune des propositions est une **condition nécessaire et suffisante** pour que l'autre soit vérifiée.

Exemple ABC est équilatéral $\Leftrightarrow$ $\text{mesA} = \text{mesB} = \text{mesC}$

4. Quelques méthodes de démonstrations

a) Comment démontrer une égalité ?

Pour démontrer une égalité entre nombres, entre vecteurs, …, on dispose au moins de quatre façons :
Ecrivons l'égalité à démontrer sous la forme $A = B$

- On transforme l'écriture de A jusqu'à obtenir B
- On transforme l'écriture de B jusqu'à obtenir A
- On transforme à la fois A et B puis on démontre que A et B sont égaux à C.
- On démontre que $A - B$ ou $B - A$ est nulle.

b) Notion de contre-exemple

Pour montrer qu'une proposition n'est pas « toujours » vraie, il suffit d'exhiber un cas pour lequel elle n'est pas vraie. Un tel cas particulier est appelé un **contre-exemple**

c) Comment démontrer une implication ?

Pour démontrer une implication $(P) \Rightarrow (Q)$:

- On procède souvent par implications successives c'est-à-dire par étapes et de conséquence en conséquence.
- On peut aussi commencer par remplacer (Q) par une proposition (Q') qui lui est équivalente, puis on démontre que (P) implique (Q').

d) Comment démontrer une équivalence ?

Pour démontrer une équivalence on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

- On démontre successivement deux implications $(P) \Rightarrow (Q)$ et $(Q) \Rightarrow (P)$
- On procède par équivalences successives.

ACTIVITES NUMERIQUES

CHAPITRE I : ENSEMBLE DES NOMBRES REELS

I. NOMBRES RATIONNELS ET IRRATIONNELS

1- Nombres rationnels

2- Nombres irrationnels

a) Définition

b) Construction d'un segment de longueur $\sqrt{a}$

c) Démonstration par l'absurde (le principe)

3- Ensemble des nombres réels

4- Calculs dans □

a) Quotient

b) Puissances

c) Racines carrées

II. ORDRE DANS □

1. Inégalité dans □

a) Définition

b) propriétés

2. Ordre et opérations dans □

3. Majorant – minorant – maximum et minimum d'un ensemble

a) Majorant – minorant

b) Maximum – minimum

III. VALEUR ABSOLUE

1. Définition et propriétés

a) Définition et propriétés immédiates

b) propriétés

2. Distance de deux nombres réels

a) Définition

b) Résolution des équations du type $|x-a|=r$

c) Résolution des inéquations du type $|x-a|\leq r$

IV. CALCULS APPROCHES

1. Valeur approchée

2. Approximation décimale d'ordre n

3. Arrondi d'ordre n d'un nombre positif

4. Notation scientifique

CHAPITRE I : ENSEMBLE DES NOMBRES REELS

I. NOMBRES RATIONNELS ET IRRATIONNELS

1. Nombres rationnels

Définition

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme de $\frac{a}{b}$ $(a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{N}^*)$

2. Nombres irrationnels

a) Définition

Un nombre est irrationnel lorsqu'il n'est pas rationnel

b) Construction d'un segment de longueur $\sqrt{a}$.

Activité

1) Construire un segment de longueur $\sqrt{10}$.
2) Donner le programme de construction.

- Tracer une droite graduée (D) de repère (OI)
- Sur la demi-droite [OI), construire un triangle OIH rectangle en I tel que IH = 3. L'hypoténuse ce triangle est de longueur $\sqrt{10}$.
- Le cercle de centre O et de rayon OH coupe la demi-droite [OI) au point M d'abscisse $\sqrt{10}$.

c) Démonstration par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde consiste à prouver que la négation d'une proposition est fausse pour montrer que cette proposition est vraie.

Activité : Démontrons que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

On suppose que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, c'est-à-dire $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$; p et q sont des entiers naturels et $\frac{p}{q}$ est irréductible.

1) Démontrer que $p^2 = 2q^2$.

On a :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow q\sqrt{2} = p$$
$$\Leftrightarrow \left(q\sqrt{2}\right)^2 = p^2$$
$$\Leftrightarrow 2q^2 = p^2$$

Cette égalité ne peut être possible que si p^2 et $2q^2$ ont le même chiffre des unités.

2) Compléter le tableau suivant en donnant le chiffre des unités dans chaque cas.

Unité de p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Unité de p^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Unité de q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Unité de $2q^2$	0	2	8	8	2	0	2	8	8	2

3) Dans quels cas pourrait-on avoir $p^2 = 2q^2$?

$p^2 = 2q^2$ ne peut être vrai que lorsque p et q se terminent par 0 ou lorsque p se termine par 0 et q se termine par 5 ;
Dans ces deux cas p et q seraient des multiples de 5. Ce qui est contradictoire puisqu'on a supposé que $\frac{p}{q}$ est irréductible.
Conclusion : Si $\sqrt{2}$ était un nombre rationnel, on aboutirait à une contradiction **d'où $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.**

Application
Sachant que $\sqrt{3}$ est irrationnel, démontrer par l'absurde que A = $\sqrt{3} + 1$ est irrationnel.

3. Ensemble des nombres réels

Définition

L'ensemble des nombres rationnels et des nombres irrationnels est appelé l'ensemble des nombres réels.
On le note : $\mathbb{R}$

4. Calcul dans $\mathbb{R}$

a) Quotient

Ecrire sous la forme de fraction irréductible les nombres :

$$A = \frac{\frac{3}{5} - \frac{5}{6}}{\frac{1}{4} - \frac{2}{3}} \qquad B = \frac{5\left(2 - \frac{19}{3}\right)}{\frac{11}{6} : \frac{5}{2}}$$

b) Puissances

Simplifier les nombres suivants :

$$C = \frac{3^5 \times 5^4 \times 7^4 \times 4^3}{7^3 \times 4^5 \times 3^5 \times 5} \qquad D = \frac{\left(3^3 \times 5^3\right)^3 \times 2^7}{5^2 \times \left(3 \times 2^3\right)^2}$$

c) Racines carrées

Ecrire sans radical au dénominateur les nombres :

$$E = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \qquad F = \frac{3}{2\sqrt{3} - 3}$$

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

1) Calculer $a = 2 - \dfrac{3}{5} + \dfrac{\frac{2}{5} + \frac{1}{2}}{\frac{3}{5}}$; $b = \left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{5}{3}\right) \times \left(\dfrac{2 - \frac{4}{7}}{3}\right) - \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}}$; $c = \left(\dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3}\right)$

2) On considère les nombres $x = \dfrac{-3}{5}$ et $y = \dfrac{7}{2}$

   Calculer :
   - a- La somme des inverses de x et y.
   - b- L'inverse de la somme de x et y.
   - c- La somme de leurs carrées.
   - d- Le carré de la somme de x et y.

Exercice 2

1) On suppose a, b, c, des réels non nuls. Simplifier

$$A = \left(a^{-3}b\right)^2 \times \left(a^2 \times b^{-1}\right)^{-1} \quad ; \quad B = \frac{\left(a^2b\right)^3 \times b^{-2}c^3}{a^2c^{-1}\left(bc^2\right)^2}$$

2) Simplifier $C = \dfrac{\left(5^2 \times 10^{-5}\right)^3 \times 10^3 \times 3}{\left(5 \times 10^3\right)^{-3} \times 5^2 \times 3^3}$; $D = \dfrac{3^5 \times 81}{9^{-3}}$; $E = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^3 \times 27^2$

Exercice 3

1) Démontrer que : $\left(\sqrt{6} + 2\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$

2) Démontrer que : $\left(3 + \sqrt{6}\right)\left(3 - \sqrt{6}\right) - \dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = 0$

3) Démontrer que pour : $a > b \geq 0$. $\quad \dfrac{\sqrt{a - b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a - b}}$

4) Ecrire le nombre A sous la forme de $a + b\sqrt{n}$ où a et b sont des rationnels et $n \in \mathbb{N}$;

$$A = \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \sqrt{5}}}.$$

Exercice 4

Sachant que $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel. Démontrer par l'absurde que les nombres suivants sont irrationnels.

$A = 2 + \sqrt{3}$; $\quad B = \dfrac{2 - \sqrt{3}}{3}$ $\quad$ et $\quad C = \dfrac{1}{\sqrt{3} - 5}$.

II. ORDRE DANS $\mathbb{R}$

1. Inégalités dans $\mathbb{R}$

a) Définitions et propriétés immédiates

Définition

Soit a et b deux nombres réels.

- a est inférieur ou égal à b signifie que b – a est un nombre réel positif.
- a est strictement inférieur à b signifie que b – a est un nombre réel strictement positif.

b) Propriétés

Pour tous nombres réels a, b et c on a :

(1) $a \le a$

(2) $a \le b$ et $b \le a \Rightarrow a = b$

(3) $a \le b$ et $b \le c \Rightarrow a \le c$

2. Ordre et opérations dans $\mathbb{R}$

Propriétés

a, b, c et d des nombres réels on a :

- Ordre et addition
  - Si $a \le b$ alors $a + c \le b + c$
  - Si $a \le b$ et $c \le d$ alors $a + c \le b + d$

  Ordre et multiplication
  - Si $a \le b$ et $c \ge 0$ alors $ac \le bc$
  - Si $a \le b$ et $c \le 0$ alors $ac \ge bc$
  - Si a, b, c et d sont des nombres réels positifs tels que : $a \le b$ et $c \le d$ alors $ac \le bd$
  - Pour tous nombres réels a et b positifs : $a \le b \Leftrightarrow a^2 \le b^2 \Leftrightarrow \sqrt{a} \le \sqrt{b}$
  - Pour tous nombres réels a et b strictement positifs: $a \le b \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} \ge \dfrac{1}{b}$

Remarque :

Il n'existe pas de règles pour « soustraire » ou « diviser » membre à membre deux inégalités. L'inégalité obtenue peut en effet être vraie ou fausse.

Application

1) Comparer les nombres suivants :

$-\dfrac{3}{5}$ et $-\dfrac{5}{7}$ $\qquad$ $\dfrac{1}{13}$ et $\dfrac{1}{5\sqrt{7}}$ $\qquad$ $3-2\sqrt{7}$ et $3-3\sqrt{3}$

2) Soit a et b deux nombres réels tels que : $-3 < a < -2$ et $2{,}5 < b < 2{,}6$

Encadrer : $a+b$; $a-b$; $a \times b$; $\dfrac{a}{b}$ et a^2

3. Majorant – minorant – maximum et minimum d'un ensemble

Activité

Soit $A = \{-3 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 12 ; 17\}$.

1) Trouver des nombres plus grands que tous les éléments de A
   Ces nombres sont appelés…………………………………………………………………………………
2) Quel est le plus grand élément de A ?

Ce nombre est aussi un………………………………………………………………………………………de A.

On dit que……………………………..................est le…………………………………….…………de l'ensemble A.

3) Trouver des nombres plus petits que ceux de A.
   Ces nombres sont appelés……………………………………………………………………………………

4) Quel est le plus petit élément de l'ensemble A ?

.Ce nombre est aussi un…………………………………….…………………………………………de A.
On dit que ………………….……….….……..…. est le……………………………………de l'ensemble A.

Définitions

a) Majorant - minorant

Soit A un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

- On dit qu'un nombre réel M est un majorant de A si M est supérieur ou égal à tous les éléments de A. Un ensemble qui admet un majorant est dit majoré.
- On dit qu'un nombre réel m est un minorant de A si m est inférieur ou égal à tous les éléments de A. Un ensemble qui admet un minorant est dit minoré.

b) Maximum - minimum

Soit A un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

- Lorsqu'il existe, le plus grand élément de A est appelé maximum de A.
- Lorsqu'il existe, le plus petit élément de A est appelé minimum de A.

Remarques

- Lorsqu'il existe, le maximum d'un sous ensemble de $\mathbb{R}$ est unique.
- Lorsqu'il existe, le minimum d'un sous ensemble de $\mathbb{R}$ est unique.
- Soit A un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et M un nombre réel. M est le maximum de A si et seulement si M est un majorant de A appartenant à A.
- Soit A un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et m un nombre réel. m est le minimum de A si et seulement si m est un minorant de A appartenant à A.
- Un sous-ensemble majoré de $\mathbb{R}$ n'admet pas nécessairement de maximum.
- Un sous-ensemble minoré de $\mathbb{R}$ n'admet pas nécessairement de minimum.

Application

Soit l'intervalle $B = [-2;9[$.

1) Trouver trois minorants et trois majorants de B.
2) Trouver le maximum et le minimum de B si possible.
3) Ecrire l'ensemble de tous les majorants de B.
4) Ecrire l'ensemble de tous les minorants de B.

Remarques :

a étant un nombre réel, l' intervalle :

- $B =]-\infty ; a[$ est noté……………………………………………………………………..……………………
- $B =]-\infty ; a]$ est noté………………………………………………………………………………………….
- $B =]a ; +\infty[$ est noté………………………………………………………………………………………….
- $B = [a ; +\infty[$ est noté………………………………………………………………………………………….

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

X désigne un nombre réel tel que : $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

Comparer les nombres : $\left(x - \frac{1}{2}\right)$; $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ et $\left(x - \frac{1}{2}\right)^3$

Exercice 2

Soit $A = \left\{ \frac{1}{n} \; ; \; n \in \mathbb{N}^* \right\}$ (ensemble des inverses des entiers naturels non nuls).

1) Trouver trois éléments de A.
2) a- Justifier que 1 est un majorant de A.
   b- En déduire que 1 est le maximum de A.
3) Justifier que A est minoré.
4) Démontrer par l'absurde que A n'admet pas de minimum.

Exercice 3

On considère l'ensemble B des nombres réels pouvant s'écrire sous la forme $\frac{n}{n+1}$, où n est un nombre entier naturel quelconque.

1) Démontrer que B admet 0 pour minimum.
2) Démontrer que B est majoré par 1 mais qu'il n'admet pas de maximum.

Exercice 4

On donne $4 < x < 5$ et $-\frac{1}{2} < y < -\frac{1}{3}$.

Déterminer un encadrement de : $x + y$; xy ; x^2;y^2; $x - y$ et $\frac{x}{y}$. (On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles).

III. VALEUR ABSOLUE

1. Définitions et propriétés

a) Définition

Soit a un nombre réel. Le plus grand des deux nombres réels a et – a est appelé valeur absolue de a et est noté $|a|$

b) Propriétés

Activité

Compléter le tableau ci-dessous.

a	b	$\lvert a\rvert$	$\lvert b\rvert$	$\lvert a+b\rvert$	$\lvert a\rvert + \lvert b\rvert$	$\lvert ab\rvert$	$\lvert a\rvert \times \lvert b\rvert$	$\sqrt{a^2}$	$\frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$	$\left\lvert\frac{a}{b}\right\rvert$
-3	5									
14	17									
-7	-11									

Propriétés :

Pour tous nombres réels a et b et pour tout nombre réel strictement positif r on a :

(1) $|a| \geq 0$

(2) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

(3) $|a| = |-a|$

(4) $|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a<0 \end{cases}$

(5) $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b \text{ ou } a = -b$

(6) $\sqrt{a^2} = |a|$

(7) $|ab| = |a||b|$

(8) si $b \neq 0$, $\left|\frac{1}{b}\right| = \frac{1}{|b|}$

(9) si $b \neq 0$, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

(10) $|a+b| \leq |a| + |b|$ (inégalité triangulaire)

(11) $|a| \leq r \Leftrightarrow -r \leq a \leq r$

Application

Ecrire les nombres suivants sans le symbole $|\quad|$.

$|2 - \sqrt{5}|$ =..

$|\sqrt{5} - \sqrt{3}|$ =..

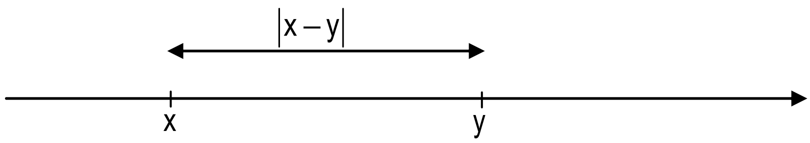
$\sqrt{(3 - 2\sqrt{3})^2}$ =..

$\left|\frac{\sqrt{7} - 2}{3 - \sqrt{10}}\right|$ =..

2. Distance de deux nombres réels

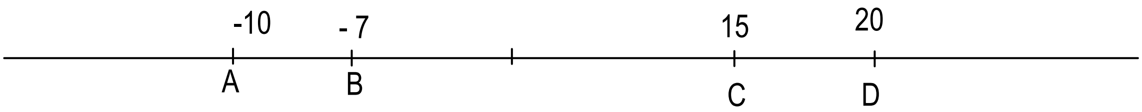
a) Définition

Soit x et y deux nombres réels. Le nombre réel $|x - y|$ est appelé distance de x et y.



Exercice d'application

Soit (D) la droite graduée ci-dessous :



Calculer les distances suivantes : AB ; BC ; AC et AD.

b) Résolution des équations du type $|x - a| = r$.

Application

1) Résoudre algébriquement dans $\mathbb{R}$ les équations.

$|x - 3| = 2$ $\qquad$ $|x + 7| = 8$ $\qquad$ $|x - 3| = -6$

2) Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

$|x-2| = 5$ $\qquad\qquad$ $|x+3| = 2$

c) Résolutions des inéquations du type $|x-a| \le r$.

Exercice d'application

1) Résoudre algébriquement dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

$|x-4| \le 3$ $\qquad\qquad$ $|x+7| < 4$ $\qquad\qquad$ $|x-2| \le -1$

2) Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

$|x-5| \le 2$ $\qquad\qquad$ $|x+3| < 3$

Exercice d'application

Résoudre graphiquement et algébriquement dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes:

a) $|2x-1| = 4$ $\qquad$ b) $|-3x+1| = 3$ $\qquad$ c) $|2x-1| < 4$ $\qquad$ d) $|-3x+1| \le 3$

IV. CALCULS APPROCHES

1. Valeur approchée

Définition

Soit x et y deux nombres réels et ε un nombre réel strictement positif. y est une valeur approchée de x à ε près signifie $|x-y| \le \varepsilon$. On note $x \approx y$ à ε près. Le nombre ε est appelé incertitude de cette valeur approchée.

2. Approximation décimale d'ordre n.

Exercice : soit le nombre $\frac{11}{3}$.

1) Encadrer ce nombre par deux décimaux consécutifs d'ordre 3.

2) Quelle est l'approximation décimale d'ordre 3 par défaut et par excès de $\frac{11}{3}$.

3. Arrondi d'ordre n d'un nombre positif

On donne $\pi = 3{,}141592653$.

Donner les arrondis d'ordre 3 ; 4 ; 5 et 6 de π.

4. Notation scientifique

Définition

Un nombre décimal x est écrit en notation scientifique (ou écriture scientifique) lorsqu'il est sous la forme $x = a \times 10^p$ où a est un nombre décimal ayant un seul chiffre non nul avant la virgule et p est un nombre entier relatif.

Exercice

1) Donner la notation scientifique de :

- $6 \times 10^{-3} \times 0{,}02$
- $\dfrac{360 \times 10^5}{0{,}004}$

2) On considère le nombre $A = \dfrac{4 \times 10^{-8} + 0{,}0000005}{29 \times 10^{-6} - 20 \times 10^{-7}}$.

a- Sans utiliser une calculatrice, écrire le numérateur et le dénominateur en notation scientifique :

b- Ecrire A en notation scientifique.

CHAPITRE II : FONCTIONS

I. GENERALITES SUR LES FONCTIONS

1- Définition

2- Exemples de fonctions

a) Fonction définie par les touches d'une calculatrice

b) Fonction définie par une table

c) Fonction définie par une formule explicite

3- Ensemble de définition d'une fonction

4- Représentation graphique d'une fonction

5- Fonctions égales sur un ensemble

II. ETUDE GRAPHIQUE

1- Lecture d'image et d'antécédent (s) d'un nombre

2- Image directe d'un ensemble

a) Définition

b) Lecture de l'image directe d'un ensemble

3- Image réciproque d'un ensemble

a) Définition

b) Lecture de l'image réciproque d'un ensemble

III. VARIATIONS D'UNE FONCTION

1- Maximum –minimum d'une fonction

a) Définition

b) Détermination algébrique du maximum ou du minimum d'une fonction

2- Sens de variation d'une fonction

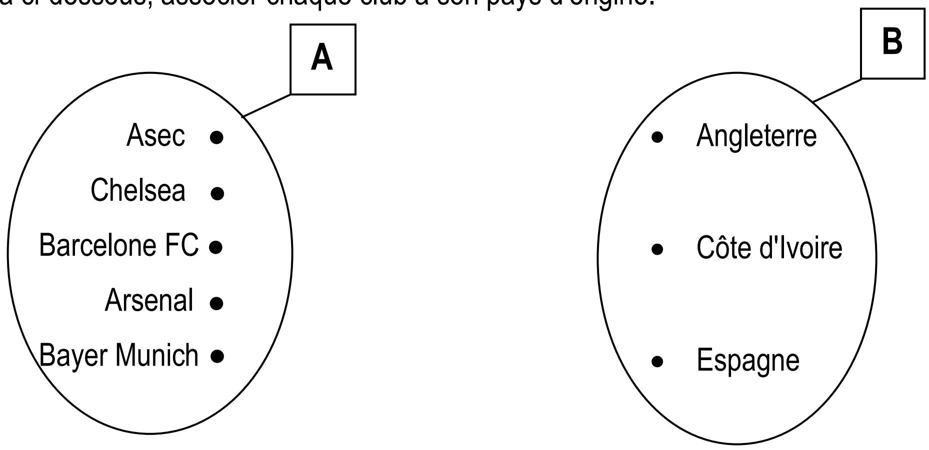
CHAPITRE II : FONCTIONS

I. GENERALITES SUR LES FONCTIONS

1- Définition

Activité 1

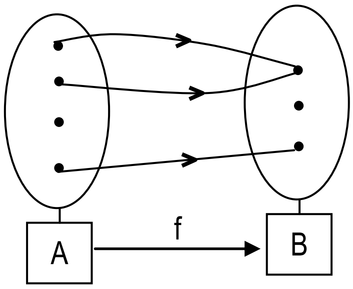
Sur le schéma ci-dessous, associer chaque club à son pays d'origine.



A chaque club, on a associé zéro (0) ou un (1) pays.
Cette correspondance, qui à chaque club associe son pays d'origine s'il existe, est appelé **fonction**.

Définition

A et B sont deux ensembles non vides.
On appelle fonction de A vers B **toute correspondance** qui, à chaque élément de A, associe **un ou zéro** élément de B.



Vocabulaire et notation

Soit x un élément de A et on désigne par f(x) sa correspondance par f. On dit que f est la fonction de A vers B qui, à x associe f(x) ;
A est l'ensemble de départ de f, B son ensemble d'arrivée. x est la variable, f(x) l'image de x par f.
On note :

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

- Lorsque **v est l'image de u par f,** on dit que **u est un antécédent de v par f**. On écrit $v = f(u)$.
- Lorsque **l'ensemble d'arrivée** d'une fonction f **est un ensemble de nombres réels**, on dit que **f est une fonction numérique.**
- Lorsque l'ensemble de départ d'une fonction numérique f est un ensemble de nombres réels, on dit que f est une fonction numérique d'une variable réelle.

Remarque

Les applications : symétrie et translation sont des fonctions du plan vers le plan. Les applications affines sont des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

2- Exemples de fonctions

a) Fonction déterminée par une table

Cas du calendrier perpétuel.

ANNEES DE 1857 A 2036							JANVIER	FEVRIER	MARS	AVRIL	MAI	JUIN	JUILLET	AOÛT	SEPTEMBRE	OCTOBRE	NOVEMBRE	DECEMBRE	a	b	JOURS
1857	**1885**		**1925**	**1953**	**1981**	**2009**	4	0	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2	**1**		DIM
1858	**1886**		**1926**	**1954**	**1982**	**2010**	5	1	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3	**2**		LUN
1859	**1887**		**1927**	**1955**	**1983**	**2011**	6	2	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4	**3**		MAR
1860	**1888**		**1928**	**1956**	**1984**	**2012**	0	3	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6	**4**		MER
1861	**1889**	**1901**	**1929**	**1957**	**1985**	**2013**	2	5	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0	**5**		JEU
1862	**1890**	**1902**	**1930**	**1958**	**1986**	**2014**	3	6	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1	**6**		VEN
1863	**1891**	**1903**	**1931**	**1959**	**1987**	**2015**	4	0	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2	**7**		SAM
1864	**1892**	**1904**	**1932**	**1960**	**1988**	**2016**	5	1	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4	**8**	**29**	DIM
1865	**1893**	**1905**	**1933**	**1961**	**1989**	**2017**	0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5	**9**	**30**	LUN
1866	**1894**	**1906**	**1934**	**1962**	**1990**	**2018**	1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6	**10**	**31**	MAR
1867	**1895**	**1907**	**1935**	**1963**	**1991**	**2019**	2	5	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0	**11**	**32**	MER
1868	**1896**	**1908**	**1936**	**1964**	**1992**	**2020**	3	6	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2	**12**	**33**	JEU
1869	**1897**	**1909**	**1937**	**1965**	**1993**	**2021**	5	1	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3	**13**	**34**	VEN
1870	**1898**	**1910**	**1938**	**1966**	**1994**	**2022**	6	2	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4	**14**	**35**	SAM
1871	**1899**	**1911**	**1939**	**1967**	**1995**	**2023**	0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5	**15**	**36**	DIM
1872		**1912**	**1940**	**1968**	**1996**	**2024**	1	4	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0	**16**	**37**	LUN
1873		**1913**	**1941**	**1969**	**1997**	**2025**	3	6	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1	**17**		MAR
1874		**1914**	**1942**	**1970**	**1998**	**2026**	4	0	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2	**18**		MER
1875		**1915**	**1943**	**1971**	**1999**	**2027**	5	1	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3	**19**		JEU
1876		**1916**	**1944**	**1972**	**2000**	**2028**	6	2	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5	**20**		VEN
1877	**1900**	**1917**	**1945**	**1973**	**2001**	**2029**	1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6	**21**		SAM
1878		**1918**	**1946**	**1974**	**2002**	**2030**	2	5	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0	**22**		DIM
1879		**1919**	**1947**	**1975**	**2003**	**2031**	3	6	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1	**23**		LUN
1880		**1920**	**1948**	**1976**	**2004**	**2032**	4	0	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3	**24**		MAR
1881		**1921**	**1949**	**1977**	**2005**	**2033**	6	2	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4	**25**		MER
1882		**1922**	**1950**	**1978**	**2006**	**2034**	0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5	**26**		JEU
1883		**1923**	**1951**	**1979**	**2007**	**2035**	1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6	**27**		VEN
1884		**1924**	**1952**	**1980**	**2008**	**2036**	2	5	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1	**28**		SAM

Mode d'emploi

Le mode d'emploi ci-dessous permet de trouver le jour de la semaine correspondant à la date :

J M A

Jour Mois Année

- Rechercher l'année A dans l'une des colonnes de gauche,
- Suivre la ligne horizontale jusqu'à la colonne du mois M,
- Ajouter le nombre J et le nombre situé à l'intersection de la ligne A et de la colonne M,
- Rechercher cette somme dans l'une des colonnes a ou b,
- Suivre la ligne horizontale de cette somme jusqu'à la dernière colonne, qui indique le jour de la semaine recherché.

- Déterminer les jours correspondants aux dates suivantes en vous servant du calendrier perpétuel ci-dessus :
  7 Août 2007 ; 7 Août 1960 ; 30 Juillet 2007 ; 19 Septembre 2002 et 1 Janvier 2015.

b) <u>Fonctions déterminées par les touches d'une calculatrice scientifique</u>

Les touches sin cos tan $\sqrt{\ }$ d'une calculatrice scientifique déterminent chacune une fonction.

- Déterminer si possibles les images des nombres 30 ; 100 et – 200 par les fonctions sin ; cos et $\sqrt{\ }$.

c) <u>Fonctions déterminées par une formule explicite.</u>

On considère les fonctions: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^2-x+3$; $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\sqrt{x+5}$; $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\dfrac{x+3}{x-1}$

f, g et h sont des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ déterminées par leurs formules explicites respectives suivantes:

$$f(x)=x^2-x+3 \qquad g(x)=\sqrt{x+5} \qquad h(x)=\frac{x+3}{x-1}$$

1) Calculer si possible les images des nombres réels -6; 0 ;1;2 et 4 par chacune des fonctions f, g et h.
2) Déterminer le ou les antécédents des nombres réels -1 ; 0 et 12 par la fonction h.

3- <u>Ensemble de définition</u>

<u>Activité 2</u>

On considère la fonction g définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\sqrt{x+5}$.

1) Déterminer si possible, l'image par g de chacun des nombres réels suivants: -5;4;0;-7 ;-13 ;2 et 20.
2) Parmi les nombres ci-dessus, citez ceux qui n'ont pas d'images par g et dites pourquoi.

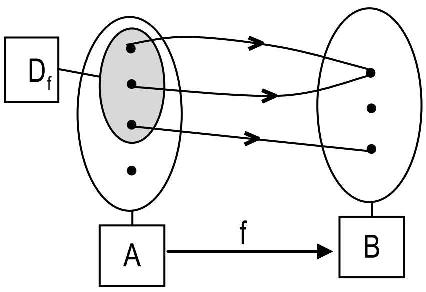
<u>Vocabulaire</u>

- -7 n'a pas d'image par la fonction g ; on dit que g n'est pas définie en -7.
- 4 a une image par la fonction g ; on dit que g est définie en 4.
- Chaque nombre de l'intervalle [-5 ; 20] a une image par g. On dit que g est définie sur [-5 ; 20].
- $[-5;+\infty[$ est le plus grand ensemble sur lequel g est définie.

<u>Définition</u>

f est une fonction d'un ensemble A vers un ensemble B. On appelle ensemble de définition de f, l'ensemble des éléments de A qui ont une image par f.

On note habituellement D_f l'ensemble de définition de f.



<u>Exemple de détermination de l'ensemble de définition d'une fonction</u>

Déterminons l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^2-x+3$; $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\dfrac{x+3}{x-1}$; $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\sqrt{x+5}$

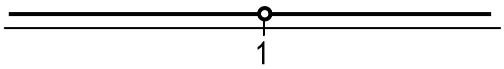
- f est une fonction polynôme donc elle est définie sur $\mathbb{R}$

- Soit D_h l'ensemble de définition de h et x un nombre réel.

$x \in D_h \Leftrightarrow x-1 \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad x \neq 1$

Donc $D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$



Exercice d'application

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$j(x) = 2x+1$; $k(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 1}{2x - 1}$; $m(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}}{x-1}$.

4- Représentation graphique

Définition

Le plan est muni d'un repère.

f est une fonction numérique d'une variable réelle, d'ensemble de définition D_f.

On appelle représentation graphique de f, ou courbe représentative de f l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ où x est un élément de D_f.

Notation et vocabulaire

On note habituellement (Cf) la représentation graphique de f. On a : $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (C_f) \Leftrightarrow x \in D_f$ et $y = f(x)$

Quand f est une fonction déterminée par une formule explicite, on dit que $y = f(x)$ est l'équation de la courbe (Cf).

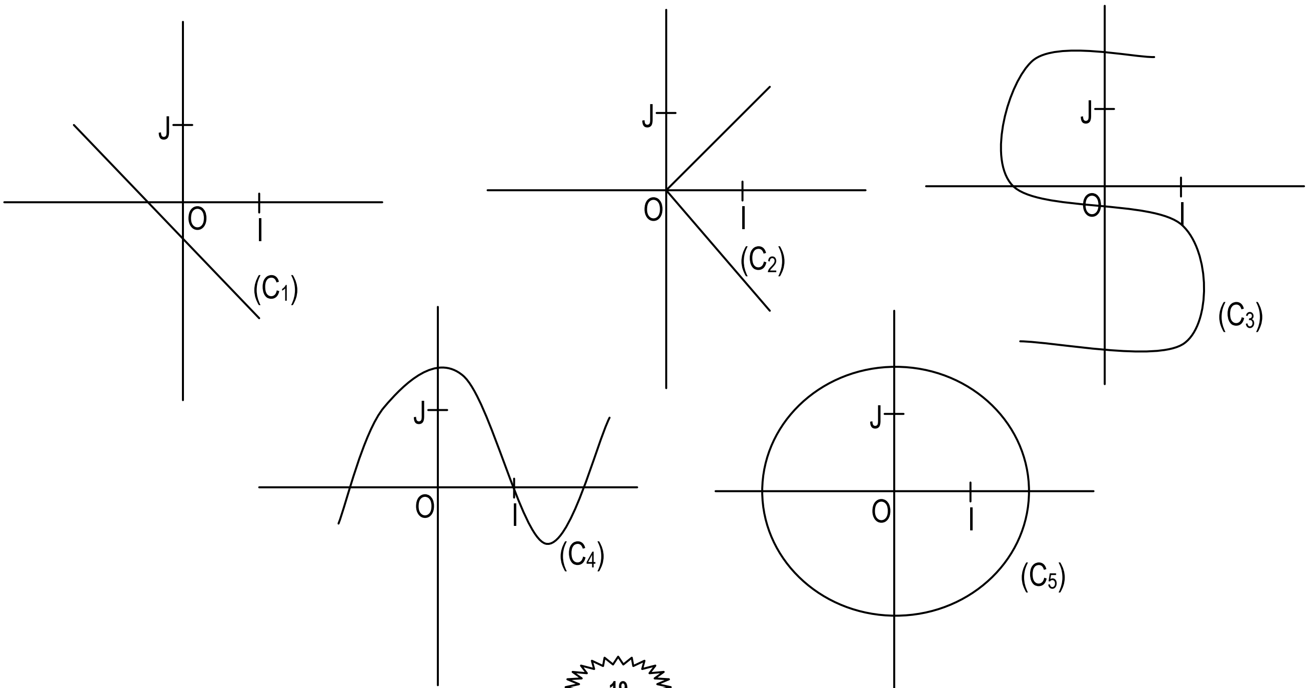
Exemple

Le plan est muni d'un repère orthogonal

1) Représenter graphiquement la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 4$ sur l'intervalle $[-3;3]$.
2) Les points $A\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$ appartiennent-ils à (Cf) la représentation graphique de la fonction f ?
3) Quel est le point de (Cf) qui a pour abscisse 0 ?

Exercice d'application

Parmi les schémas ci-dessous, indiquer les courbes qui sont des représentations graphiques d'une fonction. Justifier ta réponse.



5- Fonctions égales sur un ensemble

Activité 3

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = x - 1$ et $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions f et g.
2) Justifier que f et g sont définies sur $]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$
3) Simplifier g(x) sur son ensemble de définition et comparer f(x) et g(x).

Définition

f et g sont des fonctions définies sur un ensemble E. On dit que les fonctions f et g sont égales sur E (où qu'elles coïncident sur E) lorsque, pour tout élément x de E ; $f(x) = g(x)$

Remarque

Les représentations graphiques de fonctions égales sur un ensemble coïncident sur cet ensemble.

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

Soit $f(x) = -x^2 + 5$ et $g(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$.

1) Calculer l'image de 0 ; – 2 et $\sqrt{2}$ pour chacune des fonctions.
2) Déterminer le ou les antécédents de 1 pour chaque fonction.

Exercice 2

f et g sont des fonctions définies par :

$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x$ et $g(x) = \dfrac{2}{x^4} - \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{5}{x}$.

1) Déterminer D_f et D_g les ensembles de définitions respectifs des fonctions f et g.
2) Calculer l'image par f et g de chacun des nombres suivants : 10^{-1} ; 10 ;-10 et -10^{-1}.

Exercice 3

h est la fonction définie par $h(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$. ($C_h$) est la courbe représentative de h.

1) Parmi les points suivants, indique ceux qui appartiennent et ceux qui n'appartiennent pas à (C_h) :

$A\begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$; $D\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $F\begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$

2) Déterminer l'ordonnée du point de (C_h) dont l'abscisse est $\dfrac{1}{3}$, dont l'abscisse est $-\dfrac{2}{5}$.

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, dire si les fonctions f et g sont égales sur $\mathbb{R}$ ou non. Sinon préciser le plus grand ensemble sur lequel f et g coïncident.

a) $f(x) = \sqrt{x^2}$ et $g(x) = |x|$; b) $f(x) = x$ et $g(x) = \dfrac{x^2+x}{x^2+1}$; c) $f(x) = x$ et $g(x) = \dfrac{x^3-x}{x^2-1}$

Exercice 5

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = \dfrac{3x}{x^2-2x+1}$; $g(x) = \dfrac{\sqrt{2-x}}{x+4}$; $h(x) = \sqrt{-3x+9}$

$j(x) = \dfrac{5x}{x^2+3}$; $P(x) = \dfrac{1}{X} + \sqrt{X+1}$; $k(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

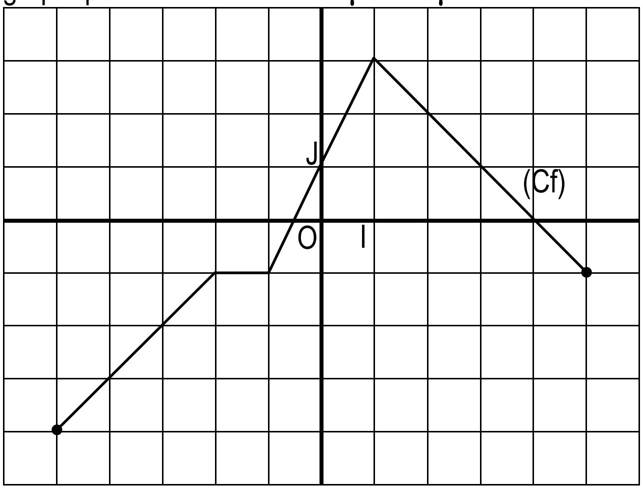
$n(x) = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x-1}}$; $m(x) = \sqrt{x^2+2}$; $r(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$; $s(x) = \dfrac{x^3-2x+1}{4}$

II. ETUDE GRAPHIQUE

1- Lecture d'image et d'antécédent (s) d'un nombre

Activité

Soit (Cf) la représentation graphique d'une fonction f de ¡ vers ¡ .



- Pour lire graphiquement l'image de **a** c'est-à-dire **f(a),** on procède ainsi :
  - Tracer la droite (D) d'équation $x = a$
  - L'ordonnée du point d'intersection de (Cf) et (D) est l'image de a par f.

- Pour lire graphiquement le(s) antécédent(s) d'un nombre **b** par f on procède comme suit :
  - Tracer la droite (Δ) d'équation $y = b$. Les antécédents de b sont les abscisses des points d'intersection de la droite (Δ) d'équation $y = b$ et de (Cf).

1) Donner l'ensemble de définition Df de la fonction f.
2) Compléter le tableau ci-dessous.

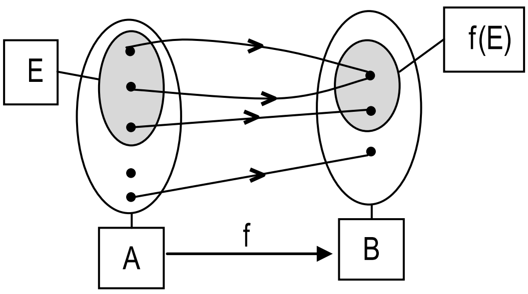
x	-3	-1	0			
f(x)				-4	-3	3

3) Déterminer graphiquement les antécédents par f de 1 ; 0 et 2.

2- Image directe d'un ensemble

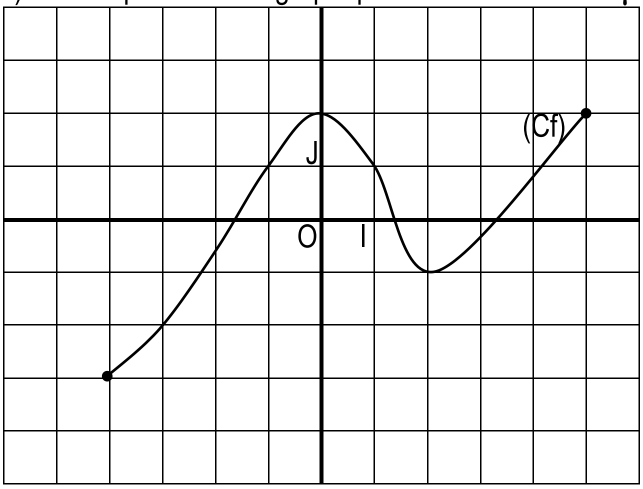
a- Définition

f est une fonction de A vers B et E une partie de A. On appelle image directe de E par f, l'ensemble des images par f de tous les éléments de E. On le note f(E).



b- <u>Lecture de l'image directe d'un ensemble</u>

Sur la figure ci-dessous (Cf) est la représentation graphique d'une fonction f de ¡ vers ¡ .



1) Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2) Déterminer sur le graphique les images directes des intervalles [-4;0] et [-3 ; 2].

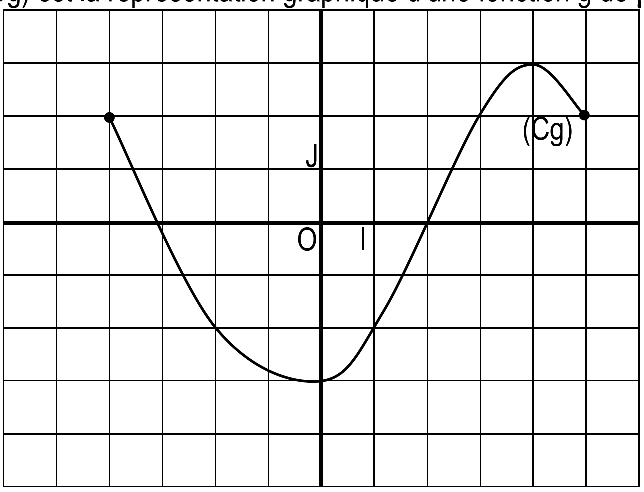
3- <u>Image réciproque d'un ensemble</u>

a- <u>Définition</u>

f est une fonction de A et vers B et G une partie de B. On appelle image réciproque de G par f, l'ensemble G' des antécédents par f de tous les éléments de G.

b- <u>Lecture graphique de l'image réciproque d'un ensemble</u>

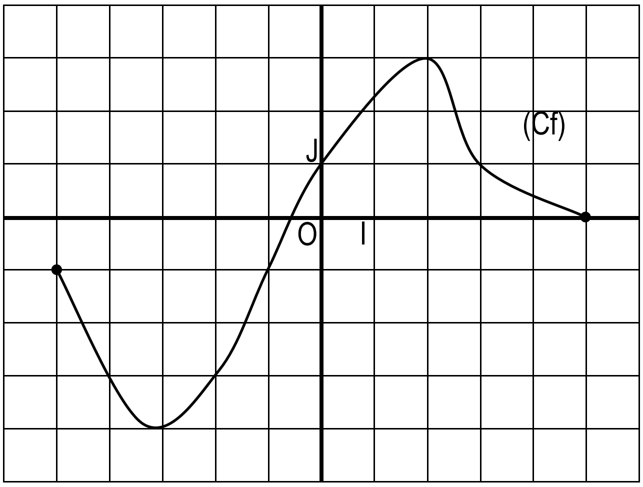
Sur la figure ci-dessous (Cg) est la représentation graphique d'une fonction g de ¡ vers ¡



1) Donner l'ensemble de définition de la fonction g.
2) Déterminer sur le graphique les images réciproques des intervalles suivants : [-3 ; 2] ; [-2 ; 2] et [0 ;2].

EXERCICES DE RENFORCEMENT

La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction numérique f.



1) Déterminer graphiquement l'ensemble de définition de f.
2) Déterminer graphiquement les images de – 4 ;– 3; 0 ; 2 et 3.
3) Déterminer graphiquement les antécédents de -1 ; -3 ; 1 et 3 par f.
4) Déterminer les images directes de : [-3 ;-1] et [- 4; 3].
5) Déterminer les images réciproques : [-3 ;-1] et [1 ; 4].

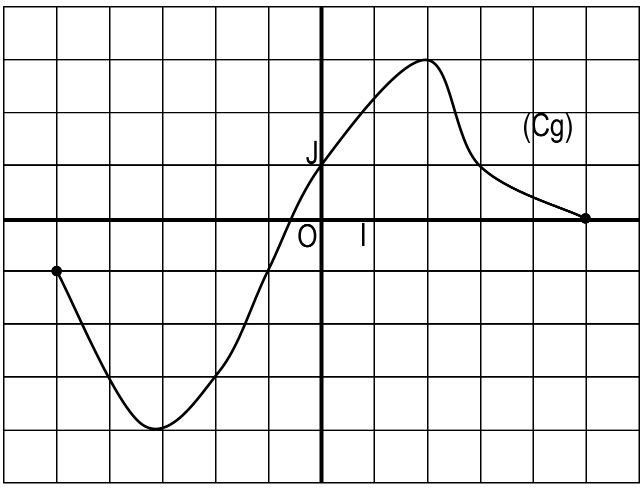
III. VARIATIONS D'UNE FONCTION

1- Maximum-Minimum d'une fonction.

(Cg) est la représentation graphique d'une fonction numérique g définie sur l'intervalle [– 5 ;5]

a) Déterminer les coordonnées du point le plus haut de la courbe
b) Déterminer les coordonnées du point le plus bas de la courbe

On dit que sur l'intervalle [– 5 ;5] g admet en 2 un maximum égal à 3 et en – 3 minimum égal à – 4.



a) Définition

f est une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un ensemble E ; a est un élément de E.

- Lorsque, quel que soit x élément de E, $f(a) \geq f(x)$; on dit que f(a) est le maximum de f sur E.
- Lorsque, quel que soit x élément de E, $f(a) \leq f(x)$; on dit que f(a) est le minimum de f sur E.

b) <u>Détermination algébrique du maximum ou du minimum d'une fonction.</u>

<u>Activité</u>

Soit f la fonction de ¡ vers ¡ définie par $f(x) = 4 + \sqrt{x-1}$.

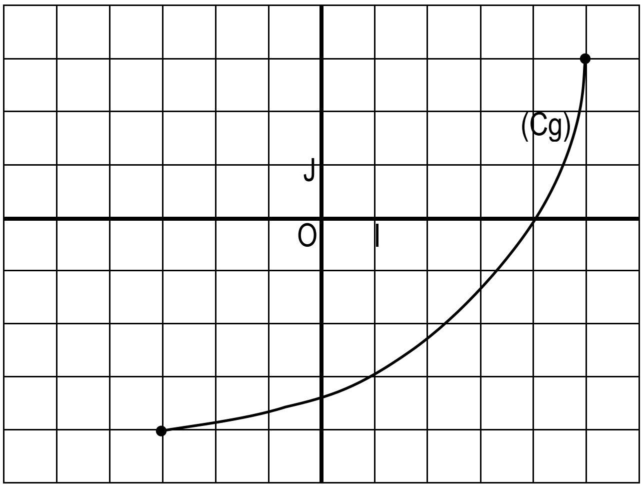
1) Déterminer l'ensemble de définition Df de la fonction f.
2) Démontrer que 4 est le minimum de f sur Df. Pour cela:
   a) Montrer que 4 est un minorant de f sur Df c'est-à-dire: pour tout $x \in D_f$, $f(x) \geq 4$.
   b) Démontrer que 4 admet un antécédent.
   c) Conclure
      $\forall x \in D_f$; $f(x) \geq 4$ et $f(1) = 4$ donc 4 est le minimum de f.

<u>Exercice d'application.</u>

Montrer que la fonction g de ¡ vers ¡ définie par $g(x) = 3 - |x-4|$ admet un maximum égal à 3 sur son ensemble de définition.

2- <u>Sens de variation d'une fonction.</u>

I. (Cg) est la représentation graphique d'une fonction g sur l'intervalle [-3;5].
   1) Comparer g(2) et g(4).
   2) Soit a et b deux réels de [-3;5] tels que $a < b$, comparer graphiquement g(a) et g(b).
   3) En déduire le tableau de variation de g.

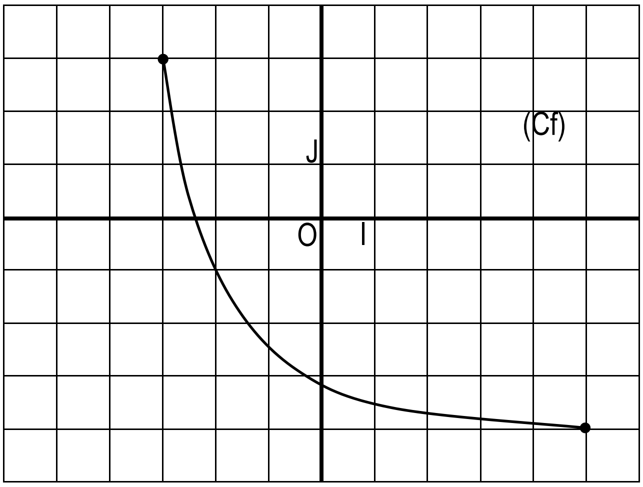


<u>Conclusion</u> : $\forall a \in [-3;5]$ et $\forall b \in [-3;5]$;
si $a < b$ alors $g(a) < g(b)$
On dit que g est strictement croissante sur $[-3;5]$

Tableau de variation de la fonction g.

x	–3		5
f(x)	–4	↗	3

II. (Cf) est la représentation graphique d'une fonction f sur l'intervalle [-3;5].
   1) Comparer f(2) et f(4).
   2) Soit a et b deux réels de [-3;5] tels que a<b, comparer graphiquement f(a) et f(b).
   3) En déduire le tableau de variation de f.



Conclusion : $\forall a \in [-3;5]$ et $\forall b \in [-3;5]$;

si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$

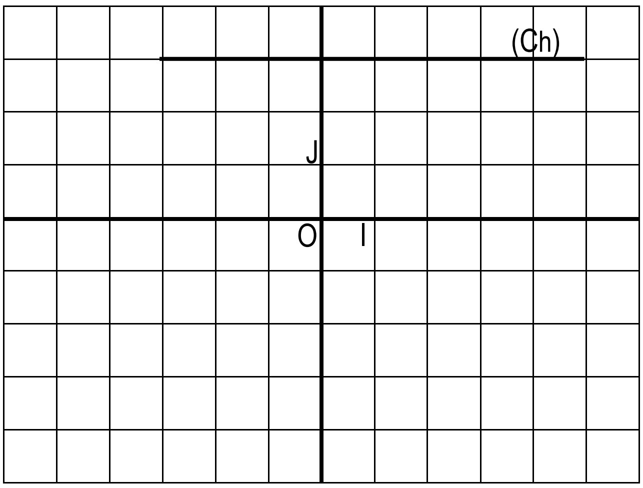
On dit que f est strictement décroissante sur $[-3;5]$

Tableau de variation de la fonction f:

x	-3	5
f(x)	3 ↘	-4

III. (Ch) est la représentation graphique d'une fonction h sur l'intervalle [-3;5].

1) Compare h(2) et h(4).
2) Soit a et b deux réels de [-3;5] tels que a < b, comparer, en utilisant (Ch), h(a) et h(b).
3) En déduire le Tableau de variation de la fonction h.



Conclusion : $\forall a \in [-3;5]$ et $\forall b \in [-3;5]$;

On a : $h(a) = h(b)$

On dit que h est une fonction constante sur $[-3;5]$

Tableau de variation de h

x	-3	5
f(x)	3 →	3

Définition.

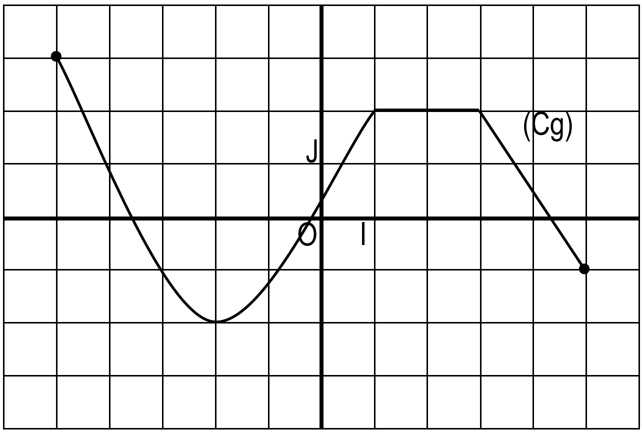
f est une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un intervalle K.

- f est une fonction croissante sur K (respectivement strictement croissante sur K) lorsque pour tous éléments u et v de K.
  $u < v \Rightarrow f(u) \leq f(v)$ (respectivement $u < v \Rightarrow f(u) < f(v)$)
- f est une fonction décroissante sur K (respectivement strictement décroissante sur K) lorsque pour tous éléments u et v de K.
  $u < v \Rightarrow f(u) \geq f(v)$ (respectivement $u < v \Rightarrow f(u) > f(v)$)
- constante sur K lorsque pour tous éléments u et v de K, $f(u) = f(v)$.
- f est une fonction monotone sur K lorsqu'elle est :
  - soit croissante sur K
  - soit décroissante sur K.
- f est une fonction strictement monotone sur K lorsqu'elle est :
  - soit strictement croissante sur K
  - soit strictement décroissante sur K.

Remarques

- Toute fonction croissante conserve l'ordre.
- Toute fonction décroissante inverse l'ordre.

Exercice d'application.



Sur la figure ci-contre (Cg) est la représentation graphique d'une fonction g définie sur [-5;5].

1) Déterminer les intervalles sur lesquels g est croissante, décroissante, constante.
2) Etablir le tableau de variation de la fonction g sur l'intervalle [-5;5]

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

On considère la fonction f de ℝ vers ℝ définie par : $f(x)=(x-2)^2+1$

1) a) Démontrer que f est croissante sur $[2;+\infty[$

   b) Démontrer que f est décroissante sur $]-\infty;2]$

2) a) Dresser le tableau de variation de f.

   b) En déduire que f n'est ni croissante ni décroissante sur $[1;5]$

Exercice 2.

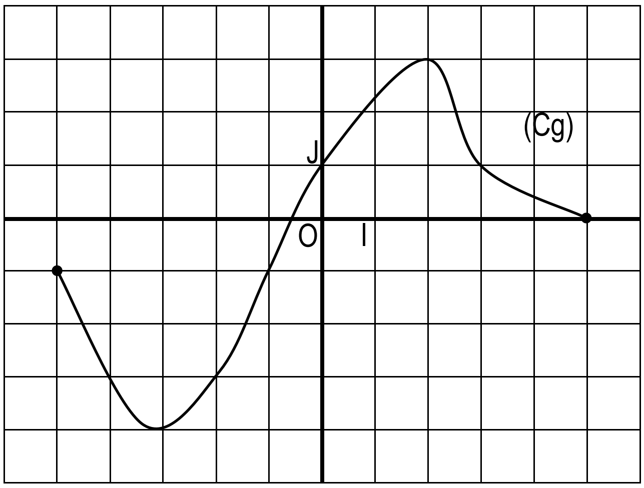
On donne la fonction h de ℝ vers ℝ définie par : $h(x)=\dfrac{3}{x^2+2}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition Dh de la fonction h.
2) Démontrer que $\dfrac{3}{2}$ est le maximum de h.

Exercice 3.

La figure ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction numérique g.

1) Déterminer l'ensemble de définition Dg de la fonction g.
2) Déterminer s'ils existent le maximum et le minimum de g sur Dg.
3) Etudier les variations de la fonction g sur Dg.
4) Dresser le tableau de variation de g sur Dg.



CHAPITRE III : POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

I. GENERALITES SUR LES POLYNÔMES

1- Notion de polynôme
2- Zéro d'un polynôme
3- Somme et produit de deux polynômes
4- Egalité de deux polynômes
5- Factorisation d'un polynôme
6- Monôme et polynôme

II. POLYNÔMES DU SECOND DEGRE

1- Définition
2- Forme canonique d'un polynôme du second degré
3- Factorisation avec la forme canonique
4- Etude du signe d'un polynôme du second degré

III. FACTORISATION PAR $x - \alpha$

1- Théorème fondamental
2- Détermination pratique du quotient par $x - \alpha$
   a) Méthode des coefficients indéterminés
   b) Méthode de la division euclidienne

IV. FRACTIONS RATIONNELLES

1- Définition
2- Simplification et étude du signe d'une fraction rationnelle
3- Autres écritures d'une fraction rationnelle

CHAPITRE III : POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

I. GENERALITES SUR LES POLYNÔMES

1- Notion de polynôme

Exemples de polynôme

Les fonctions f, g et h définies par $f(x) = 4x^3 - 2x + 1$; $g(x) = \frac{1}{3}x^4 + 2x^3 + x - 1$; $h(x) = 3x + 1$ sont

……

Exercice

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x, définie par : $f(x) = (x^3 - 4)(x^2 + 2x + 3)$

1) Développer, réduire et ordonner f(x) suivant les puissances décroissantes de x.
2) Quel est le terme de degré 4 ?
3) Quel est le terme de plus haut degré ?
4) Quel est le coefficient du monôme de degré 2 ?
5) Quel est le terme constant ?
6) Quel est le degré du polynôme P définie par : $P(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 8x - 12$.

2- Zéro d'un polynôme

Activité 1

On considère le polynôme Q définie par : $Q(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

Compléter le tableau suivant :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
Q(x)							

- Citer tous les réels qui annulent le polynôme Q.

Définition

On appelle zéro d'un polynôme P tout nombre réel α tel que : $P(\alpha) = 0$

Remarque :

Déterminer les zéros de P, c'est résoudre l'équation $P(x) = 0$

Exercice d'application

1) Vérifier que 0 et -3 sont des zéros du polynôme P défini par $P(x) = x^3 + 3x^2$.
2) Déterminer les zéros du polynôme G défini par $G(x) = x^2 - 9$.

3- Somme et produit de deux polynômes

Activité 2

On donne les polynômes P et Q définis par : $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5$ et $Q(x) = 3x^5 - 2x^4$.

1) Calculer $P(x) \times Q(x)$ et $P(x) + Q(x)$.
2) Déterminer le degré des polynômes PQ et P+Q.

Propriété : Degré de produit de polynômes.

Le produit de deux polynômes P et Q est un polynôme noté : PQ. On a $d°(PQ) = d°P + d°Q$

4- Egalité de deux polynômes

Propriété :

Deux polynômes sont égaux si et seulement si :

- ils ont même degré ;
- les coefficients des termes de même degré sont égaux.

5- Factorisation d'un polynôme

Définition :

Un polynôme mis sous la forme d'un produit de polynômes de degrés supérieurs ou égaux à 1 est dit factorisé.

Produits remarquables : Propriétés

Pour tous nombres réels a et b, on a :

(1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(3) $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

(4) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

(5) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

(6) $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

(7) $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

Exercice d'application : Factoriser les polynômes suivants :

a) $P(x) = x^3 - 8$

b) $Q(x) = x^3 + 1$

c) $K(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

d) $T(x) = x^2 - 9 + (X - 2)(X + 3)$

e) $S(x) = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

6- Définitions : Monôme et Polynôme

Soit a un nombre réel non nul et n un nombre entier naturel.

- Toute fonction numérique f de la variable réelle x, définie par $f(x) = ax^n$ est appelée monôme de coefficient a et de degré n.
- On appelle polynôme toute somme algébrique de monômes.

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

On considère le polynôme B défini par : $B(x) = x^3 - 1 - (x - 1)(2x^2 + x - 3)$.

1) Vérifier que 2 est un zéro de B.
2) Montrer que $B(x) = (x - 1)(4x - x^2)$.
3) Ecrire B(x) sous la forme d'un produit de polynômes de 1er degré.
4) En déduire tous les zéros de B.

Exercice 2

Factoriser chacun des polynômes suivants :

$Q(x) = (X - 3) - 2(X - 3)^2 - X(X - 3)$; $K(x) = x^3 - 64$

$P(x) = x^3 - 27$; $R(x) = x^3 + 1 - (x + 1)(10x^2 - x - 15)$

$A(x)=x^3-3x^2+3x-1$; $T(x)=x^2-16-(4-x)(2x+3)$ $D(x)=x^3+125$

Exercice 3

Soit le polynôme G défini par $G(x)=x^3+8-(2+X)(10X^2-2X-21)$.

1) Vérifier que -2 est un zéro de G.
2) Montrer que $G(x)=(X+2)(25-9x^2)$.
3) Ecrire G(x) sous forme d'un produit de polynômes de 1er degré.
4) Déterminer tous les zéros de G.

Exercice 4

Soit le polynôme F défini par $F(x)=x^3-27-(X-3)(2X^2+3X+7)$.

1) Justifier que $\sqrt{2}$ est un zéro de f.
2) Montrer que $F(x)=(x-3)(2-X^2)$
3) Déterminer tous les zéros de F.

II. POLYNÔMES DU SECOND DEGRE

1- Définition

a, b et c sont des nombres réels avec a ≠ 0.

On appelle polynôme du second degré tout polynôme de la forme ax^2+bx+c

Exemples :

2- Forme canonique d'un polynôme du second degré

Activité 1

On donne les polynômes du second degré suivants : $P(x)=x^2-4x+3$ et $Q(x)=2x^2+3x-2$

Vérifier que : $(x-2)^2-1=P(x)$ et $2\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right]=Q(x)$

Ces expressions $P(x)=(x-2)^2-1$ et $Q(x)=2\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right]$ sont les formes canoniques respectives P et Q.

Cas général

a, b et c sont des nombres réels avec a ≠ 0

$$P(x)=ax^2+bx+c$$

$$P(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$P(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]$$ cette expression de P(x) est sa forme canonique

Exercice d'application : Mettre les polynômes ci-dessous sous la forme canonique.

$T(x) = x^2 + 4x - 5$ $\quad$ $K(x) = 2x^2 - 6x - 3$ $\quad$ $P(x) = x^2 + x - 2$

$A(x) = -x^2 + 5x + 3$ $\quad$ $B(x) = 3x^2 + 6x + 2$ $\quad$ $D(x) = -3x^2 + 4x - 4$

3- Factorisation avec la forme canonique

Activité 2

Dans chacun des cas ci-dessous le polynôme du second degré P est donné sous forme canonique. Ecrire si possible P sous la forme d'un produit de polynômes de 1er degré.

a) $P(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$

c) $P(x) = \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}$

b) $P(x) = 2\left[(x-2)^2 + 3\right]$

d) $P(x) = 3\left[\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{36}{16}\right]$

Remarque :

Si la forme canonique d'un polynôme du second degré P est une somme de deux carrés alors P ne peut-être écrit sous la forme d'un produit de polynômes de degré 1.

4- Etude du signe d'un polynôme du second degré

Activité 3

On considère le polynôme $P(x) = x - 1$.

1) Résoudre l'équation $P(x) = 0$
2) Résoudre les inéquations suivantes : $P(x) < 0$; $P(x) > 0$
3) Complète le tableau suivant avec le signe – ou +

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$		0	

Le tableau ci-dessus est appelé **tableau de signe** du polynôme x-1.

Cas général

Soit $P(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$

Pour étudier le signe de $P(x)$. On peut procéder comme suit :

- Rechercher le zéro $ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$
- Etablir le tableau de signe

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$P(x)$	Signe de $-a$	0	Signe de a

Exercice d'application

Etudier le signe du polynôme $Q(x) = -2x + 3$.

Exemple 1

Soit le polynôme B défini $B(x) = x^2 - 3x + 2$.

1) Vérifier que $B(x) = (x-1)(x-2)$.
2) Etudier le signe de B(x) suivant les valeurs de x en utilisant un tableau de signe.
   a- Déterminer les zéros de B.
   b- Compléter le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	....	$+\infty$
$x-1$			
$x-2$			
$B(x)$			

   c- Donner le signe de $B(x)$ suivant les valeurs de x.

Exemple 2

Soit $Q(x) = -x^2 + 2x - 3$. On a $Q(x) = -\left[(x-1)^2 + 2\right]$.

Etudier le signe de Q(x) suivant les valeurs de x.

Exercice d'application

Etudier suivant les valeurs de x, le signe du polynôme du second degré T; défini par :

$T(x) = (2x+1)(4-3x)$

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

Déterminer la forme canonique des polynômes du second degré suivants :

$A(x) = x^2 - x - 6$; $S(x) = x^2 + 2\sqrt{5}x + 5$; $D(x) = -5x^2 - 10x + 40$; $R(x) = 3x^2 + 6x - 12$

$P(x) = -\dfrac{3}{2}x^2 - x - \dfrac{1}{6}$

Exercice 2

On considère le polynôme P défini par $P(x) = x^2 - 10x - 11$.

1) Montrer que la forme canonique de P est $P(x) = (x-5)^2 - 36$
2) En utilisant la forme canonique de P, déduire que $P(x) = (x-11)(x+1)$.
3) Déterminer les zéros de P.
4) Etudier le signe de P(x) suivant les valeurs de x (on établira un tableau de signes de P).

Exercice 3

Soit le polynôme G défini par $G(x) = -4x^2 + 4x + 24$.

1) Montrer que la forme canonique de est : $G(x) = -4\left[\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{25}{4}\right]$.
2) En utilisant la forme canonique de G, montrer que $G(x) = (X+2)(12-4x)$.
3) Déterminer les zéros de G.
4) Etudier suivant les valeurs de x, le signe de G(x) (on établira un tableau de signes de G).
5) Sans calculer, déterminer le signe de G (2008) ; $G\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)$ et $G(-15001)$.

Exercice 4
Etudier suivant les valeurs de x, le signe des polynômes ci-dessous :
$Q(x) = (2-x)(3x-1)$; $S(x) = -3x(2x+5)$; $T(x) = (x+1)(x-3)$

III. FACTORISATION PAR X - α

Activité
On donne le polynôme P défini par $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

1) Calculer P (-1).
2) Développer, réduire et ordonner $(x+1)(x^2+x-2)$ suivant les puissances décroissantes de x.

P(x) est factorisable ou divisible par x + 1. Le polynôme $x^2 + x - 2$ est le quotient de P(x) par x +1

1- Théorème fondamental

Soit P un polynôme et α un nombre réel. α est un zéro de P si et seulement si il existe un polynôme Q tel que pour tout nombre réel x ; $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$
Q(x) est appelé quotient de P(x) par $x-\alpha$

Conséquence : un polynôme de degré n a au plus n zéros distincts.

2- Détermination pratique du quotient de P(x) par $x-a$

a- Méthode des coefficients indéterminés

Soit $P(x) = 2x^3 - x^2 + x - 2$

1) Vérifier que 1 est un zéro de P.
   Il existe un polynôme du second degré Q tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-1)Q(x)$.
2) Déterminer Q(x).

Exercice d'application
Soit S le polynôme défini par $S(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4$.

1) Vérifier que 2 est un zéro de S.
2) On a $S(x) = (x-2)Q(x)$, préciser le degré du polynôme Q.
3) En utilisant la méthode des coefficients indéterminés, détermine l'expression de Q sachant que $Q(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c des réels tels que $a \neq 0$.

Remarques :
Il est très facile de se rendre compte si 0, 1 ou – 1 est un zéro d'un polynôme. Lorsque c'est le cas on dit que le polynôme admet un zéro évident.

b- Méthode de la Division Euclidienne

Exemple

Soit $P(x) = 2x^3 - x^2 + x - 2$. Déterminons le quotient de P(x) par x-1 en effectuant la division euclidienne.

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 - x^2 + x - 2 & x-1 \\ \hline & \end{array}$$

$P(x) = (x-1)(\text{...})$

Exercice d'application

Soit $S(x)=2x^3-3x^2-4$. Déterminons le quotient de S(x) par x – 2.

$$\begin{array}{l|l} 3x^3-2x-1 & x-2 \\ \hline & \\ & \\ & \end{array}$$

$S(x)=(x-2)(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

On considère le polynôme G définie par : $G(x)=x^4+x^3+8x^2+8$

1) Justifier que – 1 est un zéro de G.
2) Déterminer le polynôme Q tel que $G(x)=(x+1)Q(x)$
3) a- Factoriser Q(x).
   b- En déduire les zéros de G.

Exercice 2

On donne $P(x)=2x^3+7x^2-12x+9$

1) vérifier que P(x) est factorisable par $x-\frac{3}{2}$.
2) Montrer que le quotient de P(x) par $x-\frac{3}{2}$ est $-2x^2+4x-6$.
3) Ecrire, si possible, le quotient sous forme de produit de polynômes de 1er degré.
4) Etudier le signe de P(x) suivants les valeurs de x.
5) Sans calculer, donner le signe des nombres suivants : $P(4000)$; $P\left(\sqrt{3}\right)$; $P(-2008)$

Exercice 3

Soit N un polynôme défini par $N(x)=2x^3-3x^2-5x+6$.

1) Justifier que N(x) est divisible par x – 1.
2) Déterminer les réels a, b et c tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $N(x)=(x-1)\left(ax^2+bx+c\right)$.
3) Soit B le polynôme défini par $B(x)=2x^2-x-6$.

   a- Montrer que la forme canonique de B est $B(x)=2\left[\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{49}{16}\right]$.

   b- Montrer que $B(x)=(x-2)(2x+3)$.
4) Ecrire N(x) sous forme d'un produit de polynômes de 1er degré.
5) Etudier le signe de R(x) suivant les valeurs de x.
6) Sans calculer, déduire le signe de $N\left(\sqrt{2}\right)$ et $N(10002)$.

IV. FRACTIONS RATIONNELLES

1- Définition

Toute fonction numérique de la forme $\frac{P}{Q}$ où P et Q sont deux polynômes, est appelée fraction rationnelle.

Remarque :

La fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ a pour ensemble de définition l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels privé des zéros de Q

Exemples

Les fonctions définies par : $f : x \mapsto \frac{-x^2 - 2x + 3}{x^2 - 1}$; $g : x \mapsto \frac{x+2}{x^2 - 4x + 4}$; $h : x \mapsto x^2 - 3x + 1$ sont des fractions rationnelles.

2- Simplification et étude de signe d'une fraction rationnelle

Exemple

Soit la fraction rationnelle f définie par : $f(x) = \frac{-x^2 - 2x + 3}{x^2 - 9}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition Df de f.
2) Vérifier que 1 est un zéro du numérateur de f.
3) Montrer que $f(x) = \frac{(x+3)(1-x)}{(x-3)(x+3)}$.
4) $\forall x \in Df$, simplifier f(x).
5) Etudier le signe de f(x) suivant les valeurs de x.

3- Autres écritures d'une fraction rationnelle

Exemple 1

Soit la fraction rationnelle P définie par : $P(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x + 1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition Dp de P.
2) Déterminer trois réels a, b et c tels que $\forall x \in D_P$, $P(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

Exemple 2

Soit la fonction rationnelle R définie par $R(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_R de R
2) Déterminer deux réels α et β tels que $\forall x \in D_R$, $R(x) = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+1}$.

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

Soit la fraction rationnelle g définie par $g(x) = \frac{x+2}{x^2 + 4x + 4}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition Dg de g.
2) $\forall x \in Dg$, simplifier g(x).
3) Etudier le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

Exercice 2

Soit la fraction rationnelle K définie par $K(x) = \dfrac{-3}{x^2 - 2}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition Dk de K.
2) Etudier le signe de K(x) suivant les valeurs de x.
3) Déterminer les réels a et b tels que $\forall x \in D_K$, $K(x) = \dfrac{a}{x - \sqrt{2}} + \dfrac{b}{x + \sqrt{2}}$.
4) Sans calculer, préciser le signe de K(-2001) ; K(-1 ;2) et K(30001).

Exercice 3

On donne la fraction rationnelle E définie par : $E(x) = -x^3 - x^2 + 10x + 8$

1) a- Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}$, $E(x) = (x + 2)T(x)$ où T est un polynôme de degré deux.

   b- Déterminer le polynôme T.

   c- Montrer que $T(x) = (X + 1)(4 - X)$

   d- Ecrire E(x) sous forme de produits de polynômes de 1^er^ degré.
2) On donne la fraction rationnelle K définie par $K(x) = \dfrac{E(x)}{2x^2 + 2x}$.
3) a- Déterminer l'ensemble de définition D_K de K.

   b- Montrer que $\forall x \in D_K$, $K(x) = \dfrac{(x + 2)(4 - x)}{2x}$.

   c- Etudier suivant les valeurs de x le signe de K(x).
4) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que $\forall x \neq 0$, $\dfrac{x^2 + 2x + 8}{2x} = ax + b + \dfrac{c}{2x}$.

CHAPITRE IV : EQUATIONS ET INEQUATIONS DANS ¡

I. GENERALITES SUR LES EQUATIONS ET INEQUATIONS

1- Equations

2- Inéquations

II. EXEMPLES DE RESOLUTION D'EQUATIONS ET INEQUATIONS DANS ¡

1- Exemples de résolution d'équations dans ¡

a) Définition d'équations équivalentes

b) Equations liant deux polynômes

c) Equations liant deux fractions rationnelles

d) Equations avec valeurs absolues

2- Exemples de résolution d'inéquations dans ¡

a) Définition d'inéquations équivalentes

b) Inéquations liant deux polynômes

c) Inéquations liant deux fractions rationnelles

d) Inéquations avec valeurs absolues

CHAPITRE IV : EQUATIONS ET INEQUATIONS DANS ¡

I. GENERALITES SUR LES EQUATIONS ET INEQUATIONS

1- Equations

Définition

Soit A et B deux ensembles.

- (E) : « $f(x) = g(x)$ » où f et g sont deux fonctions de A vers B est appelée équation dans A, d'inconnue x.
- Tout élément α de A vérifiant $f(\alpha) = g(\alpha)$ est appelé solution de l'équation (E).
- Résoudre dans A l'équation (E), c'est rechercher l'ensemble des éléments de A qui sont solutions de (E).

Remarques

- Le nom utilisé pour l'inconnue est sans importance, les équations $f(x) = g(x)$ et $f(t) = g(t)$ ont même ensemble de solutions.
- Avant de résoudre une équation, il convient, si nécessaire, de préciser les contraintes sur l'inconnue.

Exemples d'équation

$(E_1) : -2x^2 + x + 4 = -x^2 + 2x - 2$

$(E_2) : (x+4)(x+1) = x^2 - 1$

$(E_3) : \dfrac{x-2}{(x-2)(x-1)} = 2$

$(E_4) : \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{-x}{x^2-4}$

$(E_5) : |2x-5| = |x-1|$

$(E_6) : |x-2| = x+3$

Sont des équations dans $\mathbb{R}$ d'inconnue x.

2- Inéquations

Définition

Soit A un ensemble.

- (I) : « $f(x) \leq g(x)$ » où f et g sont deux fonctions de A vers $\mathbb{R}$, est appelée inéquation dans A, d'inconnue x.
- Tout élément α de A vérifiant $f(\alpha) \leq g(\alpha)$ est appelé solution de l'inéquation (I).
- Résoudre dans A l'inéquation (I), c'est rechercher l'ensemble des éléments de A qui sont solutions de (E).

Remarque

Pour les inéquations, l'ensemble d'arrivée des fonctions f et g doit être $\mathbb{R}$, puisqu'il s'agit de comparer $f(x)$ et $g(x)$

Exemples d'inéquation

$(I_1) : 2x - 3 > x + 5$

$(I_2) : x^2 - 9 \leq 2x(x-3)$

$(I_3) : \dfrac{x+2}{x+1} \leq \dfrac{7}{x-1}$

$(I_4) : |2x+1| \leq |x-3|$

II. EXEMPLES DE RESOLUTION D'EQUATIONS ET D'INEQUATIONS DANS $\mathbb{R}$

1- Exemples de résolution d'équations dans $\mathbb{R}$

a- Définition d'équations équivalentes

Deux équations sont équivalentes lorsqu'elles ont le même ensemble de solutions.

b- Equations liant deux polynômes

Activité 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation (E) suivante : $(E): -2x^2+x+4=-x^2+2x-2$

$$(E) \Leftrightarrow -2x^2+x+4+x^2-2x+2=0$$
$$(E) \Leftrightarrow -x^2-x+6=0$$
$$(E) \Leftrightarrow x^2+x-6=0$$
$$(E) \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-6=0$$
$$(E) \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}=0$$
$$(E) \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2=0$$
$$(E) \Leftrightarrow (x+3)(x-2)=0$$
$$(E) \Leftrightarrow x+3=0 \text{ ou } x-2=0$$
$$(E) \Leftrightarrow x=-3 \text{ ou } x=2$$

L'ensemble de solutions de l'équation (E) est $\{-3;2\}$

Activité 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation (E_1) suivante :

$(E_1): (x+4)(x+1)=x^2-1$

c- Equations liant deux fractions rationnelles

Activité 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation (E_2) suivante :

$$(E_2): \frac{x-2}{(x-2)(x-1)}=2$$

Résolution par équivalence de l'équation (E_2)

Contraintes sur l'inconnue : $(x-2)(x-1)\neq 0$

Or $(x-2)(x-1)\neq 0 \Leftrightarrow x-2\neq 0$ et $x-1\neq 0$

$\Leftrightarrow x\neq 2$ et $x\neq 1$

Donc les contraintes sur l'inconnue sont : $x\neq 2$ et $x\neq 1$

$\forall x\in \mathbb{R}\setminus\{2;1\}$; $(E_2) \Leftrightarrow x-2=2(x-2)(x-1)$

$\Leftrightarrow 1=2(x-1)$

$\Leftrightarrow 2x=3$

$\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$

On a $\frac{3}{2}\in\mathbb{R}\setminus\{2;1\}$ donc l'ensemble des solutions de (E_2) est : $\left\{\frac{3}{2}\right\}$

$(E_3): \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{-x}{x^2-4}$

Résolution par implication de l'équation (E3)

$$
\begin{aligned}
(E_3) \quad & \Rightarrow x^2-4=-x(x+2)\\
& \Rightarrow x^2-4=-x^2-2x\\
& \Rightarrow x^2-4+x^2+2x=0\\
& \Rightarrow 2x^2+2x-4=0\\
& \Rightarrow x^2+x-2=0\\
& \Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-2=0\\
& \Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}=0\\
& \Rightarrow (x+2)(x-1)=0\\
& \Rightarrow x+2=0 \text{ ou } x-1=0\\
& \Rightarrow x=-2 \text{ ou } x=1
\end{aligned}
$$

<u>**Vérification**</u> :

- Pour x = 1 on a $\frac{1}{3}=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}$ donc 1 est solution de l'équation (E_3)
- Pour x = – 2 ; $\frac{1}{x+2}$ n'est pas définie donc – 2 n'est pas solution de (E_3).

<u>**Conclusion**</u> : l'ensemble des solutions de l'équation (E_3) est : $\{1\}$

d- <u>Equations avec valeurs absolues</u>

<u>Activité 4</u>

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

$(E_4): |2x-5| = |x-1|$ $\qquad$ $(E_5): |x-1| = |x+3|$

<u>Activité 5</u> : Equation du type $|f(x)| = g(x)$

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $(E_6): |x-2| = x+3$

Contraintes sur l'inconnue x : $x+3 \geq 0$

Or $x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$

$$
\begin{aligned}
\forall x \in [-3;+\infty[; \quad (E_6) \quad & \Leftrightarrow x-2=x+3 \text{ ou } x-2=-x-3\\
& \Leftrightarrow 0=5 \text{ (impossible) ou } 2x=-1\\
& \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

On a $-\frac{1}{2} \in [-3;+\infty[$ donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_6) est : $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

<u>**Retenons**</u>

Pour résoudre une équation (E) du type $|f(x)| = |g(x)|$ on peut :

- Utiliser l'équivalence suivante : (E) $\Leftrightarrow$ $f(x)=g(x)$ ou $f(x)=-g(x)$
- Résoudre successivement les équations (E_1) : $f(x)=g(x)$ et (E_2) : $f(x)=-g(x)$

L'ensemble des solutions de (E) est la réunion des ensembles de solutions de (E_1) et (E_2)

2- <u>Exemples de résolution d'inéquations dans $\mathbb{R}$</u>

a- <u>Définition d'inéquations équivalentes</u>

Deux inéquations sont équivalentes lorsqu'elles ont le même ensemble de solutions.

b- <u>Inéquations liant deux polynômes</u>

<u>Activité 6</u>

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

$(I_1) : 2x - 3 > x + 5$ $\qquad$ $(I_2) : x^2 - 9 \leq 2x(x - 3)$

c- <u>Inéquations liant deux fractions rationnelles</u>

<u>Activité 7</u>

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante :

$$(I_3) : \frac{x+2}{x+1} \leq \frac{7}{x-1}$$

d- <u>Inéquations avec valeurs absolues</u>

<u>Activité 8</u>

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante :

$$(I_4) : |2x + 1| \leq |x - 3|$$

<u>Retenons</u>

Pour résoudre une inéquation (I) du type $|f(x)| \leq |g(x)|$ on peut :

- Utiliser successivement les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}(I) \quad &\Leftrightarrow (f(x))^2 \leq (g(x))^2 \\ &\Leftrightarrow (f(x))^2 - (g(x))^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow [f(x) - g(x)][f(x) + g(x)] \leq 0\end{aligned}$$

- Résoudre ensuite par les méthodes habituelles l'inéquation : $(I') : [f(x) - g(x)][f(x) + g(x)] \leq 0$

EXERCICES DE RENFORCEMENT

<u>Exercice 1</u>

Faustin a aujourd'hui 38 ans et son fils a 13 ans.

Dans combien d'années Faustin aura t-il le double de l'âge de son fils ?

<u>Exercice 2</u>

Un carré est tel que si on augmente la mesure de son côté de 3 cm, alors son aire augmente de 21 cm^2.

Quelle est la mesure du côté de ce carré ?

<u>Exercice 3</u>

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

$(E_1) : (2x - 3)(x - 1)^2 = 4(2x - 3)$ $\qquad$ $(E_2) : 2x^2 + x - 3 = x^2 - 3x - 3$ $\qquad$ $(E_3) : \dfrac{1 - 2x}{2 - x} = \dfrac{3 - 2x}{2 + x}$

$(E_4) : \dfrac{x^2}{x - 1} = 4$ $\qquad$ $(E_5) : |2X - 5| = |7 - x|$ $\qquad$ $(E_6) : |x^2 - 5x + 13| = |6x - 15|$

<u>Exercice 4</u>

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

$(I_1) : (2 - x)(2x + 1) \geq 0$; $\qquad$ $(I_2) : (x - 1)(2x + 3) < (x - 1)(x - 2)$ $\qquad$ $(I_3) : \dfrac{x - 2}{x + 1} < \dfrac{2x + 5}{x}$

$(I_4) : \dfrac{3x + 2}{(x - 1)(x - 2)} \leq 1$ $\qquad$ $(I_5) : |2x - 1| \leq |x + 4|$ $\qquad$ $(I_6) : |x^2 - 5x - 15| \leq |6x + 13|$

CHAPITRE V : ETUDES DE FONCTIONS

I. FONCTIONS AFFINES PAR INTERVALLES

1- Définition

2- Etude de la fonction valeur absolue

3- Fonction partie entière

a) Définition

b) Etude de la fonction partie entière

II. FONCTIONS ELEMENTAIRES

1- Etude de la fonction carrée

2- Etude de la fonction inverse

3- Etude de la fonction racine carrée

4- Etude de la fonction cube

III. UTILISATION DES FONCTIONS ELEMENTAIRES

CHAPITRE V : ETUDES DE FONCTIONS

I. FONCTIONS AFFINES PAR INTERVALLES

1- Définition

- On appelle fonction affine par intervalles, toute fonction numérique f d'une variable réelle dont l'ensemble de définition est une réunion d'intervalles sur chacun desquels f coïncide avec une fonction affine.
- Lorsque sur chacun de ces intervalles f coïncide avec une fonction constante, on dit que f est une fonction en escalier.

Exemple d'étude de fonctions affines par intervalles

Exemple 1

On considère la fonction f affine par intervalles définie par :

- Pour $x \in [-4;-2[$, $f(x) = 2x + 5$
- Pour $x \in [-2;1[$, $f(x) = -x - 1$
- Pour $x \in [1;5[$, $f(x) = -2$

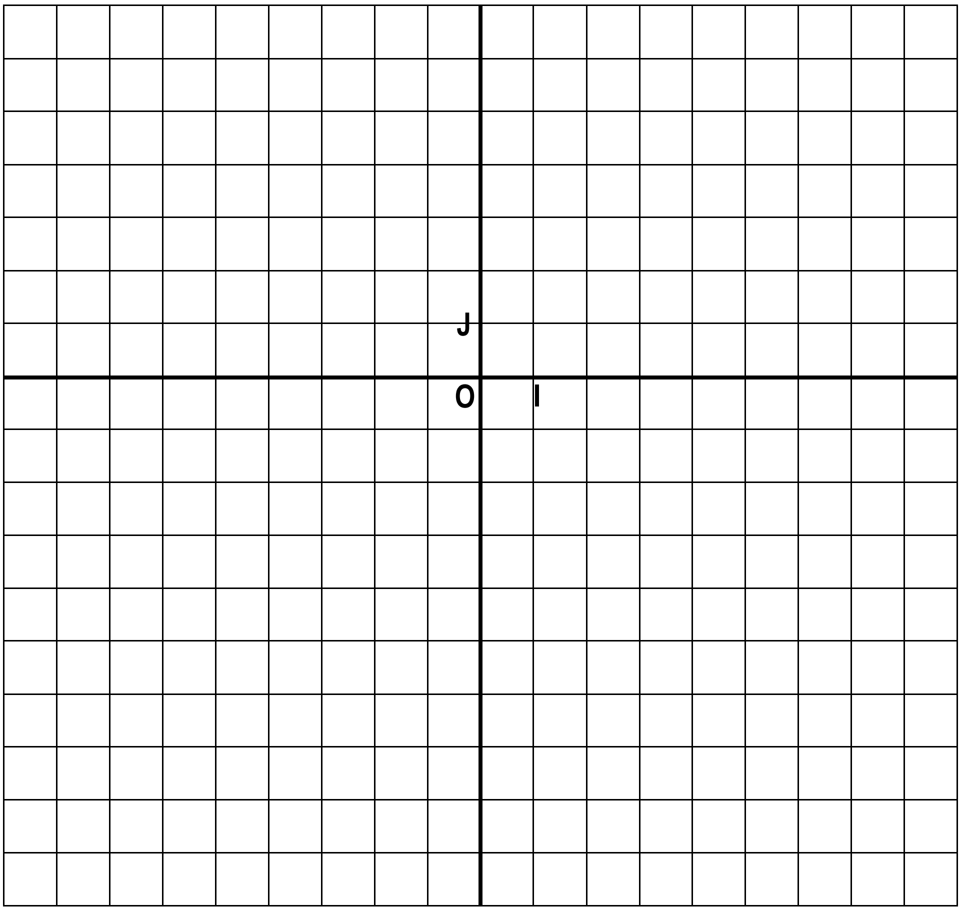
1- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2- Calculer $f(-1)$; $f(0)$; $f(4,3)$

3- Donner le sens de variation de la fonction f sur chacun des intervalles : $[-4;-2[$; $[-2;1[$; $[1;5[$

4- Dresser le tableau de variation de f sur Df.

5- Construire la représentation graphique (Cf) de f.



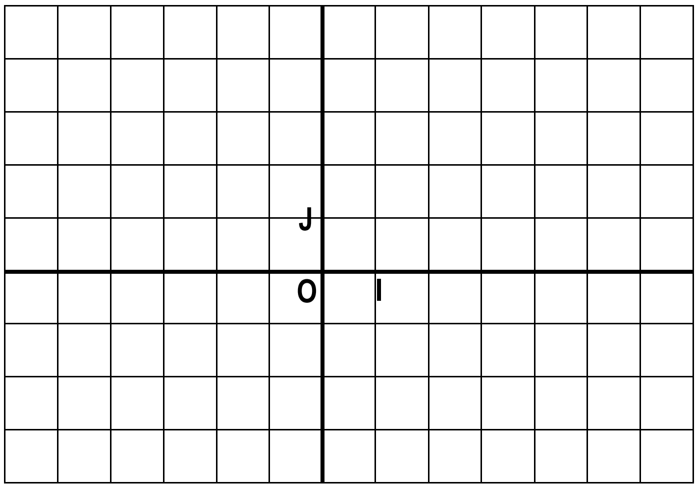
Remarque : la représentation graphique d'une fonction affine par intervalles est une réunion de segments ou de demi-droites.

2- Etude de la fonction valeur absolue

Soit la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ d'ensemble de définition Dg.

$x \mapsto |x|$

1) Donner Dg.
2) Montrer que la fonction valeur absolue est une fonction affine par intervalles (on pourra écrire g(x) sans le symbole valeur absolue)
3) Donner le sens de variation de la fonction g sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $[0;+\infty[$
4) Dresser le tableau de variation de la fonction g sur Dg.
5) Construire la représentation graphique (Cg) de la fonction g

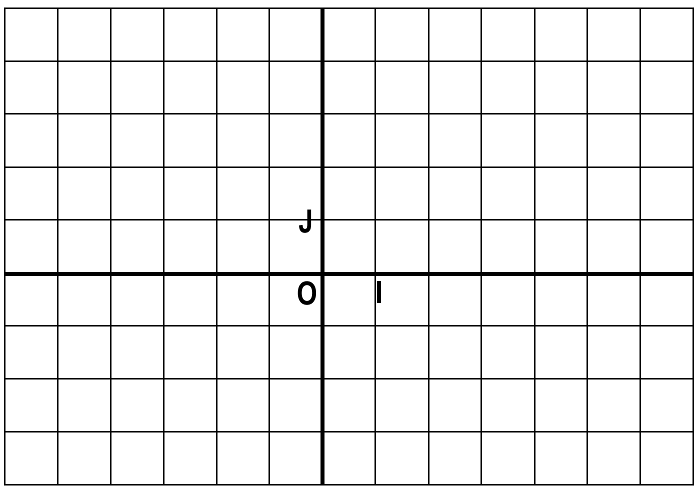


Exercice : Fonctions dont l'expression contient des valeurs absolues.

On considère la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto |-2x+4|$

1) Déterminer l'ensemble de définition Dh de h.
2) Montrer que h est une fonction affine par intervalles
3) Donner le sens de variation de la fonction h.
4) Dresser le tableau de variation de la fonction h.
5) Construire la représentation graphique (Ch) de h.



3- Fonction partie entière

a) Définition de la partie entière d'un nombre réel.

La partie entière d'un nombre réel x est le nombre entier relatif n vérifiant : $n \leq x \leq n+1$.
Elle est notée E(x)

Exemple : Donner la partie entière des nombres réels suivants : – 7,2 ; 12,8 ; 0,63 ; – 0,63 ; 2 ; 0 ; – 15.

b) Etude de la fonction partie entière

Soit la fonction partie entière $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto E(x)$$

1- Donner l'ensemble de définition D_f de f.

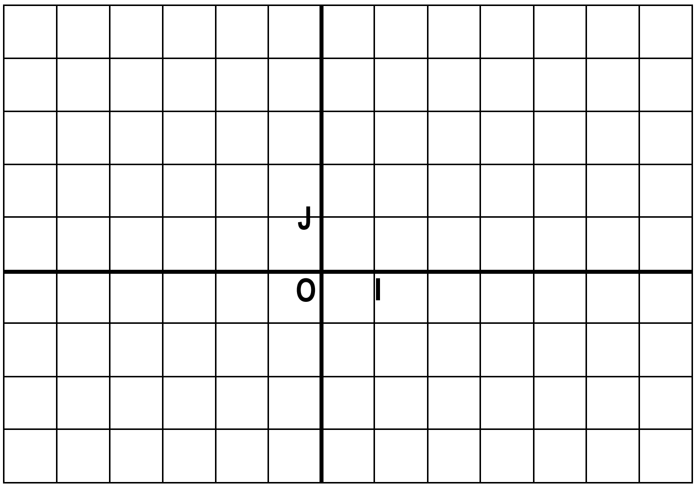
2- Compléter le tableau suivant :

x	$[-3;-2[$	$[-2;-1[$	$[-1;0[$	$[0;1[$	$[1;2[$	$[2;3[$
$E(x)$						

3- Donner le sens de variation de la fonction f sur chacun de ces intervalles

Remarque : La fonction partie entière est une fonction en escalier définie sur $\mathbb{R}$

4- Construire la représentation graphique (Cf) de f sur $[-3;3[$



EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J).

f est la fonction affine par intervalles définie par : $\begin{cases} \text{Pour } -5 \leq x < -3 \quad ; \quad f(x) = -x+1 \\ \text{Pour } -3 \leq x < 0 \quad ; \quad f(x) = 3 \\ \text{Pour } x \geq 0 \quad ; \quad f(x) = 3x-2 \end{cases}$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f..
2) Calculer f(-2) ; f(-4) ; f(-1,2) ; f(0).
3) Donner le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
4) Construire la représentation graphique de la fonction f.

Exercice 2

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + 1 - |5x - 2|$ de représentation graphique (Cf) dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1) Donner son ensemble de définition.
2) Ecrire f(x) sans le symbole de valeur absolue
3) a) Donner le sens de variation de f.
   b) Dresser son tableau de variation.
4) Construire la courbe (Cf).

Exercice 3

On considère la fonction $h : [-2;2] \to \mathbb{R}$

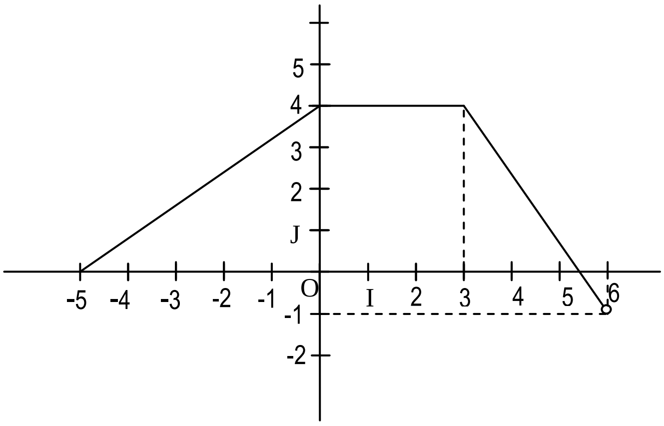
$$x \mapsto x + E(x)$$

E(x) étant la partie entière de x.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_h de la fonction h.
2) Montrer que h est une fonction affine par intervalles.
3) Etudier les variations de h sur D_h.
4) Construire la représentation graphique de h.

Exercice 4

La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction affine par intervalles.



1) Déterminer l'ensemble de définition de g.
2) Donner le sens de variation de g et dresser son tableau de variation sur Dg.
3) Exprimer g(x) en fonction de x sur chacun des intervalles [-5 ; 0[, [0 ; 3[, [3;6[.

Exercice 5

1- Construire la représentation graphique de m la fonction affine par intervalles qui admet le tableau de variation ci-dessous:

x	-2	0	2	5
m(x)	0 ↘	-2 ↗	3 ↘	-1

2- Exprimer (x) en fonction de x sur chacun des intervalles [-2 ; 0[, [0 ; 2[et [2 ; 5[.

Exercice 6

Soit la fonction $g : [-4;4] \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto x\,E(x)$$

E(x) étant la partie entière de x.

1) Déterminer Dg.
2) Montrer que g est une fonction affine par intervalles.
3) Quelles sont les images par g de chacun des nombres suivants : -3,8 ; 0,3 ; 2,5 et 3,4 ?
4) Donner le sens de variation de g et dresser son tableau de variation sur Dg.
5) Construire la représentation graphique de g.

Exercice 7

Le plan est uni d'un repère orthonormé (O, I, J).

On donne la fonction $k : [-2;2] \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x}{E(x)}$$; E(x) étant la partie entière de x.

1) Détermine D_k.
2) Compléter le tableau ci-dessous et justifier que k est une fonction affine par intervalles.

x	$[-2;-1[$	$[-1;0[$	$]0;1[$	$[1;2[$
h(x)				

3) Donner le sens de variation de k et dresser sont tableau de variation sur D_k.
4) Construire la représentation graphique de k.
5) Déterminer l'ensemble des antécédents de 1.

II. FONCTIONS ELEMENTAIRES

1- Etude de la fonction carrée

Activité 1

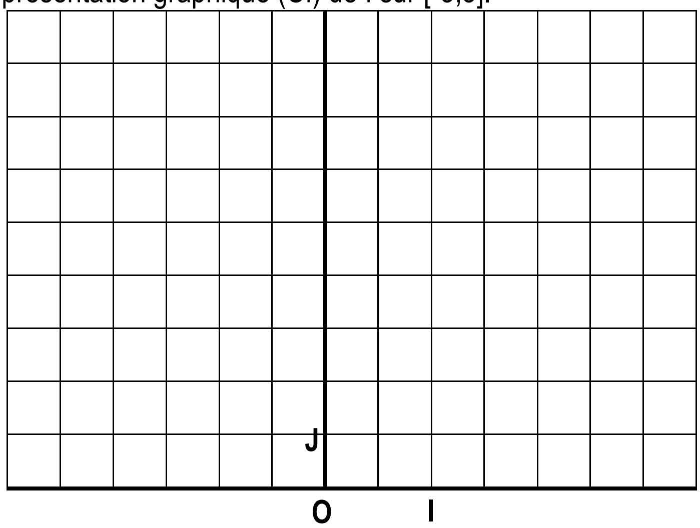
Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ d'ensemble de définition D_f

$$x \mapsto x^2$$

1) Déterminer D_f sous forme de réunion d'intervalles.
2) Etudier le sens de variation de la fonction f sur D_f.
3) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur D_f
4) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

5) Construire la représentation graphique (Cf) de f sur [-3;3].



2- Etude de la fonction inverse

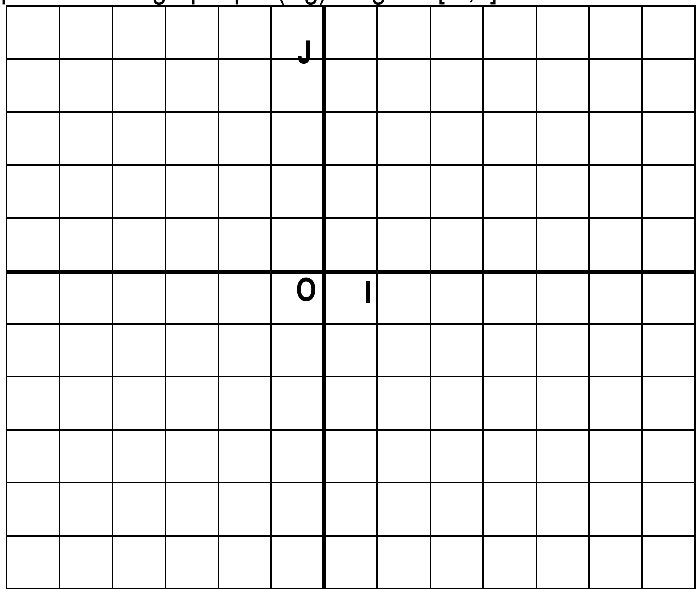
Activité 2 Soit la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ d'ensemble de définition D_g.

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

1) Déterminer Dg sous forme de réunion d'intervalles.
2) Etudier le sens de variation de la fonction g sur Dg.
3) Dresser le tableau de variation de la fonction g sur Dg.
4) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
$g(x)$							

5) Construire la représentation graphique (C_g) de g sur [-4;4].



3- Etudier de la fonction racine carrée

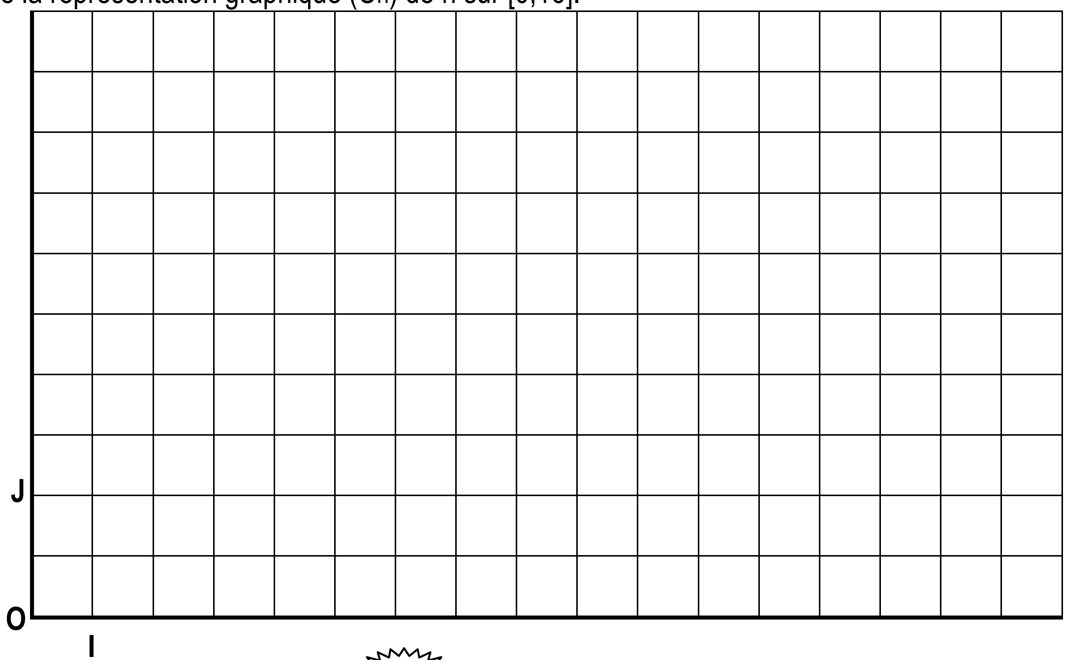
Activité 3

Soit la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ d'ensemble de définition D_h.

1) Déterminer D_h.
2) Etudier le sens de variation de la fonction h sur D_h.
3) Dresser le tableau de variation de la fonction h sur D_h.
4) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	0	1	4	9	16
$h(x)$					

5) Construire la représentation graphique (C_h) de h sur [0;16].



4- Etude de la fonction cube

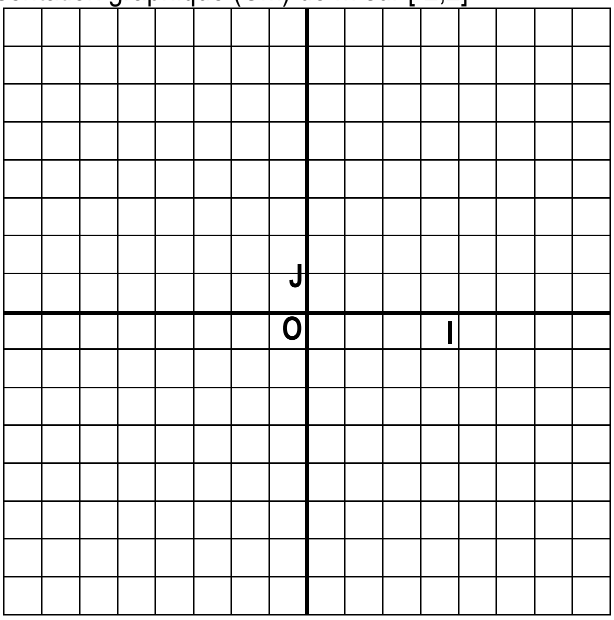
Activité 4 Soit la fonction $m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ d'ensemble de définition D_m.

$$x\mapsto x^3$$

1) Déterminer D_m sous forme de réunion d'intervalles.
2) Etudier le sens de variation de la fonction m sur D_m.
3) Dresser le tableau de variation de la fonction m sur D_m.
4) Compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$					

5) Construire la représentation graphique (Cm) de m sur [-2;2].



III. UTILISATION DES FONCTIONS ELEMENTAIRES

1- Etude de la fonction ax^2 avec $a\neq 0$

Soit la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

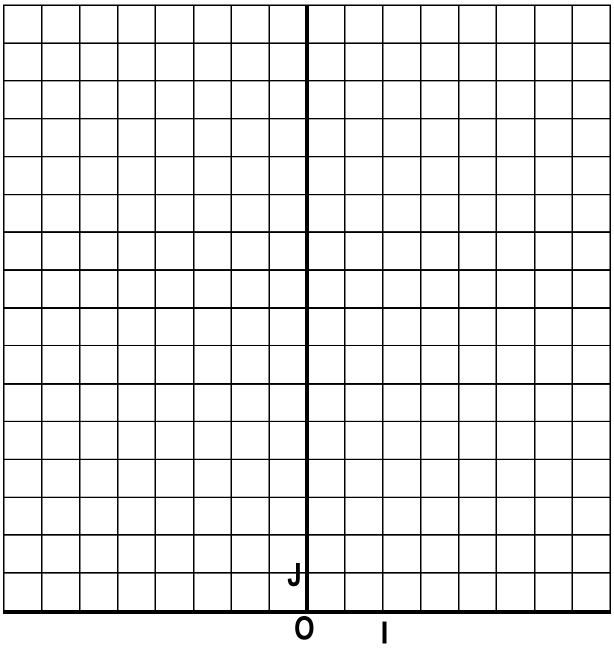
$$x\mapsto ax^2 \quad \text{avec } a\in\mathbb{R}^*$$

1er cas : $a>0$

1) Déterminer D_f sous forme d'intervalle.
2) Etudier le sens de variation de la fonction f sur D_f.
3) Dresser le tableau de variation de f sur D_f
4) Pour a = 2, compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

5) Pour a = 2, construire la représentation graphique (Cf) de f sur [-3;3].

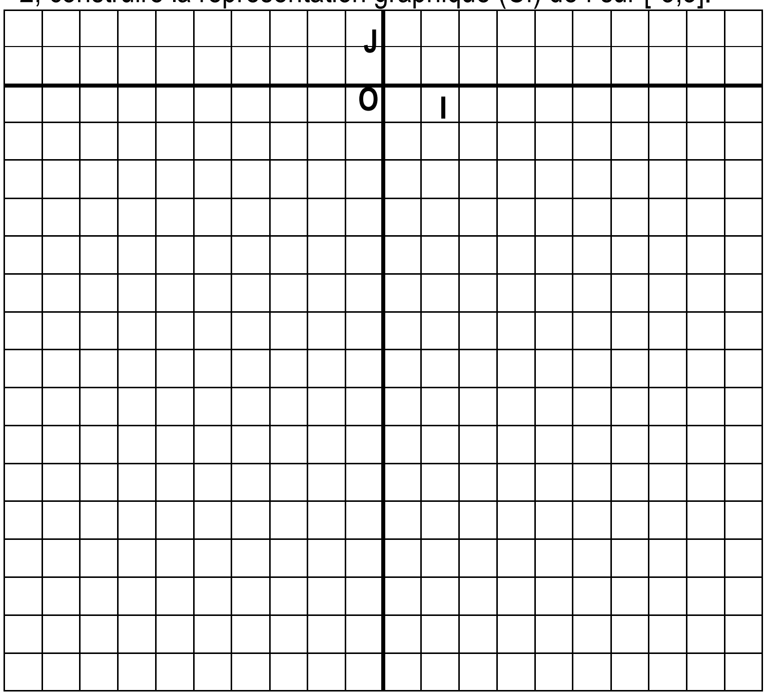


2e cas : $a < 0$

1) Déterminer D_f sous forme d'intervalles.
2) Etudier le sens de variation de f sur D_f.
3) Dresser le tableau de variation de f sur D_f
4) Pour a = -2, compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)							

5) Pour a = -2, construire la représentation graphique (Cf) de f sur [-3;3].



2- Etude de la fonction $\frac{a}{x}$ avec $a \neq 0$

Soit la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ d'ensemble de définition Dg.

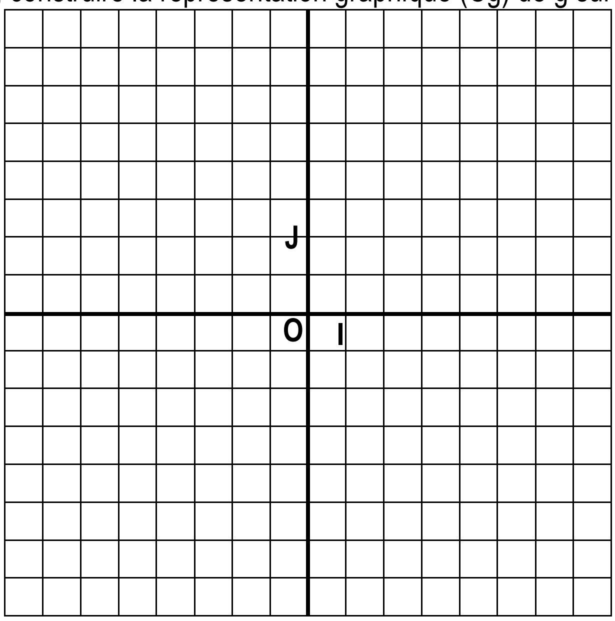
$$x \mapsto \frac{a}{x} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}^*$$

1er cas : $a > 0$

1) Déterminer Dg sous forme de réunion d'intervalles.
2) Etudier le sens de variation de g sur Dg.
3) Dresser le tableau de variation de g sur Dg.
4) Pour a = 2, compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	- 4	- 2	- 1	0	1	2	4
g(x)							

5) Pour a = 2, construire la représentation graphique (Cg) de g sur [-4;4].

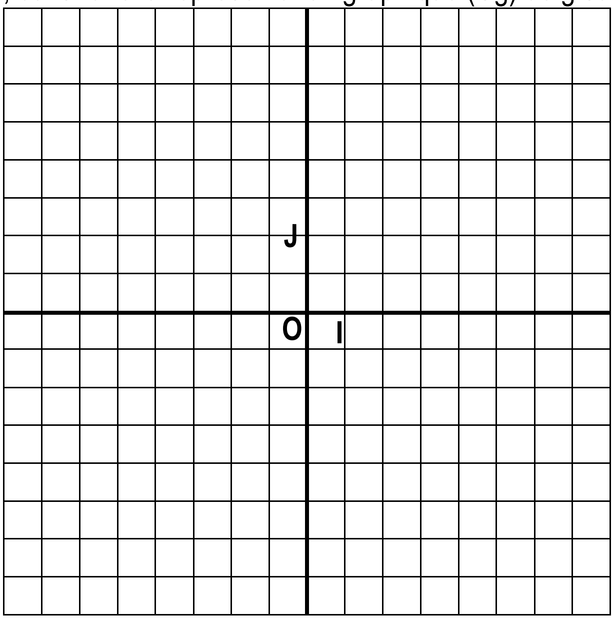


2e cas : $a < 0$

1) Déterminer Dg sous forme de réunion d'intervalles.
2) Etudier le sens de variation de g sur Dg.
3) Dresser le tableau de variation de g sur Dg.
4) Pour a = – 2, compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
g(x)							

5) Pour a = -2, construire la représentation graphique (Cg) de g sur [-4;4]. OJ=2 cm ; OI=1 cm



CHAPITRE VI : STATISTIQUES

I. ORGANISATION DES DONNEES

II. GRAPHIQUES

1- Diagramme circulaires, diagrammes semi-circulaires, diagrammes à bandes
2- Diagrammes en bâtons
3- Diagrammes cumulatifs
4- Histogrammes
5- Traduction d'un diagramme d'une série en tableau des effectifs
ou des fréquences

III. CARACTERISTIQUES DE POSITION ET DE DISPERSION

1- Caractéristique de position
2- Caractéristiques de dispersion

CHAPITRE VI : STATISTIQUES

I. ORGANISATION DES DONNEES

Activité 1

Voici les notes sur 20, obtenues à un devoir de mathématiques par un groupe d'élèves d'une classe de 2nd C du Lycée Moderne de Soubré: 12; 4; 16; 16; 10; 7; 9; 12; 9; 12; 4; 18; 14; 14; 10; 12; 9; 10; 12; 12.

1) Quelle est la population étudiée?
2) Quel est le caractère étudié? Donner sa nature.
3) Rappeler la définition de la fréquence d'une modalité et établir le tableau des effectifs, de fréquences et des fréquences en pourcentage de cette série statistique.
4) Quel est le nombre d'élèves ayant obtenu une note de 10/20 ou moins de 10/20? (C'est-à-dire le nombre d'élèves ayant obtenu une note inférieure ou égale à 10/20).

On dit que l'effectif ……………………..………………………………………… de la modalité 10 est ………

5) Quel est le nombre d'élèves ayant obtenu une note de 12/20 ou plus de 12/20? (C'est-à-dire le nombre d'élèves ayant obtenu une note supérieure ou égale à 12/20).

On dit que l'effectif………………………………………..…………………………………………de la modalité 12 est ……………………………………………………………………………………………………

Définitions : Effectifs cumulés, fréquences cumulées

On considère une série statistique à caractère quantitatif dont les modalités sont rangées par ordre croissant.

- On appelle effectif cumulé croissant (respectivement décroissant) de la modalité x la somme des effectifs des modalités inférieures ou égales (respectivement supérieures ou égales) à x.
- On appelle fréquence cumulée croissante (respectivement décroissante) de la modalité x le quotient de son effectif cumulé croissant (respectivement décroissant) par l'effectif total de la série.

Exercices d'application

Exercice1

On a relevé les vitesses (en Km/h) de quelques voitures lors d'un contrôle. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Vitesse en Km/h	65	70	72	74	75	80	83	90
Effectif	8	4	2	10	13	11	7	3

1) Quel est l'effectif total de cette série statistique?
2) Compléter le tableau ci-dessous.

Vitesse en Km/h	65	70	72	74	75	80	83	90
Effectif	8	4	2	10	13	11	7	3
Fréquence								
Effectif cumulé croissant								
Effectif cumulé décroissant								
Fréquence cumulée croissante								
Fréquence cumulée décroissante								

Exercice 2

Compléter le tableau ci-dessous.

Valeur du caractère	12	15	20	25	30	Total
fréquence	0,1	0,2	0,05	0,3	0,35	1
Effectif						

Activité 2 : Cas de regroupement par classes de même amplitude

Voici les tailles en cm des 30 élèves d'une classe de seconde :

162 ; 162 ; 173 ; 184 ; 156 ; 164 ; 169 ; 174 ; 174 ; 170 ;
166 ; 168 ; 171 ; 172 ; 179 ; 160 ; 162 ; 178 ; 179 ; 165 ;
165 ; 171 ; 174 ; 178 ; 184 ; 165 ; 169 ; 168 ; 168 ; 166.

Recopie et compléter le tableau suivant dans lequel toutes les classes ont une amplitude de 5 c.

Classe	[155 ; 160 [	[160 ; 165 [	……………..
Effectif	1	……………..	……………..

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

Une usine d'Abidjan fabrique des roues d'engrenage dont le diamètre est donné en dixième de millimètres. Sur 100 roues, on a la statistique suivante :

Diamètre des roues en dixième de mm	35	36	37	38	39	40	41	**Total**
Effectif	5	16	25	22	18	8	6	**100**

Déterminer les fréquences, les effectifs cumulés (croissant et décroissant) et les fréquences cumulées (croissante et décroissante).

Exercice 2

On a relevé l'âge des vingt personnes d'une entreprise :

20 ; 18; 36 ; 30 ; 20 ; 24 ; 60 ; 26 ; 40 ; 24 ; 30 ; 32; 18 ; 24 ; 50 ; 26 ; 42 ; 28 ; 52 ; 28.

Construire le tableau statistique de la série des âges (indiquer l'effectif, la fréquence et la fréquence cumulée croissante).

Exercice 3

On a relevé le temps mis par des élèves du Lycée Moderne de Soubré pour parcourir la distance de leur domicile respectif au Lycée. Les résultats obtenus sont les suivants :

Temps (en min)	5	12	15	32	45	50
Effectif	10	21	16	13	8	20

1) Donner le tableau des effectifs cumulés et des fréquences cumulées.
2) Quel est le pourcentage d'élèves qui parcourent la distance de leur domicile au Lycée en moins d'une demi-heure?
3) Quel est le pourcentage d'élèves qui parcourent la distance de leur domicile au Lycée en plus d'une demi-heure?

II. GRAPHIQUES

1- Diagramme circulaires, diagrammes semi-circulaires, diagrammes à bandes

Activité 1

Une enquête menée auprès de 1200 élèves du Lycée Moderne de Soubré concernant leur mode d'habitation, a permis d'obtenir les résultats suivants :

Modalité	Parents	Foyers	Location	Tuteur
Effectif	150	350	600	100

1) Compléter le tableau de proportionnalité ci-dessous et construire les diagrammes circulaires et semi-circulaires de cette série statistique.

Modalité	Parents	Foyers	Location	Tuteur	Totaux
Effectif	150	350	600	100	1 200
Angle au centre en degré					360
Angle au centre en degré					180

2) Construire un diagramme à bande de cette série en précisant l'échelle choisie.

Remarque : Les diagrammes circulaires, semi-circulaires et à bandes sont généralement utilisés pour représenter des séries statistiques à caractère qualitatif.

2- Diagrammes en bâtons

Activité 2 : Dans une classe de seconde, on a relevé les notes obtenues de 50 élèves, à l'issue d'un devoir de sciences physiques.

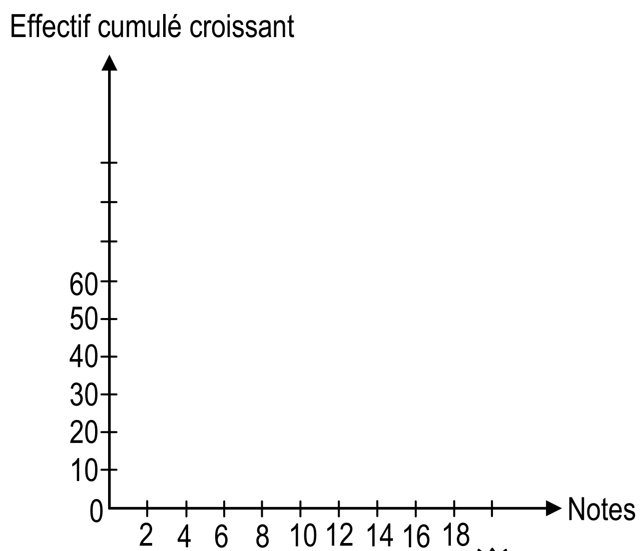
Note	8	11	12	14	15	16	**Total**
Effectif	5	14	8	16	3	4	**50**

Construire un diagramme en bâtons de cette série statistique.

3- Diagrammes cumulatifs

Activité 3

1) En te servant du tableau statistique de l'activité 2, établis le tableau des effectifs cumulés croissants.
2) Construire le diagramme cumulatif des effectifs de cette série.



4- Histogrammes

Activité 4

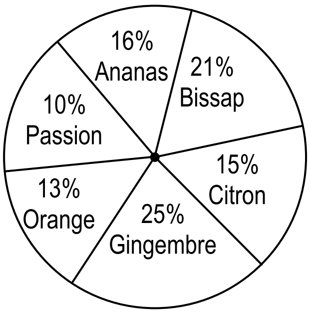
Une enquête est effectuée pour étudier le temps t consacré au transport chaque jour par les 1312 employés d'une usine. Les résultats regroupés en classe d'amplitude 30 minutes, sont indiqués dans le tableau suivant :

Classe	[0;30[	[30;60[	[60;90[	[90;120[	[120;150 [	[150;180 [	[180; 210[
Effectif	175	392	267	127	168	120	63

1) Construire d'abord le tableau des fréquences en pourcentage.
2) Construire l'histogramme des fréquences en pourcentage de cette série statistique.

5- Traduction d'un diagramme d'une série en tableau des effectifs ou des fréquences

Activité 5 Awa vend 200 litres de jus de fruit par jour. La répartition de la vente pendant une journée est représentée par le diagramme circulaire ci-contre :



Dresser à partir de ce diagramme, le tableau statistique où apparaissent les modalités, les effectifs en litres et les fréquences exprimées en pourcentages.

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

Le tableau suivant donne la distribution des réponses des femmes d'un groupe à vocation coopérative (GVC) agricole de Mayo, à la question suivante : « Quel vivrier produisez-vous le plus ? ».

Vivrier	Banane	Igname	Maïs	Manioc	Riz
Nombre de fois cité	15	6	12	9	18

Construire un diagramme à bandes de cette série statistique.

Exercice 2

Le tableau ci-dessous représente la répartition de la population bovine, exprimée en milliers de têtes dans quatre pays pour l'année 1996. (Source : ATLASECO 1997).

Pays	Cameroun	Niger	Mali	Tchad
Bovins	5000	4750	5500	4750

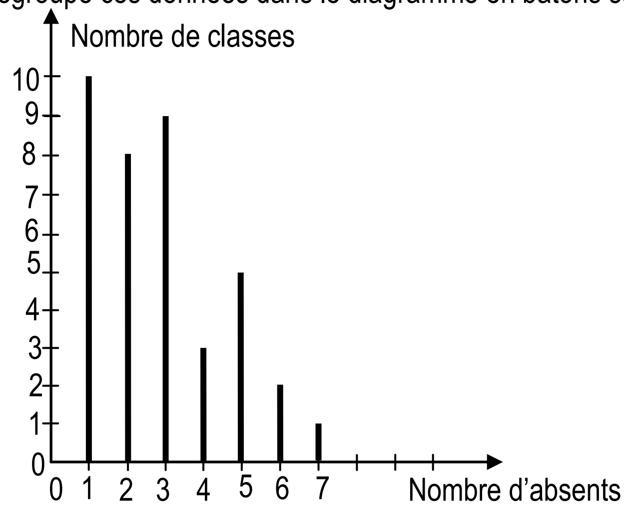
1) Compléter le tableau ci-dessous

Pays	Cameroun	Niger	Mali	Tchad	Totaux
Bovins	5000	4750	5500	4750	
Angle au centre (en degré)					360
Angle au centre (en degré					180

2) Construire les diagrammes circulaire et semi-circulaire relatif à cette série statistique.

Exercice 3

Un chef d'établissement scolaire a noté le nombre d'élèves absents par classe au cours d'un trimestre. Il a regroupé ces données dans le diagramme en bâtons suivant :

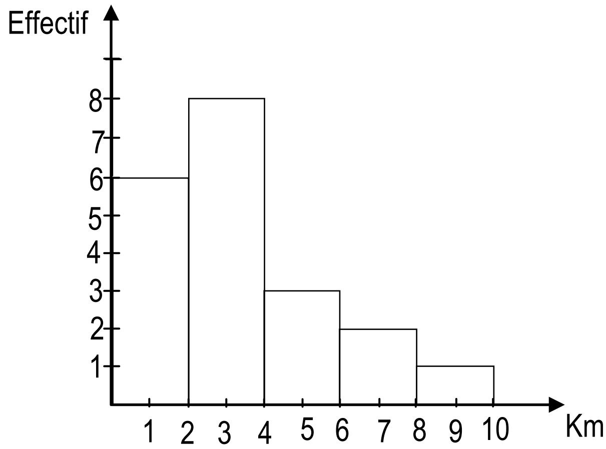


Organiser les données dans un tableau statistique où apparaissent les modalités, les effectifs et les fréquences

Exercice 4

On étudie la distance séparant le Lycée et l'habitation des élèves. On obtient l'histogramme ci dessous :

1) Quel est l'effectif de la population étudiée ?
2) Dresser le tableau statistique où apparaissent les modalités, les effectifs, les effectifs cumulés, les fréquences et fréquences cumulées.
3) Quel est le nombre d'élèves habitant à plus de 6 km du Lycée ?
4) Quel est le pourcentage des élèves habitants à moins de 6 km ?



Exercice 5

On relève les tailles en cm des élèves d'une classe de seconde et on les regroupe en classe d'amplitude 4 cm, selon le tableau suivant :

Taille en cm	[154;158[	[158 ;162[	[162 ;166[	[166 ;170[	[170;174[	[174;178[	[178;182[
Effectif	3	5	12	14	15	6	2

1) Dresser l'histogramme des effectifs de cette série statistique.
2) Combien y a-t-il d'élèves dont la taille est supérieure ou égale 1,66 m ? dont la taille est strictement inférieure à 1,70 m ? dont la taille est strictement inférieure à 1,66 m ?

III. CARACTERISTIQUES DE POSITION ET DE DISPERSION

1- Caractéristique de position

Le mode, la moyenne et la médiane sont des caractéristiques de position.

Définitions

Mode : On appelle mode d'une série statistique toute modalité d'effectif maximal

Médiane : On appelle médiane d'une série statistique d'effectif total N, tout nombre réel M tel que le nombre d'individus de modalité supérieure ou égale à M et le nombre d'individus de modalité inférieure ou égale à M soient tous deux au moins égaux à $\frac{N}{2}$.

Activité 1

1) Compléter le tableau ci-dessous qui indique la répartition des ouvriers d'une exploitation agricole selon le salaire journalier en Fcfa.

Salaire journalier (Modalité Fcfa)	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600	Totaux
Nombre d'ouvriers (Effectif)	4	20	107	168	122	48	21	10	
Produit des modalités par les effectifs									
Effectif cumulé croissant									
Effectif cumulé décroissant									

2) Quel est le mode de cette série ? interpréter le résultat.
3) Calculer la moyenne de cette série ? interpréter le résultat.
4) Déterminer la médiane (ou l'intervalle médiane) de cette série.

Remarque :

- Il existe d'autres définitions, plus restrictives, de la médiane. Toutes mettant en évidence la notion intuitive de partage d'une population en deux groupes de même effectif.
- Une médiane n'est pas toujours une modalité de la série.
- Une médiane peut être un nombre réel unique ou tout nombre d'un intervalle (fermé) de $\mathbb{R}$.

Méthode de calcul de la moyenne d'une série statistique

Etant donné le tableau des effectifs d'une série statistique, on peut calculer la moyenne de cette série en procédant de la façon suivante :

- Calculer le produit de chaque modalité par son effectif (dans le cas où les modalités sont en classe, il faut faire le produit de chaque centre de classe par son effectif).
- Calculer la somme S de tous ces produits.
- Calculer le quotient de S par l'effectif total.

2- Caractéristiques de dispersion

L'écart moyen, la variance et l'écart type sont des caractéristiques de dispersion.

Activité 2

On relève les âges d'un groupe de 15 personnes.

1) Sachant que la moyenne $\overline{X} = 15{,}6$, compléter le tableau ci-dessous.

Age (x)	12	13	15	16	17	18	19	Total
Effectif (n)	2	3	1	2	3	3	1	
$\lvert x-\overline{X}\rvert$								
$n\lvert x-\overline{X}\rvert$								
$(x-\overline{X})^2$								
$n(x-\overline{X})^2$								

2) Déterminer l'écart moyen, la variance et l'écart type de cette série statistique et interpréter les différents résultats.

Remarque :
L'écart type est égal à la racine carrée de la variance d'où la variance est un nombre réel positif.

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1
On interroge chacun des 35 élèves d'une classe de seconde pour savoir combien de fois il est allé au cinéma au cours du premier trimestre de l'année 2007. Voici leur réponse :

2 ; 7 ; 7 ; 4 ; 5 ; 7 ; 10 ; 5 ; 5 ; 11 ; 1 ; 2 ; 5 ; 5 ; 4 ;4 ; 4 ;
7 ; 1 ; 4 ; 4 ; 5 ; 7 ; 7 ; 1 ; 4 ; 5 ; 5 ; 7 ; 7 ; 4 ;7 ; 7 ; 4 ; 4

1) a- Indiquer le ou les mode (s) de cette série.
   b- quelle est la médiane de cette série ?
   c- Quelle est la moyenne de cette série ?
2) Regrouper ces données dans des classes d'amplitude 3. Quelle est la classe modale de cette série classée ?

Exercice 2
1) Compléter le tableau donnant la répartition des salaires de 400 employés.

Salaires en Fcfa	[2000;2400[	[2400;2800[	[2800;3200[	[3200 ;3600[	Total
Centre des classes (C)					
Effectifs (n)					400
Fréquence en %	20,25	23,75	25		
$n \times c$					

2) Calculer le salaire moyen.
3) Quelle est la classe modale de cette série ?

Exercice 3

Pendant un mois (30 jours), un client a pesé chaque jour à un demi-gramme près les quatre baguettes de pain que lui livre son boulanger. Il a inscrit les résultats dans le tableau suivant :

Masse (en grammes)	140	140,5	141	141,5	142	142,5	143	143,5	144	144,5	145	Total
Effectif	24	20	16	14	13	10	9	7	3	2	2	
Masse x Effectif												
Effectif cumulé croissant												
Effectif cumulé décroissant												

1) Compléter le tableau ci-dessus.
2) Quel est le mode de cette série ?
3) Calculer la moyenne de cette série statistique. En déduire la quantité moyenne de pain (en grammes) achetée chaque jour par ce client.
4) Représenter les effectifs cumulés croissants et décroissants par un diagramme en bâtons et en déduire la médiane (ou un intervalle médian) de cette série.

Exercice 4

On lance deux dés 60 fois de suite et on note, pour chaque lancer, la somme des points obtenus. On obtient le tableau suivant : ($\bar{P}$ désigne la moyenne)

Points (p)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
Effectif (n)	2	3	3	5	8	11	9	8	5	3	3	
nP												
$\lvert P-\bar{P}\rvert$												
$n\lvert P-\bar{P}\rvert$												
$(P-\bar{P})^2$												
$n(P-\bar{P})^2$												

1) Compléter le tableau ci-dessus.
2) Calculer la moyenne, l'écart moyen et l'écart type de cette série statistique.

ACTIVITES GEOMETRIQUES

CHAPITRE I : ANGLES INSCRITS

I. ANGLES INSCRITS

1- Angle inscrit défini par une corde et un point

2- Angle inscrit défini par une corde et une demi-tangente

3- Conséquences

II. LIEUX GEOMETRIQUES DES POINTS M TELS QUE $\text{mes}AMB = \theta°$

1- Arcs capables

2- Programme de construction d'arcs capables de mesure donnée

III. RELATIONS METRIQUES DANS UN TRIANGLE

1- Sinus d'un angle obtus

2- Aire d'un triangle

3- Théorème des sinus

IV. MESURE D'UN ANGLE EN RADIAN

1- Définition

2- Mesure en radian et mesure en degré

3- Longueur d'un arc de cercle

CHAPITRE I : ANGLES INSCRITS

I. ANGLES INSCRITS

1- Angle inscrit défini par une corde et un point

a) Activités 1 (Rappel)

Soit A; B ; D; M et N des points du cercle (C) de centre O.

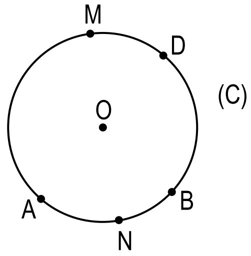


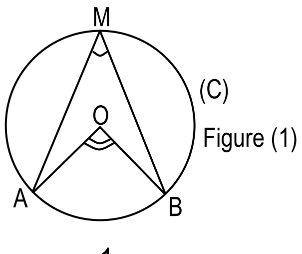
Figure (1)

- Que représentent les segments [AB]; [AD], [AM] et [MB] pour le cercle (C)?
  Les segments [AB]; [AD], [AM] et [MB] représentent des cordes du cercle (C).
- Le segment [AB] défini sur le cercle (C) deux arcs qui sont : Le petit arc AB et le grand arc $\overset{\cup}{AB}$
- L'angle AMB est un angle inscrit dans (C) et intercepte l'arc AB ; l'angle ANB est un angle inscrit dans (C) et intercepte l'arc $\overset{\cup}{AB}$
- L'angle AOB est un angle au centre de (C) et intercepte l'arc AB . L'angle AOB est appelé angle au centre associé à l'angle AMB .

b) Propriétés

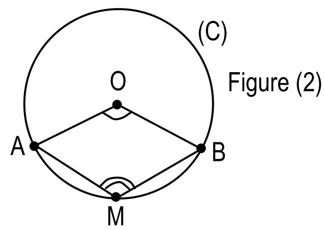
Relation entre angle inscrit et angle au centre associé.

AMB est un angle inscrit aigu



$$mesAMB = \frac{1}{2}mesAOB$$

AMB est un angle inscrit obtus

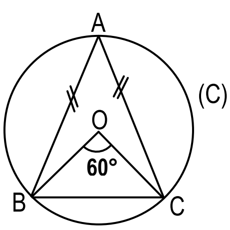


$$mesAMB = 180° - \frac{1}{2}mesAOB$$

Exercice d'application

Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle isocèle en A, inscrit dans le cercle (C) de centre O, tel que mes $BOC = 60°$ et D un point de BC

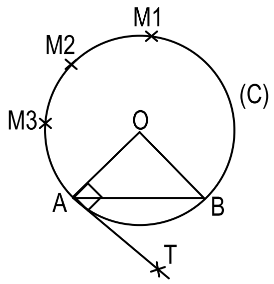
1) Quelles sont les mesures des angles du triangle ABC?
2) Calculer mesBDC



2- Angle inscrit défini par une corde et un demi-tangente

a) Activité 2

Soit (C) un cercle de centre O. [AB] une corde de (C). M est un point variant sur l'arc $\overset{\smile}{AB}$. M1; M2 et M3 des points du cercle appartenant au grand arc $\overset{\smile}{AB}$ et $[AT)$ la demi-tangente en A au cercle (C).



- Construire en rouge les angles inscrits $\widehat{AM_1B}$; $\widehat{AM_2B}$ et $\widehat{AM_3B}$ et comparer leur mesure.

  $mes\widehat{AM_1B} = mes\widehat{AM_2B} = mes\widehat{AM_3B}$
- Lorsque M prend des positions M1; M2 et M3, etc.… de plus en plus proches de A, comment se comportent les demi-droites $[M_1A)$; $[M_2A)$ et $[M_3A)$ par rapport à la demi-tangente [AT)?

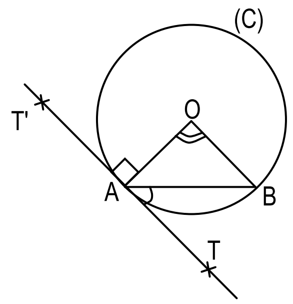
  Les demi-droites $[M_1A)$; $[M_2A)$ et $[M_3A)$ se rapprochent de plus en plus de la demi-droite [AT)
- Nous admettons de ce fait que l'angle $\widehat{TAB}$ est un angle inscrit dans le cercle (C) et de même mesure que les angles inscrits $\widehat{AM_1B}$; $\widehat{AM_2B}$ et $\widehat{AM_3B}$. L'angle $\widehat{TAB}$ est défini par une corde [AB] et la demi-tangente [AT)

b) Extension de la notion d'angle inscrit

Propriété

Soit [AB] une corde d'un cercle (C), qui n'est pas un diamètre, [AT) la demi-tangente en A à (C) contenue dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas O. [AT') l'autre demi-tangente en A. On a :

$mes\widehat{TAB} = \frac{1}{2}mes\widehat{AOB}$ et $mes\widehat{T'AB} = 180° - \frac{1}{2}mes\widehat{AOB}$

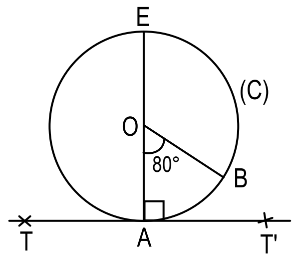


Exercice d'application

Sur la figure ci-dessous, (C) est un cercle de centre O. la droite (TT') est perpendiculaire à la droite (AE).

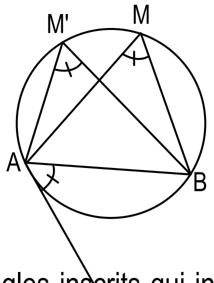
On pose $mes\ \widehat{AOB} = 80°$.

Déterminer les mesures des angles $\widehat{TAB}$ et $\widehat{T'AB}$.



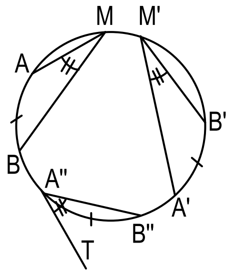
3- **Propriétés**

P1



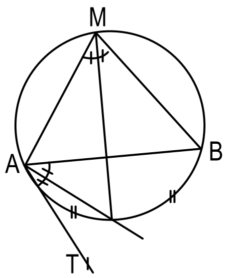
Des angles inscrits qui interceptent le même arc ont même mesure

P2



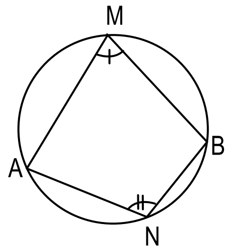
Des angles inscrits qui interceptent deux arcs de même longueur ont même mesure

P3



La bissectrice d'un angle inscrit partage l'arc intercepté en deux arcs de même longueur

P4



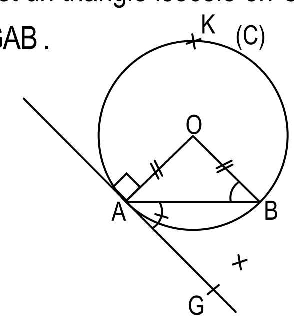
Si M est un point de l'arc $\overset{\smile}{AB}$ et N un point de l'arc AB, alors AMB et ANB sont supplémentaires

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice1

Sur la figure codée ci-contre, (C) est un cercle de centre O. AOB est un triangle isocèle en O. la droite (GA) est perpendiculaire à la droite (OA) et $K \in (C)$, mes $OBA =$ mes GAB.

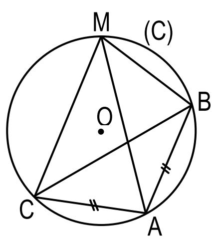
1) Calculer mes GAB
2) En déduire mes AKB



Exercice 2

Sur la figure codée ci-contre (C) est un cercle de centre O. ABC est un triangle isocèle en A et M un point du cercle (C).

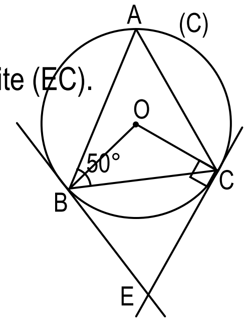
1) Démontrer que la droite (AM) est la bissectrice de l'angle BMC.
2) Montrer que mes $BMC +$ mes $BAC = 180°$



Exercice 3

Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre O.

On donne $mes\ \widehat{ABC} = 50°$ et la droite (AB) est parallèle à la droite (EC).



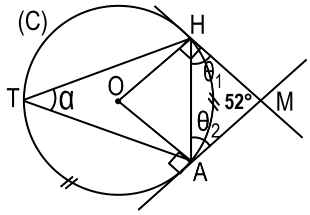
1) Justifier que $mes\ \widehat{BCE} = 50°$.
2) En déduire $mes\ \widehat{BAC}$
3) Calculer $mes\ \widehat{BEC}$

Exercice 4

Sur la figure codée-ci-contre, les arcs $\overset{\frown}{AH}$ et $\overset{\frown}{AT}$ ont la même longueur. Les droites (AM) et (HM) sont les tangentes respectives en A et H au cercle.

On pose $mes\ \widehat{HTA} = \alpha$; $mes\ \widehat{AHM} = \theta_1$ et $mes\ \widehat{HAM} = \theta_2$

1) Montrer que $\theta_1 = \theta_2$
2) En déduire la valeur de θ_1
3) Justifier que $\theta_1 = \alpha$
4) En déduire les valeurs des angles du quadrilatère MATH.

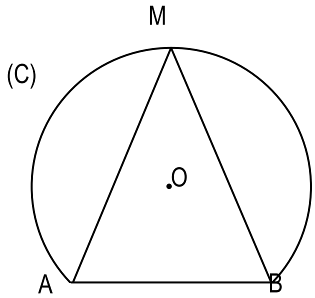


II. LIEU GEOMETRIQUE DES POINTS M TELS QUE $mes\widehat{AMB} = \theta°$

1- Construction d'arcs capables

Activité 1

Construis le symétrique de l'arc $\overset{\cup}{AB}$ par rapport à la droite (AB) et M' le symétrique de M par rapport à la droite (AB). $mes\ \widehat{AMB} = 65°$



- Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{AM'B}$?
- Les deux arcs de cercle sont appelés arcs capables d'angles 65°d'extrémités A et B.
- La réunion de ces deux arcs de cercle est appelée lieu géométrique des points M tels que : $mes\ \widehat{AMB} = 65°$

Propriété

Soit A et B deux points distincts, θ un nombre réel tel que : $0 < \theta < 180$.

Le lieu géométrique des points M tels que : $mes\widehat{AMB} = \theta$ est la réunion de deux arcs de cercle symétriques par rapport à (AB).

Vocabulaire

Ces deux arcs de cercle sont appelés arcs capables d'angle $\theta°$, d'extrémités A et B.

2- Programme de construction.

Soit A et B deux points distincts et un angle de mesure $\theta°$ tel que : $0 < \theta < 180$.

Pour construire le lieu géométrique des points M tels que : $mes\widehat{AMB} = \theta°$, On peut procéder comme suit :

- Construire l'angle $\widehat{TAB}$ tel que $mes\widehat{TAB} = \theta°$
- Tracer la perpendiculaire (D) à (AT) en A et la médiatrice (Δ) du segment [AB].

- Les droites (D) et (Δ) se coupent en un point O qui est le centre du cercle (C) passant par A et B.
- Si l'angle est aigu le lieu géométrique est la réunion du grand arc $\overset{\smile}{AB}$ et son symétrique par rapport à (AB).
- Si l'angle est obtus le lieu géométrique est la réunion du petit arc AB et son symétrique par rapport à (AB).

Exercices d'application

Exercice1 : L'unité est le centimètre
Construire des arcs capables d'un angle de 55° d'extrémités A et B tels que $AB = 4$.

Exercice 2 : L'unité est le centimètre.
Construire des arcs capables d'un angle 110° d'extrémités E et F tels que EF = 5.

Remarque: NB: $0 < \theta < 180$

III. RELATIONS METRIQUES DANS UN TRIANGLE

1- Sinus d'un angle obtus

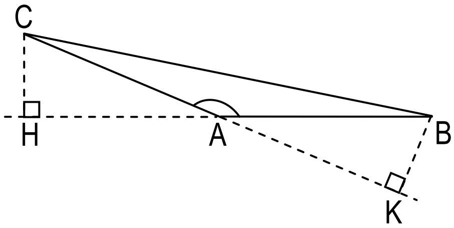
Activités 1

Complète le tableau ci-dessous à l'aide de la calculatrice.

Mesure d'angle en degré	30	150	60	120	45	135
Sinus de l'angle						

1) Citer des angles supplémentaires dans le tableau ci-dessus et comparer leur sinus.
2) Que peut-on retenir?

Définition



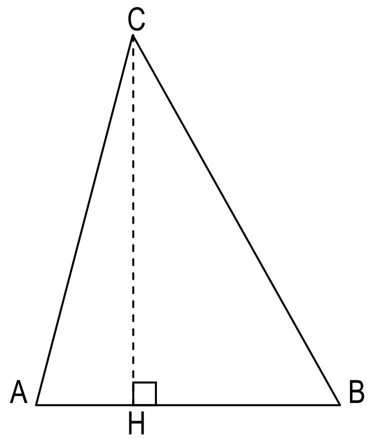
Soit BAC un angle, H le projeté orthogonal de C sur (AB) et K le projeté orthogonal de B sur (AC). On pose :

$$\sin BAC = \frac{HC}{AC} = \frac{KB}{AB}$$

Remarque :

Nous admettrons que 2 angles ayant même sinus ont la même mesure ou sont supplémentaires.

2- Aire d'un triangle

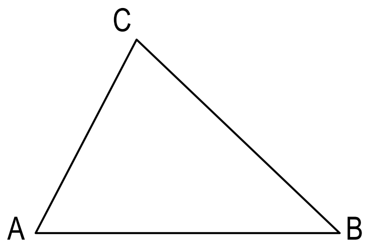


Activité 2

ABC est un triangle et (CH) la hauteur issue du sommet C.

1) Donner l'expression $\mathscr{A}$ de l'aire du triangle ABC.
2) Montrer que l'aire du triangle ABC est: $\mathscr{A} = \frac{AB \times AC \times \sin A}{2}$

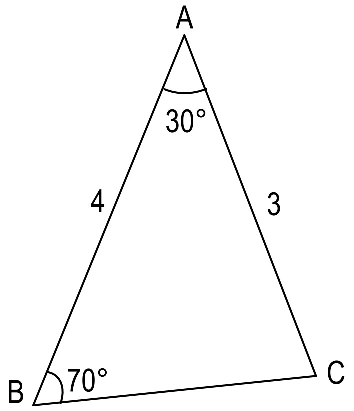
Propriété



Soit ABC un triangle et $\mathscr{A}$ son aire. On pose : BC = a ; AC = b et AB = c

On a : $\mathscr{A} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$

Exercice d'application

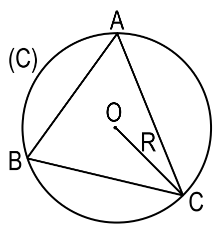


L'unité est le centimètre.
Soit la figure codée ci-contre.

1) Calculer l'aire du triangle ABC.
2) Calculer la longueur du côté [BC].

3- Théorème des sinus

Propriété : Nous admettrons la propriété suivante:



Soit ABC un triangle, $\mathscr{A}$ son aire, (C) son cercle circonscrit et R le rayon de (C).
On pose : BC = a ; AC = b et AB = c

on a : $\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = \frac{abc}{2\mathscr{A}} = 2R$

Exercice d'application : L'unité est le centimètre

Soit NAB un triangle isocèle en N tel que mes $\widehat{ANB} = 30°$. Sachant que le rayon de son cercle circonscrit est égal à 1, calcule la longueur de chacun de ses côtés.

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice1: l'unité est le centimètre.
Soit KAG un triangle équilatéral de côté b avec un réel positif non nul.
On désigne par $\mathscr{A}$ son aire et R le rayon de son cercle circonscrit. On donne $\mathscr{A} = 4\sqrt{3}$ cm^2.

1) Montrer que b=4.
2) Calculer R.

Exercice 2: L'unité est le centimètre.

Un triangle GKL est tel que KL=5 et mes $\widehat{GKL}$ = mes $\widehat{GLK} = 30°$.

1) Calculer la longueur de chacun des côtés du triangle GKL.
2) Calculer l'aire du triangle GKL.
3) Calculer le rayon de son cercle circonscrit.
4) O étant le centre de ce cercle circonscrit, calculer la mesure de l'angle $\widehat{KOL}$.

IV. MESURE D'UN ANGLE EN RADIAN

1- Définition

La mesure en radian d'un angle $\widehat{MON}$ est égale à la longueur de l'arc intercepté par cet angle sur le cercle de centre O et de rayon 1. On notera $mes\widehat{MON}$

2- Mesures en radian et mesures en degré

Activité 1

Compléter le tableau suivant :

Mesures en degré x	180	95	60		45	35		25	0
Mesures en radian y	π			$\frac{5\pi}{12}$			$\frac{\pi}{6}$		

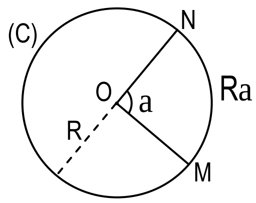
Exprimer y en fonction de x puis x en fonction de y.

Exercice d'application

1) Exprimer en radian la mesure d'un angle de 80° puis celle d'un angle de 1°
2) Exprimer en degré la mesure d'un angle de 0,9 radian puis d'un angle de $\frac{3\pi}{5}$ radian ; d'un angle $\frac{7\pi}{8}$ radian.

3- Longueur d'un arc de cercle

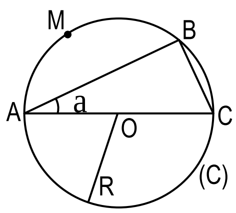
Propriété: Nous admettons la propriété suivante:



Sur un cercle de rayon R, la longueur de l'arc intercepté par un angle au centre de mesure α radian est $R\alpha$

EXERCICES DE RENFORCEMENT

On considère la figure ci-contre. On donne $\alpha = \frac{7\pi}{36}$ rad.



1) Déterminer en radian les mesures des angles suivants: $\widehat{ABC}$; $\widehat{BCA}$; $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BMC}$.
2) Exprimer en degré les mesures des angles suivants: $\widehat{BAC}$; $\widehat{BCA}$; $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BMC}$.
3) Sachant que le rayon R=3, calculer la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

CHAPITRE II : VECTEURS ET POINTS DU PLAN

I. VECTEURS

1- Définitions et premières propriétés

a- Notation

b- Propriétés

c- Norme d'un vecteur

2- Calcul vectoriel

3- Combinaisons linéaires

a- Combinaison linéaire

b- Vecteurs colinéaires

c- Vecteur directeur d'une droite

d- Vecteur unitaire

e- Caractérisation vectorielle du centre de gravité d'un triangle

II. MESURE ALGEBRIQUE

1- Droite orientée

2- Mesure algébrique

a- Définition

b- Propriétés

III. BASES ET REPERES

1- Base du plan vectoriel $\mathcal{V}$

a- Définition d'une base

b- Coordonnées d'un vecteur

c- Norme d'un vecteur dans une base orthonormée

2- Déterminant de deux vecteurs dans une base

a- Définition

b- Propriété

3- Repères du plan

a- Définition

b- Calculs dans un repère

CHAPITRE II : VECTEURS ET POINTS DU PLAN

I. VECTEURS

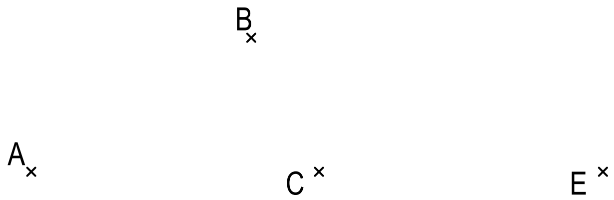
1- Définitions et premières propriétés

a) Notation

Activité

Sur la figure ci-dessous A, B, C et E sont quatre points distincts du plan.

1) Tracer le vecteur $\overrightarrow{AB}$
2) Construire les points D et F tels que : $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$



Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ peut être aussi noté $\vec{u}$. On a : $\vec{u} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$. On dit que les couples (A, B) ; (C, D) et (E,F) sont des représentants du vecteur $\vec{u}$.

On utilise en général une lettre minuscule surmontée d'une flèche pour désigner un vecteur. Ainsi, on notera : $\vec{a}$, $\vec{b}$,..., $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$,... un vecteur

L'ensemble des vecteurs du plan est appelé plan vectoriel et noté $\mathcal{V}$

b) Propriétés

Activité

Construire sur la figure ci-dessous le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

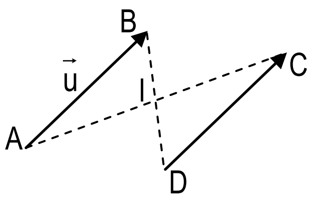
Peut-on trouver un autre point P différent de M tel que $\overrightarrow{OP} = \vec{u}$?

On admet la propriété suivante :

Propriété fondamentale

Pour tout point O et tout vecteur $\vec{u}$, il existe un et un seul point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$

Propriété : Vecteurs égaux et parallélogrammes



- ✓ Dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ équivaut à dire que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme
- ✓ ABCD est un parallélogramme équivaut aussi à dire que les segments [AC] et [BD] ont le même milieu.

c) Norme d'un vecteur

Définition

On appelle norme de $\vec{u}$, la distance AB où le couple (A,B) est un représentant de $\vec{u}$. On note $\|\vec{u}\|$

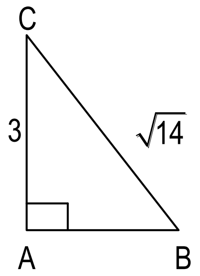
On a : $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$

Remarques

- $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$. En effet, $\vec{0}$ a pour norme 0.
- Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\|\vec{u}\| = \|-\vec{u}\|$
- Deux vecteurs de même norme ne sont pas nécessairement égaux.

Exercice d'application

On considère la figure codée ci-dessous. On pose: $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$; $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{w}$

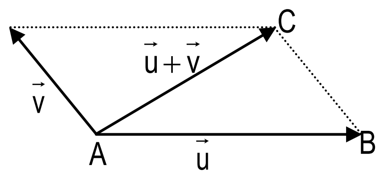


Déterminer $\|\vec{u}\|$; $\|\vec{v}\|$ et $\|\vec{w}\|$.

2- Calcul vectoriel

Egalité de Chasles:

Pour tous points A, B et C on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



Exercice d'application

1) A, B, C, D, E, F et P sont des points du plan.
   Simplifier les expressions suivantes:
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DC}$
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{ED} - \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{FE}$

2) Développer et réduire.
- $\vec{a} = 7\vec{u} - 4\vec{v} + 3(\vec{u} + 3\vec{w}) - 5\left(2\vec{w} - \vec{v}\right)$
- $\vec{b} = 2\vec{u} - 3\left(5\vec{v} - \vec{u}\right) + 4\left(\vec{w} + 2\vec{v}\right)$

3- Combinaisons linéaires

a) Combinaison linéaire

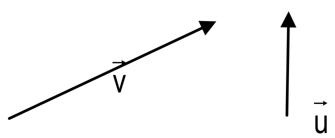
Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs. Tout vecteur de la forme $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ où α et β sont des nombres réels est appelé combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. α et β sont les coefficients respectifs de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercice d'application

On donne $\vec{w} = 3\left(\vec{u} + \vec{v}\right) - 4\left(\vec{u} - 2\vec{v}\right) - 8\vec{v}$

1) Montrer que $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ puis préciser leurs coefficients.
2) Sachant que $\vec{w} = 3\vec{v} - \vec{u}$, construire un représentant de $\vec{w}$ sur la figure ci-dessous



b) Vecteurs colinéaires

Définition

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires dans les deux cas suivants :

- Lorsque l'un d'eux au moins est le vecteur nul
- Ou bien lorsqu'ils ont la même direction.

Remarque : le vecteur nul est colinéaire à n'importe quel vecteur

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel λ tel que : $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ ou $\vec{u} = \lambda\vec{v}$

Exercice d'application

On donne les vecteurs $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j}$; $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$; et $\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j}$.

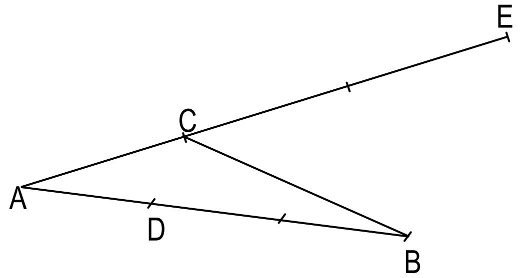
1) Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{a}$ sont colinéaires.
2) Ecrire $\vec{j}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Propriété : Parallélisme et alignement

- Dire que (AB) est parallèle à (CD) équivaut à dire qu'il existe un nombre réel k non nul tel que $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$
- Dire que les points distincts A, B et C sont alignés équivaut à dire qu'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

Exercice d'application

Soit ABC un triangle. D et E deux points du plan tels que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE} = -2\overrightarrow{CA}$



1) Montrer que $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$ et en déduire que les points A, C et E sont alignés.
2) Montrer que les droites (BE) et (CD) sont parallèles.

c) Vecteurs directeurs d'une droite

Définition

On appelle vecteur directeur d'une droite (D) tout vecteur non nul $\vec{u}$ ayant même direction que (D). On dit que (D) est dirigée par $\vec{u}$.

Remarque

- Si la droite (D) est dirigée par $\vec{u}$, les vecteurs directeurs de (D) sont $k\vec{u}$ où k est nombre réel non nul. Une droite admet donc une infinité de vecteurs directeurs tous colinéaires entre eux.
- Si A et B sont des points de (D) dirigée par $\vec{u}$, alors $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

d) Vecteur unitaire

Définition

On appelle vecteur unitaire tout vecteur de norme 1

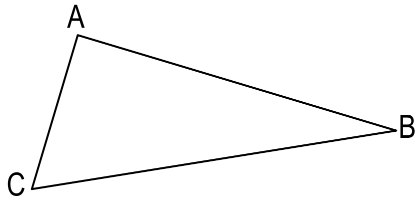
Propriété

Pour tout vecteur $\vec{u}$ non nul, il n'existe que deux vecteurs unitaires colinéaires à $\vec{u}$. Ces deux vecteurs sont opposés.

e) Caractérisation vectorielle du centre de gravité d'un triangle

Activité

Soit ABC un triangle. Construire les points A', B' et C' les milieux respectifs de [BC]; [CA] et [AB]. Construire le point G, point de concours des droites (AA'); (BB') et (CC').



1) Que représente le point G?
2) Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$
3) En déduire que $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA'} = \vec{0}$ puis $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$
4) Montrer que G est unique (On considèrera un autre point M tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ et on montrera que $3\overrightarrow{MG} = \vec{0}$).

Propriété

Le centre de gravité d'un triangle ABC est l'unique point G tel que : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Exercice d'application

ABC un triangle de centre de gravité G.

Montrer que pour tout point N du plan, $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = 3\overrightarrow{NG}$

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

ABCD est un parallélogramme, soit I milieu de [CD] et J le point vérifient $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

1) Ecrire $\overrightarrow{AI}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2) Ecrire $\overrightarrow{IJ}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Exercice 2

Soit ABC un triangle quelconque.

1) Construire les points M et N tels que:

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AC}$

2) Démontrer que (BN) et (MC) sont parallèles.

Exercice 3

ABCD est un parallélogramme de centre O.

1) Construire le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et F tel que $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$.
2) a- A l'aide de la relation de Chasles, exprimer $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{CF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
   b- Démontrer que $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires et en déduire que E, C et F sont alignés.

Exercice 4

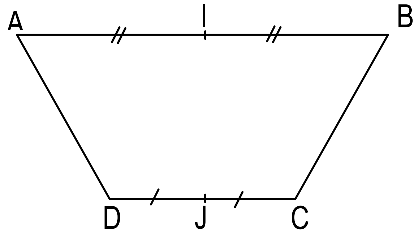
ABC est un triangle, I est le milieu de [AB].

1) a- Construire le point J tel que $\overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AC}$
   b- Déduire que $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
2) On note K le point tel que $2\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$
   a- Exprimer $\overrightarrow{BK}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$ et construire K.
   b- En déduire que $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et que $\overrightarrow{IJ} = -3\overrightarrow{IK}$.
   c- Que peut-on dire des points I, J et K.

Exercice 5

Sur la figure ci-dessous, ABCD est un quadrilatère quelconque. I est milieu de [AB] et J milieu de [DC].
G est le centre de gravité du triangle ABC.
O est un point du plan vérifiant $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ (On ne construira pas le point O).

1) Justifier que: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$ et que $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OJ}$.
2) En déduire que O est le milieu du segment [IJ].
3) Montrer que $\overrightarrow{OG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OD}$.



II. MESURE ALGEBRIQUE

1. Droite orientée

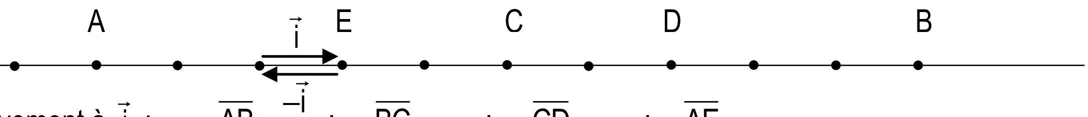
Une droite admet deux vecteurs directeurs unitaires opposés. Choisir l'un d'eux revient à orienter la droite.

2. Mesure algébrique
   a) Définition

Soit (D) une droite orientée par l'un de ces vecteurs unitaires. A et B étant deux points de (D), on appelle mesure algébrique de (A,B) relativement à $\vec{i}$, l'unique nombre réel noté $\overline{AB}$ tel que : $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \times \vec{i}$

Exemple:

Soit (D) une droite et $\vec{i}$ l'un des vecteurs directeurs unitaires.
On considère les points A, B, C, D et E suivants:



Complèter :

- Relativement à $\vec{i}$: $\overline{AB} = ...$; $\overline{BC} = ...$; $\overline{CD} = ...$; $\overline{AE} = ...$
- Relativement à $-\vec{i}$: $\overline{AB} = ...$; $\overline{BC} = ...$; $\overline{CD} = ...$; $\overline{AE} = ...$

Remarque

- Ces mesures sont dites algébriques car, contrairement aux distances, elles peuvent être négatives.
- $\overline{AB}$ ne peut être définie sans que la droite (AB) ne soit orientée.

b) Propriété

Soit (D) une droite orientée par l'un de ses vecteurs directeurs unitaires $\vec{i}$. Pour tous points A, B et C de la droite (D) et pour tout nombre réel λ on a :

- ✓ $\left|\overline{AB}\right| = AB$
- ✓ $\overline{AB} = -\overline{BA}$
- ✓ Lorsque A et B sont distincts
  - $\overline{AB} = AB$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{i}$ sont de même sens.
  - $\overline{AB} = -AB$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{i}$ sont de sens contraires.
- ✓ $\overline{AB} = 0$ si et seulement si A = B.
- ✓ $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$ si et seulement si $\overline{AC} = \lambda\overline{AB}$
- ✓ $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ (c'est la relation de Chasles)

Remarques :

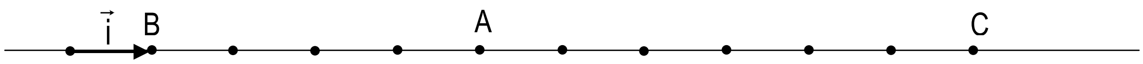
- $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ n'a de sens que si les points A, B et C sont alignés
- $AB + BC = AC$ n'est vérifiée que si B appartient [AC]

Exercice 1

Sur une droite orientée par un vecteur directeur unitaire $\vec{i}$, placer trois points A, B, C tels que $\overline{AB} = -3$; $\overline{AC} = 2$ puis Calculer $\overline{CB}$

Exercice 2

Déterminer relativement à $\vec{i}$, puis relativement à $-\vec{i}$: $\overline{AB}$; $\overline{AC}$; $\overline{AB} \times \overline{AC}$; $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$



III. BASES ET REPERES

1- Base du plan vectoriel $\mathcal{V}$

a) Définition

On appelle base du plan vectoriel $\mathcal{V}$ tout couple de vecteurs non colinéaires.

b) Coordonnées d'un vecteur

Propriété fondamentale

Soit $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires. Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un et un seul couple de nombres réels (x ; y) tel que : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Définition

Soit $(\vec{i},\vec{j})$ une base de V et $\vec{u}$ un vecteur. Le seul couple de nombres réels (x ; y) vérifiant $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ est appelé couple de coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$. On écrit : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou $\vec{u}(x;y)$ dans $(\vec{i},\vec{j})$.

Application :

ABCD est un parallélogramme de centre O.

1) Justifier que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ est une base de $\mathcal{V}$
2) Dans cette base, déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{OB}$

c) Norme d'un vecteur dans une base orthonormée

Définition

- Deux vecteurs sont orthogonaux si leurs directions sont perpendiculaires ou si l'un au moins est nul.
- Une base est dite orthonormée lorsqu'elle est constituée de deux vecteurs unitaires orthogonaux.

Propriété

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Remarque

Cette propriété n'est applicable que dans une base orthonormée

Exercice d'application

1) ABC est un triangle. Justifier que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est une base de $\mathcal{V}$
2) Soit $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ dans la base orthonormée $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.

   a- Ecrire $\vec{v}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

   b- Calculer $\|\vec{v}\|$ dans $\left(\vec{a}; \vec{b}\right)$.

2- Déterminant de deux vecteurs

a) Définition

Soit $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ une base de V, $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs. On appelle déterminant de $\left(\vec{u}, \vec{u}'\right)$ relativement à la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$, le nombre réel : $xy' - yx'$

On note : $\det\left(\vec{u}, \vec{u}'\right) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$

b) Propriété

Soit $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ une base de $\mathcal{V}$. Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Exercice d'application

1) Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ dans la base $\left(\vec{i}; \vec{j}\right)$.

   Calculer : $\det\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$; $\det\left(\vec{v}, \vec{u}\right)$ et $\det\left(3\vec{u}, \left(\vec{u} + \vec{v}\right)\right)$.

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

Le plan vectoriel $\mathcal{V}$ est muni d'une base orthonormée $\left(\vec{i}; \vec{j}\right)$. Soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1) Construire $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $\left(\vec{i}; \vec{j}\right)$.
2) Calculer le $\det\left(\vec{u}; \vec{v}\right)$ et en déduire que $\left(\vec{u}; \vec{v}\right)$ est une base de $\mathcal{V}$.

Exercice 2

Soit $(\vec{i};\vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$. on donne $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$.

A, M, B sont trois points du plan tels que $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}=\vec{v}$.

Calculer $\det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right)$ et en déduire que A, M et B sont alignés.

Exercice 3

Soit $(\vec{i};\vec{j})$ une base de V. $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}12\\-20\end{pmatrix}$. (D) et (D') sont deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Montrer que (D) est parallèle à (D').

3- Repères du plan

a) Définition

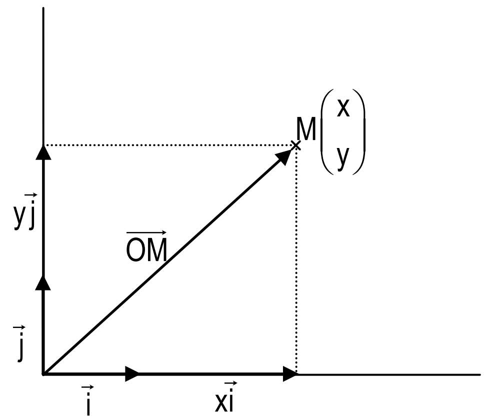
On appelle repère du plan :

- Ou bien un triplet (O, I, J) de points non alignés
- Ou bien un triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où O est un point et $(\vec{i},\vec{j})$ est une base de V

Le point O est appelé origine du repère.

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ signifie que $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans $(\vec{i},\vec{j})$

signifie que $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$



Remarque

- Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé si et seulement si la base $(\vec{i},\vec{j})$ l'est.
- $(O, \vec{i})$ est un repère de l'axe des abscisses et $(O, \vec{j})$ est un repère de l'axe des ordonnées.

b) Calculs dans un repère

Propriété : Si $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}x_C\\y_C\end{pmatrix}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et si G est le centre de gravité du triangle ABC alors $G\begin{pmatrix}\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}\\[2mm]\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}\end{pmatrix}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

Le plan P est muni du repère $(O,\vec{I},\vec{J})$. On donne les points $A\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$.

a) Montrer que A, B et C ne sont pas alignés.
b) Trouver les coordonnées du centre de gravité G de ABC.

Exercice 2

Dans le plan muni du repère $(O,\vec{I},\vec{J})$. On donne les points $A\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$.

a) Montrer que (OA) et (BC) sont parallèles.
b) Les points O, A et B sont-ils alignés?
c) Trouver x tel que le point $M(25\ ;\ x)$ soit aligné avec A et B.

Exercice 3

On donne $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point quelconque.

Déterminer une relation entre les nombres x et y afin que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ soient colinéaires.

Exercice 4

1) Déterminer une équation de la droite (D) passant par $A(2\ ;\ 2)$ et vecteur directeur $\vec{u}(-2\ ;\ 3)$.
2) Déterminer une équation de la droite (D) passant par $A(2\ ;\ 1)$ et $B(1\ ;\ 3)$.

Exercice 5

Soit $(\vec{I};\vec{J})$ une base de $\mathcal{V}$, on donne $\vec{u}=3\vec{i}-a\vec{j}$ et $\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer la valeur de a pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.
2) On suppose pour la suite que a=2.
3) a- Montrer que $(\vec{u}\ ;\vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}$.

   b- Déterminer les coordonnées de $\vec{i}$ puis celles de $\vec{j}$ dans $(\vec{u};\vec{v})$.

4) c- Soit $\vec{w}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ dans $(\vec{u};\vec{v})$. Déterminer les coordonnées de $\vec{w}$ dans $(\vec{i};\vec{j})$.

Exercice 6

Soit $(O;\vec{I};\vec{J})$ un repère orthonormé. On donne $A\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$;$B\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

1) a- Calculer les coordonnées du point A' milieu de [BC].

   b- calculer les coordonnées de G tel que $\overrightarrow{GA'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$.

   Que représente le point G pour le triangle ABC ?

   c-Vérifier que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
2) Calculer les longueurs OA, OB et OC. Que représente le point pour le triangle ABC?
3) a- Calculer les coordonnées de H tel que : $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

   b- Montrer que $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OA'}$.
   En déduire que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.
   c- Montrer que les droites (BH) et (AC) sont perpendiculaires.
   d- Que représente le point H pour le triangle ABC ?
4) Démontrer que O, G et H sont alignés.

   Quel est le nombre K tel que $\overrightarrow{OH}=K\overrightarrow{OG}$?

CHAPITRE III : ANGLES ORIENTES ET TRIGONOMETRIE

I. COMPLEMENTS SUR LES ANGLES

1- Angles orientés de deux vecteurs

Présentation et vocabulaire

2- Orientation du plan

a) Plan orienté

b) Repère orthonormé direct

3- Mesure principale d'un angle orienté

a) Définition

b) Propriétés

II. TRIGONOMETRIE

1- Cercle trigonométrique

a) Définition

b) Point associé à un nombre réel $\alpha \in]-\pi;\pi]$

2- Cosinus, sinus d'un angle orienté

a) Définition

b) Propriétés

c) Signe du sinus et cosinus d'un angle

d) Sinus et cosinus d'angles remarquables

3- Tangente d'un angle orienté

a) Définition

b) Propriété

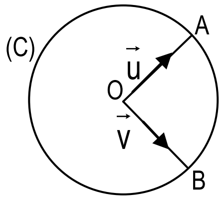
CHAPITRE III : ANGLES ORIENTES ET TRIGONOMETRIE

I. COMPLEMENTS SUR LES ANGLES

1- Angles orientés de deux vecteurs

Présentation et vocabulaire

Soit (C) un cercle de centre O. A et B deux points de (C). $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs respectivement colinéaires à $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.



Combien de sens de parcours a l'arc AB ?

A chaque sens de parcours, on associe un nouveau type d'angle appelé angle orienté.

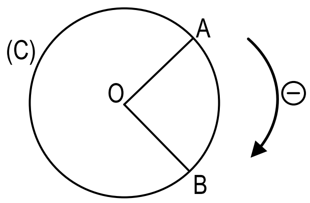
Le parcours de l'arc AB de A vers B correspond à l'angle orienté noté $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$. Le parcours de l'arc AB de B vers A correspond à l'angle orienté noté $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)$.

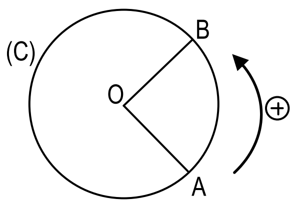
Remarque

Le couple $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$ est un représentant de l'angle orienté $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ et le couple $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}\right)$ est un représentant de $\left(\vec{v},\vec{u}\right)$. Les angles orientés $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ et $\left(\vec{v},\vec{u}\right)$ sont dits opposés.

2- Orientation du plan

a) Plan orienté





Sens indirect
C'est le sens des aiguilles d'une montre

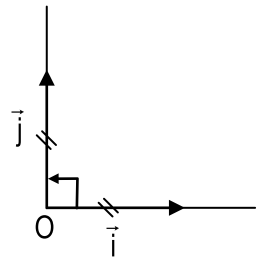
Sens direct
C'est le sens contraire des aiguilles d'une montre

Remarque :
Orienté le plan c'est convenir que tous les cercles seront orientés dans le même sens.

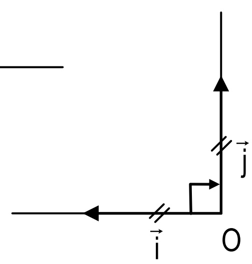
b) Repère orthonormé direct

Définition

Soit le repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

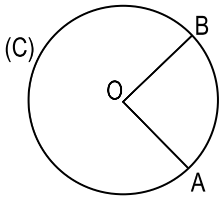


- Le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est direct si l'angle $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ est l'angle droit direct.
- Le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est indirect si l'angle $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ est l'angle droit indirect.



3- Mesure principale d'un angle orienté

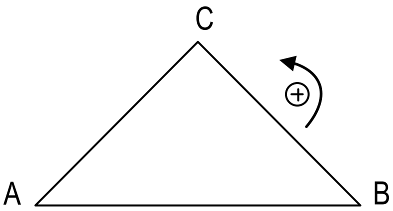
a) Définition



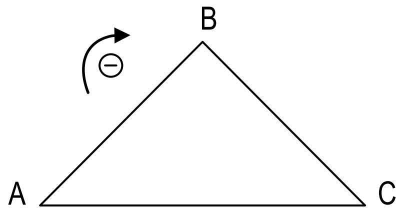
La mesure principale en radian de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ est notée $\text{Mes}\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$. Elle est définie par :

- ✓ Si $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ est nul alors $\text{Mes}\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=0$
- ✓ Si $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ est plat alors $\text{Mes}\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\pi$
- ✓ Si $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ n'est ni nul ni plat alors :
  - $\text{Mes}\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\text{mes}\widehat{AOB}$ lorsque le sens de déplacement de A vers B sur le petit arc $\overset{\frown}{AB}$ est le sens direct.
  - $\text{Mes}\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=-\text{mes}\widehat{AOB}$ lorsque le sens de déplacement de A vers B sur le petit arc $\overset{\frown}{AB}$ est le sens indirect.

Remarques



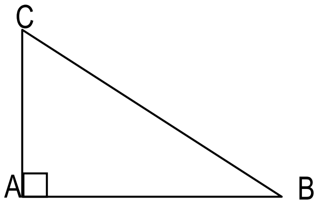
Ce triangle ABC est dit de sens direct.



Ce triangle ABC est dit de sens indirect.

- La mesure principale de l'angle plat orienté est π (et non $-\pi$). Par conséquent la mesure principale d'un angle orienté est un nombre réel appartenant à $]-\pi;\pi]$.

Application



Soit ABC un triangle rectangle en A.

Sachant que $\text{mes}\widehat{ACB}=60°$

Déterminer : $\text{Mes}\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)$; $\text{Mes}\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AC}\right)$; $\text{Mes}\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}\right)$

Remarques : Egalité d'angles orientés
Des angles orientés sont égaux si et seulement si ils ont la même mesure principale.

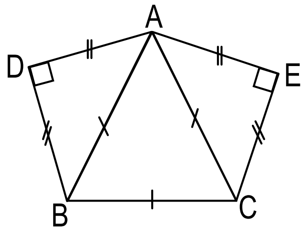
b) Propriété fondamentale

Propriété

Etant donné un nombre réel α appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$ et une demi-droite [OX), il existe une seule demi-droite [OY) telle que $\text{Mes}\left(\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}\right)=\alpha$

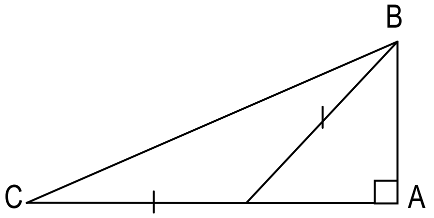
EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1



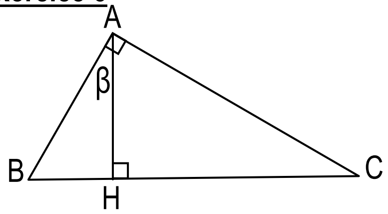
On considère la figure ci-contre.
Calculer les mesures principales des angles :
$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$; $\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DB}\right)$; $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE}\right)$; $\left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD}\right)$; $\left(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{BC}\right)$

Exercice 2



On considère la figure codée ci-contre.
On donne $Mes\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BD}\right) = -\frac{\pi}{6}$
Détermine les mesures principales des angles suivants :
$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$; $\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DB}\right)$; $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE}\right)$; $\left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD}\right)$; $\left(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{BC}\right)$.

Exercice 3



On considère la figure ci-contre.
On donne $Mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AH}\right) = \beta = \frac{2\pi}{5}$
Détermine $Mes\left(\overrightarrow{CH};\overrightarrow{CA}\right)$ $Mes\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BH}\right)$

Exercice 4 (L'unité est le centimètre)
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O,I,J). on donne A(2 ;1).

1) Construis le point B tel que : AB = 2 et $Mes\left(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{AB}\right) = -\frac{\pi}{6}$
2) Construis le point C tel que : CB = 2 et $Mes\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right) = -\frac{2\pi}{3}$ puis Calcule $Mes\left(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{BC}\right)$

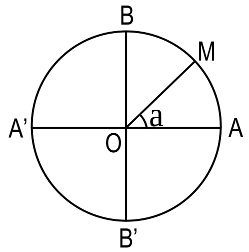
II. TRIGONOMETRIE

1- Cercle trigonométrique

a- Définition

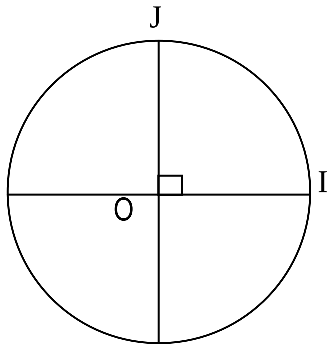
Le plan étant muni d'un repère orthonormé direct (O, A, B), on appelle cercle trigonométrique, le cercle de centre O de rayon 1.

b- Point associé à un nombre réel $\alpha \in]-\pi;\pi]$.



A tout point M du cercle trigonométrique, on associe l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right)$ de mesure principale α réciproquement, à tout nombre réel α élément l'intervalle $]-\pi;\pi]$ est associé le point M du cercle trigonométrique tel que : $Mes\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right) = \alpha$. M est appelé image de α sur le cercle trigonométrique.

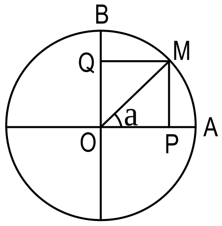
Exercice d'application



Sur le cercle trigonométrique ci-contre, place les points A, B, C, D, E et F images respectives des réels $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $-\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{2}$ et π.

2- Cosinus, sinus d'un angle orienté

Soit M un point du cercle trigonométrique appartenant à l'arc $\overset{\frown}{AB}$. On pose $mes\widehat{AOM} = a$



Compléter: $\cos a = \frac{OP}{OM} = OP$; $\sin a = \frac{OQ}{OM} = OQ$ car OM =1

Dans le repère (O ; A ; B) ; on a M(OP,OQ)

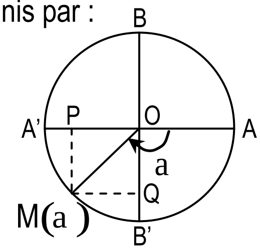
- $\cos\alpha$ est l'abscisse du point M
- $\sin\alpha$ est l'ordonnée du point M

a- Définition

Un angle orienté $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ de mesure principale α étant donné ; soit M l'image de α sur le cercle trigonométrique. Soit P et Q les projetés orthogonaux de M respectivement sur (A'A) et (B'B).

Le cosinus et le sinus de l'angle orienté $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ ou de sa mesure principale α sont définis par :

$\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \cos\alpha = \overline{OP}$ et $\sin\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \sin\alpha = \overline{OQ}$



b- Propriétés

Quel que soit le nombre réel α dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ on a :

(1) $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

(2) $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$

(3) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

(4) De plus si $\alpha \neq \pi$ alors $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

Exercice d'application

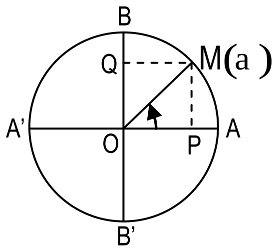
x étant la mesure principale d'un angle orienté, démontre que :

a) $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2\sin x.\cos x$

b) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$

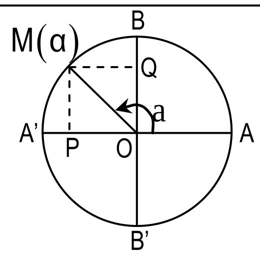
c) $\sin^4 x - \cos^4 x + 2\cos^2 x = 1$

c- Signe du sinus et cosinus d'un angle



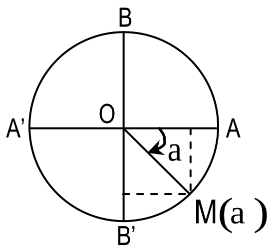
$\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

- $\cos\alpha$ ....
- $\sin\alpha$ ....



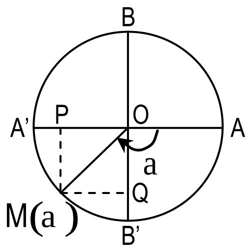
$\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

- $\cos\alpha$ ....
- $\sin\alpha$ ....



$\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$

- $\cos\alpha$ ....
- $\sin\alpha$ ....



$\alpha \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$

- $\cos\alpha$ ....
- $\sin\alpha$ ....

Exercice d'application

Compléter le tableau des signes suivants :

α	$-\pi$ $\qquad -\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de $\sin\alpha$				
Signe de $\cos\alpha$				

d- Sinus et Cosinus d'angle remarquable

Compléter le tableau ci-dessous

Mesure principale	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Cosinus						
Sinus						

3- Tangente d'un angle orienté

a- Définition

Soit un angle orienté $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ non droit de mesure principale α ($\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ et $\alpha \neq -\frac{\pi}{2}$). La tangente de cet angle orienté ou de sa mesure principale est définie par : $\tan\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Activité

Montrer que $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ avec $\alpha \in \left]-\pi;\pi\right]$ et $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ et $\alpha \neq -\frac{\pi}{2}$

b- Propriété

Quel que soit le nombre réel α de l'intervalle $\left]-\pi;\pi\right]$ tel que $\alpha \neq -\frac{\pi}{2}$ et $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ on a $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

Exercice d'application

Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};0\right[$ on a $\tan\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Calculer $\cos\alpha$

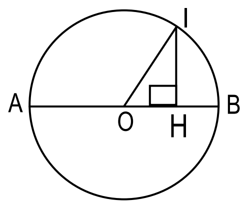
EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

Calculer $\cos x$ sachant que $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

Exercice 2

Sur la figure ci-contre, $OA = OB = OI = 1$ et $mes\widehat{BOI} = \frac{\pi}{4}$



1) Calculer les distances OH puis AH.
2) Démontrer que le triangle OIH est rectangle isocèle en H.
3) Déduire que $\cos\widehat{BAI} = \frac{2+\sqrt{2}}{2AI}$
4) a- Quelle est la nature du triangle AIB ?

   b- Montrer que $AI = 2\cos\widehat{BAI}$
5) a- Montrer que $mes\widehat{BAI} = \frac{\pi}{8}$

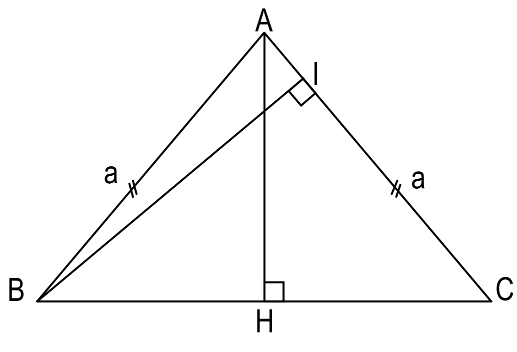
   b- Déduire des questions précédentes que $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Exercice 3

Soit α un réel tel que : $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ et ABC un triangle isocèle en A tel que $mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = 2\alpha$.

H et I sont les pieds des hauteurs issues respectivement de A et B. on pose : a=AB.

1) Montrer que : $BC = 2a\sin\alpha$
2) Montrer que : $BI = BC\cos\alpha$
3) Montrer que : $BI = a\sin 2\alpha$
4) En déduire que : $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$



CHAPITRE IV : PRODUIT SCALAIRE

I. DEFINITIONS ET PREMIERES PROPRIETES

1- Produit scalaire de deux vecteurs

a) Définition

b) Propriétés

2- Carré scalaire

a) Définition

b) Propriétés

3- Interprétation géométrique

a) Propriété 1

b) Propriété 2

II. PROPRIETES DU PRODUIT SCALAIRE

1- Vecteurs orthogonaux

a) Propriété

b) conséquences

2- Règles de calculs

a) Propriété fondamentale

b) Activité propriété

III. RELATIONS METRIQUES DANS UN TRIANGLE

1- Relations métriques caractérisant un triangle rectangle

2- Théorème d'ALKASHI

IV. FORME ANALYTIQUE DU PRODUIT SCALAIRE

CHAPITRE IV : PRODUIT SCALAIRE

I. DEFINITIONS ET PREMIERES PROPRIETES

1- Produit scalaire de deux vecteurs

a) Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le nombre réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ défini par :

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ si l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ si les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls.

$\vec{u}\cdot\vec{v}$ se lit « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ »

Exemples

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que :

1) $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{3}$; $\|\vec{v}\| = 4$ et $\text{Mes}\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \frac{\pi}{6}$ Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

2) $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{3}$; $\|\vec{v}\| = 4$ et $\text{Mes}\left(\vec{u},\vec{v}\right) = -\frac{\pi}{6}$. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$

b) Propriétés

(1) Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

(2) Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

(3) Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls :

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

2- Carré scalaire

a- Définition

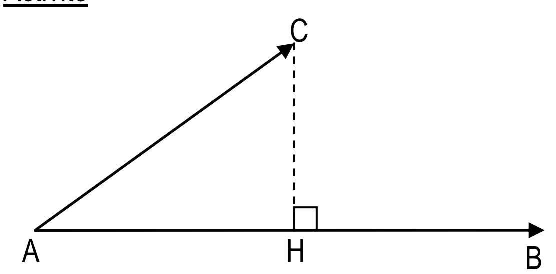
$\vec{u}\cdot\vec{u}$ est appelé carré scalaire de $\vec{u}$. On le note $\vec{u}^2$

b- Propriété

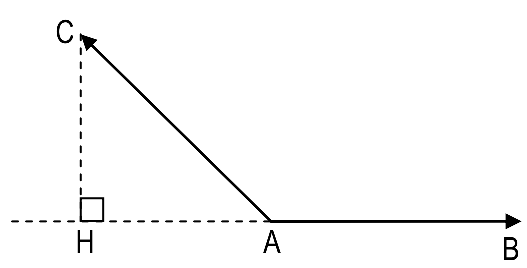
Pour tout vecteur $\vec{u}$: $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

3- Interprétation géométrique

Activité

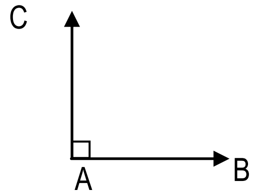


Montrer que $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = AB \times AH$



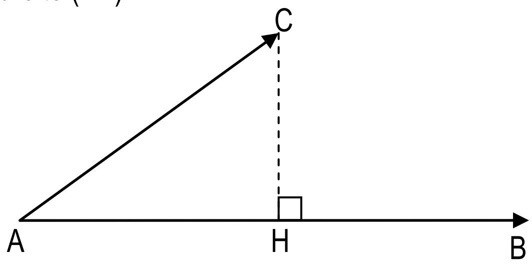
Montrer que $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = -AB \times AH$

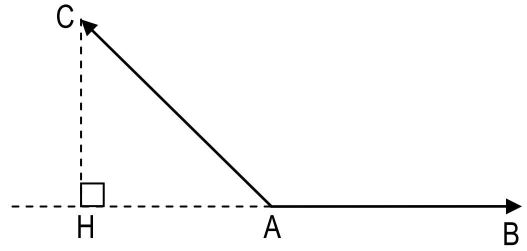
Montrer que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$



a) Propriété 1

Pour tous points A, B et C tels que $A\neq B$, on a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{AB}\times\overline{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).





b) Propriété 2

Soit A, B, C et D quatre points tels $A\neq B$ on a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overline{AB}\times\overline{HH'}$ où H et H' sont les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur la droite (AB).

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

Soit ABC un triangle isocèle tel que : AB = AC = 3 et $mes\widehat{A}=30°$

Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

Exercice 2

ABC un triangle isocèle en A tel que AB = 3 et BC = 4.

Soit H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC), K le projeté orthogonal de H sur (AC).

1) Calculer AH ; $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AC}$ de deux manières différentes.
2) En déduire la valeur de AK.

Exercice 3

On a un triangle équilatéral ABC de côté a. on appelle A', B', C' les milieux respectifs de [BC] ; [AC] et [AB]. Soit G le centre de gravité de ABC.

Calculer en fonction de a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA'}$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{BB'}$

II. PROPRIETES DU PRODUIT SCALAIRE

1- Vecteurs orthogonaux

a) Propriété

Activité 1

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

Démontrer que $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a : $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$

b) Conséquences

(1) Soit (D) et (D') deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a $(D)\perp(D')\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

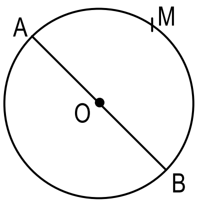
(2) Soit les points A, B, C, D avec $A \neq B$ et $C \neq D$ on a : $(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

(3) Soit les points A, B, M avec $A \neq B$; M appartient au cercle (C) de diamètre [AB] si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

Exercice

On considère la figure ci-contre.

Montrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$



2- Règles de calculs

a- Propriété fondamentale

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}'$, $\vec{v}'$ et pour tout nombre réel λ on a :

(1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

(2) $\vec{u} \cdot \left(\vec{v} + \vec{v}'\right) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v}'$

(3) $\left(\lambda \vec{u}\right) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \left(\lambda \vec{v}\right) = \lambda \left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)$

(4) $\left(\vec{u} + \vec{u}'\right) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u}' \cdot \vec{v}$

b- Activité - Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}'$, $\vec{v}'$. Calculer : $\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u}' + \vec{v}'\right)$; $\left(\vec{u} + \vec{v}\right)^2$; $\left(\vec{u} - \vec{v}\right)^2$ et $\left(\vec{u} - \vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u} + \vec{v}\right)$

Exercice d'application

On donne $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{3}$; $\|\vec{v}\| = \frac{1}{2}$ et $\operatorname{mes}\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = \frac{\pi}{3}$

1) Calculer $\vec{u} . \vec{v}$.

2) En déduire les valeurs de : $\left(\vec{u} + \vec{v}\right)^2$; $\left(\vec{u} - \vec{v}\right)^2$; $\left(\vec{u} + 2\vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u} - 2\vec{v}\right)$; $\left(3\vec{u} + \vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u} - 2\vec{v}\right)$

Remarque : Autre expression du produit scalaire.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

ABC est un triangle équilatéral de côté a avec $a \in \mathbb{R}_+^*$

Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} a^2$.

Exercice 2

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$; $\|\vec{v}\| = 5$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7$. On pose $\vec{i} = 4\vec{u} - \vec{v}$ et $\vec{j} = -3\vec{u} + \vec{v}$.

Démontrer que $\left(\vec{i}; \vec{j}\right)$ est une base orthonormée du plan.

Exercice 3

a) Calculer $S = 2\left(2\vec{u} + \vec{v}\right)^2 + \left(\vec{u} - 2\vec{v}\right)^2 - \left(3\vec{u} + \vec{v}\right) \cdot \left(3\vec{u} - \vec{v}\right) - 7\vec{v}^2$.

b) Démontrer que S=0 si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Exercice 4

ABC est un triangle tel que AB = 3 ; AC = 6 et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=10$.

1) Développer $\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)^2$.
2) Calculer BC.

Exercice 5

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires tels que: $\|\vec{u}\|=3$; $\vec{u}\cdot\left(2\vec{u}-\vec{v}\right)=12$ et $\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\dfrac{3}{5}$

1) Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$
2) Calculer $\|\vec{v}\|$

Exercice 6

1) Démontrer que quelque soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$; $\vec{u}\cdot\vec{v}=\dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$
2) Soit un triangle ABC et A' le milieu de [BC], calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ sachant que AB = 2 ; AC = 4 et AA' = 3.

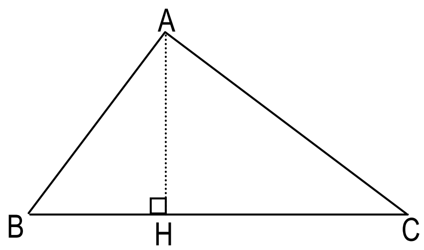
III. RELATION METRIQUE DANS UN TRIANGLE

1- Relation métrique caractérisant un triangle rectangle

Propriété

Soit ABC un triangle. H le projeté orthogonal de A sur (BC). Les énoncés suivants sont équivalents :

(1) ABC est rectangle en A
(2) $BC^2=AB^2+AC^2$
(3) $AB^2=\overline{BA}\times\overline{BC}$
(4) $AH^2=-\overline{HB}\times\overline{HC}$



2- Théorème d'ALKASHI

Activité

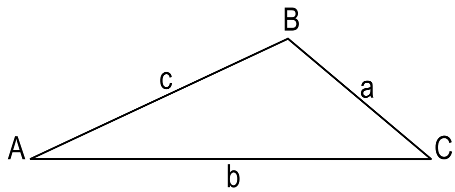
Soit ABC un triangle quelconque.

1) Développer $\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)^2$
2) En déduire l'expression de BC^2.

Propriété

Soit ABC un triangle quelconque. On pose $BC=a;\quad AC=b;\quad AB=c$ on a :

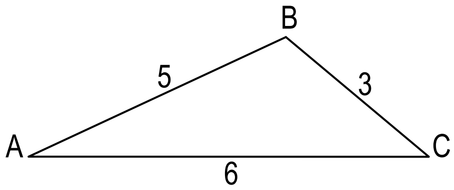
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$



Remarque

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=bc\cos\hat{A}$
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\left(b^2+c^2-a^2\right)$

Application



Soit la figure codée ci-contre.

Déterminer une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{A}$.

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

Soit ABC un triangle. On appelle S son aire. On pose a=BC ; b=CA et C=AB.

On sait que : $mes\widehat{A} = 45°$; $b = 3$ et $S = 3$.

Déterminer la longueur de chacun des côtés et les angles de ce triangle.

Exercice 2

Soit ABC un triangle et [AE] la médiatrice relative à [BC].

1) a- Développer $\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC}\right)^2$

   b- En déduire $AB^2 + AC^2$ en fonction de AE et BC.

2) a- Développer $\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2$

   b- En déduire $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ en fonction de AE et BC.

Exercice 3

ABC est un triangle tels que AB = 4 ; AC = 7 et $mes\widehat{A} = 120°$

1) calculer BC.
2) Déterminer $mes\widehat{B}$

IV. FORME ANALYTIQUE DU PRODUIT SCALAIRE

Expression dans une base orthonormée

Propriété

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormé $(\vec{i},\vec{j})$ on a : $\vec{u}\cdot\vec{u}' = xx' + yy'$

Conséquence

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j})$ on a : $\begin{cases} x = \vec{u}\cdot\vec{i} \\ y = \vec{u}\cdot\vec{j} \end{cases}$

Exercice d'application

Soit $(\vec{i}\,;\vec{j})$ une base orthonormée de v. on donne $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$; $\vec{b}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Calculer : $\vec{a}.\vec{b}$; $\vec{b}.\vec{u}$ et $\vec{a}.\vec{u}$

Remarque

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée, le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}$.

En effet $\vec{u}\cdot\vec{v} = a(-b) + ba = 0$

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

Soit $(o;\vec{i};\vec{j})$ un repère orthonormé. On considère les points : $A\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$.

1) Démontrer que ABC est un triangle rectangle en A.
2) Déterminer les longueurs de trois côtés et les mesures en degré des trois angles de ce triangle.

Exercice 2

Soit x un nombre réel. On considère dans un repère $(o;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé les deux points. $A\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}$.

Déterminer x pour que : $mes\widehat{AOB} = \frac{\pi}{3}$.

Exercice 3

On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(o;\vec{i};\vec{j})$ les points :

$A\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}\\4\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}-\frac{11}{2}\\0\end{pmatrix}$

1) Démontrer que ABCD est un losange.
2) Evaluer $mes\widehat{ABC}$ et $mes\widehat{BAD}$

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o;\vec{i};\vec{j})$. On donne $E\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$; $F\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$; $A\begin{pmatrix}a\\-2\end{pmatrix}$

1) Calculer en fonction de a, $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{FA}$
2) Déterminer la valeur de a pour que EFA soit un rectangle en F.

CHAPITRE V : HOMOTHETIES ET ROTATIONS

I. HOMOTHETIES

1- Définition

2- Propriétés

a) Propriété 1

b) Propriété 2

3- Propriétés de l'homothétie

a) Propriété fondamentale

b) Images de figures simples

c) Conservation de l'alignement, du parallélisme, de l'orthogonalité, du milieu d'un segment et des angles orientés

d) Multiplication des longueurs et des aires

4- Caractérisations d'une homothétie

a) Homothétie définie par son centre, un point et son image

b) Homothétie définie par son rapport, un point et son image

c) Homothétie définie par deux points et leurs images

II. ROTATIONS

1- Définition

2- Propriété

3- Propriété fondamentale

4- Images de figures simples

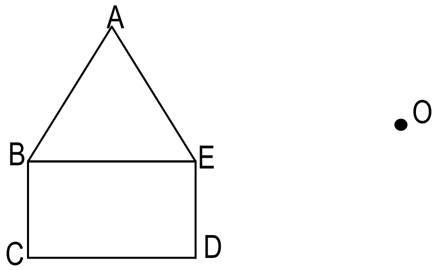
CHAPITRE V : HOMOTHETIES ET ROTATIONS

I. HOMOTHETIES

Activité

Soit h l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tels que $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OM}$.
A', B', C', D' et E' sont les images respectives des points A, B, C, D et E par l'application h.

1) Ecrire les relations liant les points et leurs images
2) Sur la figure ci-dessous, construire les points A', B', C', D' et E' à partir de l'application h.
3) Tracer en rouge la figure A', B' C', D' E' obtenue et comparer la taille des deux figures.
4) Quelle est l'image du point O par l'application h?
5) Comparer les distances OA et OA'.
6) Sachant que $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OM}$, que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ puis des points O, M et M'?



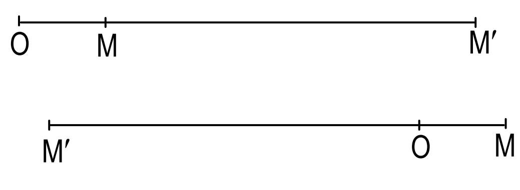
Cette application h est appelée homothétie de centre O et de rapport 2.

1- Définition

Soit O un point, k un nombre réel non nul. On appelle homothétie de centre O et de rapport k l'application h du plan dans lui-même qui, à tout point M, associe le point M' tel que : $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OM'}$

$k > 0$

$k < 0$



Cette homothétie est généralement notée : $h_{(O,k)}$

2- Propriétés

a) Propriété 1

Un point M, son image M' par une homothétie et le centre de cette homothétie sont alignés.

Vocabulaire

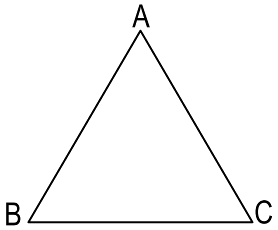
Un point est invariant par une application f du plan P dans lui-même lorsqu'il est sa propre image. Il est immédiat que O est invariant par $h_{(O,k)}$

b) Propriété 2

Le seul point invariant, par une homothétie de rapport différent de 1, est son centre

Exercices d'application

Exercice 1 : on considère le triangle ABC ci-dessous. Construire l'image de B et C par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.



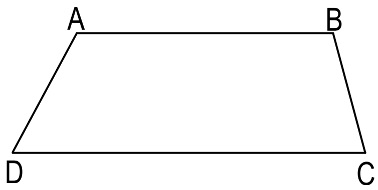
Exercice 2 : Interpréter en utilisant une homothétie les égalités vectorielles suivantes:

1) $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow$ ……………………………………………………………………………………………
………
2) $\overrightarrow{MN} = -5\overrightarrow{MP} \Leftrightarrow$ ……………………………………………………………………………………………
………
3) $\overrightarrow{IJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{IK} \Leftrightarrow$ ……………………………………………………………………………………………
………

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

On considère le quadrilatère ABCD ci-dessous. Construire les points E, F et G images respectives des points A, B et D par l'homothétie de centre C de rapport -2.



Exercice 2

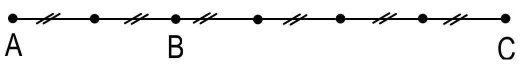
E, F et G sont trois points distincts deux à deux du plan tels que $\overrightarrow{EF} = -4\overrightarrow{FG}$.

Déterminer le rapport k de :

1) L'homothétie de centre E qui transforme F et G.
2) L'homothétie de centre F qui transforme E et G.
3) L'homothétie de centre G qui transforme F et E.

Exercice 3

On considère la figure suivante :

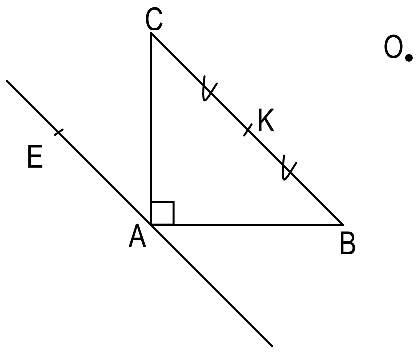


1) Trouver le centre de l'homothétie de rapport 3 qui transforme B en C.
2) Trouver le centre de l'homothétie de rapport – 2 qui transforme A en C.
3) Transformer le centre de l'homothétie de rapport $\frac{2}{3}$ qui transforme A en B.

3- Propriétés de l'homothétie

Activité Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle rectangle en A; K est le milieu du segment [BC] et la droite (EA) est parallèle à la droite (BC).

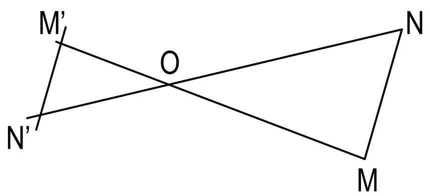
1) Construire les points A', B', C', E' et K' images respectives des points A, B, C, E et K par l'homothétie de centre O et de rapport 2.

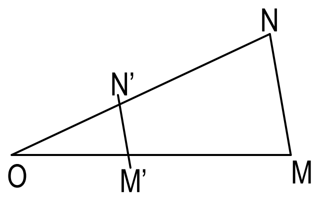


2) Compléter les égalités vectorielles suivantes :
$\overrightarrow{A'B'} =$ ....$\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{C'K'} =$ ....$\overrightarrow{CK}$; $\overrightarrow{E'A'} =$ ....$\overrightarrow{EA}$
3) Quelle est la position relative des droites (A'B') et (A'C')?
4) Quelle est la position relative des droites (E'A') et (B'C')?
5) Quel est le milieu du segment [B'C']?
6) Que peut-on dire des points B', C' et K'?

a) Propriété fondamentale

Soit h une homothétie de rapport k, M’ et N’ les images respectives par h de deux points quelconques M et N. On a : $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$





b) Images de figures simples

Soit h une homothétie de rapport k , A’, B’ et I’ les images respectives de A, B (avec A ≠ B) et I par h :

(1) L’image de la droite (AB) est la droite (A’B’) et (A’B’) est parallèle à (AB)
(2) L’image du segment [AB] est le segment [A’B’]
(3) L’image de la demi-droite [AB) est la demi-droite [A’B’)
(4) L’image du cercle de centre I et de rayon r est le cercle de I’ et de rayon $|k|r$

c) Conservation de l'alignement, du parallélisme, de l'orthogonalité, du milieu d’un segment et des angles orientés

- Toute homothétie transforme :
  (1) Trois points alignés en trois points alignés ;
  (2) Deux droites parallèles en deux droites parallèles ;
  (3) Deux droites perpendiculaires en deux droites perpendiculaires ;
  (4) Le milieu d’un segment en le milieu du segment image.
- Soit A, B, C trois points d’images respectives A’, B’, C’ par une homothétie.
  On a : $\left(\overrightarrow{C'A'},\overrightarrow{C'B'}\right) = \left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$ (on dit l’homothétie conserve les angles orientés)

d) <u>Multiplication des longueurs et des aires</u>

Soit h une homothétie de rapport k

(1) L'image d'un segment de longueur l est un segment de longueur $|k|l$

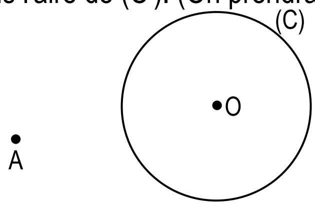
(2) L'image d'une figure d'aire A est une figure d'aire k^2A

Exercice d'application :

l'unité est le centimètre

Sur la figure ci-dessous, (C) est un cercle de centre O et de rayon 1,5.

1) Construire l'image (C') de (C) par l'homothétie h de centre A et de rapport – 2.
2) Calculer l'aire du cercle (C) puis en déduis l'aire de (C'). (On prendra $\pi = 3{,}1$).
3) Calculer le rayon du cercle (C').



EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

Soit un parallélogramme ABCD, O son centre, B' le symétrique de A par rapport à B et D' le symétrique de A par rapport à D.

Démontrer que les points B', C et D' sont alignés.

Exercice 2

Soit ABCD un parallélogramme de centre O.

1) Construire le point I tel que $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$.
2) Soit h l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{4}$ qui transforme D en C.

   Construire les points E et S tels que h(B)=E et h(O)=S

3) a- Justifier que S est le milieu du segment [EC].

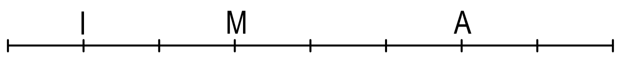
   a- Démontrer que $\overrightarrow{EC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$.

4- Caractérisations d'une homothétie

a) <u>Homothétie définie par son centre, un point et son image</u>

<u>Activité</u>

Soit I, M et A trois points alignés et distincts deux à deux comme l'indique la figure ci-dessous.

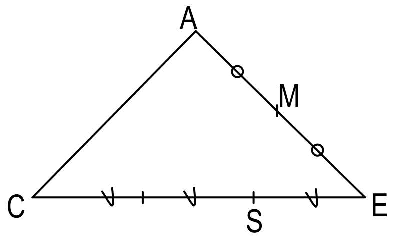


1) Montrer qu'il existe une homothétie et une seule de centre I qui transforme M en A.
2) Déterminer son rapport

Propriété

Soit trois points alignés O, A, A’ deux à deux distincts. Il existe une homothétie et une seule de centre O qui transforme A en A’

Exercice d'application



On donne la figure ci-contre.
h est l’homothétie de centre S qui transforme C en E.
Construire les points A’ et M’ images respectives de A et M par h.

b) Homothétie définie par son rapport, un point et son image

Activité

Sur la figure ci-dessous.

1) Construire le centre O de l’homothétie h de rapport – 2 qui transforme A en B

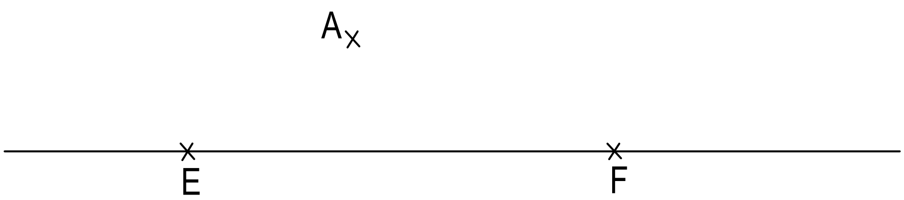
2) h étant de rapport k différent de zéro et de un, exprimer le vecteur $\overrightarrow{AO}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Propriété

Soit un nombre réel k différent de 0 et 1, deux points A et A’. Il existe une homothétie et une seule de rapport k qui transforme A en A’.

Exercice d’application

Soit h une homothétie de rapport 2 qui transforme E en F. Construire le point B image du point A par h.



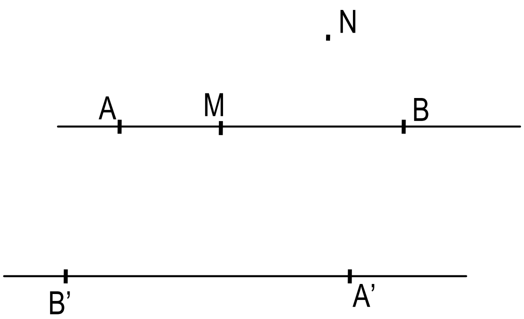
c) Homothétie définie par deux points et leurs images

Propriété

Soit quatre points A, B, A’,B’ tels que (AB) // (A’B’) et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$. Il existe une homothétie et une seule qui transforme A en A’ et B en B’.

Exercice d’application

On donne les points A, B, A’, B’, M et N comme l’indique la figure ci-dessous. Soit h l’homothétie qui transforme A en A' et B en B'.
Construire les points M’ et N’ images respectives de M et N par h.

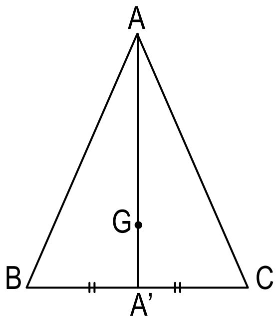


EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

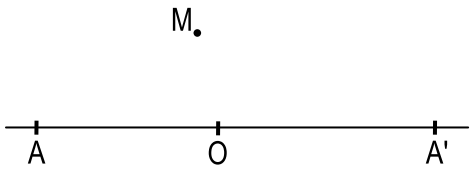
Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle de centre de gravité G, A' est le milieu de [BC].

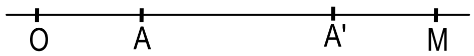
1) Déterminer le rapport k de l'homothétie h de centre A qui transforme A' en G.
2) Démontrer que l'homothétie h' de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$ transforme A en A'



Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, construire le point M' l'image du point M par l'homothétie h de centre O qui transforme A en A'.

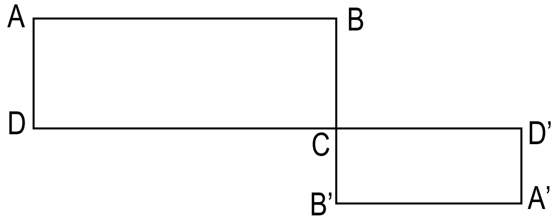




Exercice 3 (l'unité est le centimètre)

On donne deux rectangles ABCD et CB'A'D' comme indiqué sur la figure ci-contre. On a AB = 4 ; BC =2 ; CD'= 2 ; et CB' = 1

1) Montrer qu'il existe une homothétie h de centre C qui transforme D en D' et B en B' ; Déterminer son rapport k.
2) Montrer que A' est l'image de A par h.
3) Justifier que les droites (BD) et (B'D') sont parallèles.



II. ROTATIONS

Activité

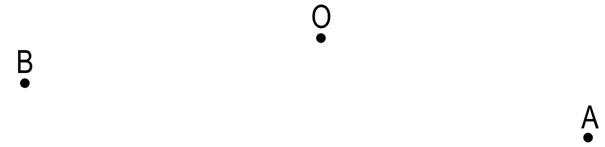
Soit r une application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tels que OM'=OM et $Mes\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right)=\frac{\pi}{3}$. Les points A' et B' sont les images respectives des points A et B par l'application r.

1) Compléter les égalités suivantes :

O A' =………………………..et $Mes\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'}\right)$=………………………………………

OB' =………………………...et $Mes\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OB'}\right)$=………………………………………

2) Sur la figure ci-dessous, construire les point A' et B'.
3) Quelle est l'image du point O par l'application r ?



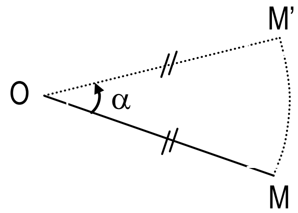
- L'application r est appelée rotation de centre O et d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{3}$

1- Définition

Soit O un point, α un nombre réel appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$

On appelle rotation de centre O et d'angle α l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M associe le point M' tel que :

- Si M = O, alors M' = M
- Si M ≠ O ; alors OM' = OM et $\text{Mes}\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}\right) = \alpha$



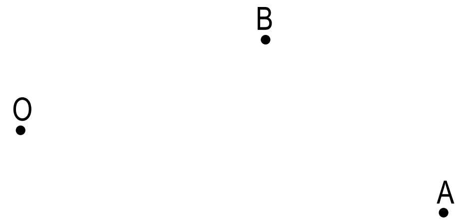
On note généralement $r_{(O,\alpha)}$ la rotation de centre O et d'angle α.

2- Propriété

Le seul point invariant par une rotation d'angle non nul est le centre de cette rotation

Exercice d'application

On donne les points O, A et B ci-dessous.



1) Construire l'image B' de B par la rotation de centre O et d'angle orienté de mesure π
2) Observer les points O, B et B'. Justifier que O est le milieu du segment [BB']
3) Construire l'image A' de A par la rotation de centre O et d'angle orienté 0 (zéro) et observer les points O, A et A'. Que peut-on constater ?

Remarques

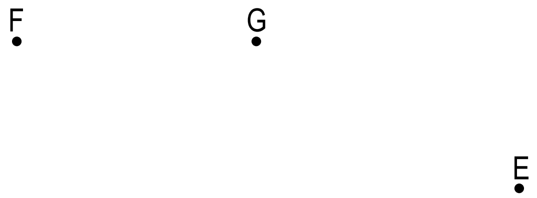
- Si $\alpha = 0$; tout point est sa propre image par la rotation r d'angle de mesure α. Une telle application est l'identité du plan.
- Si $\alpha = \pi$; alors la rotation d'angle α et de centre O est la symétrie de centre O.

3- Propriété fondamentale

Activité

On considère les points E, F et G ci- dessous.

1) Construire les points E' et F' images respectives des points E et F par la rotation r de centre G d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{4}$

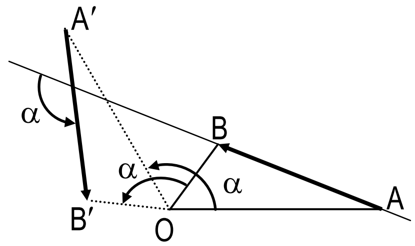


2) Donner la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{E'F'}\right)$ et comparer les distances EF et E'F'.

<u>Propriété fondamentale</u>

Soit r une rotation d'angle α . A' et B' les images respectives par r de deux points quelconques A et B.

On a : $A'B' = AB$ et $\text{Mes}\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}\right) = \alpha$

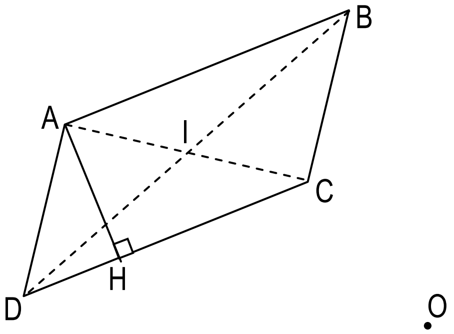


4- <u>Images de figures simples</u>

<u>Activité 3</u>

Sur la figure ci-dessous, ABCD est un parallélogramme de centre I, la droite (AH) est perpendiculaire à la droite (DC) et $H \in [DC]$. On considère la rotation r de centre O et d'angle orienté de mesure $-\frac{\pi}{3}$.

1) Construire les points A', B', C', D', H' et I' images respectives des points A, B, C, D, H et I par r.



2) Que peut-on dire des directions des droites (A'B') et (D'C') et celles des droites (A'H') et (D'C') ?
3) Quelle est la nature du quadrilatère A'B'C'D' ?
4) Que peut-on dire des points D', H' et C' ?
5) Que représente le point I' pour le quadrilatère A'B'C'D' ?

<u>Propriétés</u>

Toute rotation transforme :

(1) Une droite en une droite ;
(2) Un segment en un segment ;

(3) Une demi-droite en une demi-droite ;
(4) Un cercle en un cercle de même rayon ;
(5) Le milieu d'un segment en le milieu du segment image ;
(6) Deux droites parallèles en deux droites parallèles ;
(7) Deux droites perpendiculaires en deux droites perpendiculaires.

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

(C) est un cercle de centre O. A et B sont deux points de (C) tels que $\text{mes}\widehat{AOB} = 90°$. r est la rotation de centre O et d'angle orienté $\frac{\pi}{3}$.

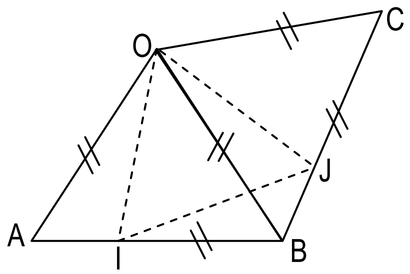
1) Construire le point C image de B par r.
2) Calculer les mesures des angles du triangle ABC.

Exercice 2

Dans le plan orienté, on considère le triangle ABC tels que $\text{mes}\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{2}$. B' est l'image de B par la rotation r de centre A et d'angle orienté $\frac{\pi}{2}$ et C' est l'image de C par la rotation r' de centre A et d'angle orienté $-\frac{\pi}{2}$

1) Quelle est la nature du triangle AB'C' ?
2) Soit E = r(C) et H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).
   a- Démontrer que les points A, C' et E sont alignés.
   b- Montrer que les droites (B'E) et (AH) sont parallèles.
   c- Démontrer que la droite (AH) est médiane du triangle AB'C'.

Exercice 3



Sur la figure ci-contre, OAB et OBC sont deux triangles équilatéraux.

$I \in [AB]$ et $J \in [BC]$ tels que AI = BJ.

Soit r la rotation de centre O et d'angle orienté $\frac{\pi}{3}$.

1) Déterminer l'image du segment [AB] par r.
2) En déduire que r(I)=J.

CHAPITRE VI : DROITES ET CERCLES

I. DROITES

1- Equation cartésienne d'une droite

a) Définition

b) Equation réduite

2- Représentation paramétrique d'une droite

3- Exemples d'utilisation de représentation de paramétrique

II. CERCLES

1- Cercle défini par un de ses diamètres

2- Cercle défini par son centre et son rayon

3- Propriétés

CHAPITRE VI : DROITES ET CERCLES

I. DROITES

1- Equation cartésienne d'une droite

a) Définition

Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère, (D) une droite. Toute équation de (D) du type $ax+by+c=0$ est appelée équation cartésienne de (D) dans $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Avec a, b et c des nombres réels.

Remarque

Soit (D) une droite admettant $ax+by+c=0$ pour équation cartésienne. Pour tout nombre réel k non nul, $kax+kby+kc=0$ est une autre équation cartésienne de (D). Toute droite admet donc une infinité d'équations cartésienne.

❖ Théorème

Le plan est muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. La droite (D) d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$.

Remarque

Soit (D) une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$.

Toute droite (D') parallèle à (D) admet une équation du type $ax+by+d=0$.

Exercice d'application

Le plan est muni du repère $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ orthonormé. On donne $A\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$; $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$.

1. Construire la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

b) Equation réduite

Définition

Le plan est muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$; m et p sont des nombres réels.

- Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation réduite du type $y=mx+p$
- Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation réduite du type $x=p$

Propriété

Soit (D) et (D') deux droites de coefficients directeurs respectifs m et m'. On a :

(1) $(D)//(D') \Leftrightarrow m=m'$

(2) Lorsque le repère est orthonormé : $(D)\perp(D') \Leftrightarrow mm'=-1$

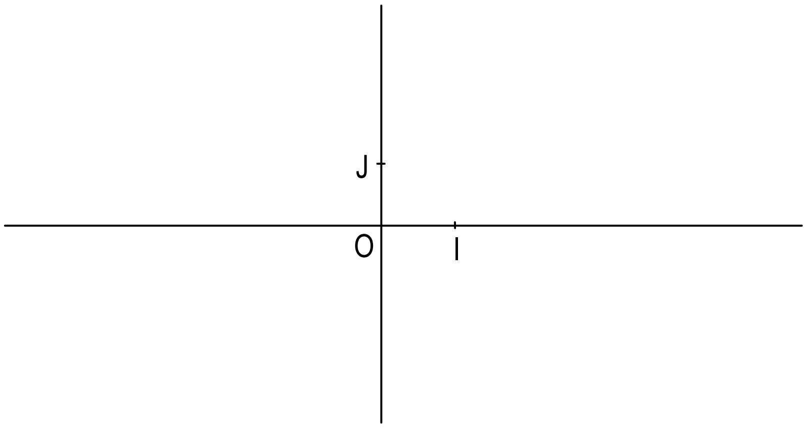
Remarque

Soit (D) une droite d'équation réduite $y=mx+p$.

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est vecteur directeur de la droite (D), le point $A\begin{pmatrix}0\\p\end{pmatrix}$ appartient à la droite (D).

Exercice d'application

Soit $(o;\vec{i};\vec{j})$ un repère orthonormé. On donne $A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. Construire la droite (D) passant par A et de coefficient directeur - 2



2- Représentation paramétrique d'une droite

Activité

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ un point, $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ un vecteur directeur non nul et (D) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$. On désigne par $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un point de (D).

Exprimer x et y en fonction des coordonnées de A et $\vec{u}$.

Théorème :

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Soit a, b, x_0, y_0 des nombres réels tels que : $(a;b) \neq (0;0)$.

L'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ pour lesquels il existe un nombre réel t vérifiant $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ est la droite (D) passant par le point $A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

Définition

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

La droite (D) passant par le point $A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

On dit que le système $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ ($t \in \mathbb{R}$) est une représentation paramétrique de la droite (D) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Remarques

- Si $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un point de (D), le nombre réel t vérifiant $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ est unique : c'est l'abscisse du point M dans le repère $\left(A;\vec{u}\right)$ de la droite (D). On dit que M est le point de paramètre t.
- Une droite (D) admet plusieurs représentations paramétriques, chacune étant déterminée par le choix d'un point A sur (D) et d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de (D).

Exercice d'application

Soit $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ un repère orthonormé.

Donner une représentation paramétrique de (D) passant par $A\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3- Exemples d'utilisation de représentation paramétrique

a- Démontrer qu'un point appartient ou n'appartient pas à une droite

Exercice

$\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ est un repère orthonormé. On donne (D) une droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + t \end{cases}$ avec $(t \in \mathbb{R})$, $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Les points A et B appartiennent-ils à (D) ? Justifier votre réponse.

b- Passage d'une représentation paramétrique d'une droite à une équation cartésienne

Exercice

Le plan est muni d'un repère $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ orthonormé. On donne (D) une droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 5 + t \end{cases}$ avec $(t \in \mathbb{R})$. Déterminer une équation cartésienne de (D).

c- Passage d'une équation cartésienne à une représentation paramétrique d'une droite.

Exercice

$\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ est un repère orthonormé. (T) est une droite d'équation cartésienne : $2x - 3y + 5 = 0$.

Déterminer une représentation paramétrique de (T).

d- Démontrer que deux droites sont sécantes en utilisant leurs représentations paramétriques

Exercice

Soit la droite (D) de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 4 - 2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ celle de la droite (D').

Déterminer les coordonnées de I point d'intersection de (D) et (D').

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice1

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) dans chaque cas :

1) (D) passe par $A(-1;2)$ et $B(1;4)$.
2) (D) passe par $C(2;-5)$ et est dirigée par $\vec{u}(1;1)$
3) (D) passe par $D(3;-1)$ et est parallèle à la droite d'équation cartésienne $7x-4y+3=0$.

Exercice 2

$(O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère orthonormé. Dans chacun des cas, donner une représentation paramétrique de la droite (D).

1) (D) passe par $A(-2;3)$ et $B(1;5)$.
2) (D) passe par $C(3;-1)$ est dirigée par $\vec{u}(4;1)$
3) (D) passe par $D(5;-2)$ et est parallèle à la droite d'équation cartésienne $2x-y-6=0$.

Exercice 3

$(O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère orthonormé.

1) Construire la droite (L) passant par $A(3;-2)$ et de coefficient directeur $-\frac{1}{2}$.
2) Construire la droite (D) passant par $K(1;2)$ dirigée par le vecteur $\vec{u}(-2;2)$.

Exercice 4

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère orthonormé.

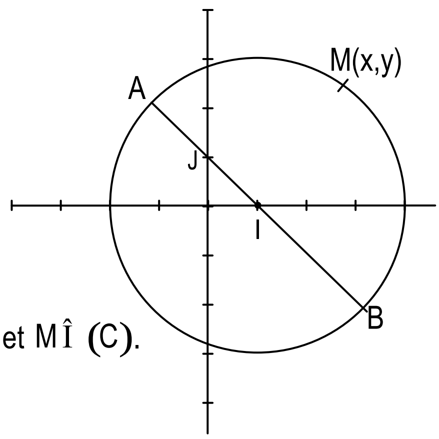
Soit les droites (D) et (T). (D) a pour representation parametrique : $\begin{cases} x=-2+3t \\ y=5-at \end{cases}$ avec

$t \in \mathbb{R}$; et la droite (T) a pour équation $(T): 2x+y-3=0$.

1) Déterminer a pour que (D) et (T) soient parallèles.
2) On donne a = 2.
   a- Justifier que (D) et (T) sont sécantes.
   b- Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
3) Ecrire une représentation paramétrique de la droite (T).

II. CERCLES

1- Cercle défini par un de ses diamètres



Activité

$(O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère orthonormé.

On donne $A(-1;2)$; $B(3;-2)$ et $M(x;y)$ avec [AB] diamètre du cercle (C) et $M \in (C)$.

1) Justifier que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

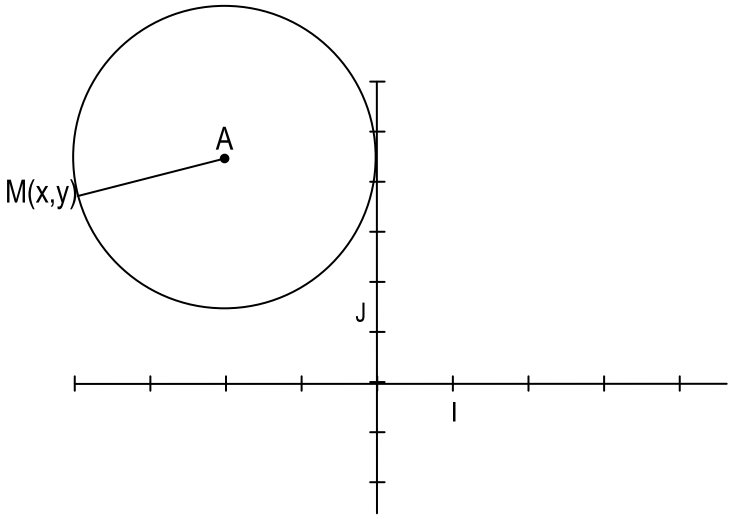
2) Exprimer $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ en fonction de x et y.

3) En déduire une équation de l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartient à (C).

<u>Conclusion</u> :……………………………………………………………………………………………….est l'équation de……………………………………………………………………………..défini par le diamètre [AB].

2- <u>Cercle défini par son centre et son rayon</u>

<u>Activité</u>



Soit $(O;I;J)$ un repère orthonormé.

On donne $A(-2;3)$ centre du cercle (C) de rayon 2 et $M(x;y)$ un point de (C).

1) Exprimer IM^2 en fonction de x et y.

2) En déduire une équation de l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (C)$.

<u>Conclusion</u>

3- <u>Propriété</u>

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(1) Soit (C) un cercle, il existe des nombres réels a, b et c tels que, pour tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$M \in (C) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

(2) Soit a, b et c des nombres réels ; l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que :

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ est :

- Soit l'ensemble vide ;
- Soit un point ;
- Soit un cercle.

<u>Remarque</u>

Soit (C) l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifiant $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$. On sait que (C) est soit vide, soit un point, soit un cercle. Si l'on connaît deux points distincts de (C) alors (C) est un cercle.

Exercice d'application

Soit $(o;\vec{i};\vec{j})$ un repère orthonormé. On donne considère $E\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $F\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$

1) Trouver une équation cartésienne du cercle de centre E et de rayon 3.
2) Trouver une équation cartésienne du cercle de diamètre [EF].

Travaux dirigés

Exercice 1

Ecrire chacune des expressions ci-dessous sous la forme : $(x-a)^2+(y-b)^2+d$ où a, b et d sont des réels.

$A = x^2+y^2-4x+2y+3$ $\qquad$ $B = x^2+y^2+4x-2y+5$

Exercice 2

Trouver l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que :

$A_1 : x^2+y^2-4x+2y+3=0$

$A_2 : x^2+y^2-4x-2y+9=0$

$A_3 : x^2+y^2+4x-2y+5=0$

Exercice 3

Soit $(o;\vec{i};\vec{j})$ un repère orthonormé. On donne

- $(D): 5x+y-6=0$
- (C) cercle de centre $A(2;2)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

Déterminer les points d'intersections du cercle(C) et de la droite (D).

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o;\vec{i};\vec{j})$. On considère les points $B\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}$.

Trouver une équation cartésienne du cercle de diamètre [BC]. Préciser les coordonnées du centre de ce cercle, ainsi que son rayon.

Exercice 2

Soit $(o;\vec{i};\vec{j})$ un repère orthonormé. Déterminer l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ vérifiant :

1) $x^2+y^2-2x+4=0$ $\qquad$ 2) $x^2+y^2-4x+6y+13=0$ $\qquad$ 3) $x^2+y^2-4x+6y-3=0$

Exercice 3

Soit $(o;\vec{i};\vec{j})$ un repère orthonormé. On considère $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$:

1) Démontrer que A, B, C sont non alignés.
2) Trouver une équation du cercle (C) circonscrit au triangle ABC.
3) Déterminer les points d'intersections de (C) avec l'axe des abscisses.