MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE L'ALPHABETISATION

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Union – Discipline – Travail

MON ECOLE A LA MAISON

SECONDAIRE
2 C
MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Durée : 08 heures Code :

COMPETENCE 3	Traiter une situation relative à la géométrie du plan, à la géométrie de l'espace et aux transformations du plan
THEME 1	Géométrie du Plan

LEÇON : VECTEURS ET POINTS DU PLAN

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Un professeur de mathématiques d'une classe de seconde C propose l'activité suivante à ses élèves lors d'un cours. Pour cela, il forme des équipes de deux personnes.
Dans chaque équipe, l'une des personnes dispose de la figure 1 et l'autre de la figure 2.
La personne qui a la figure 1 donne des informations à l'autre pour placer les points P et Q en utilisant les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

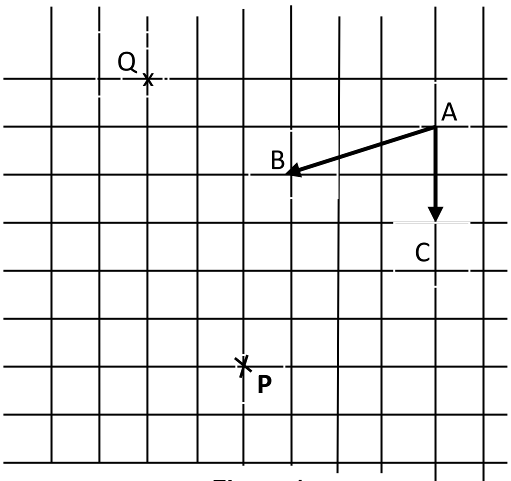


Figure 1

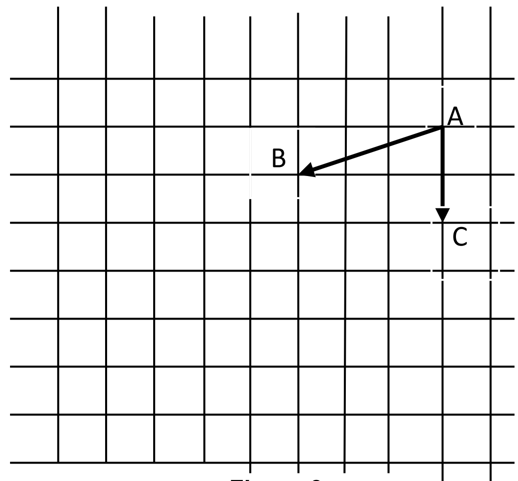


Figure 2

Un bonus est attribué à chaque équipe qui réussit l'activité.
Tous les élèves de cette classe veulent participer. Ils décident alors de faire, par 2pes de deux, des recherches sur les combinaisons linéaires de vecteurs.

B. CONTENU DE LA LECON

I-VECTEURS

1. Définition et propriétés

a) Définition et notation

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est déterminé par le couple de points (A ; B).
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour :

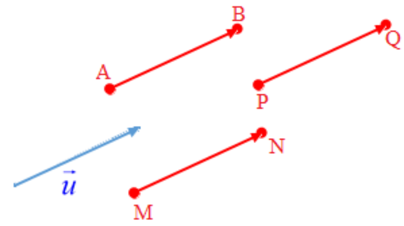
- direction celle de la droite (AB) ;
- sens celui du couple $(A;B)$;
- longueur celle du segment $[AB]$.

On appelle **plan vectoriel** l'ensemble de tous les vecteurs du plan et on le note $\boldsymbol{\mathcal{V}}$.

Remarque

- Sur la figure ci-dessous, on a : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$

- Les couples (A, B) , (M, N) et (P, Q) sont des représentants du vecteur $\vec{u}$.
- Un vecteur a une infinité de représentants



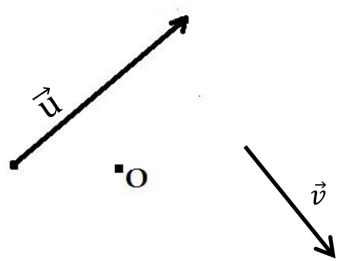
b) Propriété fondamentale

Pour tout point O et tout vecteur $\vec{u}$ du plan vectoriel $\mathcal{V}$, il existe un et un seul point M tel que : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

Exercice de fixation

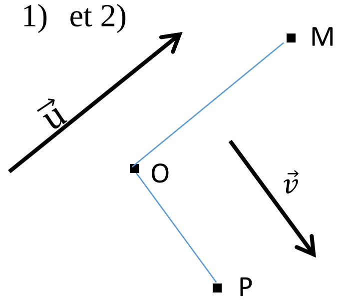
On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,et le point O ci-contre.

1. Construis le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$
2. Construis un point P tel que $\overrightarrow{OP} = \vec{v}$



Solution :

1) et 2)



2- Norme d'un vecteur

a) Définition

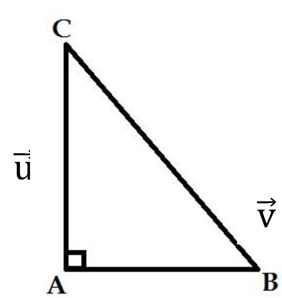
On appelle norme du vecteur $\vec{u}$, la distance AB où $(A; B)$ est un représentant de $\vec{u}$.
On la note : $\|\vec{u}\|$.
On a : $\|\vec{u}\| = AB$.

Exemple

ABC est un triangle rectangle en A avec AC = 4 et AB = 3.

On pose $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{w}$.

Détermine $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\|\vec{w}\|$



- Norme du vecteur $\vec{u}$: $\|\vec{u}\| = AC = 4$
- Norme du vecteur $\vec{v}$: $\|\vec{v}\| = AB = 3$
- Norme du vecteur $\vec{w}$:
  $\|\vec{w}\| = \sqrt{AB^2 + AC^2} \quad = \sqrt{9+16} \quad = \sqrt{25} = 5$

<u>Remarque</u>

Deux vecteurs de même norme ne sont pas nécessairement égaux.

b) Propriétés

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs ; k est un nombre réel. On a :

- $\|\vec{u}\| \geq 0$
- $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.
- $\|\vec{u}\| = \|-\vec{u}\|$.
- $\| \vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Exercice de fixation

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 2$ et $\|\vec{v}\| = 0{,}5$

Détermine $\|-\vec{u}\|$ et encadre $\| \vec{u} + \vec{v}\|$.

Solution

- $\|-\vec{u}\| = \|\vec{u}\| = 2$.
- On a : $0 \leq \| \vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ donc $0 \leq \| \vec{u} + \vec{v}\| \leq 2 + 0{,}5$ c'est-à-dire :

  $0 \leq \| \vec{u} + \vec{v}\| \leq 2{,}5$

3-Vecteur unitaire

a) Définition

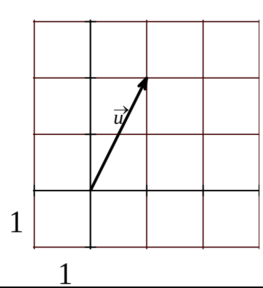
On appelle vecteur unitaire tout vecteur de norme 1.

b) Propriété

Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul.

Le vecteur $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ est un vecteur unitaire.

Exercice de fixation

	1) Calcule $\|\vec{u}\|$. 2) Justifie que $\frac{1}{\sqrt{5}}\,\vec{u}$ est un vecteur unitaire

Solution

1. En exploitant le quadrillage, $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$.

2. D'après la propriété précédente le vecteur $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ est un vecteur unitaire c'est-à-dire $\frac{\vec{u}}{\sqrt{5}}$ est unitaire.

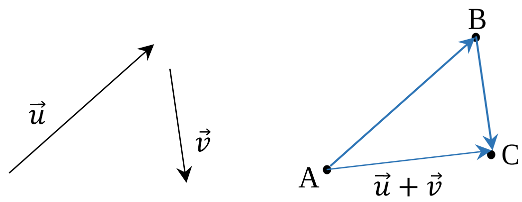
4 -Calculs vectoriels

a) Somme de vecteurs

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. A, B et C trois points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$.

On pose $\vec{u}+\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ est un vecteur de représentant (A, C).



b) Multiplication d'un vecteur par un réel

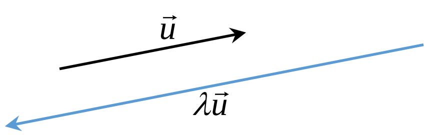
Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et λ un réel non nul.

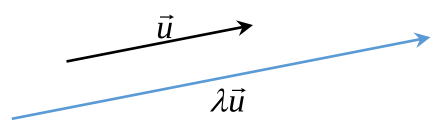
Le produit du vecteur $\vec{u}$ par λ est un vecteur noté $\lambda\,\vec{u}$. Ce vecteur a pour :

- direction celle de $\vec{u}$
- sens celui de $\vec{u}$ si $\lambda > 0$, celui de $-\vec{u}$ si $\lambda < 0$
- norme $|\lambda|\|\vec{u}\|$.

♦ $\lambda < 0$



♦ $\lambda > 0$



On admet que pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout réel λ,

- $\lambda\vec{0} = \vec{0}$
- $0.\vec{u} = \vec{0}$

Conséquence :

λ étant un réel et $\vec{u}$ un vecteur,

$\lambda\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre, sont représentés deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{u}$.
Représente les vecteurs -3$\vec{u}$; 2$\vec{v}$ et $-\frac{3}{2}\vec{u}$.

Solution :

Remarque :
$\vec{v}$ étant un vecteur
$\vec{v} + \vec{v}$ est noté $2\vec{v}$.

c) Propriétés

Pour tout vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, pour tous nombres réels λ et μ on a :

(1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
(2) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
(3) $\vec{u} + (\vec{0}) = \vec{u}$
(4) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$
(5) $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$
(6) $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$
(7) $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$
(8) $1\vec{u} = \vec{u}$

Exercice de fixation

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs du plan. Simplifie l'écriture des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

$\vec{a} = 8\vec{u} - 2\vec{v} + 6\vec{w} + 6\vec{v} - 2(\vec{u} + 3\vec{w})$

$\vec{b} = 2\vec{u} - 3(4\vec{v} - 2\vec{w}) - 5(3\vec{u} + 2\vec{v})$

Solution :

$\vec{a} = 8\vec{u} - 2\vec{v} + 6\vec{w} + 6\vec{v} - 2\vec{u} - 6\vec{w}$

$\vec{a} = 6\vec{u} + 4\vec{v}$

$\vec{b} = 2\vec{u} - 12\vec{v} + 6\vec{w} - 15\vec{u} - 10\vec{v}$

$\vec{b} = -13\vec{u} - 22\vec{v} + 6\vec{w}$

5 -Combinaisons linéaires

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
On appelle **combinaison linéaire** de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$, tout vecteur de la forme : $\boldsymbol{\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}}$, où λ et μ sont des nombres réels.
λ et μ sont les coefficients respectifs de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

<u>Exemple</u> : $2\vec{u} - 3\vec{v}$; $\frac{1}{4}\vec{u} + \vec{v}$ sont des combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercice de fixation

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont des vecteurs du plan tels que $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{v} = -\vec{a} - 2\vec{b}$.

Ecris $\vec{a}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Solution

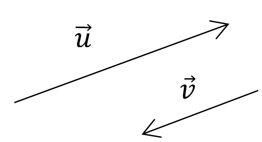
$$\begin{array}{l} \vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} \\ \vec{v} = -\vec{a} - 2\vec{b} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 2\vec{u} = 4\vec{a} + 2\vec{b} \\ \vec{v} = -\vec{a} - 2\vec{b} \end{cases}$$

$$2\vec{u} + \vec{v} = 3\vec{a} \quad \Rightarrow \vec{a} = \frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$$

6-Vecteurs colinéaires

a-Définition

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires si l'un d'eux est le vecteur nul ou s'ils ont la même direction.



<u>Exemple</u>

Les vecteurs $\vec{u}$ et $-2\vec{u}$ sont colinéaires.

Remarque

Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

b- Propriétés

Propriété 1

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un nombre réel λ tel que : $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ (ou $\vec{u} = \lambda\vec{v}$).

Exercice de fixation

On considère les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} - 2\vec{w} = \vec{0} \\ \vec{u} - \vec{v} = -\vec{w} \end{cases}$

Justifie que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Solution :

$$\begin{cases} \vec{u} + \vec{v} - 2\vec{w} = \vec{0} \\ \vec{u} - \vec{v} = -\vec{w} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u} + \vec{v} = 2\vec{w} \\ \vec{u} - \vec{v} = -\vec{w} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u} + \vec{v} = 2\vec{w} \\ 2\,\vec{u} - 2\vec{v} = -2\vec{w} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{3}\vec{v}$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

Propriété 2

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, λ et μ deux nombres réels. Les deux énoncés suivants sont équivalents.

(1) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires

(2) $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{0} \implies \lambda = \mu = 0$.

Exercice de fixation

Soit A, B et C sont trois points non alignés. Détermine les nombres réels λ et μ tels que $\lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

Solution :

A, B et C sont trois points non alignés alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires.

Donc $\lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = \mu = 0$.

Propriété 3

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe une combinaison linéaire de ces deux vecteurs qui soit nulle sans que ses coefficients soient tous les deux nuls.

Exercice de fixation

Soit L, M et P trois points du plan tels que $\overrightarrow{ML} = 3\overrightarrow{MP}$

Justifie que $\overrightarrow{ML}$ *et* $\overrightarrow{LP}$ sont colinéaires.

Solution :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ML} = 3\overrightarrow{MP} &\Rightarrow \overrightarrow{ML} - 3\overrightarrow{MP} = \vec{0}\\ &\Rightarrow \overrightarrow{ML} - 3(\overrightarrow{ML} + \overrightarrow{LP}) = \vec{0}\\ &\Rightarrow \overrightarrow{ML} - 3\overrightarrow{ML} - 3\overrightarrow{LP} = \vec{0}\\ &\Rightarrow -2\overrightarrow{ML} - 3\overrightarrow{LP} = \vec{0}\end{aligned}$$

Il existe une combinaison linéaire nulle de $\overrightarrow{ML}$ et $\overrightarrow{LP}$ avec des coefficients non tous nuls.

Donc $\overrightarrow{ML}$ et $\overrightarrow{LP}$ sont colinéaires.

Remarque

La colinéarité permet de démontrer que des droites sont parallèles ou que des points sont alignés.

Exemple : dans l'exercice précédent, les vecteurs $\overrightarrow{ML}$ et $\overrightarrow{LP}$ sont colinéaires. Alors les points M, L et P sont alignés.

7- Caractérisation vectorielle du centre de gravité d'un triangle

Propriété

ABC est triangle. Le centre de gravité du triangle ABC est l'unique point G du plan tel que :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Exercice de fixation

Soit ABC un triangle et M un point du plan. On considère les points A', B' et C' tels que :

$\overrightarrow{MA'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MB'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{MC'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}$.

Démontre que M est le centre de gravité du triangle A'B'C'.

Solution :

On a : $\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} = \frac{3}{2}\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})$

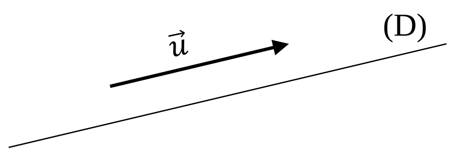
$$= \frac{3}{2} \times \vec{0}$$

$\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} = \vec{0}$. Donc M’ est le centre de gravité de A’B’C’.

8- Vecteur directeur d’une droite

- **Définition**

On appelle vecteur directeur d’une droite (D), tout vecteur non nul $\vec{u}$ ayant la même direction que (D).



- **Remarques**

- Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur d’une droite (D), alors pour nombre réel non nul k, le vecteur $k\vec{u}$ est un vecteur directeur de (D).
- Une droite admet une infinité de vecteurs directeurs.

Exemple

Si A et B sont deux points distincts d’une droite (D) alors les vecteurs directeurs de (D) sont de la forme $k\,\overrightarrow{AB}$ où k est un nombre réel non nul.

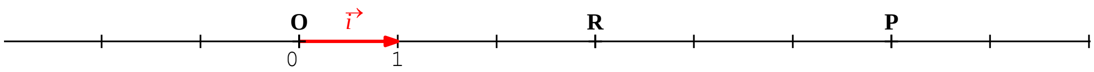
9 - MESURE ALGEBRIQUE

a-Définition

Soit (D) une droite orientée de repère (O ; $\vec{\imath}$) tel que $\|\vec{\imath}\| = 1$.
A et B étant deux points de (D), on appelle **mesure algébrique** de (A, B) relativement au repère (O ; $\vec{\imath}$) , l’unique nombre réel, noté $\overline{AB}$, tel que : $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\vec{\imath}$.

Exemple

Soit (D) une droite orientée par un vecteur unitaire $\vec{\imath}$.



$\overrightarrow{RP} = 3\vec{\imath}$, donc $\overline{RP}$ = 3.

$\overrightarrow{RO} = -3\vec{\imath}$, donc $\overline{RO}$ = – 3 .

$\overrightarrow{OP} = 6\vec{\imath}$, donc $\overline{OP}$ = 6.

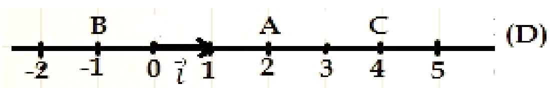
Remarque

La mesure algébrique de deux points peut être négative, positive ou nulle.

Exercice de fixation

Sur une droite (D) orientée par un vecteur unitaire $\vec{\imath}$. Place trois points A, B et C tels quels que $\overline{AB}$ = -3 ; $\overline{AC}$= 2

Solution :



1.1 Propriétés

Les propriétés suivantes sont les conséquences immédiates de la définition.
Soit (D) une droite orientée de repère (O ; $\vec{\imath}$), tel que $\|\vec{\imath}\|$ = 1.
Pour tous points A, B, C de (D), pour tout nombre réel λ, on a :

(1) $|\overline{AB}| = AB$
(2) $\overline{BA} = -\overline{AB}$
(3) Lorsque A et B sont distincts :
- $\overline{AB} = AB$ si et seulement $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{\imath}$ sont de même sens ;
- $\overline{AB} = -AB$ si et seulement $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{\imath}$ sont de sens contraires

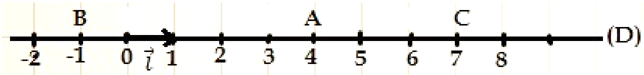
(4) $\overline{AB} = 0 \iff A = B$
(5) $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB} \iff \overline{AC} = \lambda\overline{AB}$
(6) $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ (Relation de Chasles)

Remarque

$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ n'a de sens que si A, B et C sont alignés.
AB + BC = AC n'est vérifié que si B ∈ [AC].

Exercice de fixation

Sur le graphique ci-dessous ; A,B et C sont des points d'une droite (D) graduée de repère (O ; $\vec{\imath}$).



Détermine :$\overline{AB}$; $\overline{CA}$; $\overline{AB} \times \overline{AC}$; $\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}}$

Solution

$\overline{AB} = -5$; $\overline{CA} = -3$; $\overline{AB} \times \overline{AC}$ = -5 × 3 = -15 ; $\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$

II -BASES ET REPERES

1 Bases de $\mathcal{V}$:

Définitions

Tout couple $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de vecteurs non colinéaires est appelé une **base** de $\mathcal{V}$.

Exemple

ABC est un triangle.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Donc le couple $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base de $\mathcal{V}$.

Remarques

Soit ($\vec{u}, \vec{v}$) est une base de $\mathcal{V}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ($\vec{u} \perp \vec{v}$), alors ($\vec{u}, \vec{v}$) est une base orthogonale de $\mathcal{V}$.
- Si de plus $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$, alors ($\vec{u}, \vec{v}$) est une base orthonormée de $\mathcal{V}$.

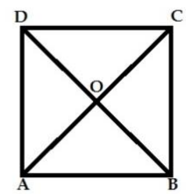
2- Coordonnées de vecteur

a -Propriété fondamentale et Définition

- Soit ($\vec{\imath}, \vec{\jmath}$) une base de $\mathcal{V}$.. Pour tout vecteur $\vec{u}$ il existe un et un seul couple de nombres réels (x, y) tel que $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.
- Soit ($\vec{\imath}, \vec{\jmath}$) une base de ϑ et $\vec{u}$ un vecteur.
  Le seul couple de nombres réels $(x; y)$ vérifiant $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ est appelé le couple de coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On note : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Exercice de fixation

Soit la figure ci-contre où ABCD est un carré.



Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{OB}$

1) Dans la base $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$
2) Dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

Solution

1) $\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{OC}$ d'où $\overrightarrow{AC}\binom{2}{0}$ dans $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$
   $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$ d'où $\overrightarrow{DC}\binom{1}{-1}$ dans $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$
   $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO} = -\overrightarrow{OD}$ d'où $\overrightarrow{OB}\binom{0}{-1}$ dans $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$

2) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}$ d'où $\overrightarrow{AC}\binom{0}{1}$ dans $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
   $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ d'où $\overrightarrow{DC}\binom{1}{0}$ dans $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
   $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ d'où $\overrightarrow{OB}\binom{1}{-\frac{1}{2}}$ dans $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

b- Propriété

Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base de $\mathcal{V}$, λ un nombre réel, $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ deux vecteurs.

- Si on a : $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{u}'\binom{x'}{y'}$, alors :
  $(\vec{u} + \vec{u}')\binom{x+x'}{y+y'}$ et $\lambda\,\vec{u}\binom{\lambda x}{\lambda y}$.

Exercice de fixation

Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base de $\mathcal{V}$. On considère les vecteurs $\vec{u}\binom{1}{2}$ et $\vec{u}'\binom{0}{-6}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
détermine les coordonnées des vecteurs $\vec{u} + \vec{u}'$ et $\vec{u} - 2\vec{u}'$.

Solution

$(\vec{u} + \vec{u}')\binom{1+0}{2-6} \Longrightarrow (\vec{u} + \vec{u}')\binom{1}{-4}$.

$(\vec{u} - 2\vec{u}')\binom{1-2\times 0}{2-2\times(-6)} \Longrightarrow (\vec{u} - 2\vec{u}')\binom{1}{14}$.

3-Expression de la norme dans une base orthonormée

Propriété

Si un vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\binom{x}{y}$ dans une base orthonormée $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exercice de fixation

Soit ($\vec{a}$, $\vec{b}$) une base orthonormée , $\vec{u}$ est le vecteur $\vec{u}\binom{-4}{2}$.

Calcule $\|\vec{u}\|$.

Solution

Dans la base orthonormée ($\vec{a}$, $\vec{b}$) , $\vec{u}\binom{-4}{2}$ donc

$\|\vec{u}\|= \sqrt{(-4^2)+2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

D'où $\|\vec{u}\|=2\sqrt{5}$.

Remarque

Cette propriété n'est applicable que dans une base orthonormée.

4 - Déterminant de deux vecteurs

a) Définition

Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base de $\mathcal{V}$, $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{u}'\binom{x'}{y'}$ deux vecteurs.
On appelle **déterminant** de $(\vec{u},\vec{u}')$ relativement à la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ le nombre réel $xy'-yx'$.
On le note : **det**$(\vec{u},\vec{u}')$.
On écrit : **det**$(\vec{u},\vec{u}') = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy'-yx'$.

Exemple
Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base de $\mathcal{V}$.
$\det(\vec{\imath}+\vec{\jmath}, -\vec{\imath}+2\vec{\jmath}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\times 2 - 1\times(-1) = 2+1 = 3.$

b) Propriété

Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base de $\mathcal{V}$.
Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul**.**

Exercice de fixation

Le plan vectoriel ϑ est muni d'une base orthonormée ($\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$). $\vec{u}\binom{2}{1}$ et $\vec{v}\binom{3}{1,5}$ sont deux vecteurs

de ϑ.

Justifie que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Solution

dét($\vec{u}$, $\vec{v}$) = $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1,5 \end{vmatrix} = 2\times 1,5 - 1\times 3 = 3-3 = 0$

donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Ils forment donc une base de ϑ.

c- Conséquence.

Un couple de vecteurs de ϑ est une base si et seulement son déterminant dans une base de ϑ est non nul.

Exercice de fixation

Le plan vectoriel ϑ est muni d'une base orthonormée ($\vec{\imath}, \vec{\jmath}$). $\vec{u}\binom{2}{1}$ et $\vec{v}\binom{3}{2}$ sont deux vecteurs de ϑ.

Justifie que $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\ )$ est une base de ϑ.

Solution

dét($\vec{u}, \vec{v}$) = $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 1 \times 3 = 4 - 3 = 1.$

dét($\vec{u}, \vec{v}$) $\neq 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.

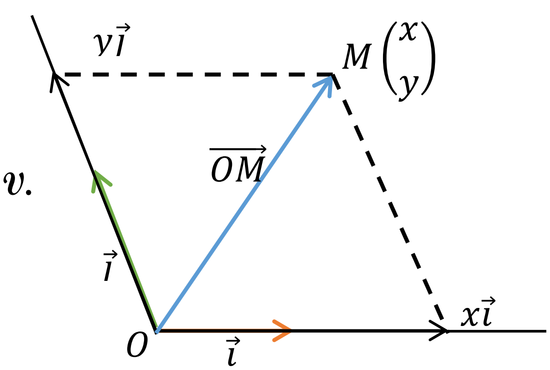
Par suite $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\ )$ est une base de ϑ.

5 - Repères du plan

a) Définition

On appelle repère du plan :
- un triplet (O, I, J) de points non alignés ;
- un triplet $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où O est un point et $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base de $\mathcal{V}$.

Le point O est appelé origine du repère.

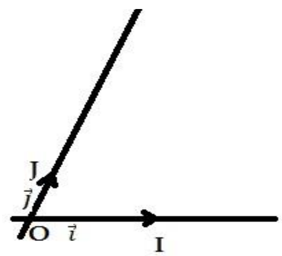


<u>Remarque</u>

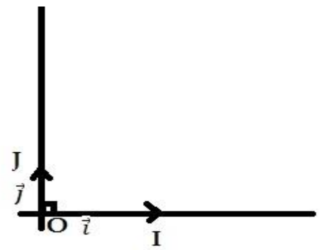
- Un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est dit orthonormé si et seulement si la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est orthonormé ;
- Les coordonnées d'un vecteur se déterminent dans une base, tandis que celles d'un point se déterminent dans un repère.
- Le repère peut être quelconque, orthogonal ou orthonormal.

Exemples de repères :

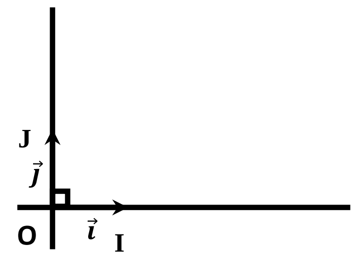
Repère quelconque



Repère orthogonal



Repère orthonormal



- $(O,\vec{\imath})$ est un repère de l'axe des abscisses (OI), $(O,\vec{j})$ est le repère de l'axe des ordonnées (OJ).

  Remarque : un repère orthonormal est aussi appelé repère orthonormé

b) Calcul dans un repère

Propriété

Dans un repère (O, I, J), on donne les points

A$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$; B$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ et C$\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$. On a :

- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$
- Le point M milieu du segment [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2} ; \frac{y_A+y_B}{2}\right)$.
- Le point G centre de gravité du triangle ABC a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3} ; \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$

Exercice de fixation

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

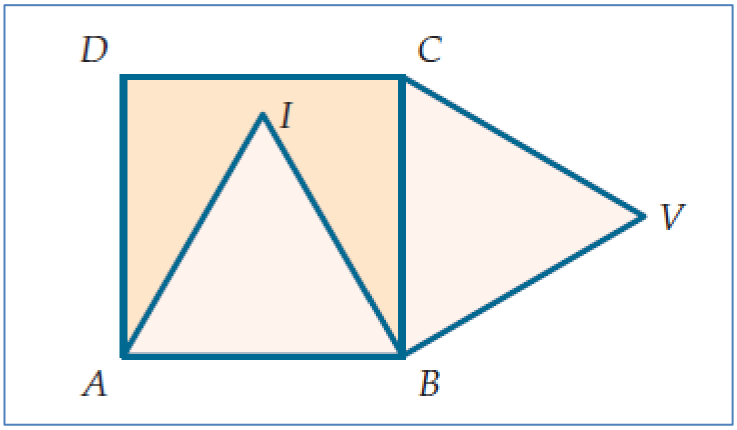
On donne les points A(-4 ;1) ; B(2 ;-3) et C(3 ;4) et I milieu du segment [BC]

1) Détermine les coordonnées de I.
2) Détermine les coordonnées du point G, centre de gravité du triangle ABC.
3) Détermine les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IG}$.

Solution

1) I$\left(\frac{2+3}{2} ; \frac{-3+4}{2}\right)$; I$\left(\frac{5}{2} ; \frac{1}{2}\right)$
2) G$\left(\frac{-4+2+3}{3} ; \frac{1-3+4}{3}\right)$; G$\left(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3}\right)$
3) $\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix} \frac{5}{2}-\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}-\frac{2}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{IG}\begin{pmatrix} \frac{13}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$

C. SITUATION COMPLEXE



À l'occasion d'un concours de logo organisé dans leur établissement, des élèves d'une classe de 5ième du Lycée Moderne de Jeunes Filles de Yopougon ont été déclarées lauréates grâce à la figure ci-dessus qu'elles ont produite. Sur cette figure, ABCD est un carré, AIB et BCV sont des triangles équilatéraux.
Selon le Jury, ces jeunes filles ont remporté le premier prix grâce à l'harmonie des couleurs, mais surtout grâce à l'exactitude de leur figure qui, en conformité avec les indications données, présente les trois points D, I, et V alignés.

Un groupe concurrent, pas très convaincu de l'alignement de ces trois points, veut en avoir le cœur net. Il sollicite ton aide.

En tant qu'élève de 2ndeC, en t'appuyant sur tes connaissances en mathématiques sur les vecteurs, prouve qu'au-delà du tracé de la droite (DV), les points D, I, et V sont bels et bien alignés.

Solution

Pour résoudre cet exercice, nous allons utiliser les connaissances sur les vecteurs et points du plan.

Nous effectuerons des calculs de coordonnées de points et de vecteurs puis de déterminant pour déduire l'alignement de points.

ABCD est un carré. Soit $\vec{\imath} = \overrightarrow{AB}\ et\ \vec{\jmath} = \overrightarrow{AD}$. Posons AB = 1.

Dans le repère orthonormé $(A, \vec{\imath}\,, \vec{\jmath})$, déterminons les coordonnées des points D, I, et V.

- On a : $D(0; 1)$.
- Soit H le projeté orthogonal de I sur (AB), et H' le projeté orthogonal de I sur (AD).
  AIB étant équilatéral, H est le milieu de $[AB]$ donc $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
- D'autre part, [IH] est la hauteur du triangle équilatéral ABI, donc $IH = \frac{\sqrt{3}}{2} = AH'$

Par conséquent on a $I(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$.

- Soit K le projeté orthogonal de V sur (AB), K' le projeté orthogonal de V sur (AD), et Q le projeté orthogonal de V sur (BC).

  On a AK = AB + BK = AB + VQ = 1 + $\frac{\sqrt{3}}{2}$

  Et AK'= $\frac{1}{2}AD$, donc on a $V(1+\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2})$

- On obtient : $\overrightarrow{DI}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}-1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DV}\begin{pmatrix} 1+\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

- $\mathrm{Det}(\overrightarrow{DI}; \overrightarrow{DV}) = \frac{1}{2}(\frac{-1}{2}) - [\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1] = \frac{-1}{4} + \frac{1}{4} = 0$

  Donc les vecteurs $\overrightarrow{DI}$ *et* $\overrightarrow{DV}$ sont colinéaires. Par conséquent, les points D, I, et V sont bel et bien alignés.

D. EXERCICES

1. Exercices d'application

Exercice 1

ABC est un triangle. D et E deux points du plan tels que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE} = -2\overrightarrow{CA}$.

1) Démontrer que $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$.

2) Démontrer que (BE) // (CD).

Solution :

1) $\overrightarrow{CE} = -2\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$

2) On a : $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$

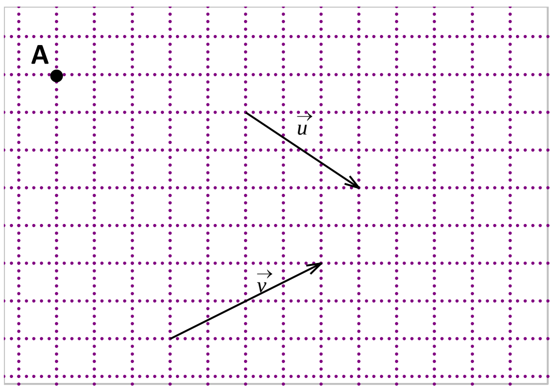
$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad + \overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$

$\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$

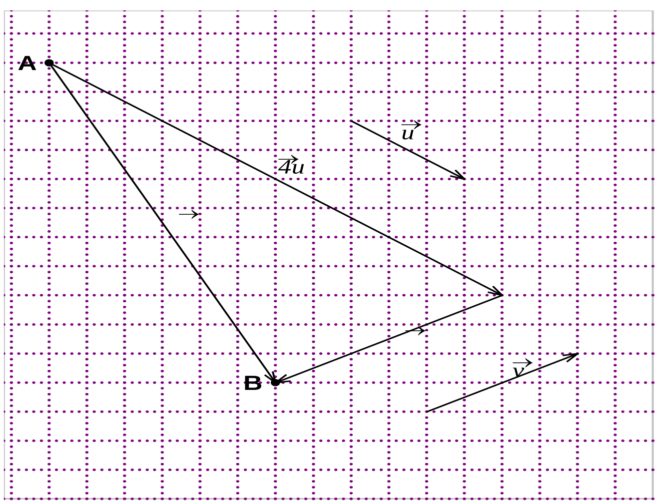
Donc (BE) // (DC).

Exercice 2

Sur une feuille à carreaux, reproduis la figure ci-dessous, puis construis le point B tel que $\overrightarrow{AB} = 4\vec{u} - \frac{3}{2}\vec{v}$



Solution :



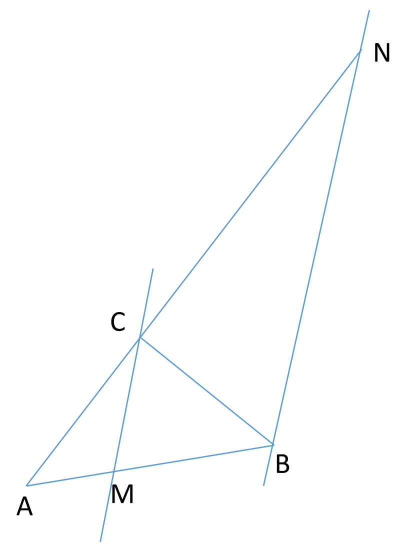
Exercice 3

Soit ABC un triangle quelconque.

1) Construis les points M et N tels que :
$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AC}$
2) Démontre que (BN) et (MC) sont parallèles.

Solution :

1) (Voir figure ci-contre)



2) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AN} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{NB}$

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} = \dfrac{1}{3}(3\overrightarrow{AC}) + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{NB}$

$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{NB} \Longrightarrow$ (CM) // (NB)

2. Exercices de renforcement

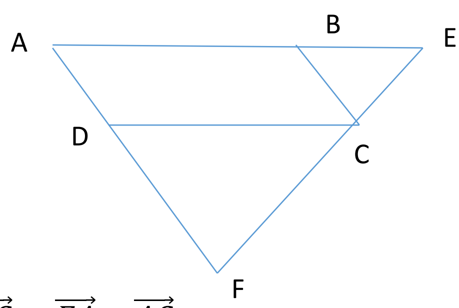
Exercice 4

ABCD est un parallélogramme de centre O.

1) Construis les points E et F tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$.
2) a-A l'aide de la relation de Chasles, exprime $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{CF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
   b-Démontre que $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires et en déduire que E, C et F sont alignés.

Solution :

1)



2) a- $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{EC} = \frac{-3}{2}\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$

$\overrightarrow{EC} = \left(\frac{-3}{2}\overrightarrow{AB} + AB\right) + \overrightarrow{AD}$; ABCD étant un parallélogramme $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{EC} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF}$$
$$\overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF})$$
$$\overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AD})$$
$$\overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$$

b-Dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ on a $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}\frac{-1}{2}\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CF}\binom{-1}{2}$ et det$(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{CF})$ =2$(\frac{-1}{2}) - (-1) = 0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ *et* $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires, par conséquent les points E, C, et F sont alignés.

Exercice 5

Le plan est muni du repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On donne les points A$\binom{2}{3}$; B$\binom{4}{1}$ et C$\binom{5}{4}$.

a) Démontrer que (OA) et (BC) ne sont pas parallèles.
b) Les points O, A et B sont-ils alignés ?
c) Trouver x tel que le point M(25 ; x) soit aligné avec A et B.

Solution :

a) Dans la base ($\vec{\imath}, \vec{\jmath}$), on a $\overrightarrow{OA}\binom{2}{3}$, $\overrightarrow{BC}\binom{1}{3}$ et det$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BC})$ = 2×3 – 3×1 = 3, et 3$\neq$ 0 donc les droites (OA) et (BC) ne sont pas parallèles.

b) Dans la base ($\vec{\imath}, \vec{\jmath}$), on a $\overrightarrow{OA}\binom{2}{3}$,$\overrightarrow{OB}\binom{4}{1}$ et det$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$=2×1 – 3×4 = -10 et -10$\neq$ 0 donc les points O, A et B ne sont pas alignés.

c) M, A, et B sont alignés équivaut à $\overrightarrow{AM}\binom{23}{x-3} et \overrightarrow{AB}\binom{2}{-2}$ sont colinéaires.

Ce qui équivaut à det$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB})$ = 0

Ce qui équivaut à – 46 - 2(x-3) = 0

Ce qui équivaut à x = -20

3. Exercice d'approfondissement

Exercice 6

Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé. On donne A$\binom{2}{-3}$; B$\binom{-3}{2}$ et C$\binom{3}{2}$

1) a- Calcule les coordonnées du point A' milieu de [BC].
   b- Calcule les coordonnes de G tel que $\overrightarrow{GA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$.
   c- Que représente le point G pour le triangle ABC ?

d- Vérifie que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

2) Calcule les longueurs OA, OB et OC. Que représente le point O pour le triangle ABC ?
3) Calcule les coordonnées de H tel que : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Solution :

1) a) $A'\left(\frac{-3+3}{2};\ \frac{2+2}{2}\right) \Leftrightarrow A'(0;\ 2)$

b) $\overrightarrow{GA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{2}{3}x_{A'} + \frac{1}{3}x_A \\ y_G = \frac{2}{3}y_{A'} + \frac{1}{3}y_A \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 0(\frac{2}{3}) + 2(\frac{1}{3}) \\ y_G = 2(\frac{2}{3}) + \frac{1}{3}(-3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow G\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$$

G est le centre de gravité du triangle ABC.

c) G étant le centre de gravité du triangle ABC, on a $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

d) On donne A$\binom{2}{-3}$; B$\binom{-3}{2}$ et C$\binom{3}{2}$ on a : $OA = \|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

$$OB = \|\overrightarrow{OB}\| = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2} = \sqrt{13}$$
$$OC = \|\overrightarrow{OC}\| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

OA = OB = OC, donc O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

3) $H(2 - 3 + 3; -3 + 2 + 2) \Leftrightarrow H(2; 1)$

MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE L'ALPHABETISATION

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Union – Discipline – Travail

MENET - FP

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE

MON ÉCOLE À LA MAISON

SECONDAIRE
2nde C
MATHÉMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Durée : 10 heures Code :

Compétence 1
Traiter une situation relative aux calculs algébriques et aux fonctions

Thème1 : Calculs algébriques

LEÇON 2 : ENSEMBLE DES NOMBRES REELS

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Les professeurs de SVT d'un lycée ont semé, à titre expérimental, du maïs dans un bac déposé au laboratoire. Quatre de ces professeurs ont relevé la longueur x qui sépare la hauteur atteinte par un même pied de maïs un lundi de celle atteinte le lundi suivant.
Ils ont marqué les résultats sur une feuille affichée au laboratoire.

- Professeur $A: x \in [16;18]$
- Professeur $B: x \in \{16,5 ; 17,5\}$
- Professeur $C: |x-17| \leq 0,5$
- Professeur $D: x$ est élément de l'intervalle fermé de centre 17 et de rayon 0,5.

L'un des élèves d'une classe de 2nde C, venu dans ce laboratoire, a vu les relevés des quatre professeurs. Il affirme que ces professeurs ont employé des langages différents pour exprimer la même chose.
Les autres élèves, surpris par cette affirmation, cherchent à la vérifier en s'informant sur l'ensemble des nombres réels.

B. CONTENU DE LA LECON

I. NOMBRES RATIONNELS ET IRRATIONNELS

1. Nombres rationnels

Définition

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme de $\frac{a}{b}$ ($a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$)

Exemple : 5 ; -3 ; 10,32 ; -4,7 et $\frac{-5}{3}$ sont des nombres rationnels

2. Nombres irrationnels

a) Définition

Un nombre est irrationnel lorsqu'il n'est pas rationnel

Exemples

$\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; π ; $\sqrt{\frac{7}{6}}$; $\sqrt{\pi - 1}$.

b- Raisonnement par l'absurde

Exemple :

Démontrons que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

En effet supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. Cela signifie qu'on peut trouver deux entiers naturels non nuls a et b tels que $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ et $\frac{a}{b}$ est irréductible.

On a : $\frac{a}{b} = \sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 = 2b^2$

Alors a^2 et $2b^2$ ont le même chiffre des unités.

Les tableaux ci-dessous donnent le chiffre des unités de a^2 et de $2b^2$ en fonction du chiffre des unités des nombres de a et b.

	Chiffre des unités									
a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

	Chiffre des unités									
b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
$2b^2$	0	2	8	8	2	0	2	8	8	2

$a^2 = 2b^2$ est vrai lorsque a et b se terminent par 0 ou lorsque a se termine par 0 et b par 5.

Dans les deux cas a et b seraient divisibles par 5 et $\frac{a}{b}$ ne serait pas irréductible.

Ce qui est contradictoire puisqu'on a supposé $\frac{a}{b}$ irréductible.

Par suite $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel, c'est un nombre irrationnel.

Principe du raisonnement par l'absurde

Lorsqu'on veut démontrer par l'absurde une proposition (P), on suppose que :

- la proposition contraire (non (P)) est vraie et on aboutit à une contradiction.
- On conclut alors que la proposition (P) est vraie.

Exemple.

Démontrons par l'absurde que $\sqrt{2} - 1$ est un nombre irrationnel.
Supposons que $\sqrt{2} - 1$ est rationnel.

Cela signifie qu'on peut trouver deux entiers non nuls a et b tels que $\frac{a}{b} = \sqrt{2} - 1$.

On a : $\frac{a}{b} = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{b} + 1 = \frac{a+b}{b}$.

a et b étant des nombres entiers, $\frac{a+b}{b}$ est un nombre rationnel. Ce qui est contradictoire car $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Par suite $\sqrt{2} - 1$ est irrationnel.

3. Ensemble des nombres réels

Définition

L'ensemble formé des nombres rationnels et des nombres irrationnels est appelé l'ensemble des nombres réels.

Notation

L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

Exemple

$\sqrt{2}$, π, -5 ; $\frac{1}{3}$; 0,1 ; -$\frac{7}{5}$ sont des nombres réels.

Remarques :

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset D \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- « l'intervalle $[a; \rightarrow[$sera dorénavant noté $[a; +\infty[$».
- « l'intervalle $]\leftarrow; a]$ sera dorénavant noté $]-\infty; a]$ ».
- $\mathbb{R}$ est aussi noté $]-\infty; +\infty[$.

II. Comparaison des nombres réels

1. Inégalités dans R

Point méthode

Pour comparer deux nombres réels, on peut :

- Étudier le signe de leur différence ;
- Les comparer à un nombre intermédiaire ;
- S'ils sont strictement positifs, comparer leurs carrés ou leurs racines carrées ;
- Comparer leurs inverses s'ils sont de même signe.

Exemple

Comparons les nombres $-\frac{3}{5}$ et $-\frac{5}{7}$.

On a : $\left(-\frac{3}{5}\right)-\left(-\frac{5}{7}\right)=-\frac{3}{5}+\frac{5}{7}=\frac{4}{35}$, or $\frac{4}{35}>0$,

donc : $\left(-\frac{3}{5}\right)-\left(-\frac{5}{7}\right)>0;\ d'où : -\frac{3}{5}>-\frac{5}{7}$.

2. Ordre et opérations dans $\mathbb{R}$

Propriétés

a, *b*, *c* et *d* des nombres réels, on a :

- Si $a \leq b$, alors $a+c \leq b+c$.

- Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a+c \leq b+d$.
- Si $a \leq b$ et $c > 0$, alors $ac \leq bc$.

- Si $a \leq b$ *et* $c < 0$, alors $ac \geq bc$.
- Si a, b, c et d sont des nombres réels positifs tels que : $a \leq b$ et $c \leq d$,
  alors $ac \leq bd$.
- Pour tous nombres réels *a* et *b* positifs : $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$.
  $a \leq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.
- Pour tous nombres réels *a* et *b* strictement positifs : $a \leq b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

Remarque

Il n'existe pas de règles pour « soustraire » ou « diviser » membre à membre deux inégalités.

Exercice de fixation

Dans chacun des cas, compare les nombres donnés :

a) $\frac{1}{13}$ et $\frac{1}{5\sqrt{7}}$; b) $3-2\sqrt{7}$ et $3-3\sqrt{3}$.

Solution

a) Comparons $\frac{1}{13}$ *et* $\frac{1}{5\sqrt{7}}$.

$\frac{1}{13}$ *et* $\frac{1}{5\sqrt{7}}$ sont des nombres réels positifs. Comparons leurs carrés.

On a : $\begin{cases} 13^2 = 169 \\ \left(5\sqrt{7}\right)^2 = 175 \end{cases}$, $169 < 175,\ d'où: 13 < 5\sqrt{7}$

Par suite : $\frac{1}{13} > \frac{1}{5\sqrt{7}}$

b) Comparons $3 - 2\sqrt{7}$ et $3 - 3\sqrt{3}$

Comparons d'abord les nombres réels positifs $2\sqrt{7}$ et $3\sqrt{3}$.

On a : $\begin{cases} (2\sqrt{7})^2 = 28 \\ \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 27 \end{cases}$, d'où : $28 > 27,\ par\ suite :\ 2\sqrt{7} > 3\sqrt{3}$

Ensuite, on a :

$-2\sqrt{7} < -3\sqrt{3} \Longrightarrow 3 - 2\sqrt{7} < 3 - 3\sqrt{3}$.

III. MINORANTS- MAJORANTS

Définition

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

- On dit qu'un nombre réel M est un majorant de E lorsque M est supérieur ou égal à tout élément de E. Un ensemble qui admet **un majorant** est dit **majoré**.
  M est un majorant de E signifie que : $\forall x \in E, x \leq M$.

- On dit qu'un nombre réel m est **un minorant** de E lorsque m est inférieur ou égal à tout élément de E. Un ensemble qui admet un minorant est dit **minoré**.
  m est un minorant de E signifie que : $\forall x \in E, x \geq m$.

Remarques

- Un ensemble est dit **borné** s'il est à la fois minoré et majoré.
- $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ ne sont ni majorés ni minorés.
- $\mathbb{N}$ est minoré par $0, -1, -\pi$, mais n'est pas majoré.

<u>Exemples</u>

- L'intervalle $]-\infty; 3[$ est majoré par 3 mais n'est pas minoré.
- Soit $A = \{-4\,; -2\,; -1\,; 0\,; 5\,; 8\}$.

L'ensemble des minorants de A est constitué de tous les réels inférieurs ou égaux à -4 .

Exemples de minorants de A :$-7; -4{,}1; -5{,}03$.

L'ensemble des majorants de A est constitué de tous les réels supérieurs ou égaux à 8 .

Exemples de majorants de A : $8\ ; 8{,}5\ ; 20$

IV. MAXIMUM-MINIMUM

Définition

Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

- Lorsqu'il existe, le plus grand élément de E est appelé **le maximum** de E.
- Lorsqu'il existe, le plus petit élément de E est appelé **le minimum** de E.

Exemples

- Le minimum et le maximum de $[0; 1]$ sont respectivement 0 et 1.
- L'intervalle $]-1; 6[$ n'admet ni maximum ni minimum.

Remarques

- Toute partie finie de $\mathbb{R}$ admet un maximum et un minimum.
- 0 est le minimum de $\mathbb{N}$.
- Le maximum de E, s'il existe est le plus petit des majorants de E.
- Le minimum de E, s'il existe est le plus grand des minorants de E.

V. VALEUR ABSOLUE

1. Définition

On appelle valeur absolue d'un nombre réel la distance à zéro de ce nombre.

Pour tout nombre réel a, la valeur absolue de a se note $|a|$.

Remarque : $|a| = a \quad si \quad a \geq 0 \quad et \quad |a| = -a \quad si \quad a \leq 0$

Exemples

- $|-69| = 69$ car -69 < 0
- $|4| = 4$ car 4> 0
- $\left|\sqrt{3} - 2\right| = 2 - \sqrt{3}$ car $\sqrt{3} - 2 < 0$

2. Propriétés

Soit x et y deux nombres réels et r un nombre réel strictement positif. On a :

1) $|x| \geq 0$
2) $|x| = 0 \iff x = 0$
3) $|-x| = |x|$
4) $|x| = |y| \iff x = y$ ou $x = -y$
5) $\sqrt{x^2} = |x|$
6) $|xy| = |x| \times |y|$
7) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ si $y \neq 0$
8) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire).
9) $|x| \leq r \iff -r \leq x \leq r$

Exercice de fixation

Soit x et y deux nombres réels.

Réponds par Vrai (V) ou par Faux (F) à chacune des affirmations dans le tableau ci-dessous:

N°	Affirmations	Réponses

1	$\lvert x+y\rvert=\lvert x\rvert+\lvert y\rvert$	
2	$si\ x\neq 0;\left\lvert\frac{-2}{x}\right\rvert=\frac{2}{x}$	
3	$\lvert x\rvert\leq 3\Leftrightarrow x\in[-3;3]$	
4	$\lvert x\rvert=2\Leftrightarrow x=2$	
5	$\lvert y^2\rvert=y^2$	
6	$\lvert xy\rvert=\lvert x\rvert y$	
7	$si\ y\neq 0;\left\lvert\frac{x}{y}\right\rvert=\frac{\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert}$	

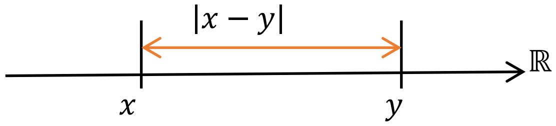
Solution :

1- F ; 2-F ; 3-V ; 4-F ; 5-V ; 6-F ; 7-V.

3. Distance de deux nombres réels

Définition

Soit x et y deux nombres réels. Le nombre réel $|x-y|$ est appelé **distance** de x et y.
On la note : $d(x;y)$.

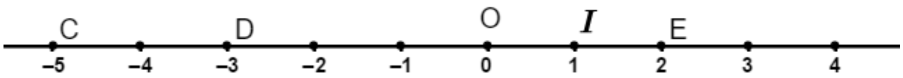


Remarque

Soit (D) une droite munie d'un repère (O,I). Pour tous points M et N de (D) d'abscisses respectives x et y, on a $MN=|x-y|$.

Exemple

On donne la droite graduée ci-dessous.



- CD=$|-5-(-3)|=2$
- DE=$|-3-2|=5$
- OE=$|0-2|=2$

4. Résolution algébrique d'une équation du type: $|x-a|=r\ \ (r>0)$

Propriété

Soit a un nombre réel et r un nombre réel strictement positif.
L'équation : $x \in \mathbb{R}$, $|x-a| = r$, a pour ensemble de solution $\{a-r; a+r\}$

Exercice de fixation

Réponds par Vrai (V) ou par Faux (F) à chacune des affirmations dans le tableau ci-dessous:

N°	Affirmations	Réponses
1	$\|x+1\| = 2 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 3$	
2	$\|x-1\| = 3 \Leftrightarrow x = 1+3 \; ou \; x = -1+3$	
3	$\|x-2\| = 1 \Leftrightarrow x = 2+1 \; ou \; x = 2-1$	

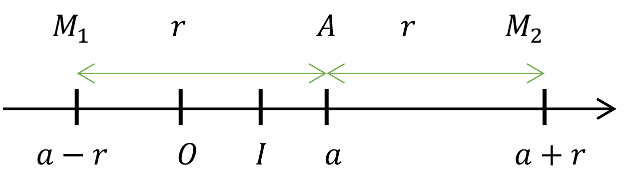
Solution :

1-F ; 2- F ; 3-V

5. Résolution graphique d'une équation du type : $|x-a| = r \quad (r > 0)$

Propriété

Soit A et M les points d'abscisses respectives a et x sur une droite graduée.
On a : $|x-a| = r \Leftrightarrow AM = r$.



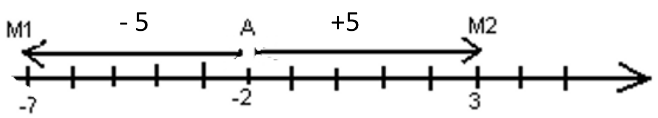
Remarque :
Il s'agit ici de trouver les abscisses des points M de la droite graduée tels que : $AM = r$.
Les nombres cherchés sont : $a-r$ et $a+r$

Exercice de fixation

Résous graphiquement dans $\mathbb{R}$, l'équation. $|x+2| = 5$

Solution :

Résoudre graphiquement l'équation $|x+2| = 5$revient à trouver les abscisses des points M de la droite graduée tels que : $AM = 5$.



D'après le graphique ci-dessus les nombres cherchés sont -7 et 3. D'où $S_{\mathbb{R}} = \{-7;3\}$.

6. **Résolution algébrique d'une inéquation du type** : $|x-a| \leq r \quad (r > 0)$

Propriété

Soit a un nombre réel et r un nombre réel strictement positif.
L'inéquation : $x \in \mathbb{R}, |x-a| \leq r \Leftrightarrow a-r \leq x \leq a+r.$

Exercice de fixation

Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $|x-2| \leq 3$

Solution :

Cette inéquation est de la forme $|x-a| \leq r$ avec $r=3$ et $a=2$.

Donc l'ensemble des solutions **est :** $S_{\mathbb{R}} = [2-3; 2+3]$ soit $S_{\mathbb{R}} = [-1; 5]$

7. **Résolution graphique d'une inéquation du type** : $|x-a| \leq r \quad (r > 0)$

Propriété

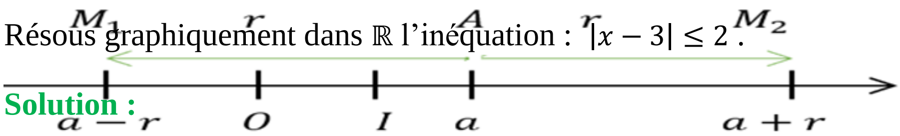
Soit A et M les points d'abscisses respectives a et x sur une droite graduée.
On a : $|x-a| \leq r \Leftrightarrow AM \leq r$.

\-　　　　　　　　+

Remarque :
Il s'agit ici de trouver les abscisses des points M de la droite graduée tels que : $AM \leq r$
Donc l'ensemble des solutions de cette inéquation est $S_{\mathbb{R}} = [a-r\,; a+r]$.

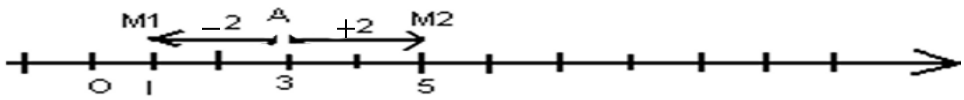
Exercice de fixation

Résous graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $|x-3| \leq 2$.



Solution :

Résous graphiquement l'inéquation: $|x-3| \leq 2$ revient donc à trouver les abscisses des points M de la droite graduée tels que : AM ≤ 2 .



D'après le graphique ci-dessus les nombres cherchés sont ceux qui appartiennent à l'intervalle $[1;5]$. D'où $S_{\mathbb{R}} = [1;5]$

VI. CALCULS APPROCHES

1. Valeur approchée

Définition

Soient x et y deux nombres réels et ε un nombre réel strictement positif.
y est une valeur approchée de x à ε près signifie que $|x-y| \leq \varepsilon$.
ε est appelé incertitude de cette valeur approchée.

<u>Exemple</u>

Soit l'inégalité : $|x - 2{,}512| \leq 0{,}005$.

2,512 est une valeur approchée de x à 0,005-près.

Remarques :

Soit x un nombre réel et m un nombre entier naturel.

Les approximations décimales d'ordre m par défaut et par excès de x sont des valeurs approchées de x à 10^{-m} près.

Exemple :

On a : $2{,}166 < \frac{13}{6} < 2{,}167$

-L'approximation décimale d'ordre 3 par défaut de $\frac{13}{6}$ est 2,166.

-L'approximation décimale d'ordre 3 par excès de $\frac{13}{6}$ est 2,167.

Donc 2,166 et 2,167 sont des valeurs approchées de $\frac{13}{6}$ à 10^{-3} près.

L'arrondi d'ordre 3 de $\frac{13}{6}$ est 2,167

C. <u>SITUATION COMPLEXE</u>

Deux élèves, ALI et YAO habitent au bord d'une rue rectiligne à 400 m l'un de l'autre. Les parents de YAO lui demandent de ne pas s'éloigner de plus de 300 m de la maison. Ceux de ALI lui demandent de ne pas s'éloigner de plus de 200 m de la maison. Ils souhaitent déterminer la portion du bord de la rue où ils peuvent se rencontrer pour échanger sur des exercices de classe sans désobéir à leurs parents. Soucieux, ils demandent ta contribution.
En utilisant tes connaissances en mathématiques, détermine la portion du bord de la rue où les deux élèves peuvent se retrouver sans désobéir à leurs parents.

Solution :
Pour résoudre ce problème, je vais utiliser la leçon sur les nombres réels notamment les calculs de distance et la résolution des inéquations avec valeur absolue.
On appelle A le point représentant la maison de ALI et Y celui représentant la maison de YAO. L'abscisse de A est 0, celle de Y est 400 et un point M de la droite (AY), point de rencontre des deux élèves a pour abscisse x.

On a : $x \epsilon [0\,;400]$ (1)

En M on a : $|x| \leq 200\ et\ |x-400| \leq 300$ ce qui donne $x \epsilon [100\,;200]$ (2)

De (1) et (2) on peut dire que la rencontre de ALI et YAO a lieu entre 100m et 200m de la maison de ALI.

Ou bien

On appelle A le point représentant la maison de ALI et Y celui représentant la maison de YAO. L'abscisse de A est 400, celle de Y est 0 et un point M de la droite (AY), point de rencontre des deux élèves a pour abscisse x.

On a : $x \epsilon [0\,;400]$ (1)

En M on a : $|x| \leq 300\ et\ |x-400| \leq 200$ ce qui donne $x \epsilon [200\,;300]$ (2)

De (1) et (2) on peut dire que la rencontre de ALI et YAO a lieu entre 200m et 300m de la maison de YAO.

D. EXERCICES

1- Exercices d'application

Exercice 1

Soit E un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}$.
Réordonne les morceaux de phrases suivants pour obtenir une définition correcte dans chacun des cas suivants :
1-est un minorant de E -- à tous les éléments de E -- un nombre réel m -- signifie que m est inférieur ou égal.
2-signifie que M est supérieur ou égal -- un nombre réel M -- à tous les éléments de E -- est un majorant de E.

Solution :

1-Un nombre réel m est un minorant de E signifie que m est inférieur ou égal à tous les éléments de E.
2-Un nombre réel M est un majorant de E Signifie que M est supérieur ou égal à tous les éléments de E.

Exercice 2

Réponds par Vrai (V) ou par Faux (F) à chacune des affirmations dans le tableau ci-dessous:

N°	Affirmations	Réponses
1	La valeur absolue d'un nombre réel est le réel lui-même s'il est positif.	
2	La valeur absolue d'un nombre réel est l'inverse de ce nombre réel s'il est non nul.	
3	La valeur absolue d'un nombre réel est la racine carrée de ce nombre réel s'il est positif.	
4	La valeur absolue d'un nombre réel est la racine carrée de l'opposé de ce nombre réel s'il est négatif.	
5	La valeur absolue d'un nombre réel est la distance à zéro de ce nombre réel.	
6	La valeur absolue d'un nombre réel est l'opposé de ce nombre réel s'il est négatif.	

Solution :

1-V ; 2-F ; 3-F ; 4-F ; 5-V ; 6-V

Exercice 3

Complète le tableau ci-dessous en donnant la valeur de la distance de x à y.

x	y	distance de x à y : $d\left(x;y\right)$
9	12	
-5	-7	
-16	23	
14	-11	

Solution :

x	y	distance de x à y : $d\left(x;y\right)$
9	12	$d\left(x;y\right)=\lvert 9-12\rvert=\lvert -3\rvert=3$
-5	-7	$d\left(x;y\right)=\lvert -5-(-7)\rvert=\lvert -5+7\rvert=\lvert 2\rvert=2$
-16	23	$d\left(x;y\right)=\lvert -16-23\rvert=\lvert -39\rvert=39$
14	-11	$d\left(x;y\right)=\lvert 14-(-11)\rvert=\lvert 14+11\rvert=\lvert 25\rvert=25$

Exercice 4

Soit l'intervalle $B=\left]-2;7\right]$

1-Trouve trois minorants et trois majorants de B.

2-Trouve si possible le maximum de B.

3-Justifie que B n'admet pas de minimum.

4-Ecris l'ensemble de tous les majorants de B.

5-Ecris l'ensemble de tous les minorants de B.

Solution :

On a $B=\left]-2;7\right]$:

1 -Trois minorants de B : $-2;-8;-15$

-Trois majorants de B : $7;13;24$

2- Le maximum de B est 7.

3-B n'admet pas de minimum car -2 est le plus grand des minorants et $-2 \notin]-2\,;7]$.

4 -L'ensemble de tous les majorants de B est $[7\,;+\infty[$

5 -L'ensemble de tous les minorants de B est $]-\infty;-2]$.

Exercice 5

Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

(I) : $|x+2| \leq 3$.

Solution :

$$|x+2| \leq 3 \ \textit{équivaut à} -3 \leq x+2 \leq 3$$

$$\textit{équivaut à} \quad -5 \leq x \leq 1 \quad \text{donc} \quad S_{\mathbb{R}} = [-5\,;1]$$

2- Exercices de renforcement

Exercice 6

Sachant que $\sqrt{5}$ est un nombre irrationnel, démontre par l'absurde que $A = \sqrt{5} - 2$ est irrationnel.

Solution :

On suppose que A est rationnel et on a : $A = \sqrt{5} - 2$ donc $A + 2 = \sqrt{5}$.

2 est rationnel et A aussi l'est, donc $A + 2$ est rationnel et par conséquent $\sqrt{5}$ serait un rationnel ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de départ.

En conclusion $A = \sqrt{5} - 2$ est irrationnel.

Exercice 7

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs.

Compare A et B en étudiant le signe de $A - B$ dans chacun des cas suivants :

1) $A = ab + 1 \quad et \quad B = (a+1)(b+1)$

2) $A = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \quad et \quad B = 2$

3) $A = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \quad et \quad B = \dfrac{1}{a+b}$

Solution :

1) $A - B = -a - b$ qui est négatif car a et b sont des réels positifs donc $A \leq B$
2) $A - B = \frac{(a-b)^2}{ab}$ qui est positif car a et b sont des réels positifs donc $A \geq B$
3) $A - B = \frac{a^2+b^2+ab}{ab}$ qui est strictement positif car $a > 0 \ et \ b > 0$ donc $A > B$

Exercice 8

Soit $A = \left\{ \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}^* \right\}$(ensemble des inverses des entiers naturels non nuls).

1) Trouve trois éléments de A.
2) a- Justifie que 1 est un majorant de A.

   b- Déduis en que 1 est le maximum de A.
3) Démontre par l'absurde que A n'admet pas de minimum.

Solution :

1) 1 ; $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ sont des éléments de A
2) a) Pour tout élément x *de* A, on a : $x = \frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

   $n \in \mathbb{N}^*$ *signifie que* $n \geq 1$ d'où $\frac{1}{n} \leq 1$. Donc $x \leq 1$. Par conséquent 1 est un majorant de A.

   b) 1 est élément de A et majorant de A, donc 1 est le maximum de A.
3) On suppose que A admet un minimum m alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = \frac{1}{p}$.

   $0 < m \leq 1$ donc $0 < \frac{m}{2} \leq \frac{1}{2}$.

Or $\frac{m}{2} = \frac{1}{2p}$ *avec* $2p \in \mathbb{N}^*$ d'où $\frac{m}{2}$ est aussi élément de A et plus petit que le minimum .

Dans ce cas m ne serait pas le minimum de A d'où la contradiction.
Donc A n'admet pas de minimum.

3- Exercice d'approfondissement

Exercice 9

On donne : $2{,}15 \leq x \leq 2{,}18$.

Détermine une valeur approchée de x, en précisant son incertitude.

Solution :

Soit y, une valeur approchée de x à ε-près ; on a : $|x - y| \leq \varepsilon$ ce qui donne les inéquations : $-\varepsilon \leq x - y \leq \varepsilon$, soit $y - \varepsilon \leq x \leq y + \varepsilon$ or $2{,}15 \leq x \leq 2{,}18$.

On obtient le système d'inéquations : $\begin{cases} y - \varepsilon = 2{,}15 \\ y + \varepsilon = 2{,}18 \end{cases}$ on déduit que $\boldsymbol{y = 2{,}165}$.

Donc 2,165 est une valeur approchée de x à ε-près. Déterminons alors ε.

De $\begin{cases} y - \varepsilon = 2{,}15 \\ y + \varepsilon = 2{,}18 \end{cases}$ on obtient $2\,\varepsilon = 0{,}03$ d'où $\boldsymbol{\varepsilon = 0{,}015}$

Donc 2,165 est une valeur approchée de x à 0,015-près

MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE L'ALPHABETISATION

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Union – Discipline – Travail

MON ECOLE A LA MAISON

SECONDAIRE

2 C

MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Durée : 06 heures Code :

COMPETENCE 3 : Traiter une situation relative à la géométrie du plan, à la géométrie de l'espace et aux transformations du plan.

THEME 1 : Géométrie du Plan.

LECON 3 : UTILISATION DES SYMETRIES ET TRANSLATIONS

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Akissi est une élève de seconde C. Lors de ses recherches sur internet, elle découvre les gravures ci-dessous. Emerveillée par l'harmonie de ces figures, elle les présente à ses camarades de classe.
L'un d'entre eux affirme qu'on peut obtenir chacune de ces figures à partir d'un seul élément les composant, en utilisant des symétries ou des translations. N'étant pas convaincus de cette affirmation, Akissi et ses camardes décident d'approfondir leurs connaissances sur l'utilisation des symétries et des translations.

Figure 1 :

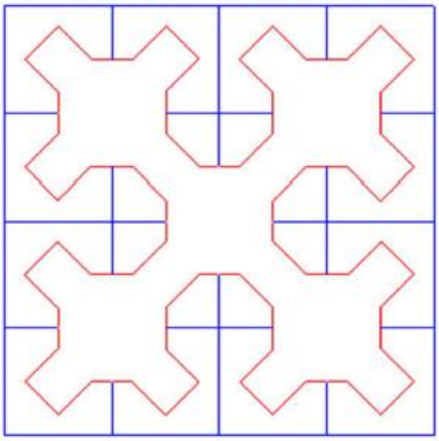
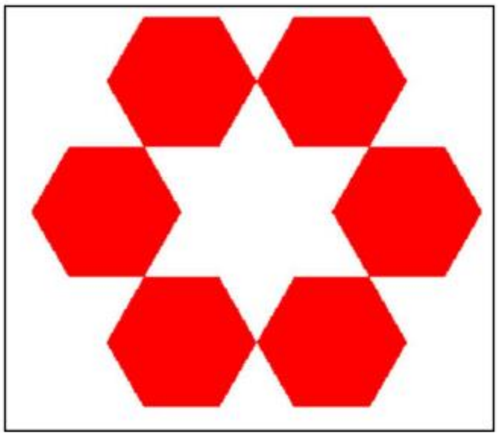


Figure 2



B. CONTENU DE LA LECON

1. Applications du plan

1.1 Définition

On appelle application du plan, toute correspondance f du plan dans lui-même qui à chaque point M associe un unique point M'.

M'est appelé image de M par f et M est un antécédent de M' par f.

Si $M' = M$, on dit que M est invariant par f.

1.2 Exemple

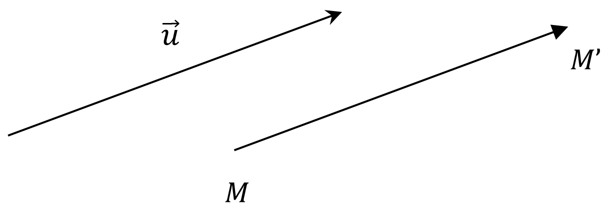
La symétrie par rapport à un point et la symétrie par rapport à une droite sont des applications du plan.

2. Translation

2.1 Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur.

On appelle translation de vecteur $\vec{u}$, l'application du plan qui à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{\mathbf{MM'}} = \vec{\mathbf{u}}$.



La translation de vecteur $\vec{u}$ est notée : $t_{\vec{u}}$. Ainsi, on note : $\mathbf{M' = t_{\vec{u}}(M)}$.

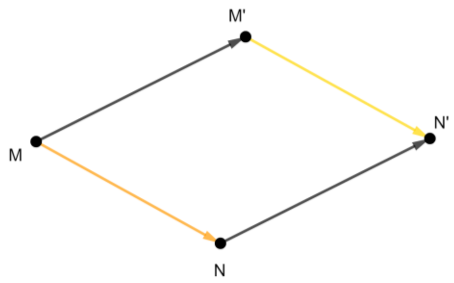
Point invariant : - Lorsque le vecteur $\vec{u}$ est non nul, $t_{\vec{u}}$ n'admet pas de point invariant.
- Lorsque le vecteur $\vec{u}$ est nul, tous les points du plan sont invariants par $t_{\vec{u}}$. On dit que $t_{\vec{u}}$ est l'application identité du plan.

2.2 Propriété caractéristique de la translation

Propriété

Soit f une application du plan dans le plan.

f est une translation si et seulement si pour tous points M et N distincts, d'images respectives M' et N', on a : $\overrightarrow{\mathbf{M'N'}} = \overrightarrow{\mathbf{MN}}$.

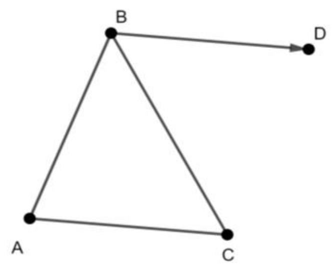


$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$

Exercice de fixation :
Soit ABC un triangle quelconque.
D est l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$
Justifie que : $\overrightarrow{\mathrm{DC}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$

Solution :

C est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
$\mathrm{t}_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}(\mathrm{A}) = \mathrm{C}$ et $\mathrm{t}_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}(\mathrm{B}) = \mathrm{D}$ donc d'après la propriété caractéristique des translations, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$

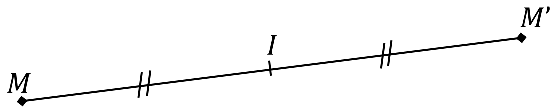


3. Symétrie centrale

3.1 Définition

Soit I un point du plan
On appelle symétrie centrale de centre I, l'application du plan qui à tout point M associe le point M' tel que : I est le milieu du segment [MM'] si $M \neq I$ et si $M = I$ alors $M' = I$.

On note : $\mathbf{M'} = \mathbf{S_I(M)}$.



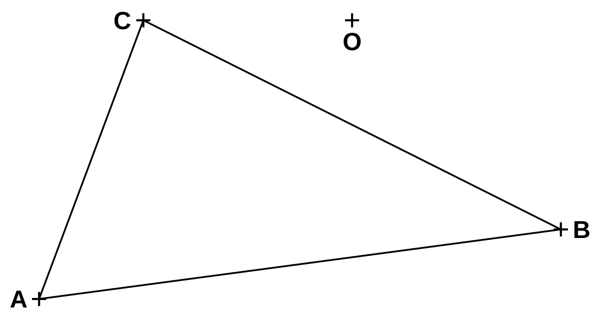
Point invariant : Le seul point invariant de la symétrie centrale de centre I est le point I.

3.2 Propriété

I est un point du plan.
$\mathbf{M'} = \mathbf{S_I(M)} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathbf{IM'}} = -\overrightarrow{\mathbf{IM}}$.

Exercice de fixation

Reproduis la figure ci-dessous, puis construis l'image du triangle ABC par la symétrie de centre O.

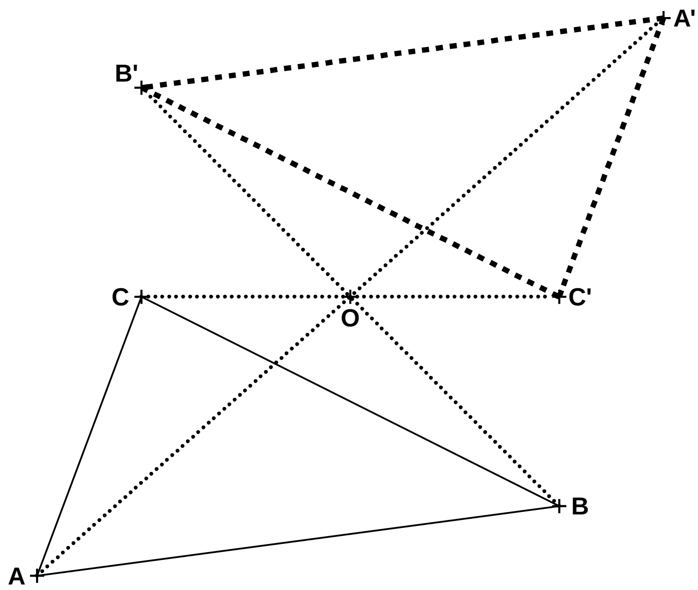


Solution :

$S_I(A) = A'$, $S_I(B) = B'$ et $S_I(C) = C'$.

On a donc : $\overrightarrow{IA'} = -\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{IB'} = -\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IC'} = -\overrightarrow{IC}$.

On obtient la figure ci-dessous.



3.3 Propriété caractéristique de la symétrie centrale

Propriété

Soit f une application du plan dans le plan.

f est une symétrie centrale si et seulement si pour tous points M et N distincts, d'images respectives M' et N', on a : $\overrightarrow{\mathbf{M'N'}} = -\overrightarrow{\mathbf{MN}}$**.**

Exercice de fixation

Soit ABC un triangle quelconque.

$S_A(B) = E$ et $S_A(C) = F$

Démontre que : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CB}$

Solution :

$S_A(B) = E$ et $S_A(C) = F$ donc d'après la propriété caractéristique de la symétrie centrale,

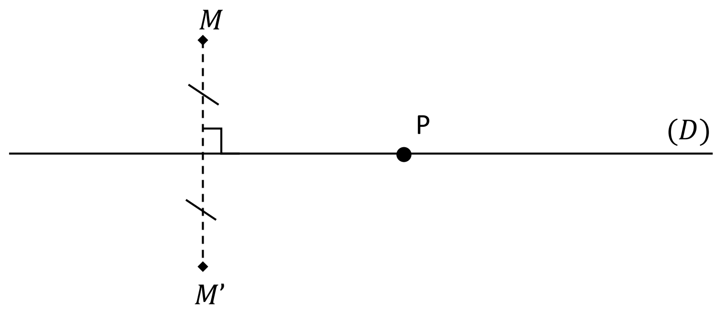
4. Symétrie orthogonale

Définition

(D) est une droite du plan.

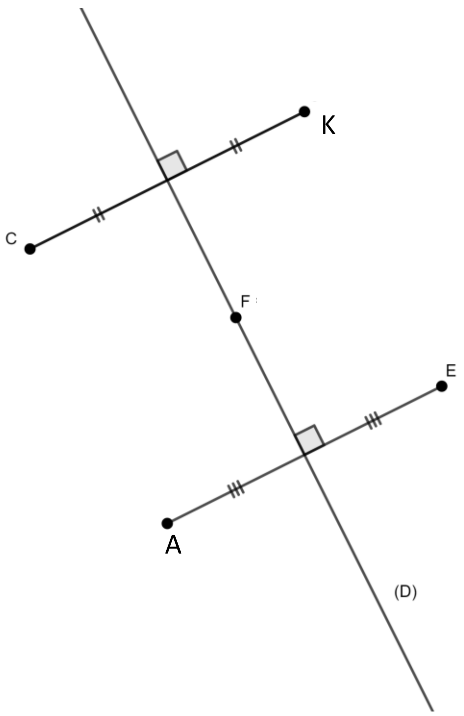
On appelle symétrie orthogonale d'axe (D), l'application du plan qui à tout point M associe le point M' tel Que la droite (D) est la médiatrice du segment [MM'] si M ∉ (D) et M'=M si M ∈ (D).

On la note : $S_{(D)}(M) = M'$



<u>Points invariants</u> : les points invariants de $S_{(D)}$ sont les points de la droite (D). On dit que la droite (D) est invariante point par point par la symétrie orthogonale d'axe (D).

Exemple
On donne la figure codée ci-dessous.



On a :

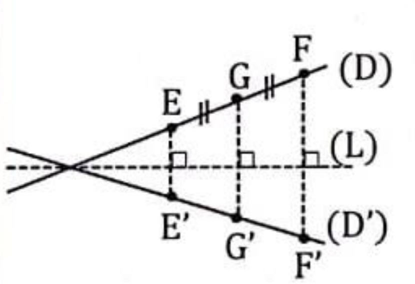
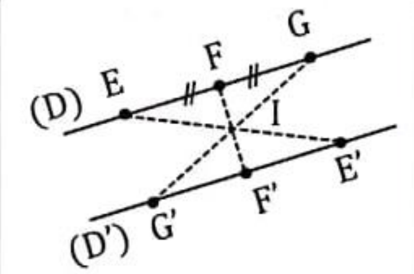
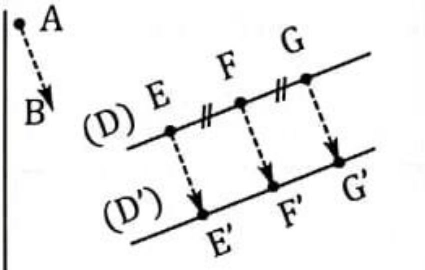
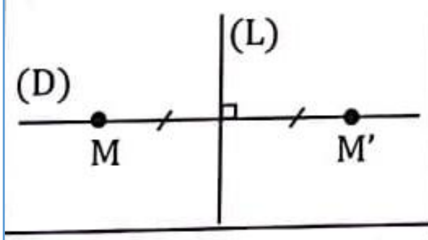
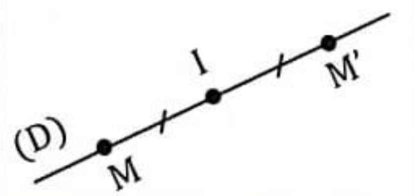
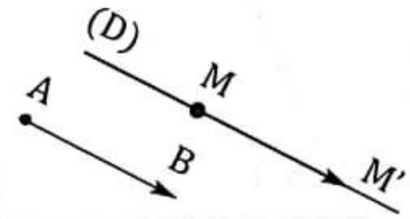
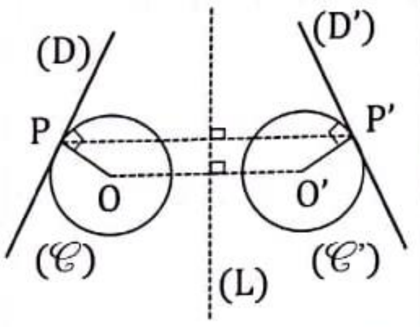
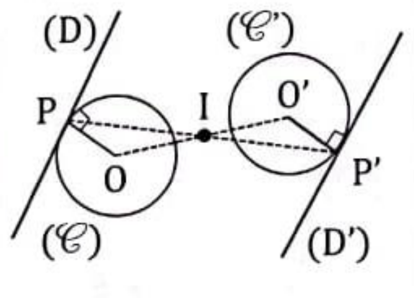
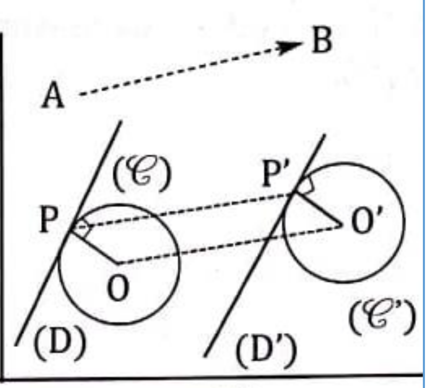
$S_{(D)}$	
C	K
F	F
E	A
K	C

5. Utilisation des symétries et des translations

5.1 Images de figures simples

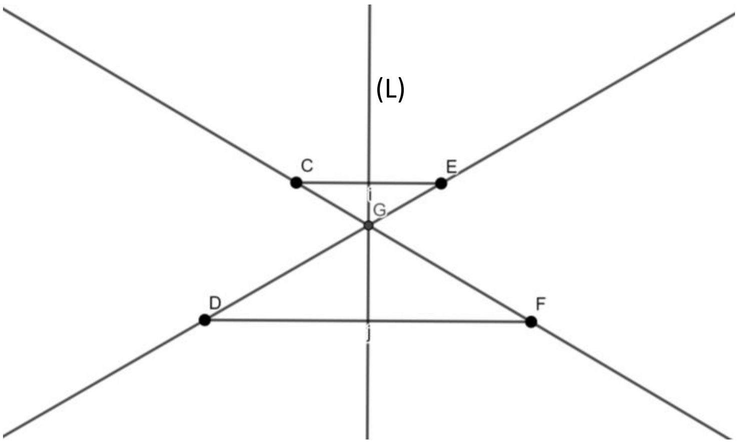
Propriétés

Le tableau suivant résume et complète les propriétés déjà énoncées dans les classes antérieures.

<table>
<tr><th>Par une symétrie orthogonale</th><th>Par une symétrie centrale</th><th>Par une translation</th></tr>
<tr><td colspan="3">• Des points alignés ont pour images des points alignés.
• Un segment a pour image un segment de même longueur.
• Le milieu d'un segment a pour image le milieu de l'image de ce segment.
• Une droite a pour image une droite.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">(D) et (D') sont parallèles.</td></tr>
<tr><td>Une droite (D) perpendiculaire à une droite (L) est sa propre image par $S_{(L)}$.</td><td>Une droite passant par un point I est sa propre image par S_I.</td><td>Une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ est sa propre image par $t_{\overrightarrow{AB}}$.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="3">• Deux droites parallèles ont pour images deux droites parallèles.
• Un cercle a pour image un cercle de même rayon.
• Un angle a pour image un angle de même mesure.
• Deux droites perpendiculaires ont pour images deux droites perpendiculaires.
• Si un point appartient à deux droites, alors son image appartient aux images de ces deux droites.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="3">Une figure a pour image une figure qui lui est superposable.</td></tr>
</table>

Exercice de fixation

Sur le graphique ci-dessous, E et F sont les images respectives des points C et D par la symétrie orthogonale d’axe (L).
G est le point d’intersection des droites (CF) et (DE).
Justifie que le point G appartient à la droite (L).



Solution

$S_{(L)}$	
C	E
D	F
F	D
E	C
(CF)	(ED)
(ED)	(CF)
(CF)∩ (ED)	(CF)∩ (ED)
G	G

car (CF)∩ (ED)= $\{G\}$

5.2 Utilisation d’une symétrie centrale, d’une symétrie orthogonale ou une translation pour construire :

Méthode :

- Lecture de l’énoncée :
  - Relever les données ;
  - Relever les instruments imposés ;
- Recherche d’une démarche :
  - Etablir un programme de construction ;

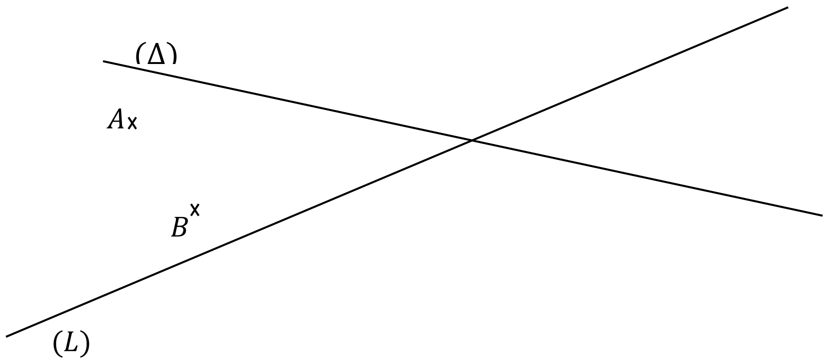
- Faire une esquisse ;
- Analyser cette esquisse ;
- Rechercher une méthode de construction ;

• Réalisation de la construction :
  - Construire la figure et la coder ;
  - Examiner éventuellement le nombre de solutions ;
  - Justifier que la construction respecte les contraintes de l'énoncé ;

Exercice de fixation

Sur la figure ci-dessous, les droites (L) et (Δ) sont sécantes.
A et B sont deux points distincts n'appartenant pas aux droites (L) et (Δ).

Construis un parallélogramme ABCD tel que C appartienne à (L) et D appartienne à (Δ).



Solution :

- **Recherche d'une démarche** (Esquisse de la figure recherchée-Analyse de l'esquisse)
  ABCD est un parallélogramme, donc en considérant la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$, le point D est l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

- **Rédaction d'une solution** (Programme de construction-Justifications)
  <u>Programme de construction</u>

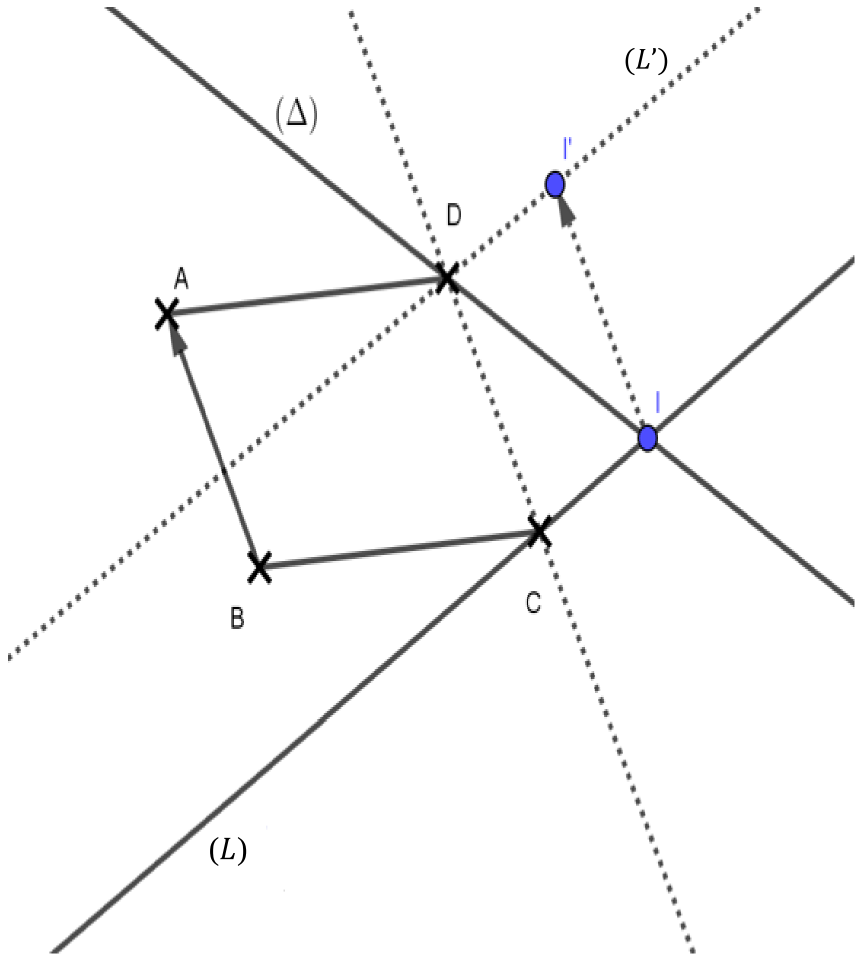
- Noter I le point d'intersection des droites (L) et (Δ).
- Construire le symétrique I' du point I par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$;
- Tracer la parallèle (L') à (L) passant par I' ; le point D est l'intersection de (L') et (Δ) ;
- Tracer la parallèle à (AB) passant par le point D ; cette droite coupe (L) au point C.
  ABCD est bien un parallélogramme avec $C \in (L)$ et $D \in (\Delta)$.

<u>**Justification**</u>

(L') est la parallèle à (L) passant par I' donc (L') est l'image de (L) par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.
On sait que $C \in (L)$ donc son image D par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$ appartient à (L').
De plus $D \in (\Delta)$, donc D est l'intersection de (L') et (Δ).

On obtient aisément le point C car les supports des côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles ; donc la parallèle à (AB) passant par D coupe (L) en C.

$t_{\overrightarrow{BA}}$	
C	D
I	I'
(L)	(L')



5.3 Utilisation d'une symétrie centrale, d'une symétrie orthogonale ou une translation pour démontrer :

<u>Méthode</u> :

- Lecture de l'énoncée :
  - Faire ou reproduire une figure codée (éventuellement après une esquisse) ;
  - Relever les données et la conclusion ;
- Recherche une démarche :
  - Analyser la figure codée ;
  - Rechercher une démarche de démonstration ;
  - Rechercher les outils nécessaires aux justifications ;
- Rédaction de la démonstration :
  - Rédiger les différentes étapes de la démonstration et les justifier ;

Exercice de fixation

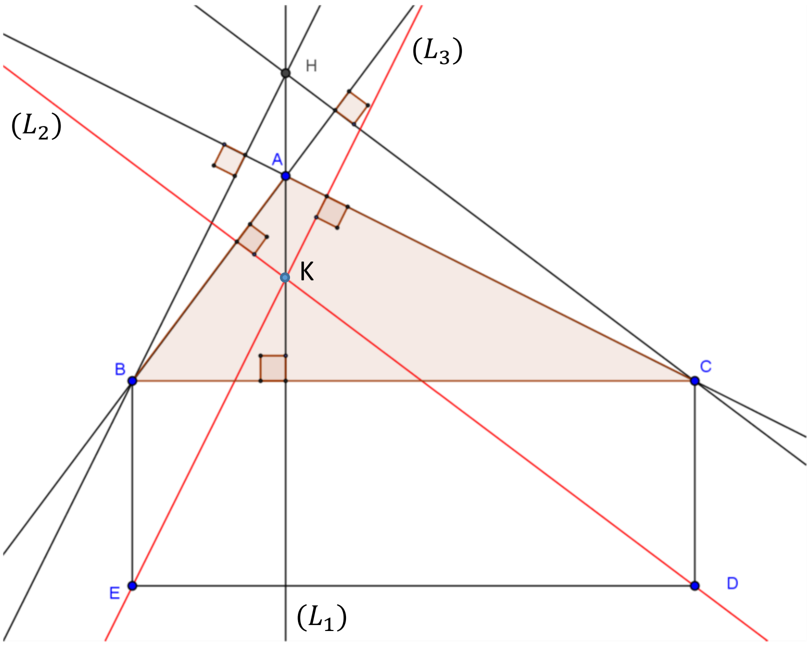
ABC est un triangle quelconque, d'orthocentre H. BCDE est un rectangle.
(L_1) est la droite perpendiculaire à (BC) passant par A, (L_2) est la droite perpendiculaire à (AB) passant par D et (L_3) est la perpendiculaire à (AC) passant par E.

En utilisant une translation, démontre que les droites $(L_1), (L_2)$ et (L_3) sont concourantes.

Solution

- **Recherche d'une démarche** (Esquisse de la figure recherchée-Analyse de l'esquisse)
    - BCDE est un rectangle, donc en considérant la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$, le point D est l'image du point C et le point E est l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$.
    - Les trois hauteurs d'un triangle étant concourante, montrer que les droites (L_1), (L_2) et (L_3) sont les image respectives des droites (AH), (CH) et (BH) par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$ revient à démontrer que les droites (L_1), (L_2) et (L_3) sont concourantes.

- **Rédaction de la démonstration**
    - BCDE est un rectangle. Donc $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BE}$. Par conséquent, E est l'image de B par $t_{\overrightarrow{CD}}$.
    - $(L_1) \perp (BC)$ et $(CD) \perp (BC)$. Donc : $(L_1) \parallel (CD)$. $\overrightarrow{CD}$ est donc un vecteur directeur de la droite (L_1). Par conséquent, (L_1) est sa propre image par $t_{\overrightarrow{CD}}$. Comme $(L_1) = (AH)$, alors (L_1) est l'image de (AH) par $t_{\overrightarrow{CD}}$.
    - $(L_2) \perp (AB)$ et $(CH) \perp (AB)$. Donc : $(L_2) \parallel (CH)$. L'image de (CH) par $t_{\overrightarrow{CD}}$ est parallèle à (CH) et passe par D, image de C. Par conséquent, (L_2) est l'image de (CH) par $t_{\overrightarrow{CD}}$.
    - On démontre de même que (L_3) est l'image de (BH) par $t_{\overrightarrow{CD}}$.
    - Les trois droites (AH), BH) et (CH) sont les hauteurs du triangle ABC. Elles ont un point commun, l'orthocentre H du triangle. Leurs images (L_1), (L_2) et (L_3) sont donc concourantes en K, image de H par $t_{\overrightarrow{CD}}$.



$t_{\overrightarrow{CD}}$	
C	D
B	E
(BH)	(L_3)
(CH)	(L_2)
(AH)	(L_1)
H	K

5-4 Des symétries et translations pour déterminer un ensemble de points

<u>**Méthode :**</u>

- Lecture de l'énoncée :
    - Relever les données ;
    - Relever les instruments imposés ;
- Recherche une démarche :
    - Faire une esquisse ;

- Analyser cette esquisse ;
- Rechercher une méthode de construction ;

- Réalisation de la solution :
  - Rédiger le programme de construction ;
  - Construire la figure et la coder ;
  - Examiner éventuellement le nombre de solutions ;
  - Justifier que la construction respecte les contraintes de l'énoncé ;

Exercice de fixation

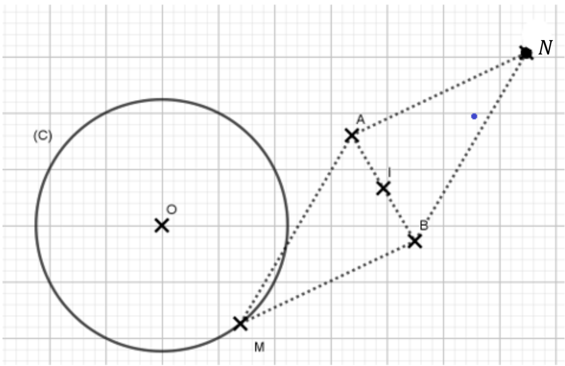
On considère un cercle (Γ) de centre O et un point M de ce cercle. Soit A et B deux points distincts tels que la droite (AB) n'ait aucun point commun avec (Γ).

1. Construis le point N tel que NBMA soit un parallélogramme.
2. Détermine le lieu du point N lorsque le point M décrit le cercle (Γ) .

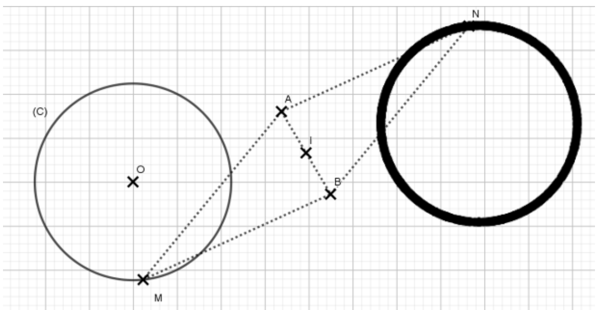
Solution :

1) NAMB est un parallélogramme, les segments [AB] et [NM] sont les diagonales de ce parallélogramme.

Considérons le point I, centre du parallélogramme NAMB. I est le milieu de [AB].
On a : $N = S_I(M)$.



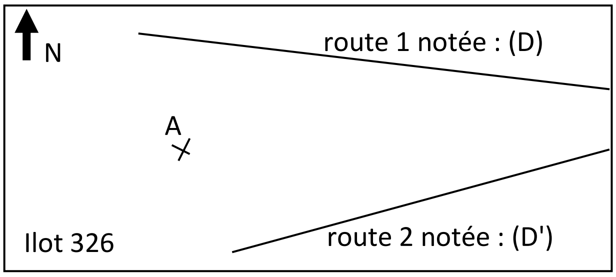
2) Lorsque le point M parcourt (C), son image N par symétrie de centre I va parcourir l'image du cercle (C) par S_I.



C. SITUATION COMPLEXE

Sur le plan d'une ville, deux routes rectilignes sont tracées. Ces deux routes se croisent en un rond-point noté O, en dehors du plan de l'ilot 326 (voir figure ci-dessous). L'aménagement de la ville a prévu une troisième route rectiligne passant par le point A du plan et qui croisent les deux premières routes en O.

Etant dans l'impossibilité de prolonger le plan, le géomètre en chef te sollicite pour tracer la troisième voie sur le plan ci-dessous sans chercher à placer le point O.
En utilisant tes connaissances sur l'utilisation des symétries et des translations, trace sur le plan la droite qui représente la nouvelle route à construire.



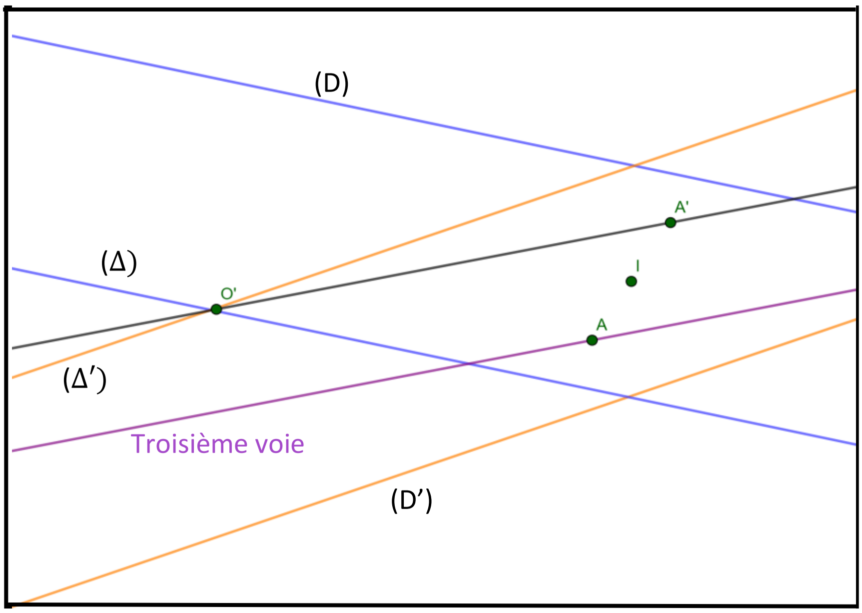
Solution :

Pour résoudre ce problème, je vais utiliser des notions qui portent sur l'utilisation des symétries et translations.

Pour cela je vais :

- Placer un point I
- Construire les droites (Δ) et (Δ′) images respectives de (D) et (D') par S_I
- Placer le point O' intersection de (Δ) et (Δ′)
- Tracer la droite (A'O')
- Tracer la droite parallèle à (A'O') passant par A
- Déduire le tracé de la troisième voie

- Construction



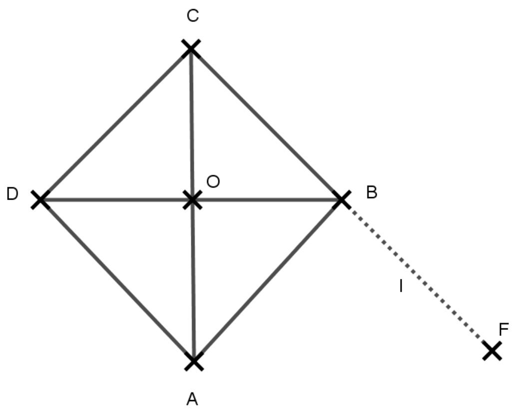
- Le point O' est l'image du point O par S_I, donc la droite (A'O') est l'image de la droite (AO) par S_I.
  Par conséquent, (AO) est la droite parallèle à (A'O') passant par A.
  La troisième voie est donc représentée par la parallèle à (A'O') passant par A.

D. EXERCICES

1. Exercices d'application

Exercice 1

Sur la figure ci-contre, on considère le losange ABCD de centre O. F est le symétrique de C par rapport à B.



A chacune des affirmations suivantes, réponds par Vrai si l'affirmation est juste ou par Faux si non, en cochant la case qui correspond.

N°	Affirmations	Vrai	Faux
1	$S_O([DB]) = [DB]$		
2	$S_O(AD) = (AD)$		
3	L'image de ABCD par S_O est ABCD		
4	$t_{\overrightarrow{AC}}(C) = A$		
5	$t_{\overrightarrow{OB}}(A) = F$		
6	$t_{\overrightarrow{CD}}(AB) = (AB)$		
7	$S_{(AC)}(B) = D$		
8	$S_{(AC)}(DC) = (BF)$		
9	$S_{(BD)}(\widehat{BAD}) = \widehat{BAD}$		
10	ABCD est globalement invariant par $S_{(BC)}$		

Solution

N°	Affirmations	Vrai	Faux
1	$S_O([DB]) = [DB]$	×	
2	$S_O(AD) = (AD)$		×
3	L'image de ABCD par S_O est ABCD	×	
4	$t_{\overrightarrow{AC}}(C) = A$		×

5	$t_{\overrightarrow{OB}}(A) = F$		×
6	$t_{\overrightarrow{CD}}(AB) = (AB)$	×	
7	$S_{(AC)}(B) = D$	×	
8	$S_{(AC)}(DC) = (BF)$	×	
9	$S_{(BD)}\left(\widehat{BAD}\right) = \widehat{BAD}$		×
10	ABCD et son image par $S_{(BC)}$ sont confonfus		×

Exercice 2

Trois élèves ont construit l'image du point A par la symétrie orthogonale d'axe (D). Les dessins ci-dessous représentent leurs solutions. Indique la construction juste :

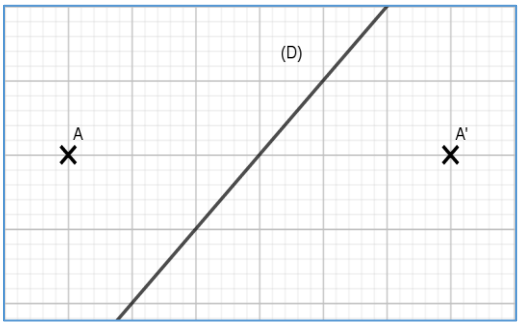


Figure 1

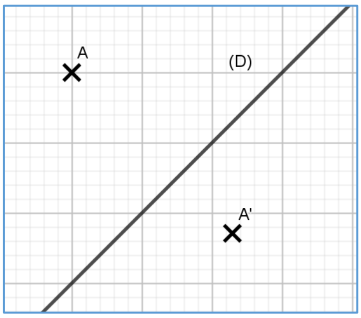


Figure 2

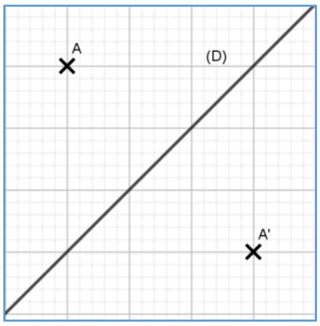


Figure 3

Solution :

Figure 3

2. Exercices de renforcement

Exercice 3

On donne un triangle quelconque ABC. Soit I le milieu du segment [BC], E et F les points de la droite (AI) tels que (BE) et (CF) soient perpendiculaires à la droite (AI).

Démontre que $BE = CF$.

Solution

(CF) et (BE) sont perpendiculaires à (AI), donc elles sont parallèles.

$S_I(C) = B$. Donc l'image de la droite (CF) passe nécessairement par B et est parallèle à (CF), elle ne peut-être que la droite (BE).

$(CF) \cap (AI) = \{F\}$, $(BE) \cap (AI) = \{E\}$. De plus $S_I(CF) = (BE)$ et $S_I(AI) = (AI)$ donc $S_I(F) = E$.

On a : $S_I(C) = B$ et $S_I(F) = E$ donc CF = BE.

Exercice 4

On considère une droite (Δ) et un point M de cette droite. Soit A et B deux points distincts n'appartenant pas à (Δ).

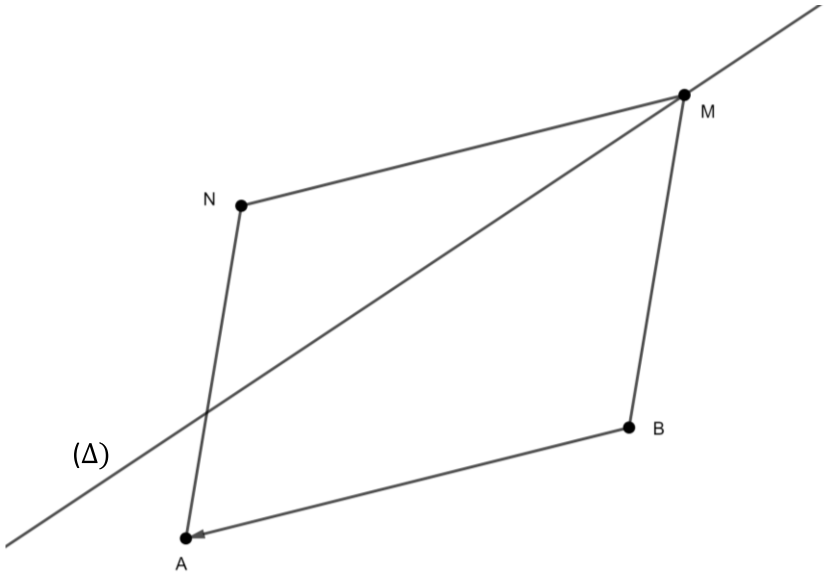
1-Construis le point N tel que NABM soit un parallélogramme.

2-Détermine le lieu géométrique du point N lorsque le point M décrit la droite (Δ) ?

Solution :

1- NABM est un parallélogramme donc $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{MN}$.

Comme $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{MN}$, alors N est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.



2- Le lieu géométrique de N lorsque M décrit la droite (Δ) est l'image de (Δ) par $t_{\overrightarrow{BA}}$.

Exercice d'approfondissement

Exercice 5

ABC est un triangle rectangle en B. On désigne par I le milieu de [BC], par J le milieu de [AB] et par H le projeté orthogonal de B sur (AC).

1 -Démontre que (IJ) est la médiatrice de [BH].

2 -En utilisant une symétrie orthogonale, démontre que (HI) est perpendiculaire à (HJ).

Solution :

1- On considère le triangle ABC. I est le milieu de [BC] et J milieu de [BA] donc (IJ) est parallèle à (AC).
Or (AC) est perpendiculaire à (BH), donc (IJ) perpendiculaire à (BH).
On considère le triangle BCH, I est le milieu [BC] et (IJ) est parallèle à (CH), donc (IJ) passe par le milieu de [BH].
Par conséquent, (IJ) est la médiatrice de [BH].

2- On considère la symétrie orthogonale d'axe (IJ) :
$S_{(IJ)}(B) = H$; $S_{(IJ)}(I) = I$ et $S_{(IJ)}(J) = J$ donc (BI) a pour image (IH)et (BJ) a pour image (JH) ; or (BI) est perpendiculaire à (BJ), donc (IH) est perpendiculaire à (JH).

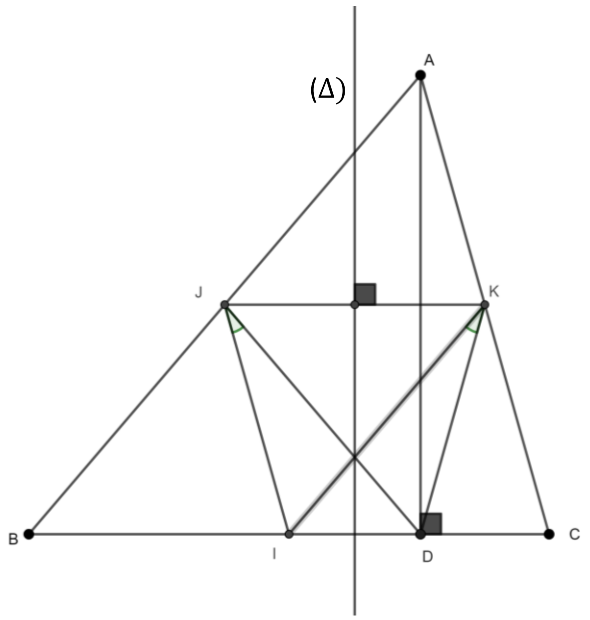
Exercice 6

ABC est un triangle quelconque. I, J et K sont les milieux respectifs des cotés [BC], [AB] et [AC]. D est le projété orthogonal de A sur la droite (BC). On note (Δ) la médiatrice de [JK].

1)
   a) Fais la figure.
   b) Démontre que (Δ) est la médiatrice de [DI].
2) Démontre que mes $\widehat{\mathrm{DJI}} =$ mes $\widehat{\mathrm{DKI}}$.

Solution :

1) a)



b) Considérons le triangle ABC. J et K sont les milieux respectifs des cotés $[AB]$ et $[AC]$, donc $(JK)//(ID)$. De plus $IJ = \frac{1}{2}\ AC =\ KC$.
Le triangle ACD est rectangle en D et K est le milieu de l'hypoténuse, donc $KC = KD$.
On a donc $IJ = KD$.
On a : $(JK)//(ID)$ et $IJ = KD$ donc le quadrilatère $IJKD$ est un trapèze isocèle.
Ainsi (Δ) la médiatrice de $[JK]$ est aussi la médiatrice de $[ID]$.

2) Soit la symétrie orthogonale d'axe (Δ)

$S_{(\Delta)}(D) = I$; $S_{(\Delta)}(J) = K$ et $S_{(\Delta)}(I) = D$, donc $S_{(\Delta)}(\widehat{DJI}) = \widehat{IKD}$alors mes $\widehat{\mathrm{DJI}} =$ mes $\widehat{\mathrm{DKI}}$.

MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE L'ALPHABETISATION

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Union – Discipline – Travail

MON ÉCOLE À LA MAISON

SECONDAIRE
2nde C
MATHÉMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Durée : 8 heures   Code :

Compétence 1
Traiter une situation relative aux calculs algébriques et aux fonctions

Thème2 : Fonctions

LECON : GÉNÉRALITES SUR LES FONCTIONS

A -SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pour les fêtes de fin d'année, le père d'un élève en classe de 2nde C a acheté un nouvel appareil électrique. Le technicien chargé de son installation à la maison a indiqué que : « L'appareil a une puissance de 600 watts. Il est alimenté sous une tension variable (en volts) et est parcouru par un courant (en ampères). L'appareil ne peut supporter une intensité supérieure à 6 ampères. Il faut donc une tension minimale pour l'alimenter. »
Curieux, cet élève veut savoir cette tension minimale mais a des difficultés. Il en parle à ses camarades de classe. L'un d'eux suggère d'exprimer la tension en fonction de l'intensité.
Ensemble, ils décident de déterminer une relation entre la puissance, la tension et l'intensité afin de répondre à la préoccupation de leur camarade.

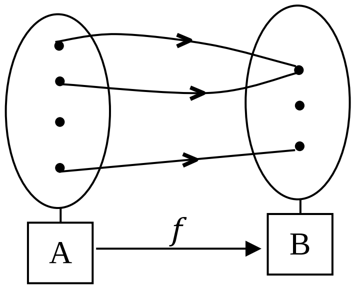
B -CONTENU DE LA LECON

I- FONCTION

1- Définition

A et B sont deux ensembles non vides.

On appelle fonction de A vers B **toute correspondance** qui, à chaque élément de A, associe **un ou zéro** élément de B.



Vocabulaire et notations

Soit f une fonction de A vers B.

Pour tout élément x de A, on désigne par $f(x)$ son correspondant par f dans B.

On dit que f est la fonction de A vers B qui, à x associe $f(x)$;

On note : f : A $\rightarrow$ B

$$x \longmapsto f(x)$$

A est l'ensemble de départ de f et B son ensemble d'arrivée.

x est la variable, $f(x)$ l'image de x par f.

- Lorsque $\boldsymbol{y}$ **est l'image de** $\boldsymbol{x}$ **par** $\boldsymbol{f}$**,** on dit que $\boldsymbol{x}$ **est un antécédent de** $\boldsymbol{y}$ **par** $\boldsymbol{f}$. On écrit : $y = f(x)$.
- Lorsque **l'ensemble d'arrivée** d'une fonction f **est un ensemble de nombres réels**, on dit que $\boldsymbol{f}$ **est une fonction numérique.**
- Lorsque l'ensemble de départ d'une fonction numérique f est l'ensemble de nombres réels, on dit que f est une fonction numérique d'une variable réelle.

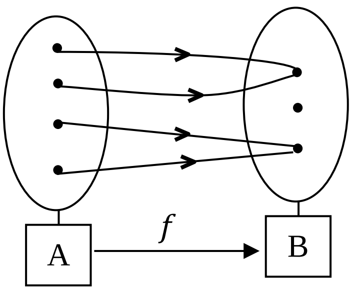
Remarques

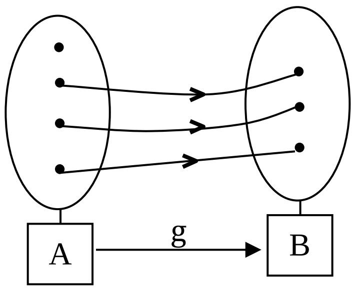
Les applications du plan dans lui-même sont des fonctions.

La symétrie orthogonale, la symétrie centrale et la translation sont des fonctions du **plan vers le plan**.

Les applications affines vues en troisième sont des fonctions de ℝ vers ℝ.

Exemples

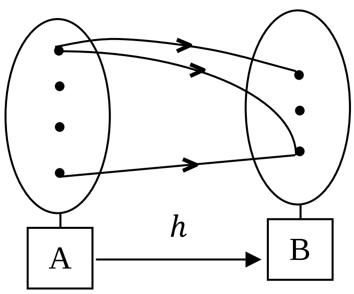




f est une fonction car chaque élément de A a zéro ou une image par f dans B.

g est une fonction car chaque élément de A a zéro ou une image par g dans B.

Contre-exemple



h n'est pas une fonction car il y a un élément de A qui a deux images par h dans B.

2- Diverses déterminations d'une fonction

a) Fonction déterminée par une formule explicite

Une fonction peut être déterminée par une formule explicite.

Exemples

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto x^2 - x + 3$

g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto \sqrt{x+5}$

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto \frac{x+3}{x-1}$

f, g et h sont des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ déterminées par leurs formules explicites respectives :
$f(x) = x^2 - x + 3$, $g(x) = \sqrt{x+5}$ et $h(x) = \frac{x+3}{x-1}$

Exercices de fixation

Exercice

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ dont le calcul de l'image est donné par le programme suivant :

- Prendre un nombre réel ;
- Elever ce nombre au carré ;
- Ajouter -4 ;
- Prendre l'inverse ;
- Multiplier par la racine carrée du nombre pris au départ.

Ecris la formule explicite de cette fonction.

Solution

$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2-4}$

b) Fonction déterminée par un tableau de valeurs

Une fonction peut être déterminée par un tableau de valeurs : c'est un tableau à deux lignes où à chaque membre de la première ligne on associe son image sur la seconde ligne si elle existe.

Exemple :

a	-12	-4	1,4	3	25
$f(a)$	-5,5	-3	5	2	-2

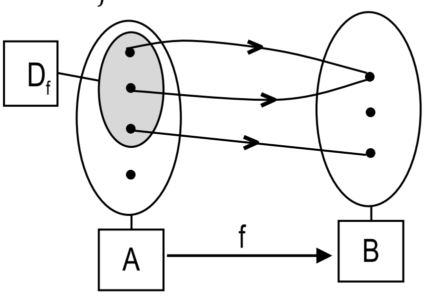
3- Ensemble de définition

a) Définition

f est une fonction d'un ensemble A vers un ensemble B.
On appelle ensemble de définition de f, l'ensemble des éléments de A qui ont une image par f.

Notation

On note habituellement D_f l'ensemble de définition de f.



Remarque

Toute fonction polynôme a pour ensemble de définition $\mathbb{R}$.

b) Détermination

Point méthode
Pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction définie par une formule explicite, on peut procéder comme suit :

- Écrire, s'il y a lieu, les contraintes sur la variable ;
- Préciser les ensembles que déterminent ces contraintes ;
- Écrire l'intersection des ensembles précédents (On pourra utiliser une droite graduée).

Exercice de fixation
Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad x. \longmapsto -2x^3 + 5x^2 + 4x + 1$

$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad x \longmapsto \frac{3x-5}{-x+2}$

$h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad x \longmapsto \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{-x}}$

Solution

- Soit D_f l'ensemble de définition de f.
  f étant une fonction polynôme est définie sur $\mathbb{R}$: $D_f = \mathbb{R}$
- Soit D_g l'ensemble de définition de g et x un nombre réel.
  $x \in D_g \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}\,; -x + 2 \neq 0$
  $\Leftrightarrow x \neq 2$

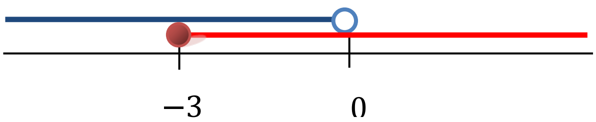
$D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ $\quad ou\ D_g =]-\infty; 2[\, \cup\,]2; +\infty[$.

- Soit D_h l'ensemble de définition de h et x un nombre réel.

$x \in D_h \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}\,; -x < 0\ et\ x + 3 \geq 0$
$\Leftrightarrow\ x \in]-\infty; 0[\ et\ x \geq -3$
$\Leftrightarrow\ x \in [-3; 0[$

Par conséquent : $D_h = [-3; 0[$.

Illustration graphique



4- Représentation graphique

Définition
Le plan est muni d'un repère.
f est une fonction numérique d'une variable réelle, d'ensemble de définition D_f.
On appelle **représentation graphique de** f, ou **courbe représentative de** f, l'ensemble des points $\mathrm{M}(x, f(x))$ où x est un élément de D_f.

Notation et vocabulaire
On note habituellement (C_f) la représentation graphique de f. On a :
$\mathrm{M}(x\,;\ y) \in (\mathrm{C}_f) \Leftrightarrow x \in \mathrm{D}_f$ et $y = f(x)$
Quand f est une fonction déterminée par une formule explicite, on dit que $y = f(x)$ est l'équation de la courbe (C_f).

Exemple
On considère la fonction f définie sur $[1; 10]$ par : $f(x) = \sqrt{x-1}$. On désigne par (C_f) est la représentation graphique de f dans le plan est muni du repère (O, I, J).
On considère les points $A(5; 2), B(7; \sqrt{6})\ et\ C(4; 1)$ on a :.

- $f(5) = 2$, d'où : $A \in (\mathrm{C}_f)$
- $f(7) = \sqrt{6}$, d'où : $B \in (\mathrm{C}_f)$
- $f(4) = \sqrt{3}$ et $\sqrt{3} \neq 1$, d'où: $C \notin (\mathrm{C}_f)$.

Remarque

$y = \sqrt{x-1}$ est l'équation de la courbe (C_f).

Point méthode

Pour tout nombre $x \in D_f, f(x)$ est unique. Il en résulte qu'une droite parallèle à l'axe des ordonnées coupe la courbe représentative d'une fonction, en au plus, un point.

Pour reconnaitre qu'une courbe représentative donnée est celle d'une fonction, on peut procéder comme suit :

- choisir un point sur l'axe des abscisses ;
- tracer la parallèle à l'axe des ordonnées passant par ce point ;
- si toute droite ainsi tracée coupe la courbe en au plus un point, alors cette courbe est celle d'une fonction.

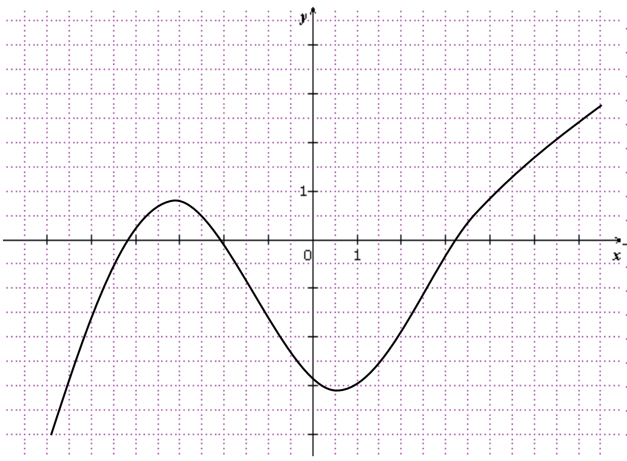
Remarque

Si une droite parallèle à l'axe des ordonnées coupe une courbe en au moins deux points, alors cette courbe n'est pas la courbe représentative d'une fonction.

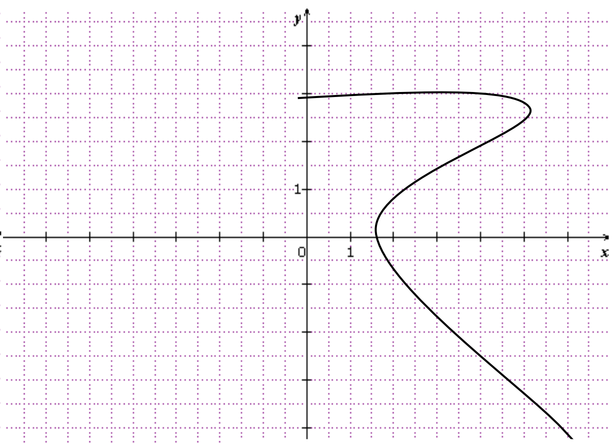
Exercice de fixation

Répondre par Vrai (V) ou par Faux(F).

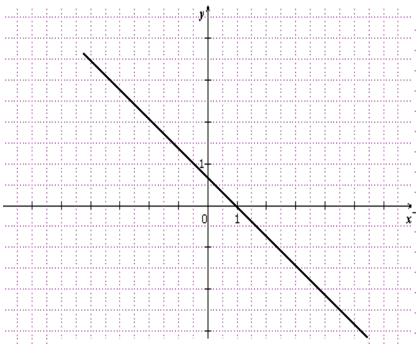
a) La courbe 1 est celle d'une fonction
b) La courbe 2 est celle d'une fonction
c) La courbe 3 n' est pas celle d'une fonction
d) La courbe 4 n' est pas celle d'une fonction



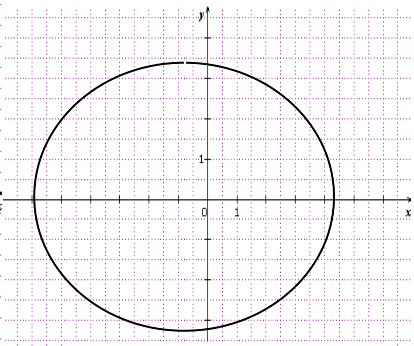
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



Courbe 4

Solution :

. a) V . b) F . c) F d) V

.

5- Détermination d'image et antécédent(s) d'un nombre par une fonction

a) **Détermination algébrique**

- Soit une fonction f et un nombre x appartenant à l'ensemble de définition de f.

L'image de x par la fonction f est le nombre $f(x)$.

- Soit y est le nombre réel. Les antécédents (s'ils existent) du nombre réel y sont les nombres réels x solution de l'équation : $y = f(x)$.

Exemple :
On considère la fonction :

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 2x^3 + 4x^2 - 6x + 1$$

L'Image de -2 par f. est :
$f(-2) = 13$, car : $f(-2) = 2 \times (-2)^3 + 4 \times (-2)^2 - 6 \times (-2) + 1 = -16 + 16 + 12 + 1 = 13$.
13 est l'image de (-2) par f.
Les Antécédents éventuels de 1 par f. sont 0 ;1 et -3 car
Les solutions de l'équation $f(x) = 1$ sont les antécédents de 1 par f. Ce sont : 0 ; 1 ; -3.

Exercices de fixation
Exercice
On considère la fonction :

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{2x-5}{3-x}$$

dont l'ensemble de définition est $\mathbb{R}\backslash\{3\}$.

1) Calcule les images par f des nombres réels 0 ; 2 ; 4.
2) Calcule l'antécédent par f du nombre réel -1.

Solution

1) Les nombres réels 0 ; 2 ; 4 appartiennent à $\mathbb{R}\backslash\{3\}$. Leurs images peuvent être calculées.
$f(0) = \frac{2\times 0-5}{3-0} = \frac{-5}{3}$; $f(2) = \frac{2\times 2-5}{3-2} = -1$; $f(4) = \frac{2\times 4-5}{3-4} = -3$.
2) **Pour calculer les antécédents de -1**, résolvons l'équation : $x \in \mathbb{R}, f(x) = -1$.
Contraintes sur l'inconnue : $x \in \mathbb{R}\backslash\{3\}$.
Pour tout nombre réel x un élément de $\mathbb{R}\backslash\{3\}$, on a :

$$\frac{2x-5}{3-x} = -1 \Leftrightarrow 2x - 5 = x - 3$$

$$\Leftrightarrow x = 2.$$

2 appartient à $\mathbb{R}\backslash\{3\}$. L'antécédent de -1 par f est 2.

b) **Détermination graphique**

Point méthode :
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. Soit a un élément de l'ensemble de définition de f.
Pour lire graphiquement l'image de $\boldsymbol{a}$, c'est-à-dire $\boldsymbol{f(a)}$, on procède comme suit :
   - Tracer la droite (D) d'équation $x = \boldsymbol{a}$.
   - L'ordonnée du point d'intersection de (C_f) et (D) est l'image de $\boldsymbol{a}$ par f.

2. Pour lire graphiquement le(s) antécédent(s) éventuels d'un nombre réel $\boldsymbol{b}$ par f, on procède comme suit :

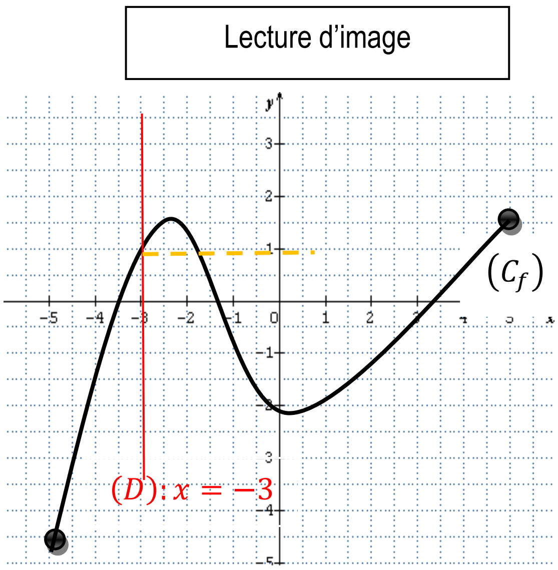
- Tracer la droite (Δ) d'équation $y = \boldsymbol{b}$.
- Les antécédents de $\boldsymbol{b}$ sont les abscisses des points d'intersection éventuels de la droite (Δ) d'équation $y = \boldsymbol{b}$ et de (C_f).

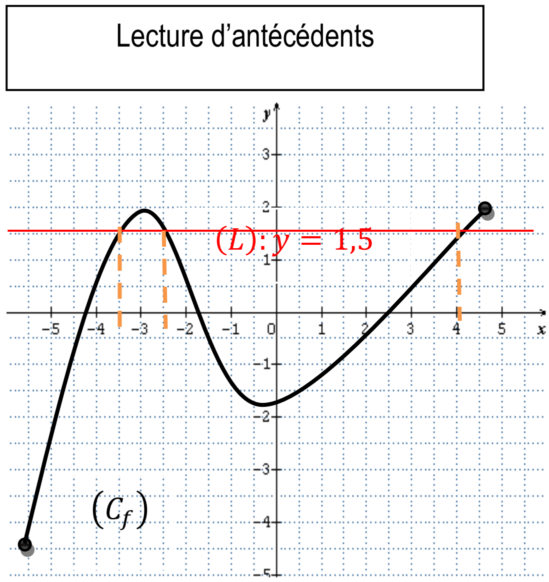
Exercice de fixation

Exercice

Le plan est muni d'un repère. (C_f) est la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-5; 3]$.

1. Détermine graphiquement l'image du nombre -3 par f
2. Détermine graphiquement le(s) antécédent(s) du nombre 1,5 par f.





- L'image de -3 par f est 1
- Les antécédents de 1,5 par f $sont$: $-3,5$; $-2,5$ et 4

6- Image directe et image réciproque d'un ensemble par une fonction

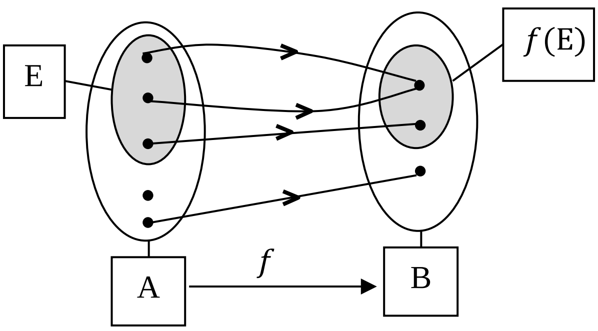
a) Image directe

Définition

Soit f une fonction de A vers B et E une partie de A.

On appelle **image directe** de E par f, l'ensemble des images par f de tous les éléments de E.

On la note $f(\mathrm{E})$.



- **Détermination algébrique**

Exercice de fixation

Soit f une fonction de ℝ vers ℝ définie par : $f(x) = 2x^2 - 1$ et A = $\{-1; 0; 1; 5\}$.
Détermine l'image directe de A par f.

Solution

L'image directe de A par f est constituée des images de tous les éléments de A.
On a : $f(-1) = 1$; $f(0) = -1$; $f(1) = 1$ et $f(5) = 49$.
L'image directe de A par f est : f(A) = $\{1; -1; 49\}$.

- **Détermination graphique**

Point méthode

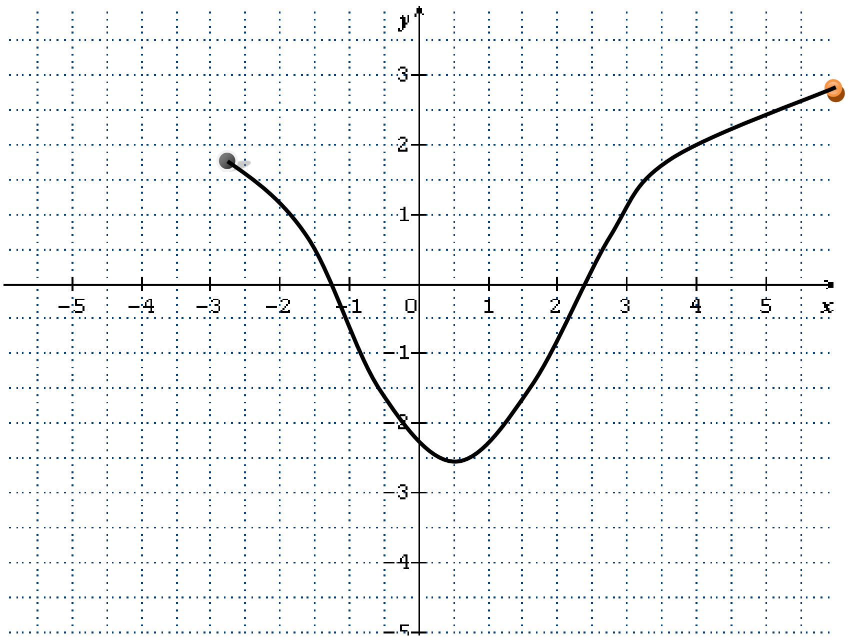
Soit (C) la représentation graphique d'une fonction f dans le plan rapporté à un repère.
Pour déterminer l'image directe d'un intervalle $[a; b]$ par f, on peut procéder comme suit :

- On représente sur l'axe des abscisses l'intervalle $[a; b]$;
- On hachure l'ensemble F des points M du plan dont les couples de coordonnées $(x\ ; y)$ sont tels que : $x \in [a; b]$;
- On détermine l'intersection G de la représentation graphique de (C) avec l'ensemble F ;
- On hachure la bande parallèle à l'axe des abscisses contenant G (ne débordant pas de G) ;
- On détermine l'intersection de cette bande avec l'axe des ordonnées ;
- On repère les points d'ordonnées minimale et maximale de cette intersection ;
- A l'aide de ces ordonnées minimale et du maximale déterminées précédemment, on obtient l'image directe de $[a; b]$ par f.

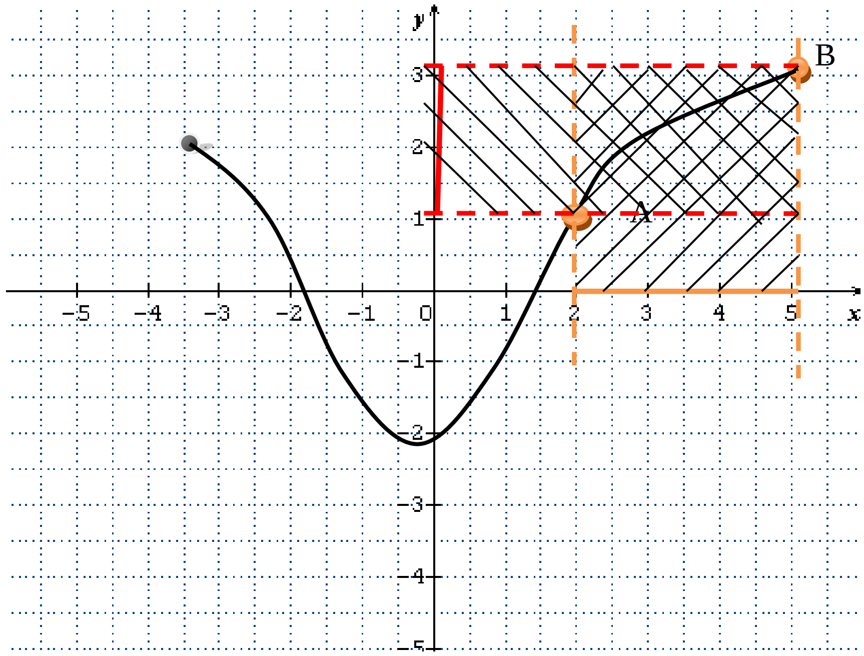
Exercice de fixation

Exercice

Soit f la fonction dont la courbe représentative (C_f) est donnée dans le repère orthogonal ci-après.
Détermine l'image directe par f de l'intervalle $[2; 5]$.



Solution :



On représente sur l'axe des abscisses l'intervalle $[2\ ;\ 5]$.

L'ensemble des points M de (C_f) de coordonnées $(x; y)$ tels que : $x \in [2\ ;\ 5]$ est la portion G de la courbe (C_f) entre A et B. La bande parallèle à l'axe des abscisses contenant G rencontre l'axe des ordonnées en deux points d'ordonnées respectives 1 et 3.

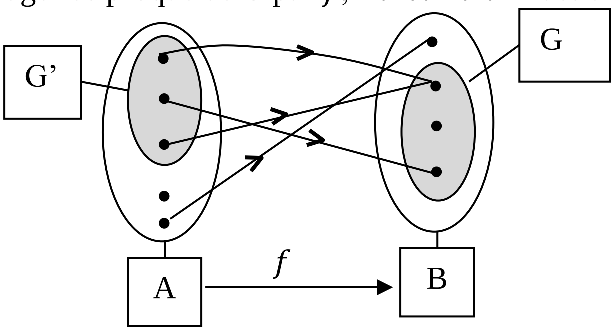
L'image directe de l'intervalle $[2; 5]$ par f est l'intervalle $[1; 3]$.

b) Image réciproque

Définition

f est une fonction de A vers B et G une partie de B.

On appelle image réciproque de G par f, l'ensemble G' des antécédents par f de tous les éléments de G.



- **Détermination algébrique**

  Exercice de fixation

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = 2x - 1$ et B = $\{0; -1; 3\}$.

Détermine l'image réciproque de B par f.

Solution

Il s'agit de déterminer l'ensemble des antécédents des éléments de B par f.

On a :

$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$;

$f(x) = -1 \Leftrightarrow x = 0$;

$f(x) = 3 \quad \Leftrightarrow x = 2$;

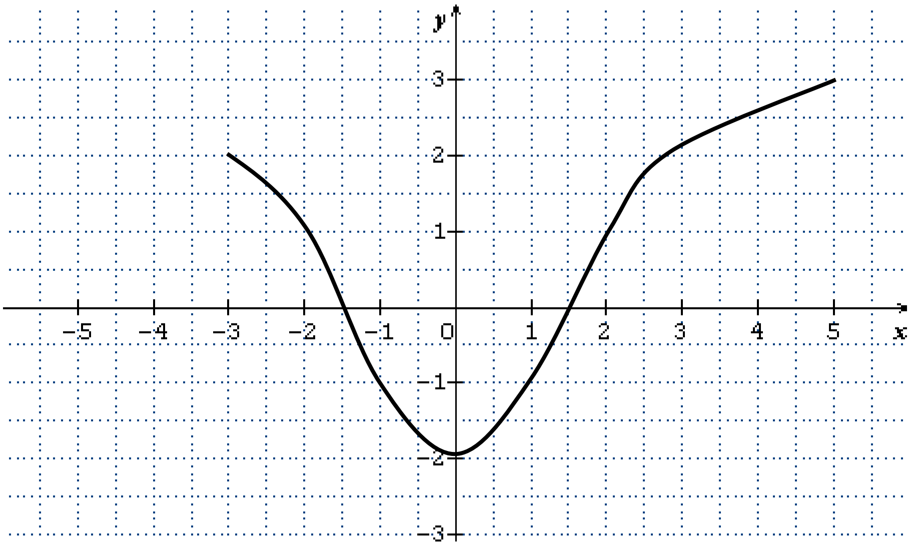
L'image réciproque de B par f est : A = $\left\{0; \frac{1}{2}; 2\right\}$.

- **Détermination graphique**

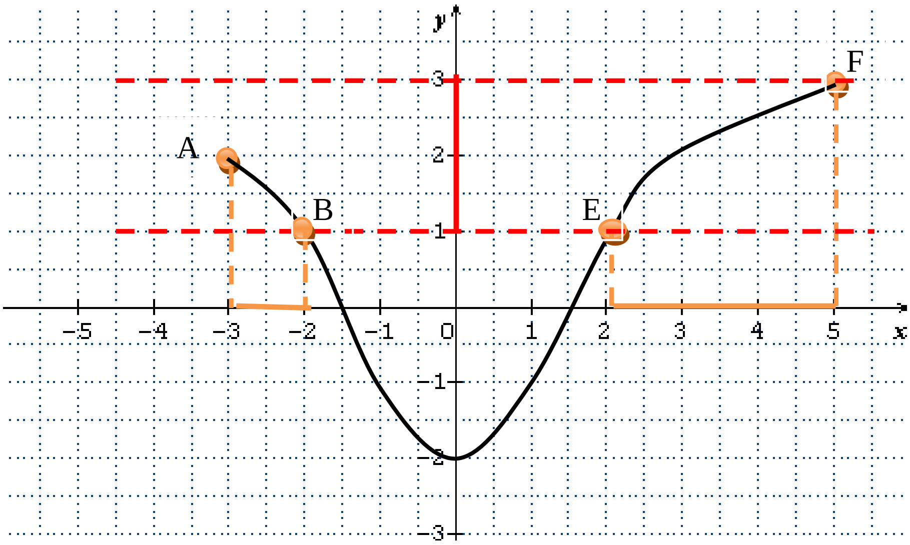
Point méthode
Soit (C) la représentation graphique d'une fonction f dans le plan rapporté à un repère.
Pour déterminer l'image réciproque d'un intervalle $[a; b]$ par f, on peut procéder comme suit :

- On représente sur l'axe des ordonnées l'intervalle $[a; b]$;
- On hachure l'ensemble T des points M du plan dont les couples de coordonnées $(x; y)$ sont tels que : $y \in [a; b]$;
- On détermine l'intersection H de la représentation graphique (C) avec l'ensemble T ;
- On hachure la bande parallèle à l'axe des ordonnées contenant H (ne débordant pas de H) ;
- L'intersection de l'ensemble hachuré précédemment avec l'axe des abscisses permet d'identifier l'image réciproque de $[a; b]$ par f.

Exercice de fixation
Soit f la fonction dont la courbe (C_f) est donnée dans le repère orthogonal ci-après.
Détermine l'image réciproque par f de l'intervalle $[1; 3]$.



Solution :



On représente sur l'axe des ordonnées l'intervalle $[1; 3]$.
L'ensemble des points de (C_f) dont les couples de coordonnées $(x; y)$ sont tels que : $y \in [1; 3]$ est constitué de la réunion des portions de courbes entre A et B et entre E et F.
L'ensemble des abscisses des points de la portion de la courbe comprise entre A et B est l'intervalle $[-3; -2]$ (obtenu en déterminant l'intersection de la bande parallèle à l'axe des ordonnées et l'axe des abscisses).

L'ensemble des abscisses des points de la portion de la courbe comprise entre E et F est l'intervalle $[2; 5]$ (obtenu en déterminant l'intersection de la bande parallèle à l'axe des ordonnées et l'axe des abscisses).
On en déduit que l'image réciproque par f de l'intervalle $[1; 3]$ est la réunion d'intervalles $[-3; -2] \cup [2; 5]$.

7- Fonctions égales sur un ensemble

Définition
f et g sont des fonctions définies sur un ensemble E.
On dit que les fonctions f et g sont égales sur E (ou qu'elles coïncident sur E) lorsque, pour tout élément x de E, on a : $f(x) = g(x)$.

Remarque
Les représentations graphiques de fonctions égales sur un ensemble coïncident sur cet ensemble.

Exemple :
Soit les fonctions $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x - 1$ $\qquad$ $x \longmapsto \frac{x^2-1}{x+1}$

f *et* g sont égales sur $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$.
En effet :

Les fonctions f *et* g sont définies sur $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

De plus pour tout $x \in]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$, $g(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x - 1 = f(x)$.

Exercice de fixation
Soit les fonctions $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^2$ $\qquad$ $x \longmapsto x|x|$

Démontre que f et g sont égales sur $[0; +\infty[$.

Solution

Pour tout élément x de $[0; +\infty[$, $|x| = x$,
d'où pour élément x de $[0; +\infty[$, $g(x) = x^2 = f(x)$.
Les fonctions f et g sont égales sur $[0; +\infty[$.

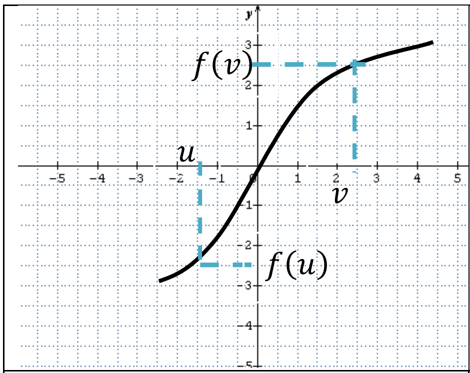
II- VARIATIONS D'UNE FONCTION

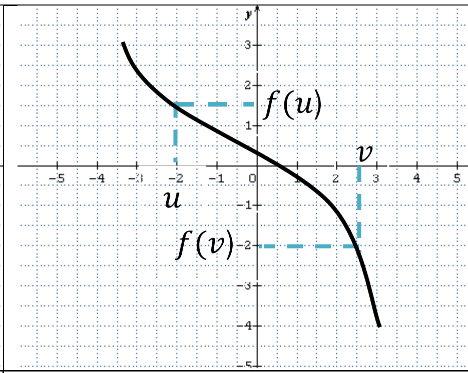
1. Sens de variation d'une fonction

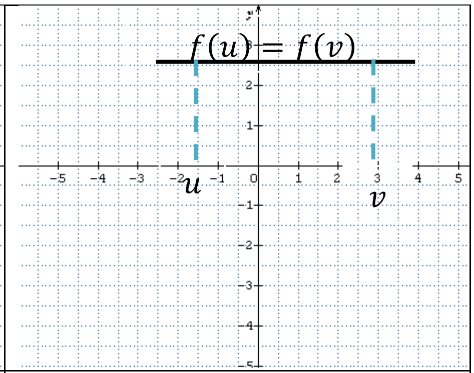
Définitions
f est une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un intervalle K.

- f est une fonction **croissante** sur K (respectivement **strictement croissante** sur K)
- lorsque pour tous les éléments u et v de K : $u < v \Rightarrow f(u) \leq f(v)$(respectivement $u < v \Rightarrow f(u) < f(v)$)
- f est une fonction **décroissante** sur K (respectivement **strictement décroissante** sur K)
- lorsque pour tous les éléments u et v de K : $u < v \Rightarrow f(u) \geq f(v)$(respectivement $u < v \Rightarrow f(u) > f(v)$).
- f est **constante** sur K lorsque pour tous éléments u et v de K, $f(u) = f(v)$.
- f est une fonction **monotone** sur K lorsqu'elle est soit croissante sur K, soit décroissante sur K.
  f est une fonction **strictement monotone** sur K lorsqu'elle est soit strictement croissante sur K, soit strictement décroissante sur K.

Illustrations graphiques







$u < v \Rightarrow f(u) \leq f(v)$ f est croissante	$u < v \Rightarrow f(u) \geq f(v)$($f$ est décroissante	Pour $u \in$ Ket $v \in$ K, $f(u) = f(v)$. f est constante

Remarques

- Une fonction est croissante lorsque les nombres sont rangés dans le même ordre que leurs images
  Une fonction est décroissante lorsque les nombres sont rangés dans l'ordre inverse de leurs images
- Étudier le sens de variation d'une fonction, c'est déterminer les plus grands intervalles sur lesquels la fonction est strictement monotone ou constante.

Exercices de fixation

Soit f la fonction de ℝ vers ℝ définie par : $f(x) = (x-3)^2 + 1$
Étudie les variations de f sur $]-\infty; 3]$ et sur $[3; +\infty[$.

Solution

• f est strictement décroissante sur $]-\infty; 3]$.
En effet :
Soit u et v appartenant à $]-\infty; 3]$ tels que : $u < v$.

$$u < v \leq 3 \Longrightarrow u - 3 < v - 3 \leq 0$$
$$\Longrightarrow (u-3)^2 > (v-3)^2 \geq 0$$
$$\Longrightarrow (u-3)^2 + 1 > (v-3)^2 + 1$$
$$\Longrightarrow f(u) > f(v)$$

• f est strictement croissante sur $[3; +\infty[$.
En effet :
Soit u et v appartenant à $[3; +\infty[$ tels que : $u < v$.

$$3 \leq u < v \Longrightarrow 0 \leq u - 3 < v - 3$$
$$\Longrightarrow 0 \leq (u-3)^2 < (v-3)^2$$
$$\Longrightarrow (u-3)^2 + 1 < (v-3)^2 + 1$$
$$\Longrightarrow f(u) < f(v)$$

2. Tableau de variation

Un tableau de variation est un tableau qui résume les variations d'une fonction en faisant apparaître les intervalles où elle est strictement monotone ou constante.

Exemple

La figure ci-après est la représentation graphique (Cg) d'une fonction g définie sur l'intervalle [-5 ; 5].

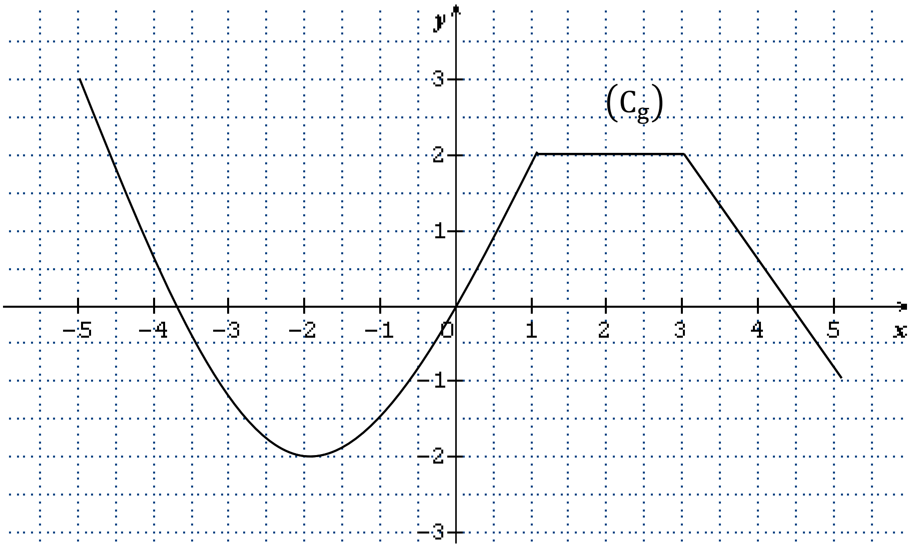


Tableau de variation de g sur $[-5; -2]$

x	-5		-2		1		3		5
$g(x)$	3	↘	-2	↗	2	→	2	↘	-1

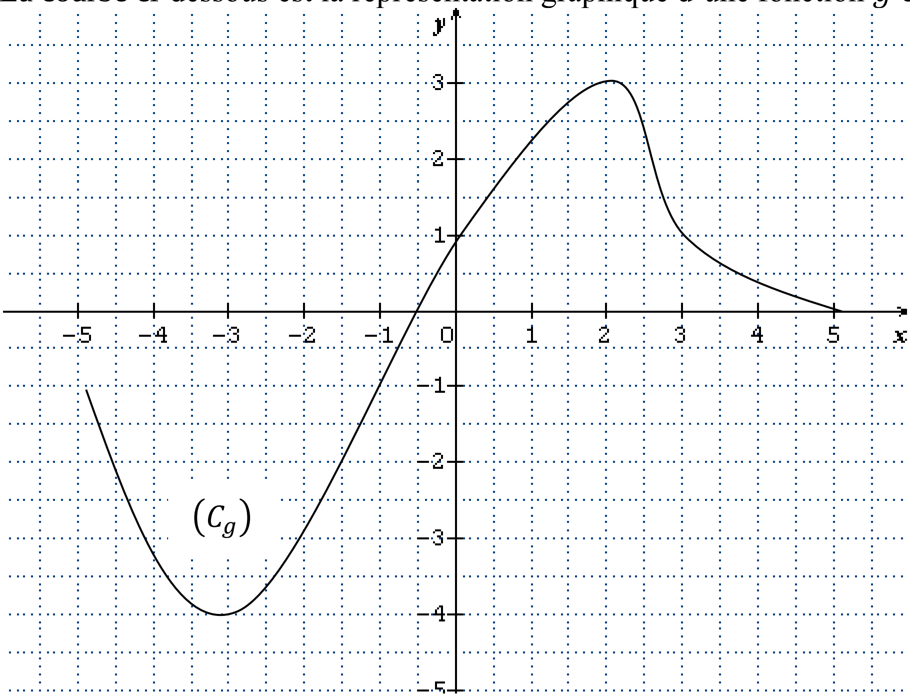
En effet :

g est strictement croissante sur $[-2; 1]$;
g est strictement décroissante sur $[-5; -2]$ et sur $[3; 5]$;
g est constante sur $[1; 3]$.

Exercices de fixation

Exercice

La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction g définie sur $[-5; 5]$



Détermine les variations de g *sur l'intervalle* $[-5;\ 5]$.

Solution

g est strictement croissante sur l'intervalle $[-3; 2]$ et strictement décroissante sur les intervalles $[-5; -3]$ et $[2\ ; 5]$.

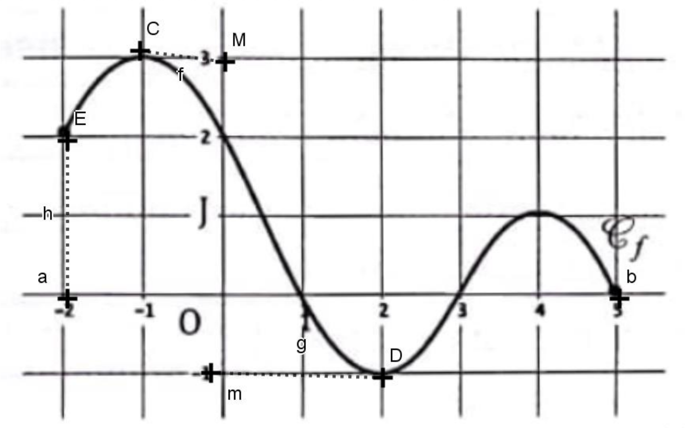
3. **Maximum-Minimum d'une fonction**
   Définition

Soit f est une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un intervalle E ; a et b deux éléments de E.
Lorsque pour tout élément x de E, $f(a) \geq f(x)$, on dit que $f(a)$ est le maximum de f sur E.
Lorsque pour tout élément x de E, $f(b) \leq f(x)$, on dit que $f(b)$ est le minimum de f sur E.

Exercices de fixation

Exercice 1

Sur figure ci-dessous, (C_f) est la représentation graphique d'une fonction f sur l'intervalle $[-2\ ; 5]$.
Détermine le maximum et le minimum de f sur $[-2\ ; 5]$.

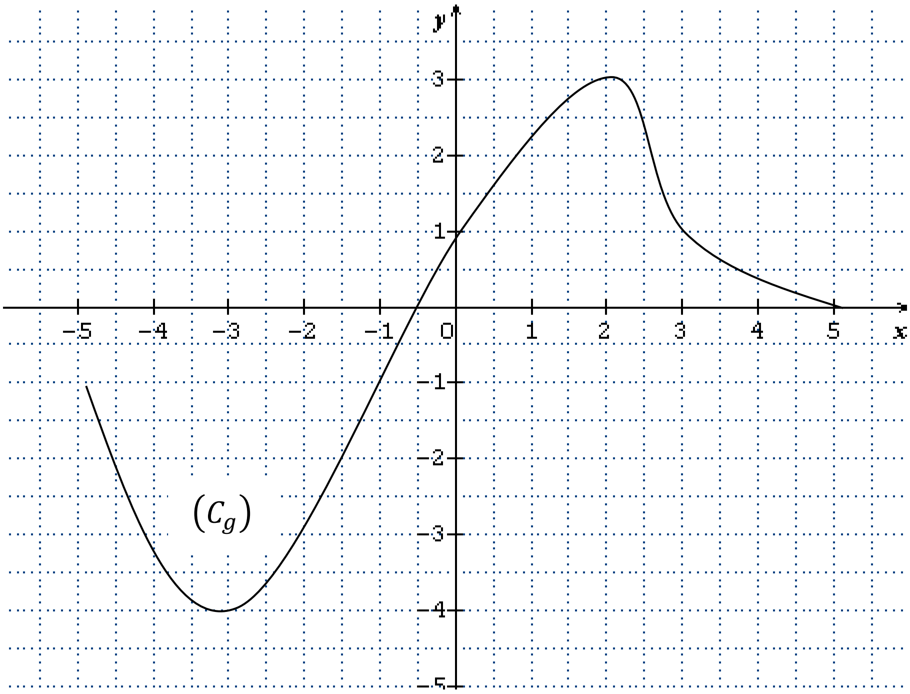


Solution

Le maximum de f sur $[-2\ ; 5]$ est 3.
Le minimum de f sur $[-2\ ; 5]$ est -1.
On dit que, sur l'intervalle $[-2\ ; 5]$, f admet en -1 un maximum égal à 3 et en 2 un minimum égal à -1.

Exercice 2

La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction g définie sur l'intervalle $[-5; 5]$



Détermine graphiquement le maximum et le minimum de la fonction g sur son ensemble de définition.

Solution

Le minimum de f sur l'intervalle $[-5\,;5]$ est -4 ;
Le maximum de f sur l'intervalle $[-5\,;5]$ est 3.

C-SITUATION COMPLEXE

Un camion-citerne veut vider 5000 litres d'eau dans une piscine. Après avoir versé 250 litres d'eau, l'employé chargé de l'opération laisse le robinet ouvert. Le fils du propriétaire, élève en classe de seconde C, impatient, veut connaitre le temps que mettra le camion pour mettre un volume d'eau maximum dans la piscine. Pour cela, il met le chronomètre de sa montre à zéro. Le débit du robinet est 2 litres par seconde.

Détermine le temps au bout duquel le volume d'eau dans la piscine atteint son maximum.

Solution

Ce problème se rapporte à la leçon fonction en particulier maximum d'une fonction.
Pour déterminer ce temps,
Nous allons déterminer l'expression de la fonction $f(t)$ qui permet de vider le camion-citerne
En fonction du temps.
Nous calculerons le volume v_o restant dans citerne,
Puis résoudre l'équation $f(t) = v_o$; avant de conclure

Déterminons l'expression de la fonction $f(t)$ (t le temps en secondes)

- Le débit étant de 2litres par seconde ; alors on a
- $f(t) = 2t$, (la quantité d'eau qui s'écoule en t secondes)

La quantité d'eau restant après avoir versé 250 litres est : 5000-250=4750 litres

Résoudre l'équation $f(t) = 4750$

$f(t) = 4750 \Leftrightarrow 2t = 4750$

$\Leftrightarrow t = \frac{4750}{2}$

$\Leftrightarrow t = 2375\ secondes$=39 minutes 35secondes

La piscine atteint son maximum lorsque la citerne est entièrement vidée et le temps nécessaire est De 39 minutes 35secondes

D-EXERCICES

Exercice 1

Soit les fonctions $f, g, h\ et\ k\ de\ \mathbb{R}\ vers\ \mathbb{R}$ définies par leurs expressions explicites. Détermine l'ensemble de définition de chacune d'elles.

1) $f(x) = (2x^2 + 3)(x - 4)$; 2) $g(x) = \dfrac{2x + 3}{(x - 1)(-x + 5)}$; 3) $h(x) = \sqrt{-3x + 3}$

Solution

1) $x \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$. Donc $D_f = \mathbb{R}$.

2) $x \in D_g \Leftrightarrow (\ x \in \mathbb{R}$ et $(x - 1)(-x + 5) \neq 0\ )$.

$\Leftrightarrow (\ x \in \mathbb{R}\ ;\ x - 1 \neq 0$ et $-x + 5 \neq 0\ )$

$\Leftrightarrow (\ x \in \mathbb{R}\ ;\ x \neq 1$ et $x \neq 5)$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{1; 5\}$. Donc $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1; 5\}$.

3) $x \in D_h \Leftrightarrow (\ x \in \mathbb{R}$ et$-3x + 3 \geq 0)$

$\Leftrightarrow (\ x \in \mathbb{R}$ et $x \leq 1\ )$.

$\Leftrightarrow x \in]-\infty; 1]$. Donc $D_h =]-\infty; 1]$.

Exercice 2

Le plan est muni du repère (O, I, J). (C_g) est la représentation graphique de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^2 + 1$.

1) Les points $E\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, F\begin{pmatrix}2\\10\end{pmatrix}$ $et\ G(3; 20)$ appartiennent-ils à (C_g) ?
2) Justifie que la fonction g est strictement croissante sur$[0; +\infty[$.
3) Justifie que la fonction g est strictement décroissante sur$]-\infty; 0]$.

Solution

1) $(0) = 1$. Donc $E\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \in (C_g)$.

$g(2) = 2 \times 4 + 1 = 9$. Donc $F\begin{pmatrix}2\\10\end{pmatrix} \notin (C_g)$.

$g(3) = 2 \times 9 + 1 = 19$. Donc $G(3; 20) \notin (C_g)$.

2) Soit u et v deux éléments de $[0; +\infty[$ tels que $u < v$. Justifions que $g(u) < g(v)$.

On a : $0 \leq u < v$ donc $u^2 < v^2$

$2\,u^2 < 2\,v^2$

$2\,u^2 + 1 < 2\,v^2 + 1$

C'est à dire $g(u) < g(v)$.

Pour deux éléments u et v de $[0; +\infty[$,

3) Soit u et v deux éléments de $]-\infty; 0]$ tels que $u < v$. Justifions que $g(u) > g(v)$.

On a : $u < v \leq 0$ donc $u^2 > v^2$

$2\,u^2 > 2\,v^2$

$2\,u^2 + 1 > 2\,v^2 + 1$

C'est à dire $g(u) > g(v)$.

Pour deux éléments u et v de $]-\infty; 0]$,

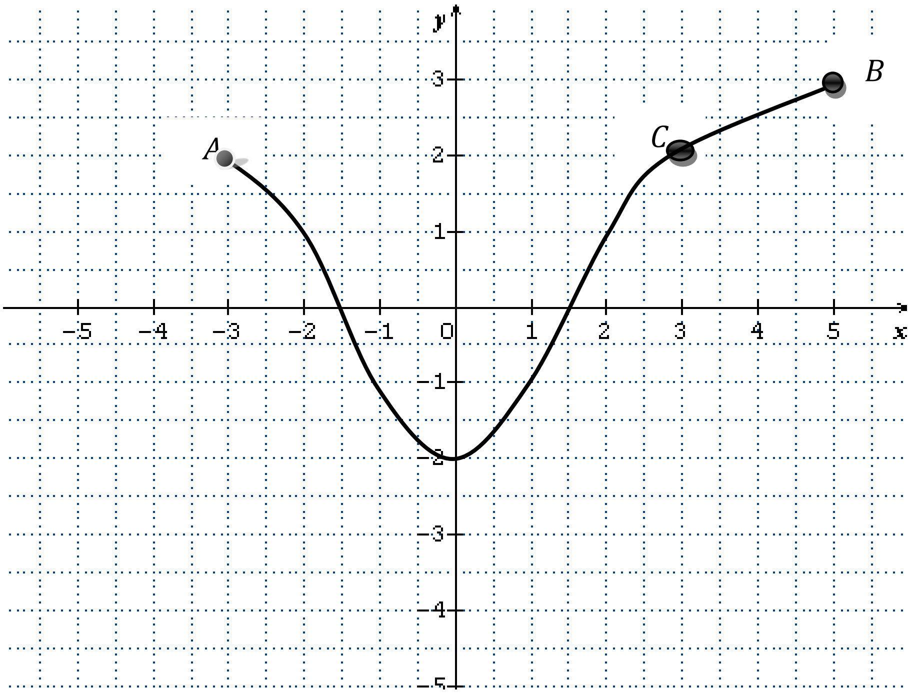
$u < v \Longrightarrow g(u) < g(v)$ donc la fonction g est strictement croissante sur$[0; +\infty[$.

$u < v \Longrightarrow g(u) > g(v)$ donc la fonction g est strictement décroissante sur$]-\infty; 0]$.

Exercice 3

Soit f la fonction dont la courbe (C_f) est donnée ci-après

1) Détermine graphiquement l'ensemble de définition de f.
2) Lis graphiquement les images par $f$de 2 et 0.
3) Lis graphiquement le(s) antécédents par f de 2 et -2.



Solution

1) $D_f = [-3; 5]$

2) $f(2) = 1$ et $f(0) = -2$.

3) Les antécédents par f de 2 : -3 et 3.
L'antécédent par f de -2 : 0 .

Exercice 4

Soit f et g, les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ et $g(x) = \frac{x^3+x}{x^2+1}$

Démontre que les fonctions f et g sont égales sur $\mathbb{R}$.

Solution

$D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}$ donc $D_f = D_g$.

Pour $x \in D_g$, $g(x) = \frac{(x^2+1)x}{x^2+1} = x = f(x)$. Donc f et g sont égales sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

Réponds par vrai ou par faux aux affirmations suivantes :

N°	Affirmations	Réponses
1	On appelle fonction de A vers B toute correspondance de A vers B, qui à tout élément de A associe 0 ou 1 élément de B.	
2	On appelle fonction de A vers B toute correspondance de A vers B, qui à tout élément de A associe au moins deux éléments de B	
3	Si f est une fonction, de A vers B, B est l'ensemble de départ et A l'ensemble d'arrivée de f	

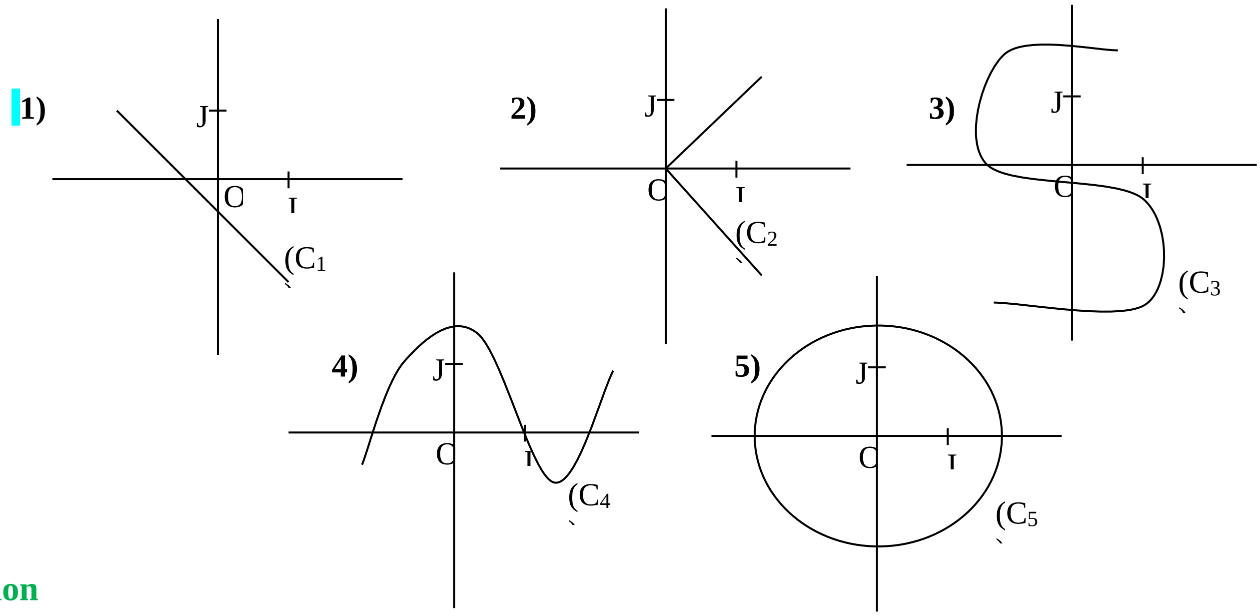
4	Par une fonction, un élément de l’ensemble d’arrivée peut avoir plusieurs antécédents dans l’ensemble de départ	

Solution

1	Vrai
2	Faux
3	Faux
4	Vrai

Exercice 6

Observe les schémas ci-dessous puis écris les numéros des courbes qui sont des représentations graphiques d’une fonction.



Solution

Les courbes des graphiques 1) et 4) sont celles de fonctions car toute droite parallèle à l’axe des ordonnées les coupent en zéro ou un point.

Exercice 7

Traduis les phrases suivantes à l’aide d’égalités :

a) -5 est l’image de 4 par la fonction h ;
b) L’image de 2 par la fonction f est 0 ;
c) 5 est l’antécédent de -3 par la fonction g.

Solution

a) h(4)= -5.
b) f(2) = 0.
c) $g^{-1}(-3) = 5$.

Exercice 8

Parmi les tableaux ci-dessous, indique ceux qui déterminent une fonction :

1	**3**	**5**	**7**
2	**3**	**6**	**2**

Tableau 1

-5	**0**	**-5**	**7**
-3	**5**	**3**	**2**

Tableau 2

4	**0**	**-5**	**7**
1	**1**	**1**	**2**

Tableau 3

Solution

Les tableaux 1 et 3 déterminent deux fonctions. Dans le tableau 2, l'élément -5 de l'ensemble de départ a deux correspondants -3 et 3.

Exercice 9

Relie chaque expression explicite de fonction à son ensemble de définition.

$f(x) = x^2 + 2$ •	• $\mathbb{R} \setminus \{-1; 5\}$
$g(x) = \frac{x+1}{5-x}$ •	• $\mathbb{R}$
$h(x) = \sqrt{x-7}$ •	• $[0; +\infty[$
$j(x) = \sqrt{x}$ •	• $\mathbb{R} \setminus \{5\}$
$k(x) = \frac{3x}{(x-5)(x+1)}$ •	• $[7; +\infty[$

Solution

$f(x) = x^2 + 2$ •	• $\mathbb{R} \setminus \{-1; 5\}$
$g(x) = \frac{x+1}{5-x}$ •	• $\mathbb{R}$
$h(x) = \sqrt{x-7}$ •	• $[0; +\infty[$
$j(x) = \sqrt{x}$ •	• $\mathbb{R} \setminus \{5\}$
$k(x) = \frac{3x}{(x-5)(x+1)}$ •	• $[7; +\infty[$

Exercice 10

Soit $f(x) = -x^2 + 5.\ et\ g(x) = \frac{2x-3}{x-1}$

1) Calcule l'image par $f et g$ de $0; -2\ et\ \sqrt{2}$.
2) Détermine le ou les antécédents de 1 par chaque fonction.

Solution :

1) $(0) = 5$, $f(-2) = 1$, $f(\sqrt{2}) = 3$, $g(0) = 3$, $g(-2) = \frac{7}{3}$ et $g(\sqrt{2}) = 1 - \sqrt{2}$.

2)

$f(x) = 1 \Leftrightarrow -x^2 + 5 = 1$ $\Leftrightarrow \quad x^2 = 4$ $\Leftrightarrow (x = -2$ ou $x = -2)$ Les antécédents de 1 par f sont -2 et 2	$g(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x-1} = 1$ $\Leftrightarrow 2x - 3 = x - 1$ $\Leftrightarrow x = 2$ L' antécédent de 1 par g est 2 .

Exercice 11

$f\ et g$ sont des fonctions définies par :

. $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x$ et $et\ g(x) = \frac{2}{x^4} - \frac{3}{x^3} + \frac{4}{x^2} - \frac{5}{x}$

1) Détermine D_f et D_g les ensembles de définitions respectifs des fonctions f et g.
2) Calcule l'image par f et g de chacun des nombres suivants :10^{-1} ; $10; -10; -10^{-1}$

Solution :

1) $D_f = \mathbb{R}$ f est une fonction polynôme.

$x \in D_g \Leftrightarrow (x \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0)$.

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2) Calculons l'image par f et g de chacun des nombres suivants :10^{-1} ; $10; -10; -10^{-1}$

$f(10^{-1}) = g(10) = 2 \times 10^{-4} - 3 \times 10^{-3} + 4 \times 10^{-2} - 5 \times 10^{-1} = -0{,}4628.$

$f(-10^{-1}) = g(-10) = 2\times 10^{-4} + 3\times 10^{-3} + 4\times 10^{-2} + 5\times 10^{-1} = 0{,}5432.$
$f(10) = g(10^{-1}) = 2\times 10^{4} - 3\times 10^{3} + 4\times 10^{2} - 5\times 10 = 17350.$
$f(-10) = g(-10^{-1}) = 2\times 10^{4} + 3\times 10^{3} + 4\times 10^{2} + 5\times 10 = 23450.$

Exercice 12

h est la fonction définie par :$h(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$. (c_h) est la courbe représentative de h.

Détermine l'ordonnée du point de (Ch) dont l'abscisse est $\frac{-2}{3}$.

Solution :

$h\left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{\frac{-2}{3}+1}{(\frac{-2}{3})^2-4} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{-32}{9}} = \frac{1}{3}\times\frac{9}{-32} = \frac{-3}{32}.$

L'ordonnée du point de (Ch) dont l'abscisse est $\frac{-2}{3}$ est $\frac{-3}{32}$.

Exercice 13

Dans chacun des cas suivants, dire si les fonctions f et g sont égales sur $\mathbb{R}$ ou non. Sinon préciser le plus grand ensemble sur lequel f et g coïncident.

1) $f(x) = x$ et $g(x) = \frac{x^3-x}{x^2-1}$
2) $f(x) = \sqrt{x^2}$ et $g(x) = |x|$

Solution :

1) $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$.

Pour $x \in D_g = \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ $g(x) = \frac{x^3-x}{x^2-1} = \frac{x(x^2-1)}{x^2-1} = x = f(x)$.

$D_f \neq D_g$ donc les fonctions f et g ne sont pas égales sur $\mathbb{R}$.

Le plus grand ensemble sur lequel f et g coïncident est $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$.

2) $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$ $g(x) = \sqrt{x^2} = |x| = f(x)$ donc f et g sont égales sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14

Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{3x}{x^2-2x+1}$
2) $g(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{x+4}$
3) $h(x) = \sqrt{-3x+9}$
4) $j(x) = \frac{5x}{x^2+3}$
5) $p(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x+1}$
6) r(x)=$\frac{\sqrt{x+1}}{x^2-4}$

Solution :

1) $x \in D_f \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ et $x^2-2x+1 \neq 0)$.
$\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ et $(x-1)^2 \neq 0)$
$\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ et $x\neq 1)$.
Donc $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$.

2) $x\in D_g \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}, x+4\neq 0$ et $2-x\geq 0)$
$\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}, x+4\neq 0$ et $2-x\geq 0)$
$\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}, x\neq -4$ et $x\leq 2)$
Donc $D_g =]-\infty;2]\setminus\{-4\}$

$x\in D_h \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}; -3x+9 \geq 0)$
$x\in D_h \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}$ et $x\leq\frac{9}{3}$
Donc $D_h =]-\infty;3]$

3) Pour tout $x\in\mathbb{R}$; $x^2+3\neq 0$ donc D_J =$\mathbb{R}$.

5) $x\in D_p \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}, x\neq 0$ et $1+x\geq 0)$
$\Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}, x\neq 0$ et $x\geq -1)$

6)
$x\in D_r \Leftrightarrow (x\in\mathbb{R}, x^2-4\neq 0$ et $x+1\geq 0)$

Donc D_g =$[-1;+\infty[\setminus\{0\ \}$ = $[-1;0[\cup]0:+\infty[$

$\Leftrightarrow (x \in \mathbb{R}, (x+2)(x-2) \neq 0$ et $x \geq -1)$

$\Leftrightarrow (x \in \mathbb{R}, x \neq -2, x \neq 2$ et $x \geq -1)$

Donc D_g =$[-1;+\infty[\setminus\{2\ \}$ = $[-1;2[\cup]2:+\infty[$

Exercice 15

On donne la fonction h de ℝ vers ℝdéfinie par : $\mathrm{h(x)} = \frac{3}{\mathrm{x}^2+2}$

1) Détermine l'ensemble de définition D_h de la fonction h.

2) Démontre que $\frac{3}{2}$ est le maximum de h.

Solution

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $x^2 + 2 \neq 0$ donc D_h =ℝ.

2) Pour $x \in \mathbb{R}; x^2 + 2 \geq 2 \Longrightarrow \frac{1}{x^2+2} \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{3}{x^2+2} \leq \frac{3}{2}$ donc $h(x) \leq \frac{3}{2}$. De plus $h(0) = \frac{3}{2}$.
Par suite $\frac{3}{2}$ est le maximum de h.

Exercice 16

I- On considéré la fonction f de ℝ vers ℝ définie par : $\mathrm{f(x)} = (\mathrm{x}-2)^2 + 1$

1) Démontre que f est croissante sur $[2\,;+\infty[$

2) Démontre que f est décroissante sur $]-\infty\,;2]$

3) Dresse le tableau de variation de f.

4) En déduis que f n'est ni croissante ni décroissante sur $[1;5]$

Solution

1) Démontrons que f est croissante sur $[2\,;+\infty[$

Soit u et v des élements $[2;+\infty[$; tel que $2 \leq u \leq v$;

Alors $0 \leq u - 2 \leq v - 2$;

$0 \leq (u-2)^2 \leq (v-2)^2$;

$0 \leq \leq (u-2)^2 + 1 \leq \leq (v-2)^2 + 1$;
$f(u) \leq f(v)$

Ainsi pour tout nombre réel u et v des éléments de $[2\,;+\infty[$; tels que $2 \leq u \leq v$, $f(u) \leq f(v)$
donc f est strictement croissante sur $[2;+\infty[$.

2) Démontrons que f est décroissante sur $]-\infty\,;2]$

Soit u et v des éléments de $]-\infty\,;2]$; tels que. $u \leq v \leq 2$;

$$u-2 \leq v-2 \leq 0\,;$$
Alors $0 \leq (v-2)^2 \leq (u-2)^2$;

$$0 \leq (v-2)^2+1 \leq (u-2)^2+1\,;$$
$$f(v) \leq f(u)$$

Ainsi pour tout nombre réel u et v des éléments $]-\infty\,;2]$; tels que $u \leq v \leq 2$,

$f(v) \leq f(u)$ donc g est strictement décroissante sur $]-\infty; 2]$.

3) tableau de variation

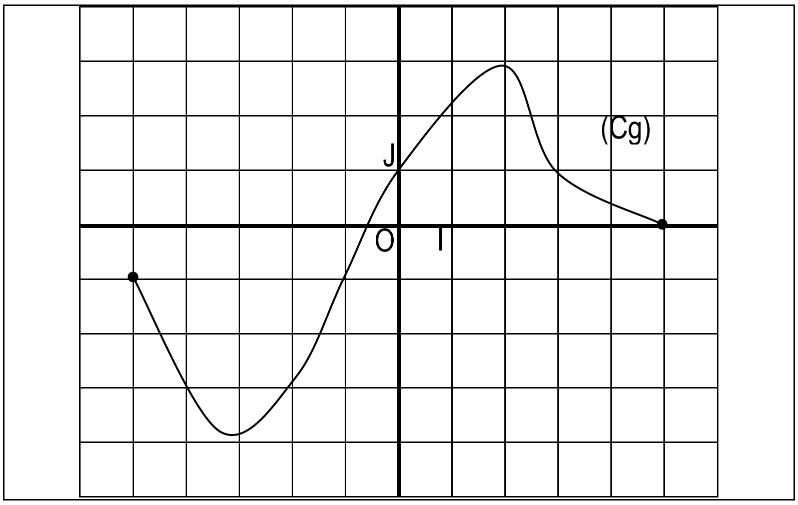
x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

4) Sur $[1; 5]$, $1 \leq 2 \leq 3$; $f(1) = 2$, $f(2) = 1$ et $f(4) = 10$.
$f(1) > f(2)$ donc f n'est pas croissante.
$f(1) < f(4)$ donc f n'est pas décroissante.

Exercice 17

I-La figure ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction numérique g.

1) Détermine l'ensemble de définition Dg de la fonction g.
2) Détermine s'ils existent le maximum et le minimum de g sur Dg.
3) Précise les variations de la fonction g sur Dg.
4) Dresse le tableau de variation de g sur Dg.



II- Démontre que la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = 3 - |x-4|$ admet un maximum égal à 3 sur son ensemble de définition.

Solution

1) Dg = $[-5; 5]$
2) Le maximum de g est 3 et le minimum de g est $-3{,}8$.
3) La fonction g est décroissante sur les intervalles $[-5; -3]$ et $[3; 5]$.
   La fonction g est croissante sur l'intervalle $[-3; 3]$.

4) Le tableau de variation de g sur Dg

x	-5		-3		3		5
$g(x)$	-1	$\searrow$	$-3{,}8$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

Exercice 18

L'unité est le centimètre.

Un rectangle a pour périmètre constant égal à 40. On note x sa longueur et h sa largeur. On se propose de trouver ses dimensions lorsqu'il a une aire maximale.

1) Exprime sa largeur h en fonction de x.
2) Justifie que l'aire est égale à : $-(x-10)^2+100$
3) Démontre que pour x égal à 10, l'aire est maximale et détermine ce maximum.

Solution

1) La longueur est x *et* le périmètre est 40.
   Sa largeur est h= $\frac{40-2x}{2}$ =20- x
2) L'aire $a(x) = x(20-x) = -x^2 + 20x = -(x-10)^2 + 100$
3) pour x=10, l'aire est $a(10) = 100$.

Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$; $-(x-10)^2+100 \leq 100$

$$a(x) \leq 100$$

2^{nde} C

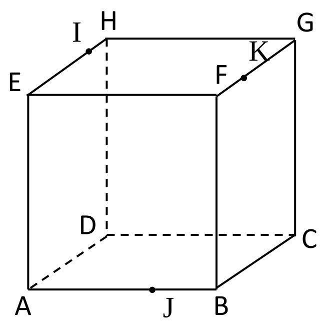
Mathématiques

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Leçon 5 : GEOMETRIE DE L'ESPACE   niveau : 2^{e} C

A. - SITUATION D'APPRENTISSAGE

Au cours d'un exercice au lycée Moderne HKB de Sinfra, la figure ci-contre a été réalisée au tableau. ABCDEFGH est un cube. I est un point de [EH], J un point de [AB] et K un point de [FG].
En observant la figure, un élève affirme que la droite (IK) est commune aux plans (IJK) et (EFG).
Les autres élèves veulent connaitre l'intersection du plan (IJK) avec les différentes faces du cube. Ils décident alors de construire la section du plan (IJK) avec le cube.



B. - RESUME DE COURS

I. Positions relatives de droites et de plans de l'espace

1. Positions relatives de deux droites,

L'espace (E) est un ensemble infini de points admettant des sous-ensembles infinis appelés droites et plans qui satisfont certaines règles suivantes :

a. Règles de base

Règle 1 : Par deux points distincts A et B, il passe une unique droite notée (AB).

Règle 2 : Par trois points non alignés A, B et C de (E), il passe un unique plan. Ce plan est noté (ABC).

Règle 3 : Si A et B sont deux points d'un plan P, tous les points de la droite (AB) appartiennent au plan P.

Règle 4 : Si deux plans sont sécants, leur intersection est une droite.

Règle 5 : les théorèmes de géométrie plane sont vrais dans tout plan de l'espace.

b. Vocabulaire

- Lorsque des **points** appartiennent à un même plan on dit qu'ils sont **coplanaires**.
- Lorsque des **droites** sont contenues dans un même plan on dit qu'elles sont **coplanaires.**
- Quatre points ne sont pas coplanaires lorsque l'un n'appartient pas au plan défini par les trois autres.
- Un **tétraèdre** est un solide qui a quatre sommets non coplanaires.

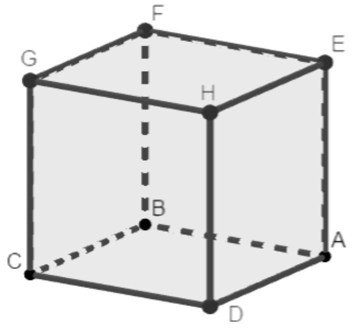
Propriété

Deux droites non coplanaires sont disjointes.

Exercice de fixation

ABCDEFGH est un cube.

Montre que les droites (GF) et (CD) sont disjointes.



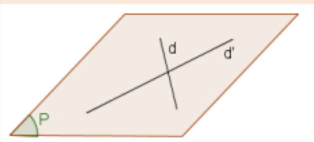
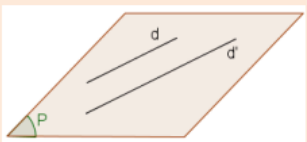
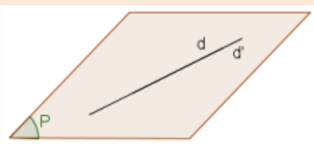
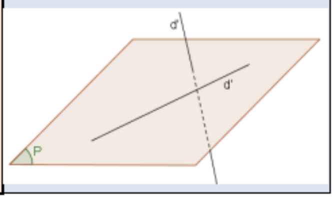
Solution

G,F et C sont trois points non alignés donc (GFC) est un plan. Or D $\notin$ (GFC) alors les quatre points G,F ,C et D sont non coplanaires.

Si les droites (GF) et (CD) étaient coplanaires alors les points G , F,C et D seraient coplanaires. Ce qui est absurde.

Donc (GF) et (CD) sont non coplanaires d'où elles sont disjointes.

Résultats à retenir

Droites coplanaires			Droites non coplanaires
Droites sécantes	Droites parallèles		
	Droites strictement parallèles	Droites confondues	
			

Définitions

1) Deux droites sont dites parallèles lorsqu'elles sont confondues ou bien lorsqu'elles sont coplanaires et disjointes.
2) Deux droites sont dites sécantes lorsque leur intersection est réduite à un point

Exemple

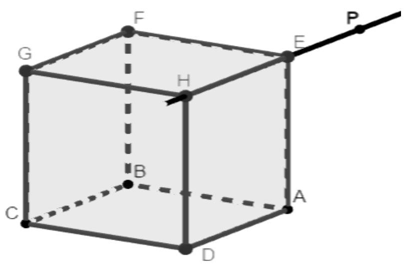
ABCDEFGH est un cube .

P $\notin$ (HE).

-Les droites (HE) et (HP) sont confondues donc elles sont parallèles.

-Les droites (EP) et (GF) sont coplanaires et disjointes donc elles sont parallèles.

-B est le point d'intersection des droites (CB) et (FB) alors elles sont sécantes.



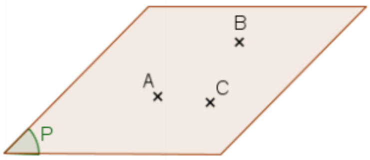
Remarque

Deux droites dites disjointes ne sont pas nécessairement parallèles, elles peuvent être non coplanaires.

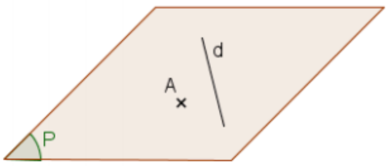
c. **Détermination d'un plan**

Un plan est défini :

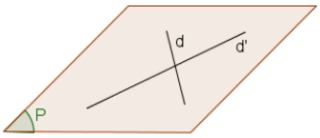
- Soit par trois points non alignés



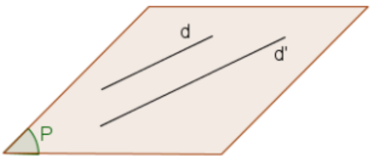
- Soit par une droite et un point n'appartenant pas à cette droite



- Soit par deux droites sécantes



- Soit par deux droites strictement parallèles



Exercice de fixation

ABCDEFGH est un cube , I est un point de la demi-droite $[BF)$.

Justifie que les droites (BC) et (BI) sont contenues dans le plan (FGC).

Réponse attendue

- B et C sont des points du plan (FGC) alors (BC)Ì (FGC).

On a BÎ (FGC) et FÎ (FGC)alors (BF)Ì (FGC)or $I \in (BF)$ d'où $I \in (FGC)$. Par conséquent

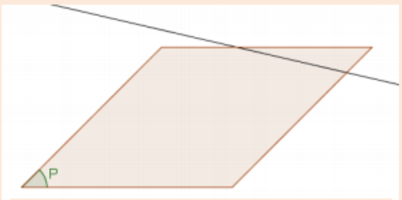
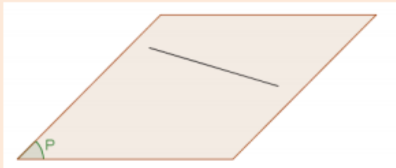
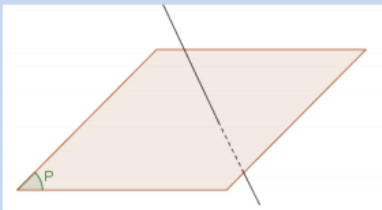
(BI) ⊂ (FGC)

2. Positions relatives d'une droite et d'un plan

Propriété

Étant donné une droite (D) et un plan (P), les différentes positions relatives sont :

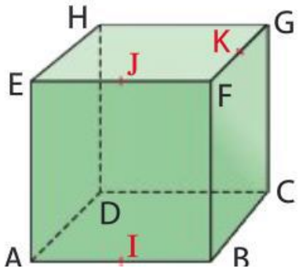
1) (D) et (P) sont disjoints.
2) (D) est incluse dans (P).
3) L'intersection de (D) et de (P) est réduite à un point.

Droite et plan parallèles		Droite et plan sécants
Droite et plan strictement parallèles	Droite incluse dans le plan	
		

Exercice de fixation

ABCDEFGH est un cube.
I, J, K sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [EF] et [FG].
Étudie la position relative :

1) de la droite (IK) et du plan (BCF).
2) de la droite (AI) et du plan (FGC)
3) de la droite (JK) et au plan (EFG)



Réponse attendue

1. K est un point commun à (IK) et (BCF).
   I $\in (IK)$ et I $\notin$ (BCF)

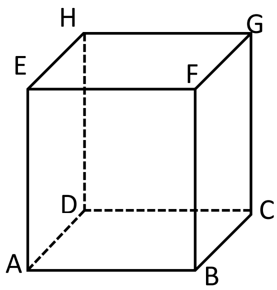
Alors La droite (IK) est sécante au plan (BCF).

2. B est un point commun à (AI) et (FGC).
   A $\in$(AI) et A $\notin$ (FGC).
   Alors la droite (AI) est sécante au plan (FGC.

3. J $\in (EFG)$ et K $\in (EFG)$ donc la droite (JK) est incluse dans le plan (EFG).

Définitions

1) On dit qu'une droite (D) est parallèle à un plan (P) lorsque (D) est incluse dans (P) ou lorsque (D) et (P) sont disjoints.
2) On dit que le plan (P) est sécant à la droite (D) au point I lorsque l'intersection de (D) et de (P) est réduite au point I



Exemple : **On considère le cube ci-contre**

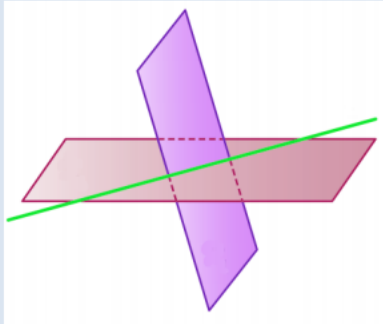
- La droite (AE) est parallèle au plan (GDC) car (AE) et (GDC) sont disjoints .
- La droite (BH) est sécante au plan (ADE) en H car l'intersection de (BH) et de (ADE) est réduite au point H

3. Positions relatives de deux plans

<u>Propriété</u>

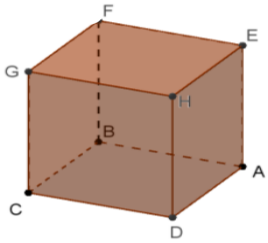
Étant donné deux plans (P) et (L), les différentes positions relatives sont :

1) (P) et (L) sont disjoints.
2) (P) et (L) sont confondus.
3) L'intersection de (P) et (L) est une droite.

Plans parallèles		Plans sécants
Plans strictement parallèles	Plans confondus	Les plans sont sécants suivant une droite
		

<u>Exercice de fixation</u>

ABCDEFGH est un cube.
Etudie la position relative des plans (EFG) et (EAD



<u>Réponse attendue</u>

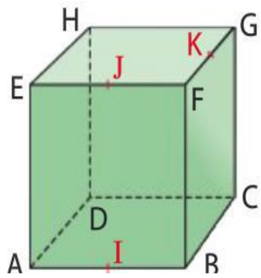
E est un point commun aux plans (EFG) et (EAD).
H est un point commun aux plans (EFG) et (EAD).
De plus F$\in$ (EFG) et F$\notin$ (EAD).
Par conséquent les plans (EFG) et (EAD) sont sécants suivant la droite (EH).

<u>Définitions</u>

1) Deux plans confondus ou disjoints sont dits parallèles.
2) Deux plans non parallèles sont dits sécants, leur intersection est alors une droite.

Exemple : On considère le cube ABCDEFGH ci-contre.

1) Les plans (AED) et (GFC) sont disjoints donc ils sont parallèles.
2) Les plans (IJK) et (EFG) sont sécants en (JK).



4. **Section plane**

Définition :
La section d'un solide par un plan correspond à la « trace » laissée par ce plan sur le solide, qui est formée par l'ensemble des points communs au solide et au plan.

Méthode :
La construction de la section d'un solide par un plan se fait en construisant l'intersection de ce plan avec les différentes faces du solide.

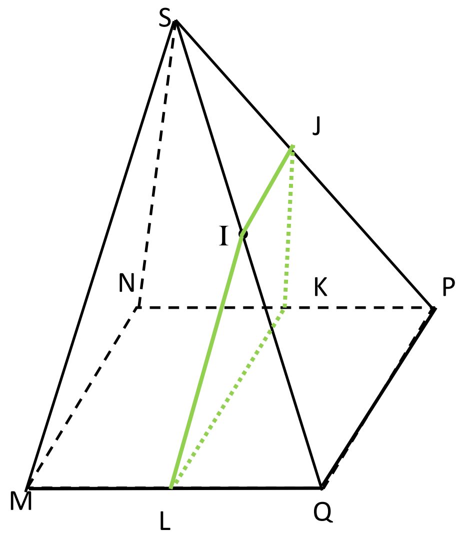
Exemple :

SMNPQ est une pyramide des sommet S.

I∈ [SQ]; J ∈ [SP] ; K ∈ [NP]; L ∈ [MQ].

La section plane du plan (IJK)

avec la pyramide SMNPQ est IJKL.



II. Etude du parallélisme

1. Parallélisme de deux droites

Propriété 1 : par un point donné de l'espace, il passe une et une seule droite parallèle à une droite donnée

Propriété 2 : Si deux droites sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'une coupe l'autre

Propriété 3 : Deux droites parallèles à une même troisième droite sont parallèles entre elles.

Conséquence

Deux droites coplanaires respectivement parallèles à deux droites non parallèles sont sécantes.

Exercice de fixation

Sur la figure ci-dessous, ABCD est un tétraèdre. I, J, K et L

sont les milieux respectifs des segments$[AB]$,$[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$.

1. Montre que les droites (IL) et (JK) sont parallèles.
2. Soit (P) un plan sécant à (IL).
   Justifie que (P) est sécant à (JK).

Réponse attendue

1) BDC est un triangle, le point J est milieu de $[BC]$ et le point K est milieu de $[DC]$, d'après la propriété de la droite des milieux $(JK)//(BD)$.

ABD est un triangle, le point I est milieu de $[AB]$ et le point L est milieu de $[AD]$, d'après la propriété des droites des milieux $(IL)//(BD)$.

On a donc $(JK)//(BD)$ et $(IL)//(BD)$ d'où $(IL)//(JK)$.

2) (P) est un plan sécant à (IL) et $(IL)//(JK)$ Donc (P) est sécant à (JK).

2. Parallélisme d'une droite et d'un plan

Propriété 1

Une droite (D) est parallèle à un plan (P) si et seulement s'il existe dans (P) une droite parallèle à (D).

Propriété 2

Si une droite (D) est parallèle à un plan (P), alors toute droite parallèle à (D) est parallèle à (P).

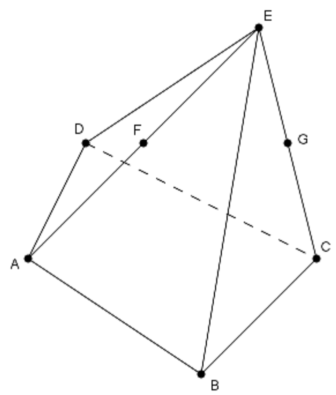
Propriété 3

Une droite parallèle à deux plans sécants est parallèle à leur droite d'intersection.

Exercice de fixation

ABCDE est une pyramide. F est le milieu de [EA] et G est le milieu de [EC]. Démontre que la droite (FG) et le plan (ABC) sont parallèles.

1) Justifie que $(FG)//(AC)$.
2) Déduis-en que $(FG)//(ABC)$.



Réponse attendue

1) AEC est un triangle, le point F est milieu de $[AE]$ et le point G est milieu de $[EC]$. D 'après la propriété de la droite des milieux $(FG)//(AC)$.
2) On a $(FG)//(AC)$ et $(AC) \subset (ABC)$ d'où $(FG)//(ABC)$.

3. Parallélisme de deux plans

Propriété 1

Deux plans sont parallèles si et seulement si l'un contient deux droites parallèles à l'autre et sécantes entre elles.

Propriété 2

Deux plans parallèles à un même troisième plan sont parallèles entre eux.

Propriété 3

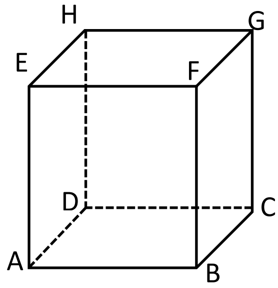
Par un point donné de l'espace, il passe un et un seul plan parallèle à un plan donné.

Propriété 4

Si deux plans sont parallèles :

1. Tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les droites d'intersection sont parallèles ;
2. Toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre ;
3. Toute droite sécante à l'un est sécante à l'autre.

Exemple :

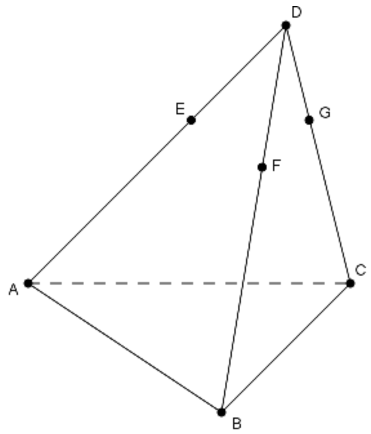


On considère le cube ABCDEFGH ci-contre.

1) Les droites (DB) et (AC) sont sécantes. (DB)// (EFG) et (AC) // (EFG) donc les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles.
2) Les plans (EFG) et (ABC) sont parallèles. Le plan (AGH) est sécant à (EFG) en (HG), donc il est sécante à (ABC) en (AB). De plus (AB) // (HG)

Exercice de fixation

On considère le tétraèdre ABCD et les points E, F et G appartenant respectivement aux arêtes [DA], [DC] et [DB] tels que les droites (EF) et (AB) d'une part et les droites (FG) et (BC) d'autre part soient parallèles.
Justifie que les plans (EFG) et (ABC) sont parallèles.



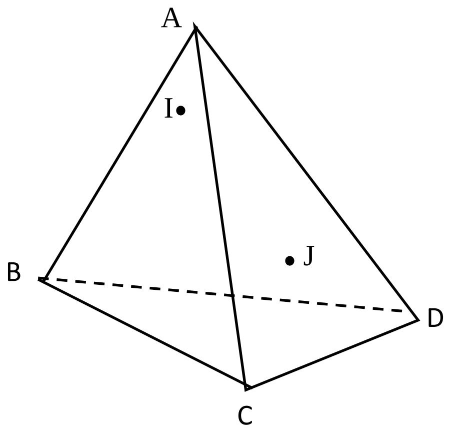
Réponse attendue

$(EF)//(AB)$ or (AB)Ì (ABC) d'où $(EF)//(ABC)$ et $(FG)//(BC)$ or (BC)Ì (ABC) d'où $(FG)//(ABC)$. Les droites (EF) et FG), sécantes en F, sont parallèles au plan (ABC) alors le plan (EFG) est parallèle au plan (ABC).

QUELQUELS METHODES pour Démontrer

HABILETES	**METHODES PRATIQUES**
Démontre qu'un point appartient à un plan	Il suffit de démontrer qu'il appartient à une droite incluse dans ce plan
Démontre qu'une droite est incluse dans un plan	Il suffit de démontrer que : • Elle passe par deux points du plan • Elle passe par un point du plan et qu'elle est parallèle à une droite du plan
Démontre que deux droites(D) et (D') sont parallèles	Il suffit de : • Démontrer qu'elles sont coplanaires et appliquer un théorème de géométrie plane (droite des milieux, théorème de Thalès…) • Démontrer qu'elles sont coplanaires et parallèles. • Trouver une droite parallèle à ses droites
Démontrer qu'une droite est sécante à un plan	On peut trouver un point de la droite qui appartient au plan et un point de la droite qui n'appartient pas au plan.
Démontrer qu'une droite est parallèle à un plan	On peut démontrer qu'elle est parallèle à une droite de ce plan
Démontrer que trois points sont alignés	Il suffit de démontrer qu'ils appartiennent à une même droite. Cette droite peut souvent être vue comme l'intersection de deux plans.
Démontrer que deux plans sont sécants	• On peut démontrer qu'ils ne sont pas confondus et trouver leur intersection • On peut utiliser un raisonnement par l'absurde.
Démontrer que deux plans sont parallèles	• Trouve deux droites sécantes de l'un des plans qui soient parallèles chacune à l'autre plan. • On peut démontrer qu'ils sont parallèles à un même plan.

III- SITUATION COMPLEXE

Au cours d'une séance d'exercices dirigée par le chef de la classe en l'absence du professeur au lycée Moderne HKB de Sinfra, la figure ci-contre a été réalisée au tableau. ABCD est un tétraèdre. I est un point de la médiane du triangle ABC issue de A et J un point de la médiane du triangle ACD issue de A. Il s'agit de trouver la position relative de la droite (BD) et du plan (AIJ). Certains élèves de la classe affirment que la droite (BD) est parallèle au plan (AIJ), tandis que d'autres contestent en affirmant que la droite (BD) est sécante au plan (AIJ). Une discussion éclate entre les deux groupes. A l'aide d'une production argumentée, départage ces deux élèves.	

Solution :

Pour résoudre ce problème nous allons utiliser la leçon Droites et Plans dans l'espace, notamment la position relative d'une droite et d'un plan.

La droite (AI) coupe le segment [BC] en K. K est donc le milieu de [BC]

La droite (AJ) coupe le segment [DC] en R. R est donc le milieu de [DC]

Dans le triangle DBC, La Droite (KR) est parallèle (DB). Comme (KR) $\subset$ (AIJ), on a donc la droite (BD) est parallèle au plan (AIJ).

Par conséquent les élèves qui affirment que la droite (BD) est parallèle au plan (AIJ) ont raison.

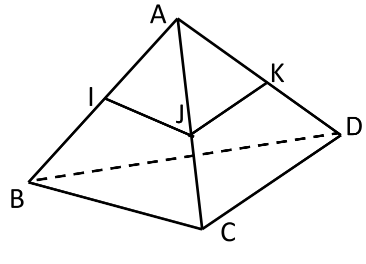
IV-EXERCICES

Exercices d'application

Exercice 1

ABCD est un tétraèdre, I, J, K sont les milieux des arêtes [AB], [AC], [AD].

Écris le numéro suivi de la lettre de la bonne réponse.



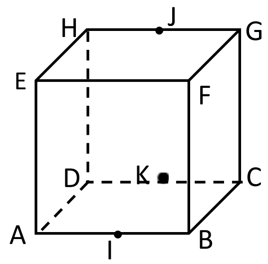
1. Les points A, B, D, J sont :
   a. Coplanaires ; b. alignés ; c. non coplanaires
2. La droite (BC) est parallèle à la droite :
   a. (IK) ; b. (AD) ; c. (IJ)
3. Les droites (BK) et (DI) sont :
   a. non coplanaires ; b. Parallèles ; c. sécantes
4. Sont coplanaires, les droites :
   a. (AB) et (CD) ; b. (IK) et (AC) ; c.(IK) et (BD)
5. La droite (IK) est parallèle au plan :
   a. (ABC); b. (BCD); c. (ACD)
6. Les plans (ACD) et (IJK) sont sécants suivant
   a. (AC) b. (JK) c. (IK)

Solution

1.c ; 2.c ; 3.c ; 4.c ; 5.b ; 6.b

Exercice 2

ABCDEFGH est un cube, I , J et K sont les milieux de [AB] ,[GH] et [DC]



1. (Δ) est une droite parallèle à la droite (BG), (Δ) est donc parallèle au plan :
   a. (ADH) ; b. (ABC) ; c. (CDH)
2. Le plan (AEJ) coupe le plan (CDH) suivant une droite parallèle à :

   a. (BA) ; b. (IK) ; c. (AE)

3. (Δ) est une droite parallèle au plan (ABD) et au plan (HCG) alors :

   a. (ABC) est parallèle à (HCG) ; b. (Δ) est parallèle à (DC) ; c. (Δ) est parallèle à (AD)

Solution :

1.a : 2.a 3. b

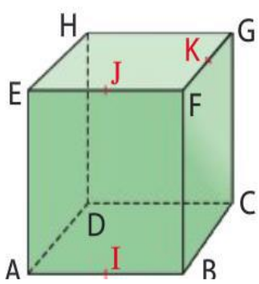
Exercice 3

Sur le parallélépipède rectangle ABCDEFGH ci-contre.

Détermine les positions relative de :

1° La droite (HI) et le plan (ABC).

2° La droite (BG) et le plan (EAD).



3° La droite (CG) et le plan (DGH).

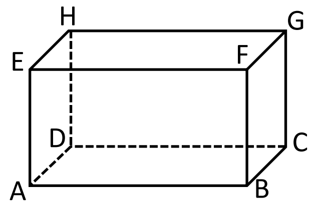
Solution :

1. La droite (HI) et le plan (ABC) sont sécants.
2. La droite (BG) et le plan (EAD) sont parallèles.
3. La droite (CG) est incluse dans le plan (DGH).

<u>Exercice4</u>

Sur le parallélépipède rectangle ABCDEFGH ci-contre :

1° Complète les phrases en donnant les positions relatives des plans :



Les plans (ABC) et (FGD) sont ....

Les plans (ABC) et (EFG) sont ....

Les plans (HFB) et (EGC) sont...

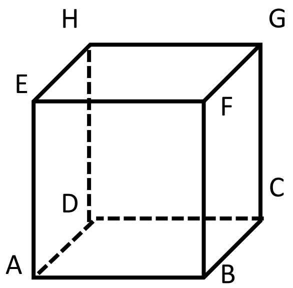
Solution :

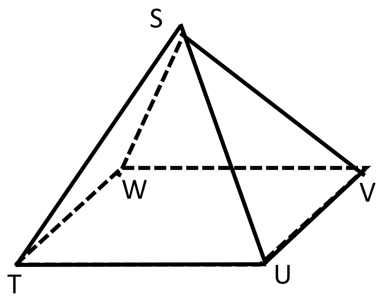
Les plans (ABC) et (FGD) sont ....sécants......

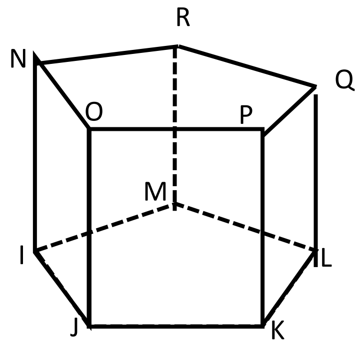
Les plans (ABC) et (EFG) sont ....parallèles............................

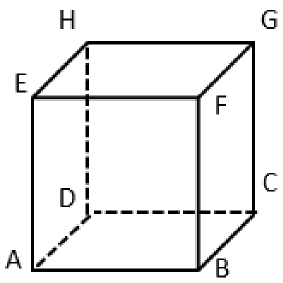
Les plans (HFB) et (EGC) sont...........sécants...................................

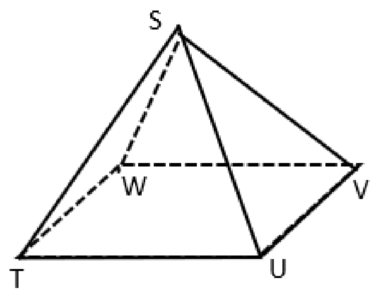
<u>Exercice</u> 5: Déterminer la position relative des droites pour les solides dessinés en perspective.

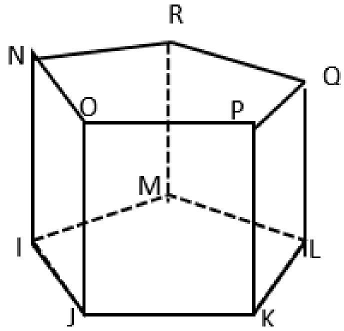












<u>Sur le cube ABCDEFGH :</u> <u>Sur la pyramide STUVW :</u> <u>Sur le prisme IJKLMNOPQR :</u>

Les droites (DH) et (GC) sont……………..

Les droites (AD) et (BG) sont…………..

Les droites (SU) et (VW) sont…… ……………..

Les droites (TV) et (UW) sont…………………..

Les droites (NP) et (IK) sont……………..

Les droites (NP) et (JM) sont…………………….

Solution :

<u>Sur le cube ABCDEFGH :</u>

Les droites (DH) et (GC) sont……parallèles………..

Les droites (AD) et (BG) sont…disjointes………..

<u>Sur la pyramide STUVW :</u>

Les droites (SU) et (VW) sont… disjointes ……

Les droites (TV) et (UW) sont…sécantes……..

<u>Sur le prisme IJKLMNOPQR :</u>

Les droites (NP) et (IK) sont… parallèles …

Les droites (NP) et (JM) sont…disjointes…………………

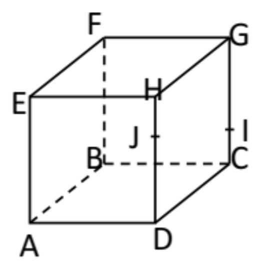
Exercices de renforcement

❖ ***Comment démontrer que deux droites sont coplanaires ou non ?***

Exercice 6

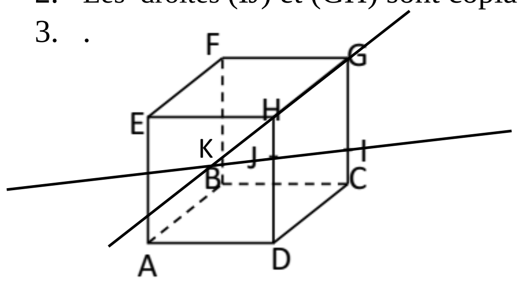
ABCDEFGH est un cube tel que I∈ [GC] ; J ∈ [HD] .

1. Les droites (AB) et (EF) sont-elles coplanaires ? Justifie ta réponse.
2. Justifie que (IJ) et (GH) sont coplanaires.
3. Construis le point d'intersection K de (IJ) et (GH).
4. Justifie que les droites (IJ) et (AE) ne sont pas coplanaires.



Solution :

1. Les droites (AB) et (EF) sont coplanaires car elles sont parallèles.
2. Les droites (IJ) et (GH) sont coplanaires car elles sont incluses dans le plan (GCD).
3. .



Le point K est l'intersection de (IJ) et (GH)

4. Supposons que (IJ) et (AE) sont coplanaires. Alors les points I , J , A et E seraient coplanaires. Ce qui est contradictoire car I∉ (JAE) . Donc (IJ) et (AE) sont non coplanaires.

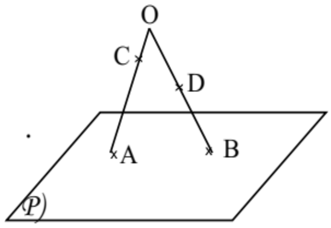
❖ *Comment démontrer qu'une droite est sécante à un plan ?*

Exercice 7

Sur la figure ci-contre :

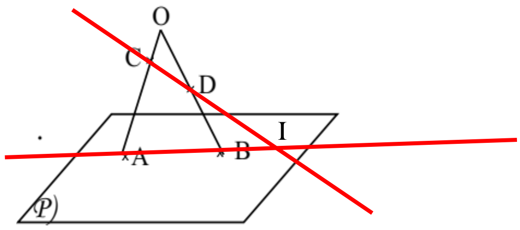
- A∈(*P*) ; B∈(*P*) ; O∉(*P*) ; C∈[AO] ; D∈[OB]
- Dans le plan (OAB), les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

1. Démontre que la droite (CD) est sécante au plan (*P*) en un point I
2. Construis le point d'intersection I de (CD) avec le plan (*P*)



Solution :

1. (AB) et (CD) sont coplanaires et ne sont pas parallèles ; donc elles sont sécantes. Or (AB) est contenue dans le plan (P), donc la droite (CD) est sécante au plan (*P*) en un point I qui est l'intersection des droites (AB) et (CD).
2. **2.** Construction du point d'intersection I de (CD) avec le plan (*P*)



Exercices d'approfondissement.

❖*Comment démontrer qu'une droite est parallèle à un plan ?*

Exercice 13

SABCD est une pyramide régulière. I le milieu du segment [SA] et J le milieu du segment [SB].

Démontre que la droite (IJ) est parallèle au plan (SCD).

Solution :

Dans le triangle SAB ,

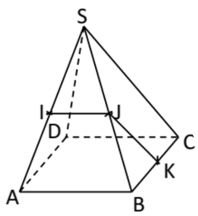
$\left.\begin{array}{l} I \text{ milieu de} [SA] \\ J \text{ milieu de } [SB] \end{array}\right\} (IJ)//(AB)$ et (AB) // (DC) donc (IJ) // (DC) or (DC) ⊂ (SCD) d'où (IJ)//(SCD)

❖*Comment démontrer que deux plans sont parallèles ?*

Exercice 14

SABCD est une pyramide régulière. I le milieu du segment [SA] et J le milieu du segment [SB], K le milieu de [BC].

Démontre que le plan (IJK) est parallèle au plan (SCD).



Solution :

On démontre que (IJ) // (DC) et (JK) // (SC) , or (DC) et (SC) sont sécantes donc le plan (IJK) est parallèle au plan (SCD).

RESSOURCES :

- https://lecluseo.scenari-community.org/TS/PDF/Ch08_Espace_papier.pdf
- http://www.panamaths.net/Documents/TS/DroitesPlans3D%20(Exercices)%20V30042015.pdf
- https://lewebpedagogique.com/valiblog2/files/2017/08/E1-Droites-et-plans-de-lespace_VL.pdf
- http://lycee.lagrave.free.fr/IMG/pdf/ts_droites_plans_espace_exos.pdf

MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE
ET DE L'ALPHABETISATION

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Union – Discipline – Travail

MON ÉCOLE À LA MAISON

SECONDAIRE
2nde C
MATHÉMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Durée : 8 heures Code :

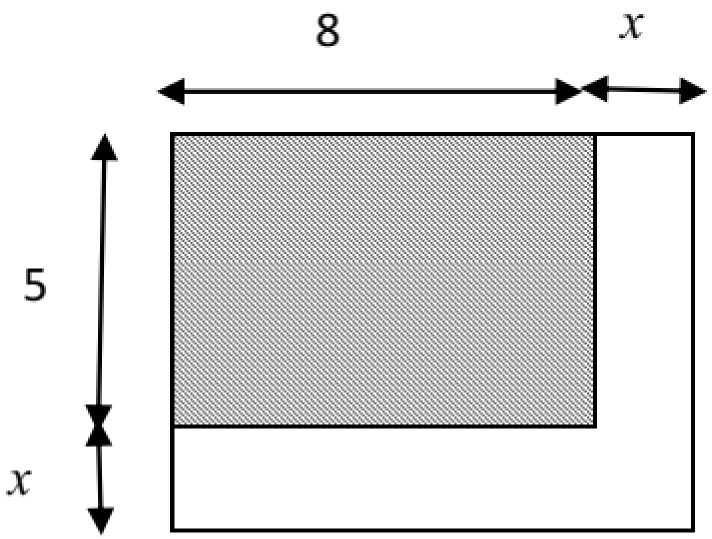
Compétence 1
Traiter une situation relative aux calculs algébriques et aux fonctions

Thème2 : Fonctions

LEÇON : FONCTIONS POLYNÔMES ET
FONCTIONS RATIONNELLES

A-SITUATION D'APPRENTISSAGE

La coopérative scolaire de ton lycée utilise un terrain rectangulaire de 8 m sur 5 m pour produire des tomates.
Pour mieux organiser l'espace disponible, le Proviseur du lycée demande que les côtés du terrain soient augmentés chacun d'une longueur identique, comme l'indique la figure ci-dessous, afin d'obtenir un terrain rectangulaire de 88 m^2.
Pour respecter les exigences du Proviseur, les élèves de ta classe décident d'étudier les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles.



B-CONTENU DU COURS

I. GENERALITES SUR LES POLYNÔMES

1- Définition d'un polynôme

Définition

- Soit a un nombre réel non nul et n un nombre entier naturel.
  On appelle monôme de coefficient a et de degré n, toute expression de la forme ax^n, où x est une variable réelle.
- On appelle polynôme toute somme algébrique de monômes.

Exemples de polynôme

$3x + 1$, $4x^3 - 2x + 1$ et $\frac{1}{3}x^4 + 2x^3 + x - 1$, sont des polynômes.

Contre-exemple

$\frac{1}{x^2} + 3x - 1$, n'est pas un polynôme.

2- Propriété fondamentale

Tout polynôme non nul $P(x)$ peut s'écrire de façon unique sous la forme :
$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, où n est un entier naturel et $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des nombres réels tels que $a_n \neq 0$.

Exercice de fixation :

On considère le polynôme $P(x) = 2x - x^3 + 5x(x^2 - x) + 4x - 3 + 2x^2$.,
Ecris $P(x)$ sous la façon $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Solution

$P(x) = 2x - x^3 + 5x(x^2 - x) + 4x - 3 + 2x^2$
$= 2x - x^3 + 5x^3 - 5x^2 + 4x - 3 + 2x^2$
$= -x^3 + 5x^3 - 5x^2 + 2x^2 + 2x + 4x - 3$
$= 4x^3 - 3x^2 + 6x - 3$.

3- Degré d'un polynôme

Définition

Un polynôme écris sous la forme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$ est dit réduit et ordonné suivant les puissances décroissantes de x.

- n est appelé degré de P. On le note : d°P.
- Pour tout nombre entier naturel k compris entre 0 et n, $a_k x^k$ est appelé terme de degré k.
- $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$ sont appelés les coefficients de P.

Remarque

Lorsque $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, P est appelé polynôme nul.

Exemple

Soit le polynôme P défini par : $P(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 8x - 12$

- Le monôme de plus haut degré est : x^5.
- Le degré du polynôme P est : 5. On note d°$P = 5$.
- Le terme de degré 2 est : $-4x^2$ et celui de degré 4 est : $2x^4$

4- Egalité de deux polynômes

Propriété

Deux polynômes sont égaux si et seulement si :
- ils ont même degré ;
- les coefficients des termes de même degré sont égaux.

Exercice de fixation

Soit $Q(x) = -3x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 12$ et $R(x) = (a + 2)x^4 + 5x^3 - 4x^2 - bx - 12$, deux polynômes.
Détermine les nombres réels a , b tels que les polynômes Q et R soient égaux.

Solution

les polynômes Q et R sont égaux si et seulement si ils ont même degré et les coefficients des termes de même degré sont égaux.

$d°Q = d°R = 4$.
Il faut : $a + 2 = -3$ et $-b = 0$; donc $a = -5$ et $b = 0$.

5- Zéro d'un polynôme.
Définition

On appelle zéro d'un polynôme P tout nombre réel $\propto$ tel que : $P(\propto) = 0$.

Remarque :
Déterminer les zéros d'un polynôme P, revient à résoudre l'équation $P(x) = 0$.

Exemple

- Soit le polynôme P défini par $P(x) = x^3 + 3x^2$.

On a $P(0) = 0^3 + 3 \times 0^2 = 0$ et $P(-3) = (-3)^3 + 3 \times (-3)^2 = -27 + 27 = 0$ alors 0 et -3 sont des zéros de P.

- Soit le polynôme G défini par $G(x) = x^2 - 9$.

On a $G(x) = 0$ $équivat$ à $x^2 - 9 = 0$
$équivaut$ à $(x-3)(x+3) = 0$
$équivaut$ à $x - 3 = 0$ ou $x + 3 = 0$
$équivaut$ à $x = 3$ ou $x = -3$
donc 3 $et - 3$ sont les zéros de G.

6- Somme et produit de deux polynômes

a. Somme de deux polynômes

- **Définition**
  On appelle somme de deux polynômes P et Q le polynome noté $P + Q$ défini par :
  $(P + Q)(x) = P(x) + Q(x)$.
- **Propriété**
  Soit P et Q deux polynômes.
  $d°(P + Q)$ est inférieur ou égal au plus grand des nombres $d°P$ et $d°Q$ *(égal lorsque $d°P \neq d°Q$)*
  ON note $d°(P + Q) \leq \max(d°P;\ d°Q)$

Exercice de fixation
On donne les polynômes P, Q et R suivants :
$P(x) = -2x^3 + 3x^2 + 7x - 3$.
$Q(x) = -x^5 - 7x - 3$.
$R(x) = 2x^3 - 3x^2 - 10x$.

1- Calcule : $P(x) + Q(x)$ et $P(x) + R(x)$
2- Déduis en $d°(P + Q)$ et $d°(P + R)$

Solution

1- $(P+Q)(x) = P(x) + Q(x) = -2x^3 + 3x^2 + 7x - 3 + (-x^5 - 7x - 3)$
$= -x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 6$
$(P+R)(x) = P(x) + R(x) = -2x^3 + 3x^2 + 7x - 3 + (2x^3 - 3x^2 - 10x) = -3x - 3$

2- $d°(P+Q) = 5$ et $d°(P+R) = 1$.

b. Produit de polynômes

- **Définition**

  On appelle produit de deux polynômes P et Q le polynome noté $P \times Q$ défini par :
  $(P \times Q)(x) = P(x) \times Q(x)$.

Remarques

- Si $P(x) = -1$ alors $PQ = (-1)Q$.
  $(-1)Q$ est noté $-Q$ et est appelé l'opposé de Q.
- $P - Q = P + (-Q)$

Exemple

Soit P et Q deux polynômes tels que : $P(x) = -2x^3 + 3x^2 + 7x - 3$ et $Q(x) = -x^5 - 7x - 3$.

$$\begin{aligned} P - Q &= P(x) - Q(x) = -2x^3 + 3x^2 + 7x - 3 - (-x^5 - 7x - 3) \\ &= -2x^3 + 3x^2 + 7x - 3 + x^5 + 7x + 3 \\ &= x^5 - 2x^3 + 3x^2 + 14x \end{aligned}$$

- ***Propriété***

  Soit P et Q deux polynômes non nuls.
  $d°(P.Q) = d°P.d°Q$

Exercice de fixation

On donne les polynômes S et R suivants :
$S(x) = -7x^2 + x + 5$.
$R(x) = -2x^3 + 10x$.

1- Calcule le polynôme SR
2- Déduis en $d°(SR)$

Solution

1- $SR(x) = S(x) \times R(x) = (-7x^2 + x + 5)(-2x^3 + 10x)$
$= 14x^5 - 70x^3 - 2x^4 + 10x^2 - 10x^3 + 50x$
$= 14x^5 - 2x^4 - 80x^3 + 10x^2 + 50x$

2- $d°(SR) = 5$

7- Factorisation d'un polynôme

Définition

Un polynôme mis sous la forme d'un produit de polynômes de degrés supérieurs ou égaux à 1 est dit factorisé.

Produits remarquables

Pour tous nombres réels a et b, on a :

(1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
(2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
(3) $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
(4) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
(5) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

(6) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$
(7) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

Exemple

En utilisant les produits remarquables, on obtient :

$$x^3-8=x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+2^2)=(x-2)(x^2+2x+41$$

$$x^3+1=x^3+1^3=(x+1)(x^2-x+1^2)=(x+1)(x^2-x+1)$$

$$x^3-6x^2+12x-8=x^3-3\times x^2\times 2+3\times x\times 2^2-2^3$$
$$=(x-2)^3$$

$$8x^3+12x^2+6x+1=(2x)^3+3\times(2x)^2\times 1+3\times 2x\times 1^2+1^3$$
$$=(2x+1)^3$$

$$x^3-8=x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+2^2)=(x-2)(x^2+2x+4)$$

Exercice de fixation

On considère le polynôme B défini par : $B(x)=x^3-1-(x-1)(2x^2+x-3)$.
Ecris $B(x)$ sous la forme d'un produit de polynômes de premier degré.

Solution

On a: $B(x)=x^3-1^3-(x-1)(2x^2+x-3)=(x-1)(x^2+x+1)-(x-1)(2x^2+x-3)$.
$B(x)=(x-1)[\,x^2+x+1-(2x^2+x-3)]=(x-1)(x^2+x+1-2x^2-x+3)$.
$B(x)=(x-1)(4-x^2)=(x-1)(2^2-x^2)$
Donc $B(x)=(x-1)(2-x)(2+x)$.

II. POLYNÔMES DU SECOND DEGRE

1- Forme canonique d'un polynôme du second degré

a- Forme canonique

Tout polynôme du second degré $P(x)$ tel que $P(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ peut se mettre sous la forme : $P(x)=a[(x+\alpha)^2+\beta]$ où $\propto$ *et* β sont des nombres réels.
L'écriture $a[(x+\alpha)^2+\beta]$ de $P(x)$ est appelé forme canonique.

Cas général

a, b et c sont des nombres réels avec $a\ \neq\ 0$

$$P(x)=ax^2+bx+c$$
$$P(x)=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})$$
$$P(x)=a[(x+\frac{b}{2a})^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}]$$

Cette expression de $P(x)$ est sa forme canonique avec $\propto=\frac{b}{2a}$ et $\beta=-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}$

Exercice de fixation

Ecris chacun des polynômes ci-dessous sous la forme canonique.
$T(x) = x^2 + 4x - 5 \quad K(x) = 2x^2 - 6x + 7 \quad L(x) = -x^2 + 5x + 3$

Solution

$T(x) = x^2 + 4x - 5 = (x+2)^2 - 2^2 - 5 = (x+2)^2 - 4 - 5 = (x+2)^2 - 9$

$K(x) = 2x^2 - 6x + 7 = 2\left(x^2 - 3x + \frac{7}{2}\right) = 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}\right]$

$= 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{7}{2}\right] = 2[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}]$

$L(x) = -x^2 + 5x + 3 = -(x^2 - 5x - 3) = -\left[\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 3\right] = -\left[\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - 3\right]$

$= -[\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{37}{4}]$

b- Factorisation d'un polynôme du second degré

Soit $P(x) = a[(x+\alpha)^2 + \beta]$ l'écriture de $P(x)$ sous la forme canonique .

- Si $\beta > 0$, alors $P(x)$ n'est pas factorisable et donc n'admet pas de zéro.
- Si $\beta < 0$, alors $P(x)$ est factorisable et admet deux zéros.
- Si $\beta = 0$, alors $P(x)$ admet un seul zéro. (Zéro double)

Exercice de fixation

En utilisant la forme canonique, factorise chacun des polynômes P et Q tels que :
$P(x) = x^2 - 5x + 4$ et $Q(x) = 4x^2 + 16x + 12$

Solution

$P(x) = x^2 - 5x + 4 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 4 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = (x-1)(x-4)$

$Q(x) = 4x^2 + 16x + 12 = 4(x^2 + 4x + 3) = 4[(x+2)^2 - (2)^2 + 3] = 4[(x+2)^2 - 1]$

$= 4(x+3)(x+1)$

2- <u>Etude du signe d'un polynôme du second degré</u>

. <u>Signe de $ax + b$ ($a \neq 0$)</u>

Pour tout nombres réels a et b tels que : $a \neq 0$, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	$Signe\ de\ -a$	0	$signe\ de\ a$

Exercices de fixation

Etudions le signe de $-2x+2$
Soultion
On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$-2x+2$		$+$	0	$-$	

On a donc : pour tout x appartenant à $]-\infty;1[$, $x-1>0$
pour tout x appartenant à $]1;+\infty[$, $x-1<0$
pour $x=1, x-1=0$

b. **Signe de ax^2+bx+c**

Méthode
Soit $A(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ pour étudier le signe de $A(x)$ on peut utiliser sa forme canonique.

Exercices de fixation

Etudions le signe de $Q(x)=x^2-x-2$
Solution
On a : $Q(x)=(x-\frac{1}{2})^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$.
$=(x-\frac{1}{2})^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(x-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)=\left(x-\frac{4}{2}\right)\left(x+\frac{2}{2}\right)=(x-2)(x+1)$.

On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$Q(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc : pour tout x appartenant à $]-\infty;-1[\cup]2;+\infty[$, $Q(x)>0$
pour tout x appartenant à $]-1;2[$, $Q(x)<0$
pour x appartenant $\{-1;2\}$, $Q(x)=0$

Exercice de fixation

Etudions le signe de $R(x)=-x^2+x-2$

Solution
On a : $R(x)=-x^2+x-2=-(x^2-x+2)=-[(x-\frac{1}{2})^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+2=-[(x-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}]$
pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $(x-\frac{1}{2})^2>0$ et $\frac{7}{4}>0$, donc pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $R(x)<0$.

Exercice de fixation

Etudions le signe de $S(x)=-9x^2+6x-1$

Solution

On a : $S(x) = -9x^2 + 6x - 1 = -9\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) = -9[(x - \frac{1}{3})^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{9}] = -9(x - \frac{1}{3})^2$
pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $(x - \frac{1}{3})^2 > 0$ et $-9 < 0$, donc pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$,
$R(x) < 0$.

III. FACTORISATION PAR $x - \alpha$

1- Propriété fondamental

Soit P un polynôme et $\propto$ un nombre réel.
$\propto$ est un zéro de P si et seulement si il existe un polynôme Q tel que pour tout nombre réel x ,
$P(x) = (x - \propto)Q(x)$

Remarque

- $Q(x)$ est appelé quotient de $P(x)$ par $x - \propto$.
- d°Q = d°$P - 1$

Conséquence : un polynôme de degré n a au plus n zéros distincts.

2- Détermination pratique du quotient de $P(x)$ *par* $x - \alpha$

a. Méthode des coefficients indéterminés

Exercices de fixation

Soit $P(x) = 2x^3 - x^2 + x - 2$
1) Vérifions que 1 est un zéro de P.
2) Déterminons le quotient de $P(x)$ par $x - 1$, par la méthode des coefficients indéterminés.

Solution:

1) Je vérifie que 1 est un zéro de P.
$P(1) = 2 \times 1^3 - 1^2 + 1 - 2 = 2 - 1 + 1 - 2 = 0$. Donc 1 est un zéro de P.
2) Je détermine les nombres réels a , b *et* c tels que $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.
On a: $(x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$
Par identification on a : $a = 2$; $b - a = -1$; $c - b = 1$ et $-c = -2$

On obtient $\begin{cases} a = 2 \\ b - a = -1 \\ c - b = 1 \\ -c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$ et $P(x) = (x-1)(2x^2 + x + 2)$

Donc le quotient de $P(x)$ par $x - 1$ est $2x^2 + x + 2$

b. Méthode de la division euclidienne

Exercices de fixation

Soit $P(x) = 2x^3 - x^2 + x - 2$

1) Vérifions que 1 est un zéro de P.

2) Déterminons le quotient de $P(x)$ par $x - 1$, par la méthode de la division euclidienne.

Solution

1) Je vérifie que 1 est un zéro de P.

$P(1) = 2 \times 1^3 - 1^2 + 1 - 2 = 2 - 1 + 1 - 2 = 0$. Donc 1 est un zéro de P.

2) Je détermine les nombres réels a , b et c tels que $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.

On a :

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 + x - 2 & x - 1 \\ \cline{2-2} \underline{-2x^3 + 2x^2} & 2x^2 + x + 2 \\ x^2 + x - 2 & \\ \underline{-x^2 + x} & \\ 2x - 2 & \\ \underline{-2x + 2} & \\ 0 & \end{array}$$

On obtient $P(x) = (x-1)(2x^2 + x + 2)$

Donc le quotient de $P(x)$ par $x - 1$ est $2x^2 + x + 2$

IV. FRACTIONS RATIONNELLES

Définition

On appelle fraction rationnelle, le quotient $\frac{P}{Q}$ de deux polynômes non nuls P et Q.

Remarque :

La fraction rationnelle $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ a pour ensemble de définition l'ensemble des nombres réels privé des zéros de Q.

Exemples

$\frac{-x^2-2x+3}{x^2-1}$ et $\frac{x+2}{x^2-4x+4}$ sont des fractions rationnelles.

Exercice 1

Soit la fraction rationnelle f définie par : $f(x) = \frac{2x^3+2x^2-10x+6}{x^2-4x+3}$

1) Détermine l'ensemble de définition Df de f.
2) a) Vérifie que 1 est un zéro du polynôme $2x^3 + 2x^2 - 10x + 6$.
   b) Déduis en une écriture de $2x^3 + 2x^2 - 10x + 6$ en produit de facteurs du premier degré.
3) Montre que : $f(x) = \frac{2(x-1)^2(x+3)}{(x-1)(x-3)}$.
4) Pour $x \in D_f$, simplifie $f(x)$.
5) Etudie le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Solution

1) Je détermine l'ensemble de définition de f.

$x \in Df \iff x^2 - 4x + 3 \neq 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 2^2 + 3 \neq 0$
$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 1 \neq 0$
$\Leftrightarrow (x-2-1)(x-2+1) \neq 0$
$\Leftrightarrow (x-3)(x-1) \neq 0$
$\Leftrightarrow x \neq 3$ et $x \neq 1$

Donc $Df = \mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$.

2) a) Je vérifie que 1 est un zéro du numérateur.
On a : $2(1)^3 + 2(1)^2 - 10(1) + 6 = 2 + 2 - 10 + 6 = 0$
Donc 1 est un zéro du numérateur.

b)
On a :

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 2x^2 - 10x + 6 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{-2x^3 + 2x^2} \qquad\qquad & 2x^2 + 4x - 6 \\ 4x^2 - 10x + 6 & \\ \underline{-4x^2 + 4x} \qquad & \\ -6x + 6 & \\ \underline{6x - 6} & \\ 0 \quad & \end{array}$$

Ainsi : $2x^3 - x^2 + x - 2 = (x-1)(2x^2 + 4x - 6)$
On a aussi : $2x^2 + 4x - 6 = 2(x^2 + 2x - 3) = 2[(x+1)^2 - 1^2 - 3]$
$= 2[(x+1)^2 - 4] = 2[(x+1)^2 - 2^2]$
$= 2(x+1+2)(x+1-2) = 2(x+3)(x-1)$
On obtient donc : $2x^3 - x^2 + x - 2 = 2(x-1)^2(x+3)$

3) Je montre que $f(x) = \frac{2(x-1)^2(x+3)}{(x-1)(x-3)}$.

On a : $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$, donc $f(x) = \frac{2(x-1)^2(x+3)}{(x-1)(x-3)}$

4) Je simplifie $f(x)$.
On a :
Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$ $f(x) = \frac{2(x-1)(x+3)}{(x-3)}$

5) J'étudie le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$2(x-1)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	

Pour tout $x \in]-\infty ; -3[\cup]1 ; 3[$, $f(x) < 0$
Pour tout $x \in]-3 ; 1[\cup]3, +\infty[$, $f(x) > 0$
Pour $x = -3$, $f(x) = 0$

Exercice 2 : On donne la fraction rationnelle G définie par : $G(x) = \frac{3x^2 - x - 2}{x-3}$

Ecris la fraction rationnelle G sous la forme $G(x) = ax + b + \frac{22}{x-3}$

Solution

On a la division euclidienne suivante :

$$
\begin{array}{r|l}
3x^2 - x - 2 & x - 3 \\
\cline{2-2}
\underline{-3x^2 + 9x} & 3x + 8 \\
8x - 2 & \\
\underline{-8x + 24} & \\
22 &
\end{array}
$$

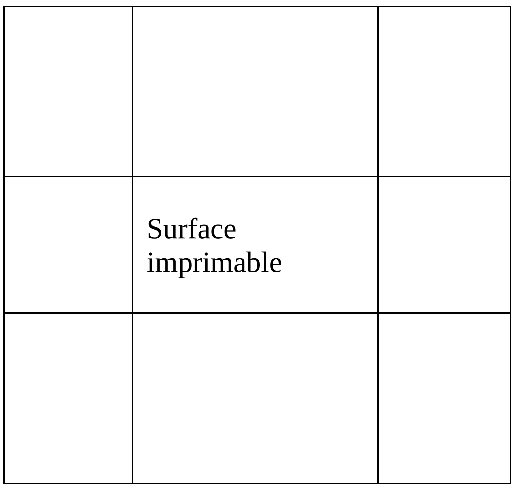
On a donc : $G(x) = 3x + 8 + \frac{22}{x-3}$

D'où, $a = 3, b = 8$ et $c = 22$.

C- SITUATION COMPLEXE

Pour la fête de saint valentin, M. INAGO souhaite faire plaisir à sa femme en lui offrant une carte de saint valentin. Il décide donc d'imprimer sur du papier photo une carte importée sur un site internet, le papier est de forme carrée de côté x avec x compris entre 9 cm et 20 cm. Il souhaite cependant laisser une marge de 3 cm en haut et en bas du papier et une marge de 2 cm à gauche et à droite. Son fils en classe de seconde qui est à côté de lui souhaite déterminer les dimensions du papier photo afin que l'aire de la surface imprimable soit de 24 cm^2. (Voir la figure ci-dessous)

A l'aide d'une production argumentée, réponds à la préoccupation du fils de INAGO.



Solution

Ce problème porte sur les polynômes

Pour déterminer les dimensions de la photo ;

Je détermine les dimensions et calculer l'aire $A(x)$ de la partie imprimable

Je résous l'équation $A(x) = 24$

JE déduis les dimensions a partir des contraintes

Les dimensions de la partie imprimable en fonction de x :

la partie imprimable est un rectangle de longueur $x - 4$ et de largeur $x - 6$

son aire $A(x) = (x-6)(x-4)$.
Je résous l'équation $A(x) = 24$

Si l'aire de la surface imprimable est 24 cm^2, alors on a : $(x-6)(x-4) = 24$.

$$\begin{aligned}(x-6)(x-4) = 24 &\Leftrightarrow x^2 - 10x + 24 = 24\\ &\Leftrightarrow x^2 - 10x = 0\\ &\Leftrightarrow x(x-10) = 0\\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 10\end{aligned}$$

Comme x est compris entre 9 et 20, alors $x = 10$.

le papier photo doit être un carré de coté 10 cm pour que l'aire de la surface imprimable soit égale à 24 cm^2.

D-EXERCICES

Exercice 1

Soit a, b et c des nombres réels. Détermine a, b et c pour que les polynômes
P(x) = 5x^2 – 3x + 2 et $Q(x) = ax^2 + (1 - b)\,x + c$ soient égaux.

Solution

$$P = Q \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ 1 - b = -3 \\ C = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \\ C = 2 \end{cases}$$

Exercice 2

On considère le polynôme $P(x) = 2x - x^3 + 5x(x^2 - x) + 4x - 3 + 2x^2$.,
1-Ecis $P(x)$ sous la façon développée, réduite et ordonnée sous la forme
2-Détermine les nombres b_3, b_2, b_1 *et* b_0 tels que : $P(x) = b_3x^3 + b_2(x+1)^2 + b_1(x+1) + b_0$.

Solution

- $P(x) = 2x - x^3 + 5x(x^2 - x) + 4x - 3 + 2x^2$
  $= 2x - x^3 + 5x^3 - 5x^2 + 4x - 3 + 2x^2$
  $= -x^3 + 5x^3 - 5x^2 + 2x^2 + 2x + 4x - 3$
  $= 4x^3 - 3x^2 + 6x - 3$.
- $P(x) = b_3x^3 + b_2(x+1)^2 + b_1(x+1) + b_0$
  $= b_3x^3 + b_2(x^2 + 2x + 1) + b_1x + b_1 + b_0$
  $= b_3x^3 + b_2x^2 + (b_1 + 2b_2)x + b_2 + b_1 + b_0$

  Cette écriture de $P(x)$ étant unique, on a par identification

  $$\begin{cases} b_3 = 4 \\ b_2 = -3 \\ b_1 + 2b_2 = 6 \\ b_2 + b_1 + b_0 = -3 \end{cases} \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} b_3 = 4 \\ b_2 = -3 \\ b_1 = 12 \\ b_0 = -12 \end{cases}$$

  Donc $P(x) = 4x^3 - 3(x+1)^2 + 12(x+1) - 12$.

Exercice 3

Ecris chacun des polynômes suivants sous la forme de produit de polynômes du premier degré.

$R(x) = x^3 - 27$ S(x) = x^3 – 6x^2 + 12x -8

Solution

$R(x) = x^3 - 27 = (x-3)(x^2 + 3x + 9)$

Factorisons si possible $x^2 + 3x + 9$

$$x^2 + 3x + 9 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 9$$
$$= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 9$$
$$= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{4}$$

Donc $x^2 + 3x + 9$ n'est pas factorisable par conséquent $R(x) = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

S(x) = $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = x^3 - 3 \times x^2 \times 2 + 3 \times x \times 2^2 - 2^3 = (x - 2)^3$

Exercice 4

En utilisant la forme canonique, factorise chacun des polynômes suivants si cela est possible.

P(x) = $x^2 + 4x + 2$ Q(x) = $2x^2 - 4x + 8$ R(x) = $x^2 - 2x + 5$

Solution

$P(x) = x^2 + 4x + 2$ $= (x + 2)^2 - 4 + 2$ $= (x + 2)^2 - 2$ $= (x + 2)^2 - (\sqrt{2})^2$ $= (x + 2 + \sqrt{2})\ (x + 2 - \sqrt{2})$	$Q(x) = 2x^2 - 4x + 8$ $= 2(x^2 - 2x + 4)$ $= 2[(x^2 - 1)^2 - 1 + 4]$ $= 2[(x^2 - 1)^2 + 3]$ Donc le polynôme Q n'est pas factorisable	$R(x) = x^2 - 2x + 5$ $= (x - 1)^2 - 1 + 5$ $= (x - 1)^2 + 4$ Donc le polynôme R n'est pas factorisable

Exercice 5

$C(x)$ Etudie le signe de chacun des polynômes suivants :

$A(x) = 5x - 2$; $B(x) = -4x + 3$; $C(x) = (x - 3)(4x + 2)$; $D(x) = (2 - x)(3 - 5x)$

x	$-\infty$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$A(x)$		$-$	0	$+$	

Pour $x \in \left]-\infty; \frac{2}{5}\right]$, $A(x) \leq 0$

Pour $x \in \left]\frac{2}{5}; +\infty\right[$, $A(x) > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$x - 3$		$-$		$-$	0	$+$	
$4x + 2$		$-$	0	$+$		$+$	
$C(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Pour $x \in \left]-\infty; \frac{-1}{2}\right] \cup [3; +\infty[$, $C(x) \geq 0$

Pour $x \in \left]\frac{-1}{2}; 3\right[$, $C(x) < 0$

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$B(x)$		$+$	0	$-$	

Pour $x \in \left]-\infty; \frac{3}{4}\right]$, $B(x) \geq 0$

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		2		$+\infty$
$2 - x$		$+$		$+$	0	$-$	
$3 - 5x$		$+$	0	$-$		$-$	
$D(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Pour $x \in \left]-\infty; \frac{5}{3}\right] \cup [2; +\infty[$, $D(x) \geq 0$

Pour $x \in \left]\frac{3}{4}; +\infty\right[, B(x) < 0$	Pour $x \in \left]\frac{5}{3}; 2\right[, D(x) < 0$

Exercice 6

Etudie le signe de chacun des polynômes suivants :

E (x) = $x^2 + x - 2$; F(x) = $-3x^2 - 3x + 18$.

E (x) = $x^2 + x - 2$

$= (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$

$= (x+2)(x-1)$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x - 1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x + 2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$C(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Pour $x \in]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[, E(x) \geq 0$

Pour $x \in]-2; 1[, C(x) < 0$

F(x) = $-3x^2 - 3x + 18$.

F(x) = $-3(x^2 + x - 6)$

$= -3\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right]$

$= -3\,(x+3)(x-2)$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x - 2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$-3(x+3)$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$C(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Pour $x \in]-\infty; -3] \cup [2; +\infty[, E(x) \leq 0$

Pour $x \in]-3; 2[, C(x) > 0$

Exercice 7

On considère le polynôme P défini par : $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$.

1. Justifie que $P(x) = (2x-1)(x+1)(x+3)$.
2. Détermine les zéros de P.

Solution

1. Justifions que $P(x) = (2x-1)(x+1)(x+3)$.

Développons $(2x-1)(x+1)(x+3) = (2x-1)(x^2+4x+3)$

$$= 2x^3 + 8x^2 + 6x - x^2 - 4x - 3x - 3$$
$$= 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$$
$$= P(x)$$

Donc $P(x) = (2x-1)(x+1)(x+3)$.

2 Déterminons les zéros de P.

α est un zéro de P si et seulement α est solution de l'équation $P(x) = 0$

$P(x) = 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x+1)(x+3) = 0.$

$\Leftrightarrow (2x-1) = 0 \; ou \; (x+1) = 0 \; ou \; (x+3) = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \; ou \; x = -1 \; ou \; x = -$

Les zéros de P sont $\frac{1}{2}; \; -1 \; et -3$.

Exercice 8

On considère le polynôme P défini par $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$.

1. Justifie que $\frac{1}{2}$ est un zéro de P.
2. Ecris sous forme canonique le polynôme Q défini par $Q(x) = x^2 - x - 2$.
3. En utilisant la question 2, factorise $Q(x)$.
4. Vérifie que $P(x) = (2x - 1)Q(x)$
5. Détermine les zéros de P.

Solution

1. Justifions que $\frac{1}{2}$ est un zéro de P.

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times (\tfrac{1}{2})^3 - 3\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\tfrac{1}{2}\right) + 2$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{8} - 3 \times \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{9}{4} - \frac{9}{4} = 0$$

2.Ecris sous forme canonique le polynôme Q défini par $Q(x) = x^2 - x - 2$

$Q(x) = (x - 1)^2 - 1 - 2$

$Q(x) = (x - 1)^2 - 3$

$Q(x) = (x - 1)^2 - (\sqrt{3})^2$

$Q(x) = (x - 1 - (\sqrt{3}))\,(x - 1 + (\sqrt{3}))$

2 Vérifions que $P(x) = (2x - 1)Q(x)$

$(2x - 1)(x^2 - x - 2.)$= $2x^3 - 2x^2 - 4x - x^2 + x + 2.$

.= $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = P(x)$

3 Détermine les zéros de P.

α est un zéro de P si et seulement α est solution de l'équation $P(x) = 0$

$P(x) = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)(x - 1 - (\sqrt{3}))\,(x - 1 + (\sqrt{3}))$=0

$\Leftrightarrow (2x - 1) = 0\,; ou\;\; x - 1 - (\sqrt{3}))= 0\,; ou\; (x - 1 + (\sqrt{3}))$=0

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\,; ou\;\; x = 1 + (\sqrt{3}))\,; ou\; (x = 1 - (\sqrt{3}))$

Les zéros de P. sont : $\frac{1}{2}$; $1 + (\sqrt{3}))\; et\; 1\; - (\sqrt{3}))$

Exercice 9

On donne $P(x) = -2x^3 + 7x^2 - 12x + 9$.

1. Vérifie que $P(x)$ est factorisable par $x - \frac{3}{2}$
2. Démontre que le quotient de $P(x)$ par $x - \frac{3}{2}$ est $-x^2 + 4x - 6$
3. Ecris, si possible, le quotient sous forme de produit de polynômes de 1er degré.
4. Etudie le signe de $P(x)$ suivants les valeurs de x.
5. Sans calculer, donne le signe des nombres suivants : $P(4000)$, $P(\sqrt{3})$, $P(-2008)$.

Solution

1. Vérifie que $P(x)$ est factorisable par $x - \frac{3}{2}$

Calculons $P\left(\frac{3}{2}\right)$

$P\left(\frac{3}{2}\right) = -2(\frac{3}{2})\; + \; 7\times\, (\frac{3}{2})^2$ -12× $\frac{3}{2}$ +9

$P\left(\frac{3}{2}\right) = -2\,\frac{27}{8} + \; 7\times\,\frac{9}{4}$ - $\frac{36}{2}$ +9

$P\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{4} + \frac{63}{4} - 18 + 9$

$P\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{36}{4} - 9 = 0$ Alors $P(x)$ est factorisable par $x - \frac{3}{2}$

2. Démontrons que le quotient de $P(x)$ par $x - \frac{3}{2}$ est $-x^2 + 4x - 6$

   dévélopons

   par $\left(x - \frac{3}{2}\right)(-2x^2 + 4x - 6) = -2x^3 + 4x^2 - 6x + 3x^2 - 6x + 9$

   $= -2x^3 + 7x^2 - 12x + 9 = p(x)$

3. Ecrivons, si possible, le quotient sous forme de produit de polynômes de 1[er] degré.

Posons $Q(x) = -2x^2 + 4x - 6$

$Q(x) = -2[x^2 - 2x + 3]$

$Q(x) = -2[(x-1)^2 - 1 + 3]$

$Q(x) = -2[(x-1)^2 + 2]$

4. Etudions le signe de $P(x)$ suivants les valeurs de x.

$P(x) = -2(x - \frac{3}{2})[(x-1)^2 + 2]$; le signe donc de P est le signe contraire à celui de $\left(x - \frac{3}{2}\right)$ car $-2[(x-1)^2 + 2] < 0$.

Pour tout $\boldsymbol{x} \in \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$, $\left(x - \frac{3}{2}\right) > 0$ $donc$ $P(x) < 0$

Pour tout $\boldsymbol{x} \in \left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$, $\left(x - \frac{3}{2}\right) < 0$ $donc$ $P(x) > 0$

5 .Sans calculer, donne le signe des nombres suivants : $P(4000)$, $P(\sqrt{3})$, $P(-2008)$

$P(4000) < 0$ car $\mathbf{4000} \in \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$

, $P(\sqrt{3}) < 0$ car $\sqrt{3} \in \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$

$P(-2008) > 0$ car $\mathbf{-2008} \in \left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$

Exercice 10

On donne la fraction rationnelle G définie par : $G(x) = \frac{-2x^3+3x^2-x-2}{x^2-3}$

Ecris la fraction rationnelle G sous la forme $G(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2-3}$

Solution

Déterminons les nombres réels tel que

$G(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2-3}$

$G(x) = \frac{(ax+b)(x^2-3)}{x^2-3} + \frac{cx+d}{x^2-3}$

$G(x) = \frac{(ax+b)(x^2-3)+Cx+d)}{x^2-3}$

$G(x) = \frac{ax^3-3ax+bx^2-3b+cx+d}{x^2-3} = \frac{ax^3+bx^2+(-3a+c)x-3b+d}{x^2-3}$

Par identification on a :

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \\ -3a + c = -1 \end{cases} \quad \text{et } -3b + d = -2$$

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \\ c = -7 \end{cases} \text{ et } d = 7$$

MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE L'ALPHABETISATION

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Union – Discipline – Travail

MON ÉCOLE À LA MAISON

SECONDAIRE
2^{nde} C
MATHÉMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Durée : 6 heures Code :

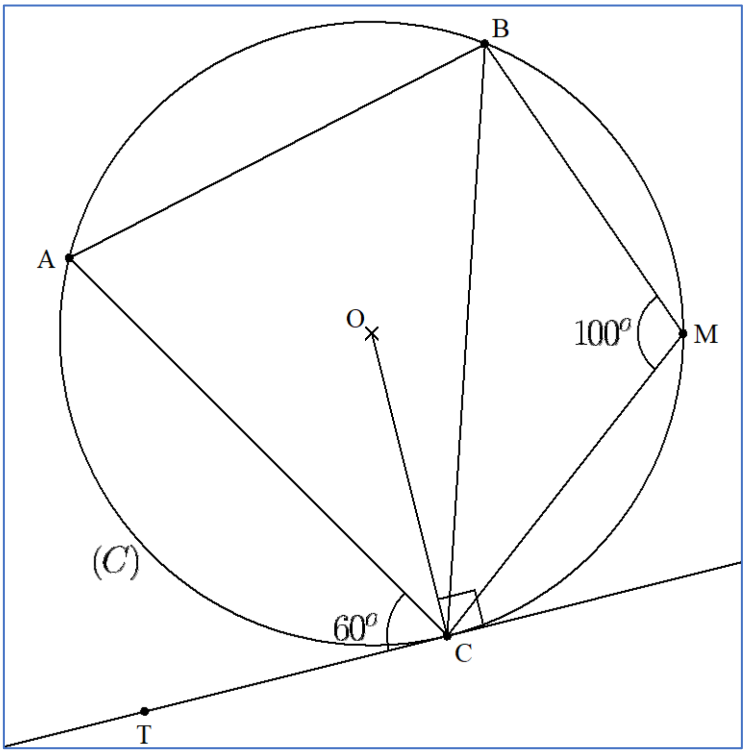
Compétence 3 : **Traiter une situation relative à la géométrie du plan , à la géométrie de l'espace et aux transformations du plan**

Thème 1 : Géométrie du plan

Leçon 7 : ANGLES INSCRITS

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pour embellir la devanture de leur classe, des élèves d'une classe de 2^{nd} C décident de planter des roses. Les filles de la classe proposent la figure ci-dessous où (C) est un cercle centre O et de rayon réel 3m et elles souhaitent que l'aire du triangle ABC soit réservée pour les 40 pieds de roses blanches qu'elles ont achetées. Le chef de classe soutient qu'avec 5 pieds au mètre carré il n'y a pas suffisamment de pieds de roses blanches. Les filles ne sont pas d'accord. Alors tous les élèves de la classe décident de faire des calculs pour en avoir le cœur net. On donne AC = 5 m.



B. CONTENU DE LA LECON

I ANGLES INSCRITS

1- Angle inscrit défini par une corde et un point.

a- Présentation

Deux points distincts A et B d'un cercle définissent deux arcs de cercles :

- Celui dont la longueur est plus petite, noté $\boldsymbol{\widehat{AB}}$
- Celui dont la longueur est plus grande, noté $\boldsymbol{\overset{\smile}{AB}}$.

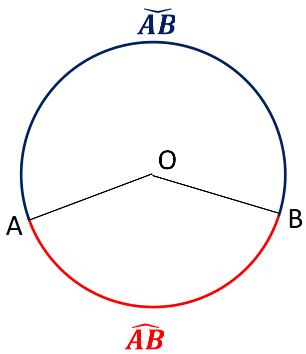
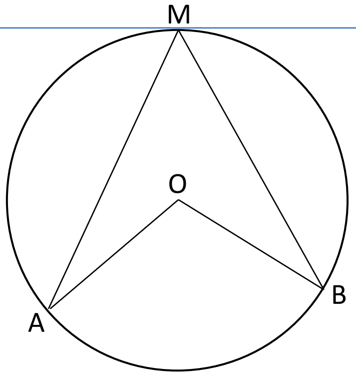
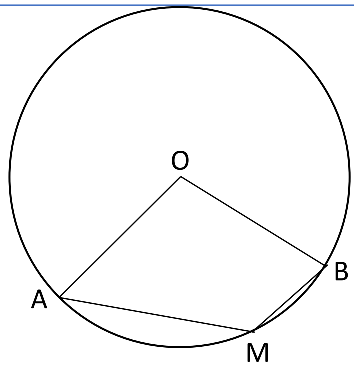


Figure 2	Figure 3



Le point M appartient à l'arc $\overset{\smile}{AB}$

L'angle inscrit $\widehat{AMB}$ est aigu et il intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$



Le point M appartient à l'arc $\overset{\frown}{AB}$

L'angle inscrit $\widehat{AMB}$ est obtus et il intercepte l'arc$\overset{\smile}{AB}$

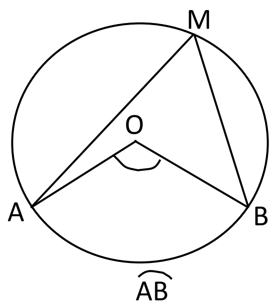
L'angle au centre $\widehat{AOB}$ et l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ sont dits associés.

Remarque

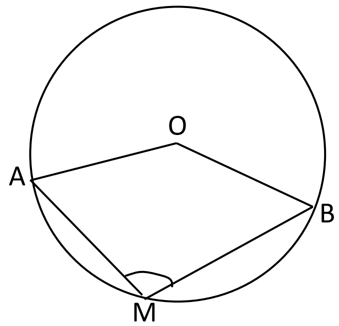
Lorsque la corde [AB] est un diamètre, alors les deux arcs de cercles sont des demi-cercles et l'angle au centre $\widehat{AOB}$ est un angle plat qui intercepte l'un ou l'autre des deux demi-cercles.

b- Propriétés :

Soit $\widehat{AMB}$ un angle inscrit dans un cercle de centre O.



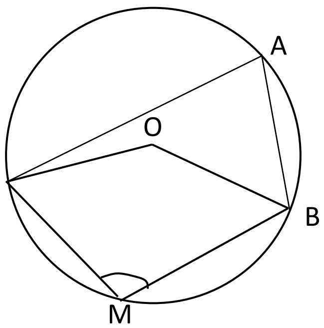
- Si $\widehat{AMB}$ intercepte l'arc AB, alors : $mes\widehat{AMB} = \frac{1}{2} mes\widehat{AOB}$.



- Si $\widehat{AMB}$ intercepte l'arc $\overset{\smile}{AB}$, alors : $mes\widehat{AMB} = 180° - \frac{1}{2} mes\widehat{AOB}$.

Exercice de fixation

Sur la figure ci-dessous, O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC tel que $mes\widehat{BOC}$= 138°. Calcule $mes\widehat{BAC}$ et $mes\widehat{BMC}$.



Réponse proposée

Calculons $mes\widehat{BAC}$ *et* $mes\widehat{BMC}$.
Dans le cercle de centre O, $\widehat{BAC}$ est un angle aigu inscrit associé à l'angle au centre $\widehat{BOC}$

Donc $mes\widehat{BAC} = \frac{1}{2} mes\widehat{BOC} = 69°$

$\widehat{BMC}$ est un angle obtus inscrit qui intercepte l'arc $\overset{\smile}{BC}$

Donc $mes\widehat{BMC} = 180° - \frac{1}{2} mes\widehat{BOC}$

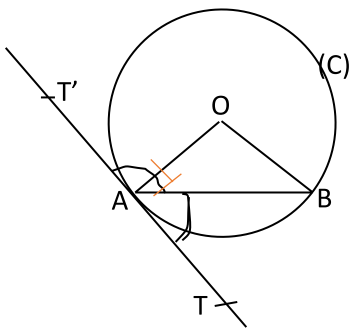
$mes\widehat{BMC} = 180° - 69° = 111°$

2. **Angle inscrit défini par une corde et une demi-tangente**.

a- Présentation

(C) est un cercle de centre O

(TT') est la tangente au cercle (C) en A.

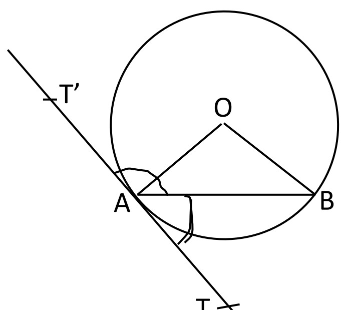


- $\widehat{TAB}$ est un angle inscrit qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$.
- $\widehat{T'AB}$ est un angle inscrit qui intercepte l'arc $\overset{\smile}{AB}$.

b- Propriétés

Soit [AB] une corde d'un cercle (C) de centre O qui n'est pas un diamètre, [AT) la demi-tangente en A à (C) contenue dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas le point O, [AT') l'autre demi-tangente en A. On a :

- $mes\widehat{TAB} = \frac{1}{2}\, mes\widehat{AOB}$.
- $mes\widehat{T'AB} = 180° - \frac{1}{2}\, mes\widehat{AOB}$

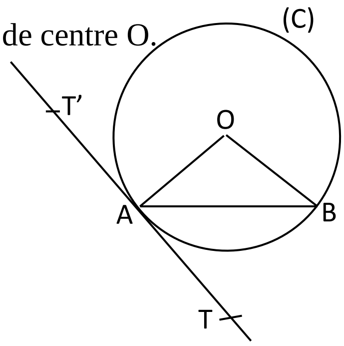


<u>Exercice de fixation</u>

Sur la figure ci-contre, (TT') est la tangente en A au cercle (C) de centre O.

On donne $mes\widehat{AOB} = 108°$.

Calcule $mes\widehat{BAT}\ et\ mes\widehat{BAT'}$.



<u>Réponse proposée</u>

Je calcule $mes\widehat{BAT}\ et\ mes\widehat{BAT'}$.

[AT) est la demi-tangente en A à (C) contenu dans le demi plan de frontière (AB) ne contenant pas le centre O du cercle, donc $mes\widehat{TAB} = \frac{1}{2}\ mes\widehat{AOB}$.

Alors $mes\widehat{BAT} = \frac{1}{2} \times 108° = 54°$.

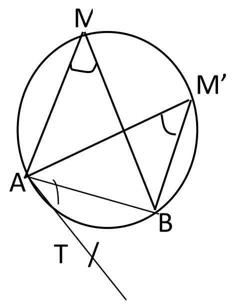
[AT') est l'autre demi-tangente en A, donc $mes\widehat{T'AB} = 180° - \frac{1}{2}\ mes\widehat{AOB}$.

Alors $mes\widehat{BAT'} = 180° - 54° = 126°$.

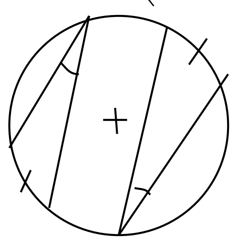
c- <u>Conséquences</u>

<u>Propriétés</u>

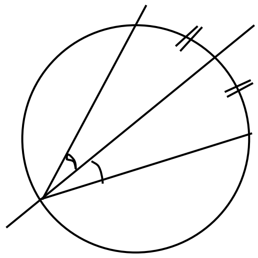
P1 : Des angles inscrits dans un cercle qui interceptent le même arc ont même mesure.



P2 : Des angles inscrits dans un cercle qui interceptent deux arcs de même longueur ont même mesure

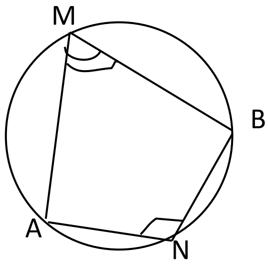


P3 : La bissectrice d'un angle inscrit dans un cercle partage l'arc intercepté en deux arcs de même longueur.



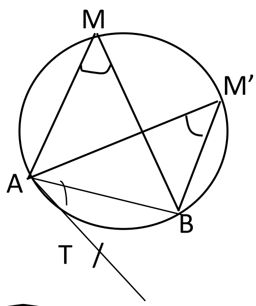
P4 : Si M ∈ $\overset{\frown}{AB}$ et N ∈ $\overset{\frown}{AB}$, alors les angles inscrits $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont supplémentaires.

$$mes\widehat{AMB} + mes\widehat{ANB} = 180°$$



Exercice de fixation : On considère la figure ci-contre où $mes\widehat{AMB} = 37°$

Détermine $mes\widehat{AMB}$; $mes\widehat{AM'B}$ et $mes\widehat{TAB}$.



Solution

Les angles inscrits $\widehat{AMB}$, $\widehat{AM'B}$ et $\widehat{TAB}$ interceptent le même arc $\widehat{AB}$ donc : $mes\widehat{AMB} = mes\widehat{AM'B} = mes\widehat{TAB} = 37°$

II - <u>LIEU GEOMETRIQUE DES POINTS M TELS QUE : $mes\widehat{AMB} = \alpha°$.</u>

1. <u>Détermination de l'ensemble des points M tels que : $mes\widehat{AMB} = \alpha°$</u>

<u>Propriété</u>

Soit A et B deux points distincts, θ un réel tel que 0 < θ < 180°.

Le lieu géométrique des points M tels que mes $\widehat{AMB}$ = θ ° est <u>la réunion de deux arcs de cercle symétriques par rapport à (AB).</u>

2. <u>Construction de l'ensemble des points M tels que $mes\widehat{AMB} = \theta°$</u>

Déterminer le lieu géométrique des points M tels que $\boldsymbol{mes\widehat{AMB} = \theta}$°, avec $0 < \theta < 180$°, revient à construire deux arcs de cercle symétriques par rapport à (AB) appelés ***arcs capables d'un angle de*** $\boldsymbol{\theta}$°.

Programme de construction

- Je trace un segment [AB] ;
- Je trace une demi-droite [AT) tel que $mes\ \widehat{TAB} = \theta$°;
- Je construis le point O, intersection de la perpendiculaire à la droite (AT) en A et de la médiatrice du segment [AB] ;
- Je construis l'arc de cercle de centre O et de rayon OA situé dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas le point T ;
- Je construis le symétrique de cet arc de cercle par rapport à (AB).

L'ensemble cherché est la réunion des deux arcs de cercles symétriques par rapport à (AB) privés des extrémités A et B.

<u>Remarques</u>

Soit M un point distinct de A et de B.

- L'ensemble des points M tels que $\boldsymbol{mes\widehat{AMB} = 0}$° est la droite (AB) privé du segment [AB].
- L'ensemble des points M tels que $\boldsymbol{mes\widehat{AMB} = 180}$° est le segment [AB] privé des points A et B.
- L'ensemble des points M tels que $\boldsymbol{mes\widehat{AMB} = 90}$° est le cercle de diamètre [AB] privé des points A et B.

<u>Exercice de fixation</u>

On donne AB = 4 cm. Construis l'ensemble des points M tels que $mes\widehat{AMB} = 30$°.

<u>Proposition de solution</u>

Construction de l'ensemble des points M tels que $mes\widehat{AMB} = 30$°.

- On construit le segment [AB] tel que AB = 4
- On construit un point T tel que $mes\widehat{TAB} = 30$°.
- On trace la perpendiculaire à la droite (AT) passant par A et la médiatrice du segment [AB]. Ces deux droites se coupent en O.
- On construit l'arc de cercle de centre O et de rayon OA situé dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas le point T.
- On construit le symétrique de cet arc de cercle par rapport à (AB).

L'ensemble cherché est la réunion des deux arcs de cercles symétriques par rapport à (AB) privés des extrémités A et B.

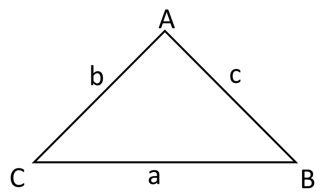
III- RELATIONS METRIQUES DANS UN TRIANGLE

1. Aire d'un triangle

Propriété

ABC est un triangle d'aire $\mathscr{A}$. On pose : a = BC, b = AC et c = AB

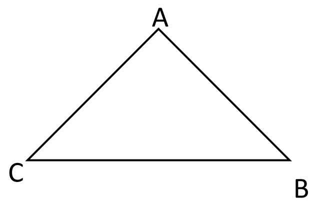
On a : $\mathscr{A} = \frac{1}{2}$ bc sin$\hat{A}$ = $\frac{1}{2}$ ac sin $\hat{B}$ = $\frac{1}{2}$ ab sin $\hat{C}$



Exercice de fixation

Pour la figure ci-contre, on donne : AB = 5 cm, BC = 6 cm

et $mes\widehat{ABC} = 30°$. Calcule l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC.



Solution

Je calcule l'aire du triangle ABC.

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times sin\widehat{ABC}.$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times sin30° = 7{,}5\ cm^2.$$

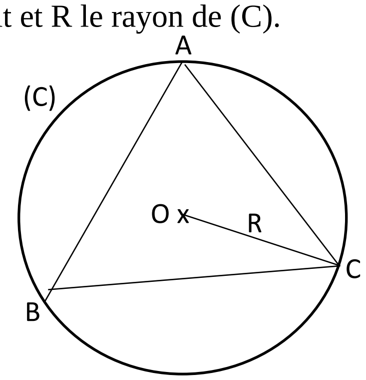
2- Théorème des sinus

Propriété

Soit ABC un triangle, $\mathcal{A}$ son aire, (C) son cercle circonscrit et R le rayon de (C).
On pose a = BC, b = AC et c = AB

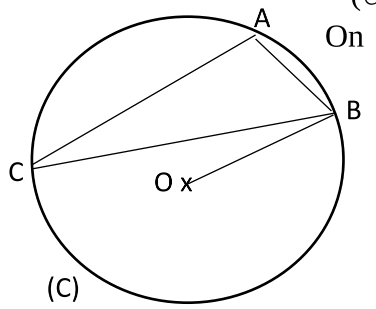
On a :

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{sin\hat{C}} = \frac{abc}{2\mathcal{A}} = 2R.$$



Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre qui n'est pas en dimensions réelles, $(\mathcal{C})$ est le cercle centre O circonscrit au triangle ABC. On donne : $\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. BC = 8cm, OB = 5cm, $mes\hat{C} = 60°$



Détermine AB.

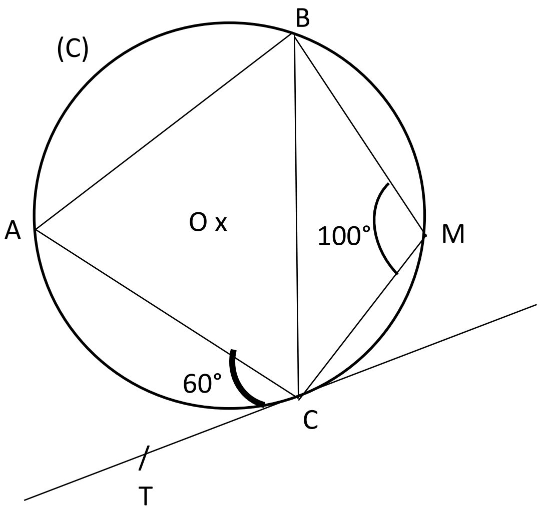
<u>Réponse proposée</u>

Je détermine AB.

On a $\frac{AB}{\sin\hat{C}} = 2\ OB$, donc $AB = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}cm.$

C. SITUATION COMPLEXE

Pour embellir la devanture de leur classe, des élèves d'une classe de 2^{nd} C décident de planter des roses. Les filles de la classe proposent la figure ci-dessous où (C) est un cercle centre O et elles souhaitent que l'aire du triangle ABC soit réservée pour les 40 pieds de roses blanches qu'elles ont achetées. Le chef de classe soutient qu'avec 5 pieds au mètre carré il n'y a pas suffisamment de pieds de roses blanches. Les filles ne sont pas d'accord. Avec une production argumentée, tranche cette discussion. On donne AC = 5 m.



Solution :

Pour résoudre ce problème, nous allons utiliser la leçon angles inscrits.

Pour cela, nous calculer :

- la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$
- la longueur BC
- l'aire du triangle ABC

Déterminons le nombre de pieds de roses blanches que peut contenir le triangle ABC.

1) Déterminons les mesures des angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$

- Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BMC}$ sont supplémentaires
  donc $mes\widehat{BAC} + mes\widehat{BMC} = 180° \Leftrightarrow mes\widehat{BAC} = 180° - 100° = 80°$
- Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACT}$ sont des angles inscrits qui interceptent le même arc $\widehat{AC}$ donc $mes\widehat{ACT} = mes\widehat{ABC} = 60°$
- Dans le triangle ABC, on a : $mes\widehat{BAC} + mes\widehat{BCA} + mes\widehat{CBA} = 180°$
  Donc $mes\widehat{BCA} = 180° - (60° + 80°) = 40°$

2- Déterminons la longueur BC

D'après le théorème des sinus on a :

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \Leftrightarrow \frac{BC}{\sin 80°} = \frac{5}{\sin 60°} \Leftrightarrow BC = \frac{5sin80°}{sin60} = 5{,}68\ cm.$$

3- L'aire du triangle ABC est :

$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times 5 \times 5{,}68 \times sin40° = 9{,}12\ \ m^2$

Le nombre de pieds correspondant à 9,12 m² est : $5 \times 9{,}12 = 45{,}6$ pieds de rose.

On a : 40 < 45,6. À raison de 5 pieds par mètre carré, il faut environ 46 pieds de roses blanches. Le chef de classe a donc raison.

D. EXERCICES

Exercices de fixation

Exercice 1

Pour chaque énoncé, écris V s'il est vrai ou F s'il est faux. Aucune justification n'est demandée.

N°	Propositions
1	Des angles inscrits dans un cercle ont la même mesure.
2	Des angles inscrits dans le même cercle qui interceptent des arcs de même longueur ont la même mesure.
3	Si M et N sont deux points de l'arc $\overset{\smile}{AB}$ d'un cercle, alors les angles inscrits $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont supplémentaires.

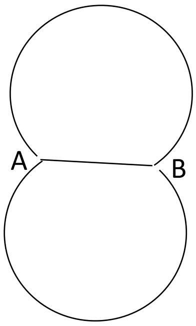
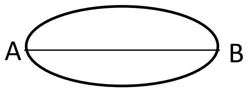
Solution :

1.F ; 2. V ; 3. F

Exercice 2

Pour chaque ligne du tableau une seule des réponses proposées est juste.

Écris le numéro de la ligne suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

		Réponses	
N°		A	B
1	L'aire du triangle EFG est	$\mathcal{A} = \frac{1}{2} EF \times EG \times \sin\hat{E}$	$\mathcal{A} = \frac{1}{2} EF \times EG \times \sin\hat{F}$
2	Soit R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC. On a :	$\frac{AB}{\sin\hat{A}} = \frac{BC}{\sin\hat{B}} = \frac{AC}{\sin\hat{C}} = 2R$	$\frac{BC}{\sin\hat{A}} = \frac{AC}{\sin\hat{B}} = \frac{AB}{\sin\hat{C}} = 2R$
3	L'ensemble des points M tels que $mes\widehat{AMB} = \theta°$ avec $90° < \theta < 180°$ est représenté par des arcs de cercle symétriques par rapport à (AB) de la forme :		

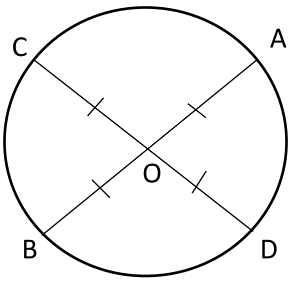
Solution :

1. A ; 2.B ; 3.B

Exercice 3

Considère la figure ci-contre avec $mes\widehat{COA} = 86°$.

Calcule $mes\widehat{ABC}$, $mes\widehat{COB}$ et $mes\widehat{BAC}$



Solution

- Calcul de $mes\widehat{ABC}$
  $mes\widehat{ABC} = \frac{1}{2} mes\widehat{COA} = 43°$ car $\widehat{ABC}$ est un angle inscrit et $\widehat{COA}$ son angle au centre associé.

- Calcul de $mes\widehat{COB}$
  Les angles $\widehat{COB}$ et $\widehat{COA}$ sont supplémentaires. Donc :
  $mes\widehat{COB} = 180° - mes\widehat{COA}$ = 180° - 43° = 137°

- Calcul de $mes\widehat{BAC}$
  $\widehat{BAC}$ est un angle inscrit et $\widehat{COB}$ son angle au centre associé.

$$mes\widehat{BAC} = \frac{1}{2} mes\widehat{COB} = 68{,}5°$$

Exercice de renforcement

Exercice 4

[PQ] est un segment de longueur 4 cm.

Construis dans chacun des cas ci-dessous, l'ensemble des points M tels que :

a/ $mes\ \widehat{PMQ} = 50°$. b/ $mes\ \widehat{PMQ} = 140°$.

SOLUTION

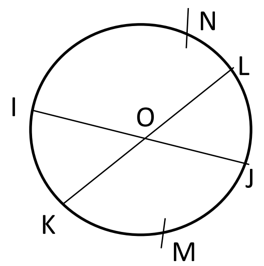
a/ Construction de l'ensemble des points M tels que $mes\widehat{PMQ} = 50°$.
Programme de construction

- On construit le segment [PQ] tel que PQ = 4
- On construit un point T tel que $mes\widehat{TPQ} = 50°$.
- On trace la perpendiculaire à la droite (PT) passant par P et la médiatrice du segment [PQ]. Ces deux droites se coupent en O.
- On construit l'arc de cercle de centre O et de rayon OP situé dans le demi-plan de frontière (PQ) ne contenant pas le point T.
- On construit le symétrique de cet arc de cercle par rapport à (PQ).

L'ensemble cherché est la réunion des deux arcs de cercles symétriques par rapport à (PQ) privés des extrémités P et Q.

b/ Construction de l'ensemble des points M tels que $mes\widehat{PMQ} = 140°$.
Le programme de construction est identique à la précédente sauf que le point T est construit tel que $mes\widehat{TPQ} = 140°$.

Exercice 5

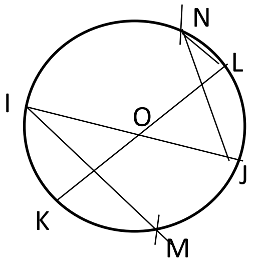


Sur la figure ci-contre, [IJ] et [KL] sont des diamètres d'un même cercle de centre O.

N est un point de $\widehat{IL}$ et M un point de $\widehat{KJ}$.

Démontre que $mes\widehat{KMI} = mes\widehat{JNL}$.

Solution :



Démontrons que $mes\widehat{KMI} = mes\widehat{JNL}$

L'angle inscrit $\widehat{KMI}$ et l'angle au centre $\widehat{KOI}$ sont associés donc $mes\widehat{KMI} = \frac{1}{2}mes\widehat{KOI}$.

L'angle inscrit $\widehat{JNL}$ et l'angle au centre $\widehat{JOL}$ sont associés donc $mes\widehat{JNL} = \frac{1}{2}mes\widehat{JOL}$, or les angles $\widehat{KOI}$ et $\widehat{JOL}$ sont opposés par le sommet donc $mes\widehat{KOI} = mes\widehat{JOL}$

ainsi $mes\widehat{KMI} = mes\widehat{JNL}$.

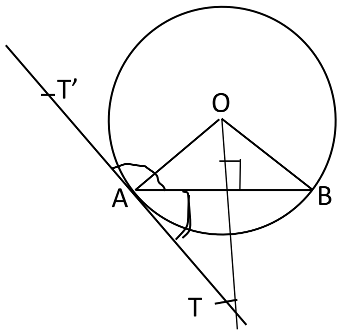
Exercice 6

Soit [AB] une corde d'un cercle (C) de centre O qui n'est pas un diamètre, [AT) la demi-tangente en A à (C) contenue dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas le point O, [AT') l'autre demi-tangente en A.

1/ a- Exprime mes $\widehat{OAB}$ en fonction de mes $\widehat{AOB}$.

b- Déduis-en mes $\widehat{TAB}$.

2/ Détermine l'expression mes $\widehat{T'AB}$.



Solution :

1) A- Le triangle OAB est isocèle O donc : $2mes\widehat{OAB} + mes\ \widehat{AOB}. = 180°$

$mes\widehat{OAB} = 90° - \frac{1}{2}mes\ \widehat{AOB}$.

2) Les angles $\widehat{OAB}$ et $\widehat{TAB}$ sont complémentaires donc

$mes\ \widehat{OAB} = 90° - mes\widehat{TAB}$ d'où $mes\widehat{TAB} = \frac{1}{2}mes\ \widehat{AOB}$

3) Les angles $\widehat{TAB}$ et $\widehat{T'AB}$ sont supplémentaires donc

$$mes\widehat{T'AB} = 180° - mes\widehat{TAB} = 180° - \frac{1}{2}mes\ \widehat{AOB}$$

Exercice 7

L'unité de longueur est le centimètre.

ABC est un triangle tel que : BC = 25, AC = 36 et $mes\hat{B} = 72°$.

1/ Démontre que $mes\hat{A} = 41{,}30°$

2/ Justifie que AB = 34,77cm

3/ Détermine le rayon du cercle circonscrit à ce triangle.

4/ Calcule l'aire de ce triangle.

Solution

1/ Démontrons que $mes\hat{A} = 41{,}30°$

D'après le théorème des sinus, on a : $\frac{AC}{sin\hat{B}} = \frac{BC}{sin\hat{A}}$

Donc $sin\hat{A} = \frac{BC}{AC} \times sin\hat{B} = \frac{25}{36}sin72° = 0{,}66 \Longrightarrow mes\hat{A} = 41{,}30°$.

2/ Justifions que AB = 34,77 cm

Déterminons d'abord $mes\hat{C}$.

$mes\hat{C} = 180° - \left(mes\hat{B} + mes\hat{A}\right) = 66{,}7°$.

En utilisant à nouveau le théorème des sinus, on a : $\frac{AC}{sin\hat{B}} = \frac{AB}{sin\hat{C}}$.

On obtient AB = 34,77 cm

3/ Déterminons le rayon du cercle circonscrit.

D'après le théorème des sinus, on a : $\frac{AC}{sin\hat{B}} = 2R \Leftrightarrow R = \frac{AC}{2sin\hat{B}} = \frac{36}{2sin72°} = 18{,}93\ cm$

4/ Calculons l’aire du triangle.

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times sin\hat{B} = 0{,}5 \times 34{,}77 \times 25 \times sin72° = 413{,}36\ cm^2$$

Exercice d’approfondissement

Exercice 8

ABC est un triangle de périmètre P et R le rayon de son cercle circonscrit.

1/ Écris AB, BC et AC en fonction de R.

2/ Justifie que $sin\hat{A} + sin\hat{B} + sin\hat{C} = \frac{P}{2R}$.

Solution :

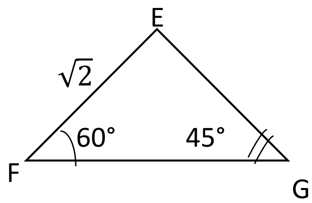
1) D’après le théorème des sinus on a :
$AB = 2Rsin\widehat{C}\ , BC = 2Rsin\widehat{A}\ \ et\ AC = 2Rsin\widehat{B}$
2) $P = AB + BC + AC = 2R(sin\widehat{A} + sin\widehat{B} + sin\widehat{C})$ donc
$sin\widehat{A} + sin\widehat{B} + sin\widehat{C} = \frac{P}{2R}$.

<u>Exercice 9</u> L’unité est le centimètre.

EFG est un triangle tel que EF = $\sqrt{2}$, $mes\widehat{EFG} = 60°$ et $mes\widehat{EGF} = 45°$.

1) Calculer la longueur des côtés [EG] et [FG].
2) Calculer l’aire du triangle EFG
3) Calculer le rayon R du cercle circonscrit au triangle EFG

Solution :



1) - Calcul de EG.

Le théorème des sinus nous permet d’écrire

$$\frac{EG}{\sin\hat{F}} = \frac{EF}{\sin\hat{G}} \Leftrightarrow$$

$$EG = \frac{EF\sin\hat{F}}{\sin\hat{G}} = \frac{\sqrt{2}\sin 60°}{\sin 45°} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{3}$$

- Calcul de FG

Dans le triangle ABC, on a : $mes\hat{E} + mes\hat{F} + mes\hat{G} = 180°$ donc

$mes\hat{E} = 180° - (60° + 45°) = 75°$

On a : $\frac{FG}{\sin\hat{E}} = \frac{EF}{\sin\hat{G}} \Leftrightarrow FG = \frac{EF\sin 75°}{\sin 45°} = \frac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

2) L'aire du triangle EFG

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\times EF \times EG \times sin\widehat{FEG} = \frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{6+2\sqrt{3}}{8} = \frac{3+\sqrt{3}}{4}.$$

3) Calcul du rayon R.

$$\frac{EF}{\sin\hat{G}} = 2R \Leftrightarrow R = \frac{\sqrt{2}}{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

Exercice 10

EFG est un triangle tel que : FG = 5cm, mes $\widehat{EGF}$ = 40°, mes $\widehat{GFE}$ = 50°.

1/ Construis le triangle EFG.

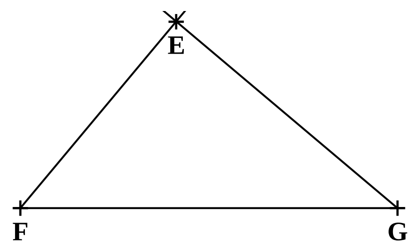
2/ Démontre que le triangle EFG est rectangle en E.

3/ Construis le cercle circonscrit au triangle EFG. Détermine son rayon.

4/ Calcule l'aire du triangle EFG.

Solution

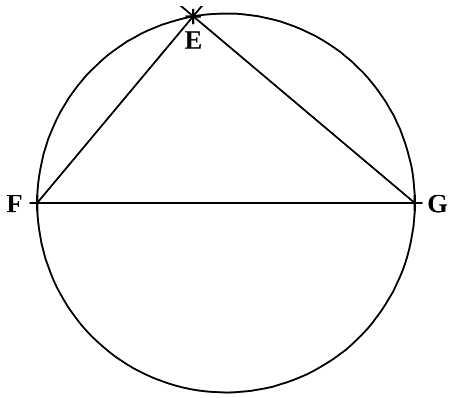
1. Construction du triangle EFG



2. Démontrons que le triangle EFG est rectangle en E.

$mes\hat{E} = 180° - \left(mes\hat{F} + mes\hat{G}\right) = 180° - (40° + 50°) = 90°$
Donc le triangle EFG est rectangle en E.

3/ Construction du cercle circo … ons son rayon.

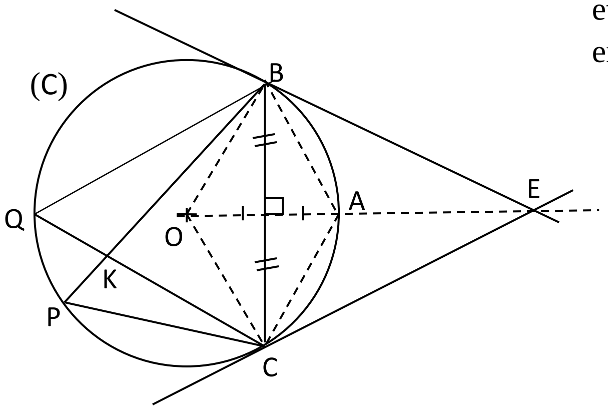


Comme le triangle EFG est rectangle en E, le milieu du segment [FG] est le centre circonscrit à ce triangle.
Le rayon est : R = $\frac{FG}{2} = 2{,}5\ cm$

4/ Calculons l'aire du triangle EFG.

Calculons d'abord EF
D'après le théorème des sinus, on a : $\frac{FE}{sin\hat{G}} = 2R \implies EF = 3{,}21\ cm$
Donc pour l'aire, on a :
$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times EF \times FG \times sin\hat{F} = \frac{1}{2} \times 3{,}21 \times 5 \times sin50° = 6{,}15\ cm^2$.

Exercice 11



On considère la figure codée ci-contre où (C) est le cercle de centre O et de rayon [OA]. Les droites (EB) et (EC) sont des tangentes à (C) respectivement en B et en C.

1) Démontre que le triangle OAB est équilatéral.
2) Déduis-en la mesure de l'angle $\widehat{BOC}$
3) Déduis-en que le triangle EBC est équilatéral.
4) On donne $mes\widehat{PKC} = 85°$.
   Démontre que $mes\widehat{PBQ} = 35°$

Solution

1) Démontrons que le triangle OAB est équilatéral.
Les segments [OA] et [OB] sont deux rayons du cercle. Donc OA = OB.
De plus la droite (BC) est la médiatrice du segment [OA]. Donc BO = BA.
En définitive, on a : OA = OB = AB. Par conséquent le triangle OAB est équilatéral.

2) Déduisons la mesure de l'angle $\widehat{BOC}$
Le symétrique de l'angle $\widehat{BOA}$ par rapport à la droite (OA) est l'angle $\widehat{AOC}$.
Donc $mes\widehat{BOA} = mes\widehat{AOC}$
$mes\widehat{BOC} = mes\widehat{BOA} + mes\widehat{AOC} = 60° + 60° = 120°$.

3) Déduisons que le triangle EBC est équilatéral.
D'une part, l'angle inscrit $\widehat{EBC}$ et l'angle au centre $\widehat{BOC}$ sont associés, donc $mes\widehat{EBC} = 60°$.
D'autre part, l'angle inscrit $\widehat{ECB}$ et l'angle au centre $\widehat{BOC}$ sont associés, donc $mes\widehat{ECB} = 60°$.
Il est alors évident que $mes\widehat{CEB} = 60°$. Donc le triangle EBC est équilatéral.

4) Démontre que $mes\widehat{PBQ} = 35°$
Les angles $\widehat{PKC}$ est $\widehat{QKB}$ sont opposés par le sommet. Donc $mes\widehat{PKC} = mes\widehat{QKB} = 85°$.

Dans le cercle $(\mathcal{C})$, l'angle inscrit $\widehat{BQC}$ et l'angle au centre $\widehat{BOC}$ sont associés, donc
$mes\widehat{BQC} = 60°$. Et comme $\widehat{BQC} = \widehat{BQK}$ alors $mes\widehat{BQK} = mes\widehat{BQC} = 60°$

Finalement, dans le triangle QKB, on a : $mes\widehat{PBQ} = 180° - (mes\widehat{BQK} + mes\widehat{QKB})$
Ainsi : $mes\widehat{PBQ} = 180° - (60° + 85°) = 35°$

MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE L'ALPHABETISATION

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Union – Discipline – Travail

INISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT TECHN ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE

MON ECOLE A LA MAISON

SECONDAIRE
2 C
MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Durée :10 heures Code :

Du plan

COMPETENCE 3	**Traiter une situation relative à la géométrie du plan , à la géométrie de l'espace et aux transformations du plan**
THEME 1	**Géométrie du plan**

Leçon 8 : ANGLES ORIENTÉS ET TRIGONOMÉTRIE

A-SITUATION D'APPRENTISSAGE

Lors de leurs recherches personnelles sur les angles, des élèves de 2nd **C** d'un établissement scolaire lisent l'information suivante : « pour $\alpha \in]-\frac{\pi}{2};0[$ si $cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$, alors $tan\alpha=\frac{-2\sqrt{5}}{5}$ ». Curieux, ils s'adressent à leur professeur de mathématiques. Celui-ci leur dit que pour comprendre cette phrase mathématique, ils doivent approfondir leurs connaissances sur les angles orientés et la trigonométrie. Ensemble, les élèves cette classe décident de faire des recherches sur les angles orientés et la trigonométrie afin de vérifier cette affirmation.

B-CONTENU DE LA LEÇON

1. LE RADIAN

1.1 Mesure d'un angle en radian

a. Définition

La mesure en radian d'un angle $\widehat{AOB}$ est égale à la longueur de l'arc intercepté par cet angle sur le cercle de centre O et de rayon 1. On la note mes $\widehat{AOB}$.

Exemple : La mesure en radians de l'angle nul est 0.

La mesure en radians de l'angle plat est π.

b. Correspondance entre le radian et le degré

Soit x la mesure en degrés d'un angle et y sa mesure en radians. On a:

$y = \frac{x\,\pi}{180°} \quad et\ x = \frac{180°\,y}{\pi}$.

Tableau de correspondance (exemple)

Mesures en degrés	0	30	45	60	90	180
Mesures en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Exercice de fixation

a/ convertis la valeur en radian de 45°.

b/ convertis la valeur en degré de $\frac{2\pi}{3}$ rad.

Solution

a)La mesure en radian d'un angle de mesure $x = 45^0$ est : $y = \frac{45°\times\pi}{180°} = \frac{\pi}{4}rad$

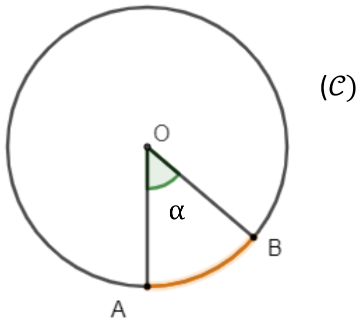
b) La mesure en degré d'un angle de mesure $y = \frac{2\pi}{3}$ rad est : $x = \frac{180°}{\pi} \times \frac{2\pi}{3} = 120°$

c. Longueur d'un arc de cercle

Définition

$(\mathcal{C})$ est un cercle de centre O et de rayon R, A et B deux points de $(\mathcal{C})$. L'angle au centre $\widehat{AOB}$ intercepte l'arc $\widehat{AB}$.

Si la mesure en radian de l'angle $\widehat{AOB}$ est α (α $en\ radian$), alors longueur $\widehat{AB}$ = R × α.

Figure	$OA = OB = R$ et mes $\widehat{AOB} = \alpha$ (en radians). longueur $\widehat{AB} = R\,\alpha$.
	

Exemple

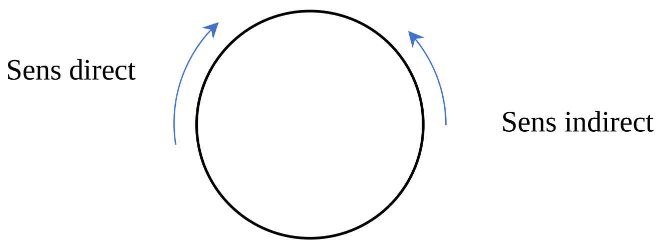
Si $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ rad et $R = 2(cm)$ alors longueur $\widehat{AB} = 2\times\frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}\ cm$

2. ANGLE ORIENTE DE DEUX VECTEURS

2. 1 : Orientation du plan

Sur un cercle il y a deux sens de parcours. Orienter un cercle c'est choisir un sens de parcours sur ce cercle : Ce sens est appelé **sens direct (ou** positif ou trigonométrique) Le sens contraire est le **sens indirect** (ou rétrograde ou négatif)

En général on choisit comme sens direct le sens contraire des aiguilles d'une montre.

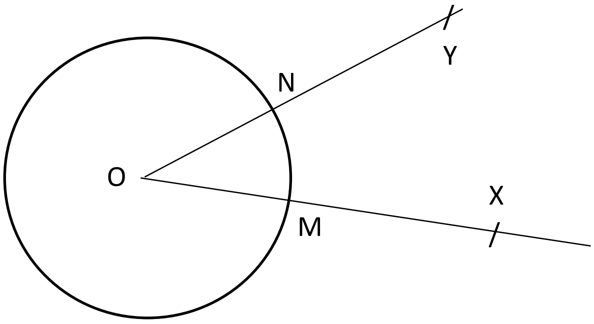


2 .2 Angle orienté de deux vecteurs non nuls

a. Définition

Soit (C) un cercle de centre O et $(\vec{u}, \vec{v})$ un couple de vecteurs non nuls, X et Y les points tels que $\overrightarrow{OX} = \vec{u}$, et $\overrightarrow{OY} = \vec{v}$. Soit M et N les points d'intersection respectifs des demi-droites [OX) et [OY) L'ensemble des couples $(\vec{u}, \vec{v})$ de deux vecteurs non colinéaires pour lesquels l'arc $\widehat{MN}$ garde la même longueur et est parcouru dans le même sens de M vers N est appelé **angle orienté** et noté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

(figure1)



Exemple

A partir de la figure ci-dessus (figure1), on peut écrire les angles orientes $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \ \overrightarrow{ON}})$et $(\widehat{\overrightarrow{ON}, \ \overrightarrow{OM}})$

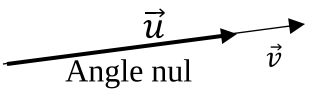
- On dira que L'angle orienté$(\widehat{\overrightarrow{OM}, \ \overrightarrow{ON}})$ est un angle orienté dans le sens direct.
- On dira que L'angle orienté$(\widehat{\overrightarrow{ON}, \ \overrightarrow{OM}})$ est un angle orienté dans le sens indirect.

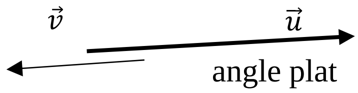
b.Propriétés

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens, alors $(\widehat{\vec{u}, \ \vec{v}})$ est l'angle orienté nul.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire, alors $(\widehat{\vec{u}, \ \vec{v}})$ est l'angle orienté plat.





On note alors $(\widehat{\vec{u}, \ \vec{v}})$= $(\widehat{O})$ si l'angle orienté est nul.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $(\widehat{\vec{u}, \ \vec{v}})$ est un angle orienté droit.

Exercice d'application

On donne ABCD un carré direct.

a) donne deux angles orientés nuls de vecteurs.

b) donne un angle orienté droit direct et un angle orienté droit indirect

c) donne deux angles orientés qui sont ni nuls ni droits

d) donne deux angles orientés plats

Solutions

a) $(\widehat{\overrightarrow{AD}, \ \overrightarrow{BC}})$et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \ \overrightarrow{DC}})$
b) $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \ \overrightarrow{AD}})$et $(\widehat{\overrightarrow{CB}, \ \overrightarrow{CD}})$
c) $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \ \overrightarrow{AC}})$et $(\widehat{\overrightarrow{DA}, \ \overrightarrow{DB}})$

d) $(\widehat{\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CD}})$et $(\widehat{\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{BC}})$

2.3 Mesure principale d'un angle orienté

Définition

Soit O un point $(\widehat{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}})$ un angle orienté. Soit M et N les points d'intersection respectifs des demi-droites [OX) et [OY) avec un cercle de centre O

La mesure principale en radian de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}})$, notée Mes$(\widehat{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}})$,est définie par :

-si $(\widehat{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}})$ est l'angle nul alors Mes$(\widehat{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}})$ = 0

-si $(\widehat{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}})$ est l'angle plat alors Mes$(\widehat{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}})$ = π

-si $(\widehat{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}})$ n'est ni nul ni plat alors Mes$(\widehat{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}})$ = mes$\widehat{XOY}$ lorsque le sens du déplacement de M vers N sur l'arc $\widehat{MN}$ est le sens direct.

Mes$(\widehat{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}})$ = -mes$\widehat{XOY}$ lorsque le sens du déplacement de M vers N sur l'arc $\widehat{MN}$ est le sens indirect.

Remarques

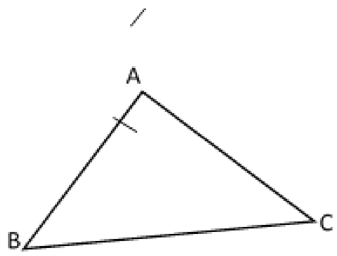
- La mesure principale de l'angle plat orienté est π (et non $-\pi$)

Par conséquent la mesure principale d'un angle orienté est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]-\pi,\pi\,]$.

- On note Mes$(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ la mesure principale d'un angle orienté en degré.
- La mesure principale de l'angle orienté droit est $\frac{\Pi}{2}$ s'il est direct et $-\frac{\Pi}{2}$ s'il est indirect

Exercice de fixation

ABC est un triangle rectangle et isocèle en A de sens direct.
Donne la mesure principale en radian de chacun des angles orientés suivants :
$(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$, $(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}})$, $(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}})$, et $(\widehat{\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}})$



Solution

Mes $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}) = mes\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$; Mes $(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}) = -mes\widehat{ABC} = -\frac{\pi}{4}$,
Mes $(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}) = mes\ \widehat{ACB} = \frac{\pi}{4}$; Mes $(\widehat{\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}}) = -mes\widehat{BCA} = -\frac{\pi}{4}$

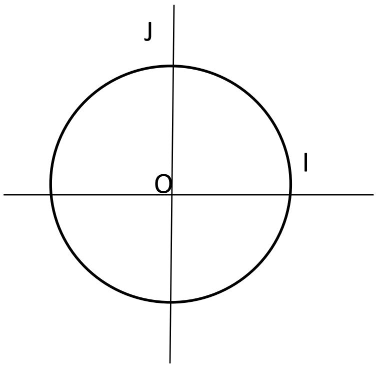
3- TRIGONOMETRIE

Dans toute cette partie, sauf mention contraire, le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

3.1 Le cercle trigonométrique

Définition

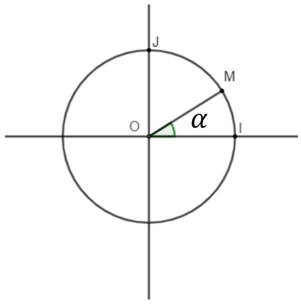
On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon 1.



3.2 Point image d'un nombre réel sur le cercle trigonométrique

Définition

Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$.
Le point image de α est l'unique point M du cercle trigonométrique tel que Mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM}}) = \alpha$.



Exemple

Le point image du nombre 0 est I.
Le point image du nombre $\frac{\pi}{2}$ est J.

Exercice de fixation

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J). Prendre pour unité 3cm.

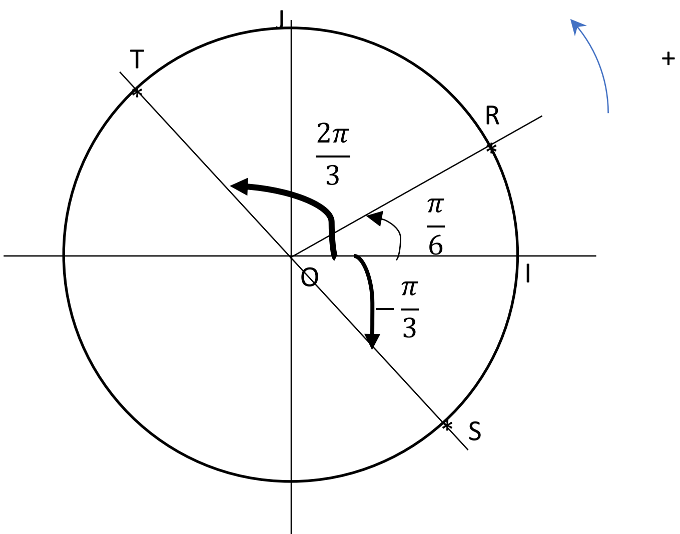
Place les points images R, S et T de chacun des nombres réels suivants : $\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique.

Solution

On a :

Mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OR}}) = \frac{\pi}{6}$, Mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OS}}) = -\frac{\pi}{3}$ et Mes $(\widehat{\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OT}}) = \frac{2\pi}{3}$.

Je place les points R, S et T.



3.3 Cosinus, Sinus et tangente d'un angle orienté

a. Définition

Soit $(\widehat{\vec{u}, \ \vec{v}})$ un angle orienté de mesure principale α et M l'image de α sur le cercle trigonométrique.

Soit P et Q les projetés orthogonaux de M respectivement sur (OI) et sur (OJ).

- Le cosinus de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \ \vec{v}})$ ou de sa mesure principale α est défini par :

  Cos$(\widehat{\vec{u}, \ \vec{v}}) = cos\alpha = \overline{OP}$

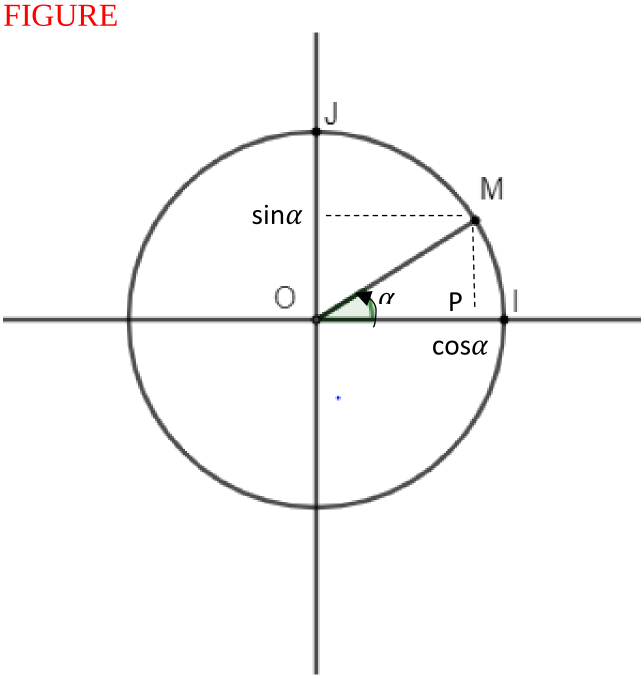
- Le sinus de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \ \vec{v}})$ ou de sa mesure principale α est défini par :

  Sin$(\widehat{\vec{u}, \ \vec{v}}) = sin\alpha = \overline{OQ}$

- Lorsque l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \ \vec{v}})$ est non droit de mesure principale α la tangente de cet

angle noté tan$(\widehat{\vec{u}, \ \vec{v}})$ est définie par : tan$(\widehat{\vec{u}, \ \vec{v}}) = tan\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$

FIGURE



Remarque

Dans le repère orthonormé direct (O, I, J)

Les coordonnées du point M sont

$x_M = cos\alpha$ et $y_M = sin\alpha$: M $(cos\alpha; sin\alpha)$

Exemple :

I(1 ;0) donc $cos\ 0 = 1$ et $sin 0 = 0$.

J(0 ;1) donc $cos\ \frac{\pi}{2} = 0$ et $sin \frac{\pi}{2} = 1$.

Conséquence : signe du Cosinus et du sinus sur l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$cos x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Pour $x \in \left]-\pi; -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$; $cos\ x \ \leq 0$.

Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos x > 0$.

x	$-\pi$		0		π
$sin\ x$	0	$-$	0	$+$	0

Pour $x \in]-\pi; 0] \cup \{\pi\}$; $sin\ x \ \leq 0$.

Pour $x \in]0; \pi[$, $\sin x > 0$.

Exercice de fixation

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J). M le point image de $\frac{\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique.

Détermine les coordonnées de M dans le repère (O, I, J).

Solution

M est le point image de $\frac{\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique, alors M ($\cos\frac{\pi}{3}$; $\sin\frac{\pi}{3}$).

Comme $cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc M ($\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$)

b. Propriétés

- Pour tout nombre réel α de l'intervalle]-π ; π], on a :
  $-1 \leq cos\alpha \leq 1;$
  $-1 \leq sin\alpha \leq 1;$
  $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$;
  $\cos(-\alpha) = cos\alpha$
  $\sin(-\alpha) = -sin\alpha.$
- Pour tout nombre réel α de l'intervalle]-π ; π] tel que $\alpha \neq -\frac{\pi}{2}$ et $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, on a :
  $tan\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$ et $1 + tan^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}$.

Exercice de fixation

α est un nombre réel de l'intervalle]-π ; π] tel que $\alpha \neq -\frac{\pi}{2}$ et $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.

1) Dans chacun des cas ci-dessous, choisis la bonne réponse :

- $cos^2\alpha + sin^2\alpha$ est égale à : a) -1 b) 0 c) 1 d) 2

$1 + tan^2\alpha$ est égale à : a) $1+\frac{sin\alpha}{cos\alpha}$ b) $\frac{1}{sin^2\alpha}$ c) $\frac{sin^2\alpha}{cos^2\alpha}$ d) $\frac{1}{cos^2\alpha}$

- 2) On donne $\cos\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ avec $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$

  En utilisant égalité $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$;calculer $\sin\alpha$

3) Ecrire simplement $A(x) = \sin(-x) + \cos(-x) + \cos x + \sin x$

Solution

1) c) ; d)
2) En utilisant $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$

$$sin^2\alpha = 1 - cos^2\alpha$$

$sin\alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha}$ ou $sin\alpha = -\sqrt{1 - cos^2\alpha}$

$$sin\alpha = \sqrt{1-(\frac{3}{4})} \text{ ou } sin\alpha = -\sqrt{1-(\frac{3}{4})}$$

$$sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{4}} \text{ ou } sin\alpha = -\sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$sin\alpha = \frac{1}{2} \text{ ou } sin\alpha = -\frac{1}{2}$$

Comme $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$; $sin\alpha \geq 0$ Alors $sin\alpha = \frac{1}{2}$

3) $A(x) = \sin(-x) + \cos(-x) + \cos x + \sin x$
; $A(x) = -\sin(x) + \cos(x) + \cos x + \sin x$
; $A(x) = \cos(x) + \cos x$
$A(x) = 2\cos(x)$

C-Situation complexe

Ton oncle ; fonctionnaire et agent d'une administration est candidat à un concours professionnel. Dans sa préparation au concours une question dans le sujet de la session précédente retient son attention. Cette question est la suivante :

« On donne $\alpha \in]0;\frac{\pi}{2}[$ et $cos\alpha = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$. Justifie que : $tan\alpha = 2-\sqrt{3}$ ».

Après des heures de recherche infructueuse, il te sollicite pour l'aider.

Elève de 2nd C, propose la solution de la question à ton oncle.

Solution situation complexe

La question porte sur la trigonométrie

Pour répondre à cette question, je détermine $sin\alpha$ à partir des informations $\alpha \in]0;\frac{\pi}{2}[$ et

$cos\alpha = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

Puis je calcule $tan\alpha$ et je donne le résultat sans le symbole de radical au dénominateur.

Soit $\alpha \in]-\frac{\pi}{2};0[$

Je calcule $sin\alpha$:
on a : $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$
$sin^2\alpha = 1 - cos^2\alpha$ soit $sin^2\alpha = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

donc $sin\alpha = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ $ou\ sin\alpha = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

Comme $\alpha \in]0;\frac{\pi}{2}[$, $sin\alpha > 0$, par conséquent $sin\alpha = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

Je calcule ensuite $tan\alpha$ sans radical au dénominateur.

$$tan\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = 2-\sqrt{3}.$$

Donc pour $\in]0;\frac{\pi}{2}[$ et $cos\alpha = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$, $tan\alpha = 2-\sqrt{3}$.

C - EXERCICES DE RENFORCEMENT

Le plan est orienté dans le sens direct

Exercice 1

x etant la mesure principale d'un angle orienté démontre que

a)$(\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2\sin x\cos x$

b) $(\cos x)^4 + (\sin x)^4 = 1 - 2(\sin x)^2(\cos x)^2$

Solution

a) $(\cos x + \sin x)^2 = (\cos x)^2 + (\sin x)^2 + 2\ \sin x\ \cos x$
   $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2\ \sin x\ \cos x$;car $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$

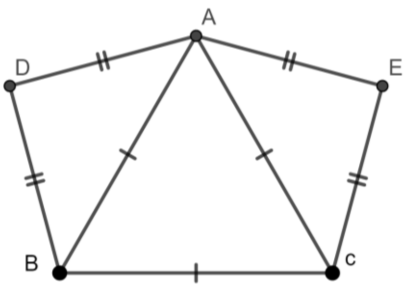
b) Montrons que :$(\cos x)^4 + (\sin x)^4 = 1 - 2(\sin x)^2(\cos x)^2$
   On sait que
   $$((\sin x)^2 + (\cos x)^2)^2 = (\cos x)^4 + (\sin x)^4 + 2(\sin x)^2(\cos x)^2$$
   $$(1)^2 = (\cos x)^4 + (\sin x)^4 + 2(\sin x)^2(\cos x)^2$$
   $$(\cos x)^4 + (\sin x)^4 + 2(\sin x)^2(\cos x)^2 = 1$$
   Donc $(\cos x)^4 + (\sin x)^4$= 1- $2(\sin x)^2(\cos x)^2$

Exercice 2

ABC est un triangle équilatérale direct D et E sont deux points tel que les triangles ADB et ACE sont rectangles respectivement en D et en E

Calculer les mesures principales

a) $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$et $(\widehat{\overrightarrow{DA},\ \overrightarrow{DB}})$
b) $(\widehat{\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AE}})$et $(\widehat{\overrightarrow{AE},\ \overrightarrow{AD}})$
c) $(\widehat{\overrightarrow{DB},\ \overrightarrow{BC}})$et $(\widehat{\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{CB}})$



Solution

$\boldsymbol{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{3}$

$\boldsymbol{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{DA}\,;\overrightarrow{DB}}\right) = -\frac{\pi}{2}$

$\boldsymbol{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{A}\text{B}\,;\overrightarrow{AE}}\right) = \frac{7\pi}{12}$

$\boldsymbol{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{A}\text{E}\,;\overrightarrow{AD}}\right) = \frac{5\pi}{6}$

$\boldsymbol{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{D}\text{B}\,;\overrightarrow{BC}}\right) = \frac{5\pi}{12}$

$\boldsymbol{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{CB}}\right) = \frac{-\pi}{12}$

.

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants donne
le signe de $cos\alpha$ et de $sin\alpha$

a) $\alpha \in [0;\frac{\pi}{2}]$, b) $\alpha \in]\frac{\pi}{2};\pi[$

c) $\alpha \in]-\frac{\pi}{2};0[$, d) $\alpha \in]-\pi;-\frac{\pi}{2}[$

Solution

$a)$ $\alpha \in [0;\frac{\pi}{2}]$: $cos\alpha \geq 0$ et $sin\alpha \geq 0$
b) $\alpha \in]\frac{\pi}{2};\pi[$: $cos\alpha < 0$ et $sin\alpha > 0$
c) $\alpha \in]-\frac{\pi}{2};0[$: $cos\alpha > 0$ et $sin\alpha < 0$
d) $\alpha \in]-\pi;-\frac{\pi}{2}[$: $cos\alpha < 0$ et $sin\alpha < 0$

Exercice 4

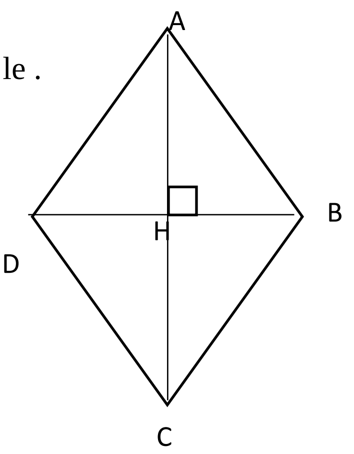
Sur la figure ci contre ABCD est un losange tel que AB = BD et H le .

Point d'intersection des diagonales $[AC]$ et $[DB]$

Détermine la mesure principale en radian de

Chacun des angles orientés suivants :

$(\widehat{\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DB}})$; $(\widehat{\overrightarrow{AH};\overrightarrow{AD}})$; $(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AD}})$; $(\widehat{\overrightarrow{BH};\overrightarrow{HA}})$.



Solution

$Mes(\widehat{\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DB}}) = -\frac{\pi}{3}$; $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AH};\overrightarrow{AD}}\right) = -\frac{\pi}{6}$; $Mes(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AD}}); = \frac{2\pi}{3}$ $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{BH};\overrightarrow{HA}}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

Exercice 5

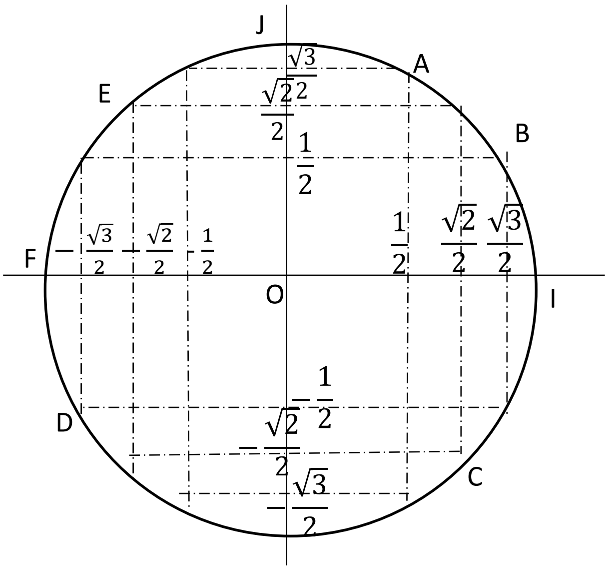
Observe le cercle trigonométrique ci-contre.

Donne la mesure principale en radian

de chacun des angles suivants :

$(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}})$; $(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}})$; $(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OC}})$; $(\widehat{\overrightarrow{OF};\overrightarrow{OJ}})$

$(\widehat{\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OA}})$.



Solution

Mes $(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}}) = \frac{\pi}{3}$; $Mes(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{6}$; $Mes(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OC}}) = -\frac{\pi}{4}$; $Mes(\widehat{\overrightarrow{OF};\overrightarrow{OJ}}) = -\frac{\pi}{2}$

$Mes(\widehat{\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OA}}) = -\frac{5\pi}{12}$.

Exercice6

ABC est un triangle rectangle en A, direct, tel que Mes$(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}) = -\frac{\pi}{6}$ et ACD est un triangle équilatéral direct.

Construis les points A, B, C et D.

Exercice 7

On donne $sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

1/ Détermine la valeur exacte de $cos\frac{\pi}{8}$.

2/ justifie que $tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.

Solution

1) Je détermine la valeur exacte de $cos\frac{\pi}{8}$.

On a : $cos^2\frac{\pi}{8} + sin^2\frac{\pi}{8} = 1$ alors $cos^2\frac{\pi}{8} = 1 - sin^2\frac{\pi}{8}$

Donc $cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$

Comme $\frac{\pi}{8} \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$,$cos\frac{\pi}{8} > 0$ donc $\boxed{cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$

2/ je justifie que $tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.

On a : $tan\frac{\pi}{8} = \frac{sin\frac{\pi}{8}}{cos\frac{\pi}{8}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE L'ALPHABETISATION

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Union – Discipline – Travail

MON ECOLE A LA MAISON

2nde C
MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Durée : 8 heures **Code :**

COMPETENCE 2	Traiter une situation relative à la modélisation de phénomènes aléatoires, à l'organisation et aux traitements des données
THEME 2	Organisation et traitements des données

Leçon 9 : STATISTIQUE

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Au premier trimestre de l'année 2020, le premier élève en mathématiques de la classe 2^{nd} C1 et celui de la classe de 2^{nd} C2 d'un lycée ont eu les notes suivantes (en mathématiques)

2^{nd} C1	14	13	14	9	18	13	16	17
2^{nd} C2	7	8	17	16	19	10	20	17

Des élèves des deux classes veulent savoir qui des deux premiers est le « plus fort » en mathématiques. Sachant que les deux ont la même moyenne, ces élèves décident de comparer la répartition de chacune des séries de notes autour de cette moyenne.

B-CONTENU DE LA LECON

1 Effectifs cumulés ; Fréquences cumulées

1. Définition

Soit une série statistique à caractère quantitatif $(x_i\ ;\ n_i)$ dont les modalités ne sont pas regroupées en classe.

- L'effectif cumulé croissant (respectivement décroissant) d'une modalité est la somme des effectifs des modalités inferieurs (respectivement supérieur) ou égales à cette modalité.
- La fréquence cumulée croissante (respectivement décroissante) d'une modalité est la somme des fréquences des valeurs inférieures (respectivement supérieures) ou égales à cette modalité.

Exemple

On a relevé les notes de mathématiques de deux élèves de 2^{nd}C dans le tableau suivant :

Notes	7	8	9	10	11	12	13
Effectifs	3	1	4	3	2	2	5

Les effectifs cumulés croissants et les effectifs cumulés décroissants sont consignés dans le tableau suivant :

Notes	7	8	9	10	11	12	13
Effectifs	3	1	4	3	2	2	5

Effectifs cumulés croissants	3	4	8	11	13	15	20
Effectifs cumulés décroissants	20	17	16	12	9	7	5

2. Polygone des effectifs cumulés, Polygone des fréquences cumulées

Exemple

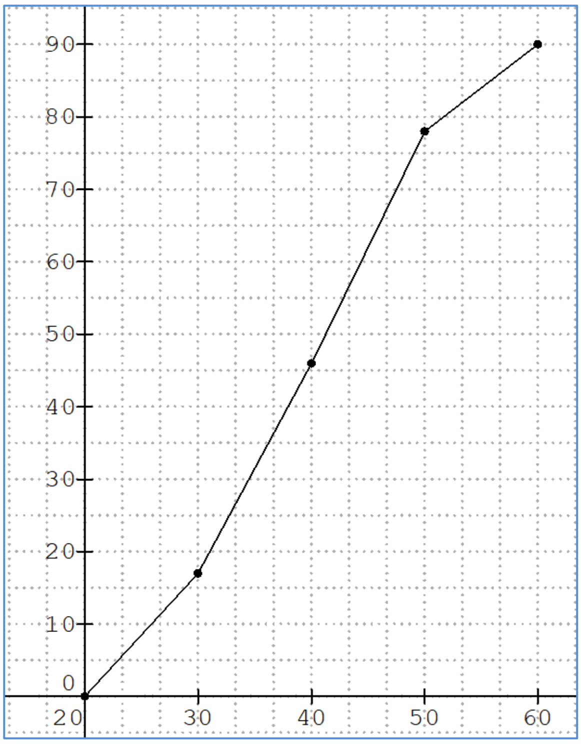
Le tableau ci-dessous donne l’âge des professeurs d’un lycée

Classe	[20; 30[	[30; 40[	[40; 50[	[50; 60[
Effectifs	17	29	32	12
Effectifs cumulés croissants	17	46	78	90
Effectifs cumulés décroissants	90	73	44	12

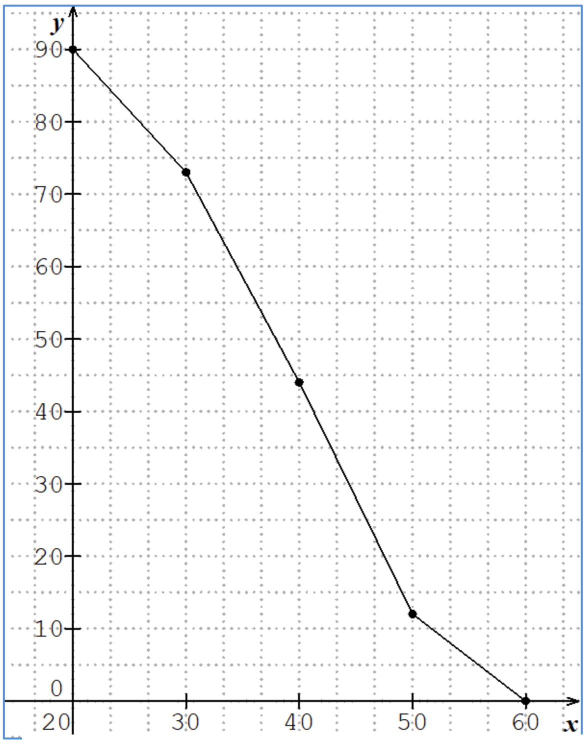
Représentation

Pour présenter le polygone des effectifs cumulés croissants (***respectivement décroissants***) d’une série statistique dont les modalités sont des classes, on procède comme suit :

- On place chaque point dont l’abscisse est la borne supérieure (***respectivement inferieure***) de la classe sauf pour le premier point (***respectivement dernier point***) et l’ordonnée de l’effectif cumulé croissant (***respectivement décroissant***) qui lui correspond.
- On trace ensuite les segments qui relient chacun de ces points. Le graphique ainsi obtenu est appelé polygone des effectifs cumulés croissant (***décroissant***)



Polygone des effectifs cumulés croissants



Polygone des effectifs cumulés décroissants

II- Paramètres de position et paramètres de dispersion

1) Paramètres de position

Les valeurs donnant une idée de l'ordre de grandeur des observations sont appelées les caractéristiques de position.

a.Mode et classe modale

On appelle mode d'une série statistique toute modalité d'effectif maximal (ou de fréquence maximale). Lorsque les modalités sont des intervalles de même amplitude, on parle de classe modale. La classe modale est toute classe d'effectif maximal. Le centre d'une classe modale est appelé mode de la série statistique.

Exemple

Dans une maternité, on mesure la taille de 50 nouveau-nés à 1 cm près. On a obtenu le tableau suivant :

Taille en cm	45	46	47	48	49	50	51	52	53
Effectifs	2	6	6	8	10	7	5	3	3

Le mode de cette série est 49 cm

b. Moyenne

Soit une série statistique $(x_i , n_i)_{1 \leq i \leq p}$ d'effectif total N.

- Dans le cas d'une série statistique discrète, la moyenne notée $\bar{x}$ est donnée par :
$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_px_p}{N}$$
- Dans le cas d'une série statistique regroupée en classes, chaque modalité est remplacée par chaque centre de la classe associée. La moyenne $\bar{x}$ est définie par :
$$\bar{x} = \frac{n_1c_1 + n_2c_2 + \cdots + n_pc_p}{N}$$

Exemple

Classes	[20; 30[	[30; 40[	[40; 50[	[50; 60[
Centres c_i	25	35	45	55
Effectifs n_i	17	29	32	12
n_ic_i	425	1015	1440	660

La moyenne de cette série statistique est :

$$\bar{x} = \frac{425+1015+1440+660}{90} = \frac{3540}{90} = 39{,}33$$

c. Médiane

Définition : La médiane d'une série statistique est la modalité qui partage la population en deux (2) parties de même effectif ou de même fréquence.
Précisément, la médiane est la modalité dont l'effectif cumulé est $\frac{\mathrm{N}}{2}$ où N est l'effectif total.

Exemple 1 :

Un groupe d'élèves a obtenu les notes suivantes : 1 ; 2 ; 5 ; 7 ; 8 ; 10 ; 17 ; 20 ; 25

Cette série a un effectif impair (9). La médiane de cette série statistique correspond à la modalité de rang $\frac{9+1}{2}$ = 5. C'est-à-dire 8.

Exemple 2 :

On donne la série statistique suivante : 6 ; 7 ; 8 ; 11 ; 17 ; 5 ; 10 ; 15

Cette série a un effectif pair (8). La médiane de cette série statistique correspond au centre de l'intervalle formé par les modalités de rangs $\frac{8}{2}$ et $\frac{8}{2}+1$ c'est-à-dire de rangs 4 et 5. La modalité de rang 4 est 11 et celle de rang 5 est 17. Donc la médiane est $\frac{11+17}{2}$ c'est-à-dire 14.

<u>**Remarques**</u>

- Pour déterminer la médiane, il faut ranger les modalités dans l'ordre croissant.
- La détermination de la médiane se fait aussi à l'aide des polygones des effectifs (ou des fréquences) cumulés croissants ou (et) décroissants.
  L'abscisse du point d'intersection de ces deux polygones est la médiane de cette série statistique.

- Pour déterminer algébriquement la médiane d'une série statistique regroupée en classes, on peut procéder comme suit :
  On dresse le tableau des effectifs cumulés croissants, puis on identifie la classe dont l'effectif cumulé croissant est $\frac{N}{2}$
  Soit $[a;b[$ cette classe
  On note $\mathrm{M_e}$ la médiane à chercher.
  On utilise une partie du tableau des effectifs cumulés croissants; on a :

Modalités	a	M_e	b
Effectifs cumulés	c	$\frac{\mathrm{N}}{2}$	d

d est l'effectif cumulé croissant de $[a;b[$ et c est celui de l'intervalle qui précède $[a;b[$

La médiane de cette série est définie par le calcul suivant : $\frac{\mathrm{M}_e - a}{\frac{\mathrm{N}}{2} - c} = \frac{b-a}{d-c}$

Exercice de fixation

Une étude statistique portant sur les distances parcourues par des automobiles fait apparaitre la répartition suivante :

Distance en milliers de km	[0 ; 20 [	[20; 40 [	[40 ; 60 [	[60 ; 80 [	[80 ; 100 [
Nombre d'automobiles	10	25	35	12	6

Calcule la médiane de cette série statistique.

Solution

Dressons le tableau des effectifs cumulés croissants.

Distance en milliers de km	[0 ; 20 [	[20; 40 [	[40 ; 60 [	[60 ; 80 [	[80 ; 100 [
Effectif	10	25	35	12	6
Effectif cumulé croissant	10	35	70	82	88

L'effectif cumulé de la médiane est : $\frac{88}{2} = 44$

On a le tableau suivant :

40	M_e	60
35	44	70

On a : $\frac{\mathrm{M}_e - 40}{44 - 35} = \frac{60 - 40}{70 - 35}$ d'où $\mathrm{M}_e = \frac{20}{35} \times 9 + 40$, donc $\mathrm{M}_e = 45{,}14$

Au total, la médiane de cette série statistique est 45,14

2. Paramètres de dispersion

Les valeurs donnant une idée de l'étalement des observations sont appelées caractéristiques de dispersion. Les paramètres de dispersion permettent de mesurer la façon dont les valeurs du caractère sont reparties autour de la moyenne et de la médiane.

a) Étendue

L'étendue d'une série statistique est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur (modalité) de cette série.

Elle mesure la dispersion de la série.

On a relevé dans supermarché le montant en millier de francs des dépenses effectuées par les clients pour une journée.

Montant	$[0; 50[$	$[50; 100[$	$[100; 150[$	$[150; 200[$	$[200; 250[$
Effectif	30	72	60	36	30

L'étendue de cette série est $250 - 0 = 250$

b) Écart- moyen ; Écart absolu moyen

L'écart moyen est le nombre réel : $e = \frac{n_1|x_1-\bar{x}|+n_2|x_2-\bar{x}|+\cdots+n_p|x_p-\bar{x}|}{N}$
Où (x_i , n_i) est la série statistique de moyenne $\bar{x}$ et P le nombre de modalité.
L'écart moyen permet de rendre compte si la répartition des individus de la série statistique est proche ou éloignée de la moyenne.

Exemple

Un relevé du nombre de postes dans les cybercafés d'une commune nous permet de dresser le tableau ci-dessous :

Nombre de postes	6	11	12	13
Effectifs	4	6	5	3

Le nombre moyen de postes dans les cybercafés de cette commune est 10,5

L'écart moyen est : $e = \frac{4|6-10{,}5|+6|11-10{,}5|+5|12-10{,}5|+3|13-10{,}5|}{18} = 2$

2.3 Variance ; Écart-type

- La variance V d'une série statistique est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne on a
  $V = \frac{n_1(x_1-\bar{x})^2+n_2(x_2-\bar{x})^2+\cdots+n_p(x_p-\bar{x})^2}{N}$
  où (x_i , n_i) est la série statistique de moyenne $\bar{x}$; p le nombre de modalités et N l'effectif total
- L'écart-type notée σ (sigma) est la racine carrée de la variance : $\sigma = \sqrt{V}$

Interprétation

Plus l'écart-type est grand, plus la dispersion est importante

Exemple

Un relevé du nombre de postes dans les cybercafés d'une commune nous permet de dresser le tableau ci-dessous :

Nombre de postes	6	11	12	13
Effectifs	4	6	5	3

La moyenne de cette série est 10,5.

Sa variance est :

V = $\frac{(6-10,5)^2 + (11-10,5)^2 + (12-10,5)^2 + (13-10,5)^2}{N} = \frac{20,25+0,25+2,25+6,25}{18} = \frac{29}{18} = 1,61$

L'écart-type notée σ (sigma) est la racine carrée de la variance : $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{1,61} = 1,27$

Remarque : Généralement dans la pratique, le calcul de la variance se fait en utilisant la formule suivante : V = $\frac{n_1(x_1)^2 + n_2(x_2)^2 + \dots + n_p(x_p)^2}{N} - (\bar{x})^2$

C- Situation complexe

Des élèves de seconde C d'un lycée de Bouaké découvrent le texte suivant dans une revue :
« Un institut de consommation analyse 100 fromages d'une laiterie qui fabrique des fromages et les vend avec la mention : 45% de matières grasses ». Il a obtenu les résultats suivants;

Taux de matières grasses	$[41; 42[$	$[42; 43[$	$[43; 44[$	$[44; 45[$	$[45; 46[$	$[46; 47[$
Nombre de fromages	2	10	25	40	21	2

Cet institut autorise la vente de fromages sous l'étiquette « 45 % de matières grasses » si l'analyse d'un échantillon de fromage donne :

- La moyenne des taux de matières grasses comprise entre 44 et 46
- L'écart-type inférieur à 1,5.
- 95 % des fromages ont un taux de matières grasses comprise entre la moyenne diminuée de deux fois l'écart-type et la moyenne augmentée de deux fois l'écart-type.

L'un des élèves affirme que l'institut va interdire la vente des fromages de cette laiterie. Après discussion entre élèves, et le sachant sans preuves fiables, les autres élèves cherchent à vérifier cette affirmation afin de mettre fin aux désaccords causés.

SOLUTION

Pour résoudre ce problème nous allons utiliser nos connaissances sur la leçon statistique.
Pour cela nous allons :

- calculer la moyenne et l'écart-type de la série.
- conclure.

1- Calculons la moyenne des taux de matières grasses est :

On a : $\overline{X} = \frac{n_1c_1 + n_2c_2 + \cdots + n_pc_p}{N}$

$\overline{x} = \frac{2\times41,5 + 10\times42,5 + 25\times43,5 + 40\times44,5 + 21\times45,5 + 2\times46,5}{100}$ donc $\overline{X} = 44,24$

La moyenne des taux de matières grasses est de 44,24.

Calculons l'écart-type

On va calculer d'abord la variance. On a : $V = \frac{n_1(c_1)^2 + n_2(c_2)^2 + \ldots + n_p(c_p)^2}{N} - \overline{X}^2$

$V = \frac{2\times(41,5)^2 + 10\times(42,5)^2 + 25\times(43,5)^2 + 40\times(44,5)^2 + 21\times(45,5)^2 + 2\times(46,5)^2}{100} - 44,24^2 = 1,0524$

Donc l'écart-type est : $\sigma = \sqrt{V}$. $\sigma = \sqrt{1,0524} = 1,025865$

Au total, l'écart-type est égale à 1,026

2- Le nombre total de fromage est 100 alors 95% de fromage est 95. Déterminons une estimation du taux a de matières grasses correspondant à 95 fromages.

Taux de matières grasses	$[41;42[$	$[42;43[$	$[43;44[$	$[44;45[$	$[45;46[$	$[46;47[$
Nombre de fromages	2	10	25	40	21	2
Effectifs cumulés croissants	2	12	37	77	98	100

On a :

45	a	46
77	95	98

$$\frac{a-45}{95-77} = \frac{46-45}{98-77}$$

$$\frac{a-45}{18} = \frac{1}{21}$$

$$a = \frac{18 + 45\times21}{21}$$

$$a \approx 45,85$$

la moyenne diminuée de deux fois l'écart-type est 44,24 - 2×(1,026) = 42,188

la moyenne augmentée de deux fois l'écart-type est 44,24 + 2×(1,026) = 42,292

Après calcul, on remarque que la moyenne calculée (44,24) est comprise entre 44 et 46 ; l'écart-type calculé (1,026) est inférieur à 1,5

et enfin le taux de matières grasses calculé soit 45, 85 est compris entre 42,188 et 46,292 ; ce qui est vrai.

Donc l'institut va autoriser la vente des fromages de la laitière. L'élève n'a pas raison.

D- EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercices de fixation

Exercice 1

Écris le numéro d'un élément du tableau 1 à la lettre correspondante d'un seul élément du tableau 2

Tableau 1				**Tableau 2**
Variance	**1°)**		**A**	$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i$
Écart-type	**2°)**		**B**	$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - \bar{x})^2$
Moyenne	**3°)**		**C**	$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i \lvert n_i - \bar{x} \rvert$
Écart moyen	**4°)**		**D**	$\sqrt{V}$

SOLUTION

1°) B 2°) D 3°) A 4°) C

Exercice 2

Écris le numéro de l'affirmation suivi de VRAI si cette affirmation est vraie et FAUX si cette affirmation est fausse.

1°) La médiane, la moyenne, le mode et la classe modale sont des paramètres de position
2°) La détermination de la médiane se fait uniquement par calcul algébrique
4°) L'écart moyen, la variance et l'écart-type sont des paramètres de dispersion
5°) Les intervalles suivants $[16\,;20\,[$, $[22;26\,[$ et $[6\,;11\,[$ ont la même amplitude
6°) Le centre d'une classe modale est appelé mode de la série statistique

SOLUTION

1°) Vrai 2°) Faux 3°) Faux 4°) Vrai 5°) Faux 6°) Vrai

Exercice 3

On a relevé la taille en centimètre de 40 élèves d'un collège du privé d'Abidjan, et on a obtenu les résultats suivants :

155	161	165	170	177	180	159	163	167	171
175	183	157	162	169	174	179	164	166	172
174	163	165	170	176	160	169	171	175	162

167	174	172	174	164	166	173	169	173	168

1-a) Regroupe les tailles par classes d'amplitude 5 cm. La première étant : $[155\,;160\,[$.

b) Combien de classes obtiens tu ?

2-Dresse le tableau des effectifs de cette série statistique.

3-Quelle est les classes modales de cette série statistique ?

SOLUTION

1- a°) les classes obtenues sont : $[155;160\,[$, $[160\,;165\,[$, $[165\,;170\,[$, $[170\,;175\,[$, $[175\,;180\,[$ et $[180\,;185[$

b°) J'ai obtenu 6 classes

2- Tableau des effectifs

Classe	$[155;160\,[$	$[160\,;165\,[$	$[165\,;170\,[$	$[170\,;175\,[$	$[175\,;180\,[$	$[180\,;185[$
Effectif	3	8	10	10	7	2

3- Les classes modales sont : $[165\,;170\,[$, et $[170\,;175\,[$

Exercice 4

Le tableau ci-dessous donne une étude statistique portant sur la vitesse des véhicules dans une ville

Vitesse en km/h	[20; 30[	[30; 40[	[40; 50[	[50; 60[
Effectif	17	29	32	12

a) Calcul la moyenne et l'écart-type de cette série statistique.

b) Interprète les résultats obtenus.

SOLUTION

Vitesse en km/h	[20; 30[	[30; 40[	[40; 50[	[50; 60[	Total
Effectifs (n_i)	17	29	32	12	90
Centres (c_i)	25	35	45	55	
$n_i.c_i$	425	1015	1440	660	3540
$n_i.c_i^2$	7225	29435	46080	7920	90660

a) Moyenne : $\overline{x} = \dfrac{3540}{90} = 39,33$

Variance : $V = \dfrac{90660}{90} - (39,33)^2 = 89$

Écart-type : $\sigma = \sqrt{89} = 9,43$

b) La valeur de l'écart-type (9,43) est grande. Cela montre que cette série est très dispersée.

Exercice 5

La répartition des salaires en milliers de francs dans une entreprise est donnée par le tableau suivant

Salaire	Effectifs	Effectifs cumulés croissants	Effectifs cumulés décroissants
$[0; 500[$	30		
$[500; 750[$	45		
$[750; 1000[$	110		
$[1000; 1250[$	250		
$[1250; 1500[$	150		
$[1500; 1750[$	60		
$[1750; 2000[$	35		
$[2000; 2500[$	20		

a) Calcul la moyenne de cette série statistique
b) Complete le tableau
c) Trace sur le même graphique le polygone des effectifs cumulés croissants et celui des effectifs cumulés décroissants
d) Détermine graphiquement la médiane, Interprète le résultat.

SOLUTION

a) La moyenne de cette série statistique est :

$$\overline{X} = \frac{30\times250+45\times625+ 110\times875+250\times1125+150\times1375+60\times1625+35\times1875+2250\times20}{700}$$

$$\overline{X} = \frac{827500}{700} = 1182,14286$$

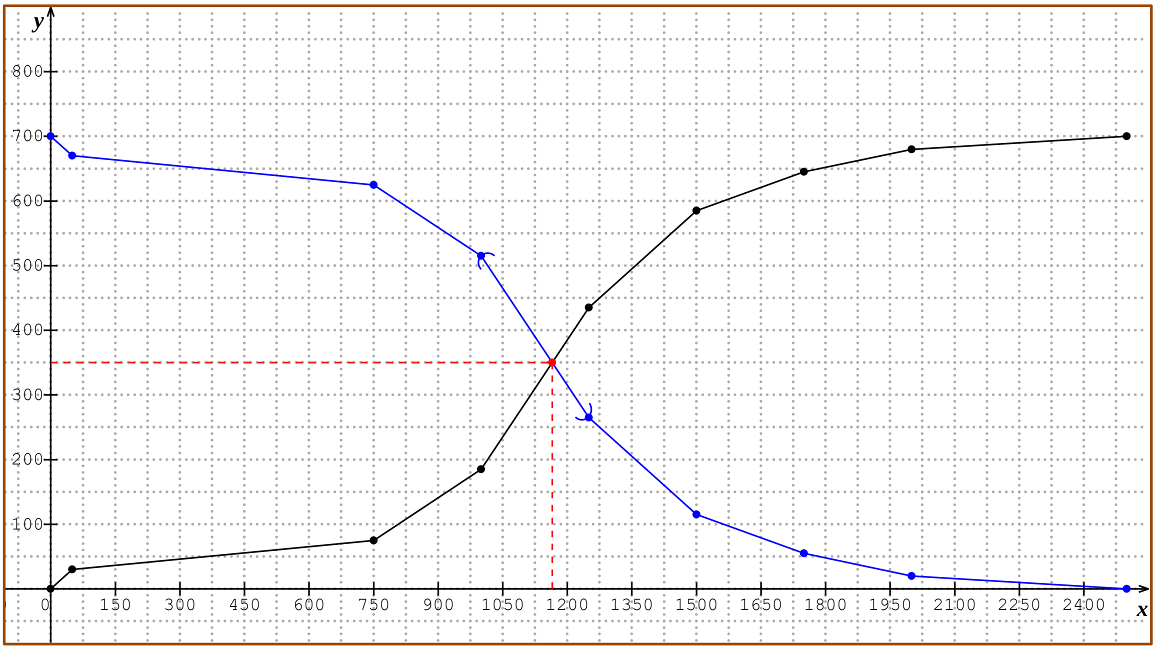
Donc la moyenne est 1182,14

b) Tableau des effectifs cumulés

Salaire	Effectifs	Effectifs cumulés croissants	Effectifs cumulés décroissants
$[0; 500[$	30	30	700
$[500; 750[$	45	75	670
$[750; 1000[$	110	185	625
$[1000; 1250[$	250	435	515
$[1250; 1500[$	150	585	265

$[1500;1750[$	60	645	115
$[1750;2000[$	35	680	55
$[2000;2500[$	20	700	20

c) Polygone des effectifs cumulés croissants et polygone effectifs cumulés décroissants (voir graphique ci-dessous)



Graphiquement La médiane est 1165

Interprétation
50% des salaires sont inférieurs à 1165 et 50% des salaires sont supérieurs à 1165.

MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE

ET DE L'ALPHABETISATION

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Union – Discipline – Travail

MENET - FP

INISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT TECHN
ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE

MON ECOLE A LA MAISON

2nde C
MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

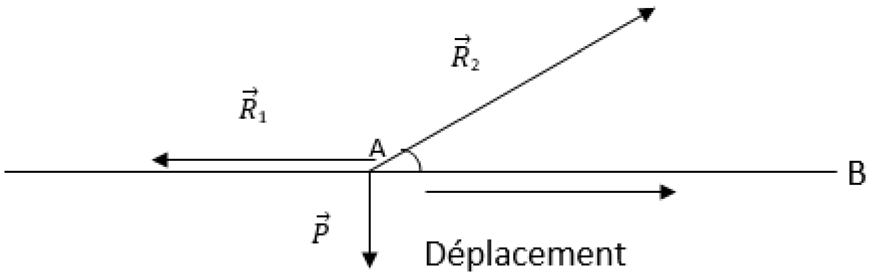
Durée : 10 heures   Code :

COMPETENCE 3	**Traiter une situation relative à la géométrie du plan , à la géométrie de l'espace et aux transformations du plan**
THEME 1	**Géométrie du plan**

Leçon10 : PRODUIT SCALAIRE

A-SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pendant les cours de mécanique dans la classe de seconde, le professeur donne des forces appliquées à un véhicule représenté par le point A dans la figure ci- dessous.



Il demande aux élèves de calculer le travail de chaque force $(\overrightarrow{R2}, \overrightarrow{R1}\ et\ \vec{P})$ pour un déplacement de A à B avec AB = 10 m.
L'un d'eux affirme qu'il suffit de calculer le produit des vecteurs forces et du vecteur déplacement.
Ensemble; les élèves font des recherches sur le produit scalaire de deux vecteurs.

B- CONTENU DE LA LECON

I) Produit scalaire de deux vecteurs

1- **Définition**

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs; on appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le nombre réel noté $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ défini par :

- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}\ \vec{v}})$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$
- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$ si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$

$\vec{u}\,.\,\vec{v}$ se lit «$\vec{u}$ *scalaire* $\vec{v}$»

Exemples

a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{3}$; $\|\vec{v}\| = 4$ et $\cos(\widehat{\vec{u}\ \vec{v}}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}\ \vec{v}})$

$= 2\sqrt{3} \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12$

b) $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{3}$; $\|\vec{v}\| = 4$ et mes $(\widehat{\vec{u}\,;\,\vec{v}}) = \frac{\pi}{2}$

$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\frac{\pi}{2}) = 8\sqrt{3}\times 0 = 0$

Remarque

Pour trois points A, B et C distincts

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ = AB x AC x cos $(\widehat{BAC})$

En effet, $\|\overrightarrow{AB}\|$= AB, $\|\overrightarrow{AC}\|$ = AC et cos $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$= cos $(\widehat{BAC})$

2 **Propriétés**

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :

1- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u}$

2- $|\vec{u}\,.\,\vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

3- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et :

- *de meme sens si et seulement si* $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
- de sens contraire si et seulement si $\vec{u}\,.\,\vec{v} = - \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

Exercice de fixation

Calcule le produit scalaire $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ dans chacun des cas ci-dessous.

1) $\|\vec{u}\| = 2$; $\|\vec{v}\| = 6$; et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.
2) $\|\vec{u}\| = 15$; $\|\vec{v}\| = 7$; et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires

SOLUTION

1) $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| = 2 \text{ x } 6 = 12$
2) $\vec{u}\,.\,\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| = -15 \text{ x } 7 = -105$

3- Carré scalaire

a) Définition

Le carré scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ est défini par $\vec{u}.\vec{u}$. on le note $\vec{u}^2$.

b) Propriété

Pour tout vecteur $\vec{u}$ on a : $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

Exercice de fixation

On donne $\vec{v}$ avec $\|\vec{v}\| = \sqrt{5}$

Calcule $\vec{v}^2$

SOLUTION

$$\vec{v}^2 = \|\vec{v}\|^2 = \sqrt{5}^2 = 5$$

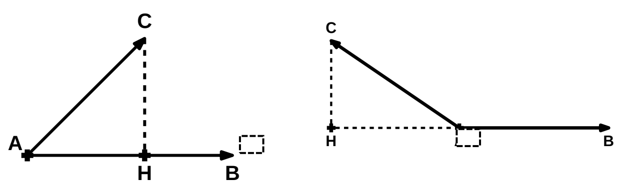
Remarque : pour tous points distincts A et B, on a : $\overrightarrow{AB}^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = AB^2$

b) Autre expression du produit scalaire

a) **Propriété 1**

Pour tous points A, B et C tels que A ≠ B

On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}$ *où H est le projeté orthogonal de C sur la droite* (AB)



Exercice de fixation

ABCD est un carré de coté 4cm.

Calcule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

SOLUTION

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AB} = AB{\times}AB = 16.$

Soit I le milieu du segment $[AB]$

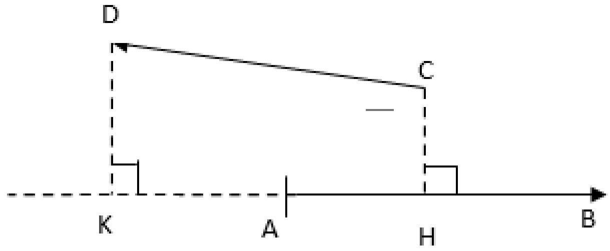
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overline{AB} \times \overline{AA} = - AB{\times}AA = -4{\times}0 = 0$

b **Propriété 2**

Soit A, B, C et D quatre points tels que A ≠ B.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overline{AB} \times \overline{HK}$ où H et K sont les projetés

Orthogonaux respectifs des points C et D sur la droite (AB)

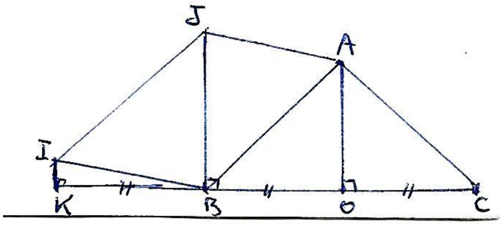


Exercice de fixation

Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle. ABIJ est un parallélogramme et BC = 4

Calcule le produit scalaire suivant .

1) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$
2) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{JC}$
3) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AJ}$
4) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BJ}$
5) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CI}$



SOLUTION

1) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = \overline{BC}.\overline{BO} = 4 \times 2 = 8$
2) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{JC} = \overline{BC}.\overline{BC} = 16$
3) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AJ} = \overline{BC}.\overline{OB} = -8$
4) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BJ} = \overline{BC}.\overline{BB} = 4 \times 0 = 0$
5) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CI} = \overline{BC}.\overline{CK} = -4 \times 6 = -24$

3. Propriétés du produit scalaire

4.1 Vecteurs orthogonaux

a- Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \,.\, \vec{v} = 0$

b- Conséquence

-
- Soit (D) et (D') deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :

(D) $\perp$ (D') $\Leftrightarrow$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

- Soit les points A, B, C, et D avec A≠B et C≠D
  On a (AB) $\perp$ (CD) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$
- Soit les points A, B et M avec A≠B
  M appartient au cercle (φ)de diametre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}= 0$

Exercice de fixation

ABCD est un carré. Calcule le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$

- **SOLUTION**
- $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$ car (AC) $\perp$ (DB).

4.2 Opération sur les produits scalaires

Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{t}$, $\vec{w}$ du plan et pour tout nombre réel k on a :

$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

$(k\vec{u})\,\vec{v} = \vec{u}\,(k.\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$

$(\vec{u} + \vec{w}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{v}$

$(\vec{u} + \vec{v})(\vec{w} + \vec{t}) = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{t} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{t}$

$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\vec{v} + \vec{v}^2$

$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\vec{v} + \vec{v}^2$

$(\vec{u} - \vec{v})((\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Exercice de fixation

On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 2$; $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$

Démontre que $(2\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = -2$

SOLUTION

$$\begin{aligned}(2\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) &= 2\vec{u}^2 - 2\vec{u}\,\vec{v} - \vec{v}^2 + \vec{u}\,\vec{v} \\ &= 2 \times 2^2 - 2 \times 1 - 3^2 + 1 \\ &= -2\end{aligned}$$

4.3 Produit scalaire et norme

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

4. Relation métrique dans un triangle

5.1 Produit scalaire dans un triangle

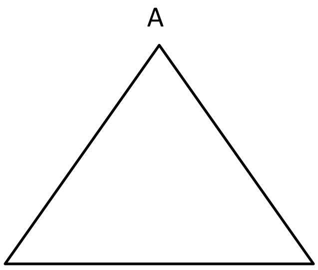
Propriété

Soit A, B et C trois points non alignés. On a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AC^2 + AB^2 - BC^2)$

Remarque

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(BC^2 + BA^2 - AC^2)$

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(CA^2 + CB^2 - AB^2)$



Exercice de fixation

Soit ABC un triangle tels que AB = 5 ; AC = 6 et BC = 3

B

Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

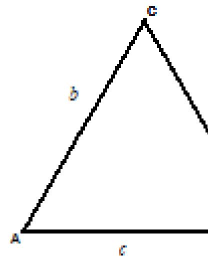
SOLUTION

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$

$= \frac{1}{2}(25 + 36 - 9)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$

5.2 Théorème d'Al Kashi



Propriété

Soit ABC un triangle quelconque.

Posons BC = a, AC = b, AB = c puis $\hat{A} = \widehat{BAC}$; $\hat{B} = \widehat{ABC}$ et $\hat{C} = \widehat{ACB}$ on a :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$;

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$;

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$

Exercice de fixation

ABC est un triangle tels que AB = 8 ; AC = 3 et mes $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$. Calcule BC

SOLUTION

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$

$= 64 + 9 - 2 \times 8 \times 3\cos\frac{\pi}{3}$

$BC^2 = 49$ donc BC = 7

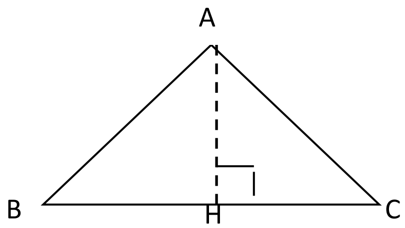
5.3 Caractéristique d'un triangle rectangle

Propriété

Soit ABC triangle, H pied de la hauteur issue de A.

Les affirmations suivantes sont équivalentes

- ABC est un triangle en A
- $BC^2 = AB^2 + AC^2$
- $BA^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$
- $HA^2 = \overline{HB} \times \overline{HC}$



Exercice de fixation

ABC est un triangle n'ayant pas d'angle obtus et H le pied de la hauteur issue de A. On donne AB = 6 ; BC=9 ; BH=4

Justifie que le triangle ABC est rectangle.

SOLUTION

On a :$AB^2 = 36$ *et* $\overline{BH} \times \overline{BC} = 4 \times 9 = 36.$
Donc $AB^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$ d'où le triangle ABC est un triangle rectangle en A.

6. Produit scalaire de vecteurs connaissant leurs coordonnées

6.1 Expression du produit scalaire dans une base orthonormée

Propriété

Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ *une base orthonormée et* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux* vecteurs
Si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives (x;y) et (x';y') dans cette base alors $\vec{u}.\vec{v}$ = xx' + yy'

Exercice de fixation

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Dans chacun des cas ci-dessous, calcule le produit scalaire $\vec{u}\,.\vec{v}$

1- $\vec{u}\binom{2}{-3}$ *et* $\vec{v}\binom{-5}{2}$

2- $\vec{u} = (1-\sqrt{2})\vec{\imath} + (2-\sqrt{3})\vec{\jmath}$ *et* $\vec{v} = (1+\sqrt{2})\vec{\imath} + (2+\sqrt{3})\vec{\jmath}$

SOLUTION

1- $\vec{u}\,.\vec{v} = -5 \times 2 - 3 \times 2 = -16$

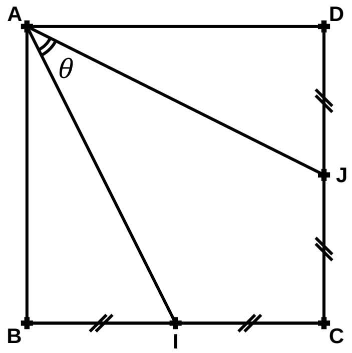
2- $\vec{u}\,.\vec{v} = (1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) + (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$

= 1-2+4-3

= 0

C-Situation complexe

Le père d'une famille partage un terrain de forme carrée à ses trois enfants. Pour éviter le conflit entre les jumeaux, il décide que la parcelle de l'aîné, élève en classe de 2ndc soit entre celles des jumeaux. La figure ci-contre illustre ce partage.
L'ainé curieux voudrait connaitre la mesure de. l'angle θ à 10^{-2} . pour cela il s'adresse au géomètre qui lui demande de calculer le produit scalaire $\boldsymbol{\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}}$**.** ne **s**achant pas comment procédé il te sollicite
A l'aide d'une démarche argumentée basée de tes connaissances en mathématiques, répond sa préoccupation



SOLUTION

Soit a le coté du carré ABCD (a est un nombre réel strictement positif)

J'exprime les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$

On a : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Je calcule de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}$

$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ} = \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$

$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ} = 0 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 + 0$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$ car (AB) et (AD) sont perpendiculaire en A

$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ} = a^2$ (1)

D'autre part :

$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ} = AI \times AJ \times \cos(\widehat{IAJ})$

En appliquant la propriété de Pythagore au triangle ABI rectangle en I, on a : $AI^2 = a^2 + \frac{a^2}{4}$

Donc $AI^2 = \frac{5a^2}{4}$ soit $AI = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

De même $AJ = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Donc $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ} = \frac{5a^2}{4} \times \cos\theta$ (2)

Je détermine une valeur approchée de θ

De (1) et (2) on déduit que $\frac{5a^2}{4} \times \cos\theta = a^2$

On a $\frac{5}{4} \times \cos\theta = 1$

Donc $\cos\theta = \frac{4}{5} = 0{,}8$

$\theta = 36{,}87$ car $\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ d'après la figure.

Donc une valeur approchée de θ à 10^{-2} près est $36{,}87°$

D .EXERCICES D'APPLICATION

EXERCICE 1

Ecris le numéro d'un élément de l'affirmation de l'ensemble A suivi de la lettre qui correspond à un seul élément de l'ensemble B

Théorème d'AL KASHI	1
Produit scalaire dans un triangle connaissant les cotés	2
Théorème de la médiane	3
Carré scalaire	4
Définition du scalaire du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le vecteur $\overrightarrow{AC}$	5

A

A .	$AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$
B .	$\overrightarrow{AC} . \overrightarrow{AC}$
C .	$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB.AC.\cos\widehat{A}$
D .	$BC^2 = AB^2 + AC^2$
E .	$AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{BC^2}{2}$

B

SOLUTION

1 C 2D 3 E 4A 5B

EXERCICE 2

Réponds par VRAI si l'affirmation est vraie ou FAUX si elle est fausse

1°) Le produit scalaire $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC}$ a le même signe que $\cos\widehat{BAC}$ ....

2°) Si les vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens alors $\vec{u} . \vec{v} = -\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$......

3°) $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = 0$ signifie que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ ....

4°) Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On a : $\vec{u} . \vec{v} = xx' - yy'$........

SOLUTION

1°) VRAI 2°) FAUX 3°) VRAI 4°) FAUX

EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 3

$\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont deux vecteurs.*

Démontre que :

1) $\vec{u} . \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$
2) $\vec{u} . \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$
3) $|\|\vec{\boldsymbol{u}}\| - \|\vec{\boldsymbol{v}}\|| \leq \|\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{v}}\|$

Exercice 4

On donne trois points A(1;2), B(4;-3) et C(-1;3) dans le plans rapporté à un repère orthonormé. Détermine une valeur approchée à 10^{-1} près de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

SOLUTION

Je calcule le couple des coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et les distances AB et AC

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4-1 \\ -3-2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ donc AB = $\sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1-1\\3-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ donc AC = $\sqrt{(-2)^2+(1)^2}=\sqrt{5}$

Je calcule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ de deux manières
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$= $3\times(-2)+(-5)\times 1=-6-5=-11$ alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-11$ (1)
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times cos\widehat{BAC}=\sqrt{170}\,cos\widehat{BAC}$ 2)
Je détermine une valeur approchée à 10^{-1}de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.
De (1) et (2) on a : $\sqrt{170}\,cos\widehat{BAC}$ = -11
donc $cos\widehat{BAC}=\frac{-11}{\sqrt{170}}=\frac{-11\sqrt{170}}{170}\approx -084$
d'où mes $\widehat{BAC}.\approx 147{,}5°$

Exercice 5

Soit ABC un triangle, tels que AB=$\sqrt{7}\ AC=2\ et\ BC=3$

1 a- Calcule cos$\widehat{BAC}$
   b - justifie que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=1$

1) On considère le point M tel que
   $6\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$
   a) Calcule $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}$
   b) Démontre que les droites (MB) et (AC) sont perpendiculaires.

SOLUTION

Soit ABC un triangle, tels que AB=$\sqrt{7}\ AC=2\ et\ BC=3$

1 a- ***je Calcule cos$\widehat{BAC}$***

D'après le théorème de AL KASHI, $3^2=2^2+\left(\sqrt{7}\right)^2-2\sqrt{7}\times cos\hat{A}$

Soit $cos\widehat{BAC}=\frac{2}{2\sqrt{7}}=\frac{1}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{7}$

b - justifie que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=1$

on a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{AC^2+AB^2-BC^2}{2}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{4+7-9}{2}=1$

Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=1$

2 On considère le point M tel que
   $6\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

a) Je Calcule $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}$

$6\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}=\left(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AC}$
$6\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}$
$6\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}=2+4$
$6\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}=6$
$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}=1$

b) je Démontre que les droites (MB) et (AC) sont perpendiculaires

$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}).\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AC} = -1 + 1$
$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AC} = 0$ alors les droites (MB) et (AC) sont perpendiculaires.

Exercice 6

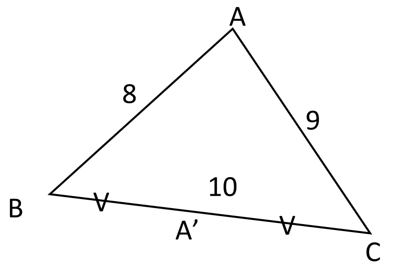
On admet la Propriété suivante :
ABC un triangle et A' le milieu du coté $[BC]$ on a :

1- $AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{BC^2}{2}$
2- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AA'^2 - \frac{BC^2}{4}$

Application

On considère la figure ci-contre

a) Calcule la longueur AA'
b) Calcule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
c) Calcule la longueur des deux autres médianes



SOLUTION

a) $2AA'^2 + \frac{BC^2}{2} = AB^2 + AC^2$

$AA'^2 = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2})$

$AA'^2 = \frac{1}{2}(8^2 + 9^2 - \frac{10^2}{2})$

Donc AA'$=\sqrt{\frac{95}{2}}$

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AA'^2 - \frac{BC^2}{4} = \frac{95}{2} - \frac{100}{4} = 22{,}5$

EXERCICES D'approfondissement

Exercice 7

Soit ABC un triangle
On pose a=BC ; b= AC ; c= AB
On appelle P son demi-périmètre et S son aire. On se propose de calculer S en fonction de a, b et c

1 /a- Démontre que $\cos \hat{A} = \frac{b^2+c^2+a^2}{2bc}$

b – En déduire $sin^2\hat{A}$ *en fonction* de a, b et c

2/ Démontre que S=$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

SOLUTION

1) a- Je démontre que $\cos \hat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

Je considère le triangle ABC tel que a=BC ; b = AC ; c = AB
D'après le théorème d'AL KASHI, on a : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\hat{A}$

Donc $\cos \hat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

b - En déduire $sin^2\hat{A}\ en\ fonction$ de a, b et c

on a: $sin^2\hat{A}$ =1- $cos^2\hat{A}$ = (1+ cos $\hat{A}$) (1- cos $\hat{A}$)

1+ cos $\hat{A} = 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

1+ cos $\hat{A} = \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}$

1+ cos $\hat{A} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$

1+ cos $\hat{A} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$

Calculons 1- 1+ cos $\hat{A}$

1- cos $\hat{A} = 1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

1- cos $\hat{A} = \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}$

1- cos $\hat{A} = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$

1- cos $\hat{A} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$

$sin^2\hat{A} =$ (1+ cos $\hat{A}$) (1- cos $\hat{A}$)

$$sin^2\hat{A} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc} \times \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

$$sin^2\hat{A} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4b^2c^2}$$

D'après l'enoncé, a +b +c = 2p

Donc : b + c - a = 2p – 2a = 2(p-a)

a + c – b = 2p – 2b = 2(p-b)

a + b – c = 2p – 2 c = 2(p-c)

Ainsi

$$sin^2\hat{A} = \frac{2p \times 2(p-a) \times 2(p-b) \times 2(p-c)}{4b^2c^2} = \frac{16p(p-a)(p-b)(p-c)}{4b^2c^2}$$
$$= \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}$$

Donc $\boxed{sin^2\hat{A} = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}}$

2/ je Démontre que S=$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

S étant l'aire du triangle ABC

On a $S = \frac{1}{2}bc \times sin\hat{A}$

$sin^2\hat{A} = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}$ alors $sin\hat{A} = \sqrt{\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}} = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Donc $S = \frac{1}{2}bc \times \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Donc $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Leçon 11 : EQUATIONS ET INEQUATIONS DANS $\mathbb{R}$

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Un père voyant sa mort venir, réunit ses quatre enfants : Claude, Martial, Léa et Dieudonné à qui il confie la répartition d'une somme d'argent placée en Banque à leur profit.
15% de la somme revient à Claude, deux cinquième à Martial, un quart à Léa et 600.000f restant reviennent à Dieudonné.
Pour savoir combien de francs le père a mis en Banque, le benjamin, Dieudonné, élève en classe de second C, approche ses amis de classe et décident ensemble d'utiliser leurs acquis sur les équations.

RESUME DE COURS

1- Equation dans $\mathbb{R}$

1-1 : Définition

f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$
L'égalité (E): $f(x) = g(x)$ est appelée une équation dans $\mathbb{R}$ d'inconnue x
(E) est le nom de l'équation et $\mathbb{R}$ est le référentiel de l'équation.

Exemple :

(E) : $x^2 - 5 = x + 3$ est une équation à une inconnue dans $\mathbb{R}$

Remarque

- ✓ Si le référentiel n'est pas mentionné alors le référentiel supposé est l'ensemble $\mathbb{R}$
- ✓ La lettre utilisée pour l'inconnue est sans importance car les équations $g(x) = f(x)$ et $g(t) = f(t)$ ont le même ensemble de solutions.

Exercice de fixation

Soit l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}_+ , x^2 - 1 = 3$
Précise le référentiel et l'inconnue de l'équation (E).

Proposition de solution :

Le référentiel est $\mathbb{R}_+$ et l'inconnu est x.

1.2 : Solution d'une équation, ensemble de validité d'une équation, équations équivalentes

Définition

On considère l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$

- ✓ Le nombre réel x est une solution de (E) lorsque $f(x) = g(x)$
- ✓ L'ensemble de validité de l'équation (E) est : Df ∩ Dg
- ✓ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E), c'est rechercher l'ensemble des solutions de (E).

On note : $S_{\mathbb{R}}$ (E) ou $S_{\mathbb{R}}$ s'il n'y a pas de confusion.
Lorsqu'une équation n'a pas de solution, on dit que l'ensemble de solutions est l'ensemble vide.
On le note : $S_{\mathbb{R}}=\emptyset$

- ✓ Deux équations sont équivalentes lorsqu'elles ont le même ensemble de solutions.

Exemple :

Soit l'équation (E) : $\frac{1}{x} = 2\,x$

- ✓ L'ensemble de validité noté Ev= $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ car $x \ddagger 0$
- ✓ Une équation équivalente à (E) est : $2x^2 = 1$.

Exercice de fixation

On donne l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 = x + 1$

Justifie que 2 est une solution de (E) et qu'une équation équivalente à (E) est : $x^2 - x - 2 = 0$.

Proposition de solution

Soit les fonctions $f(x) = x^2 - 1 \; et \; g(x) = x + 1$

$f(2) = 2^2 - 1 = 3 \; et \; g(2) = 2 + 1 = 3$ donc 2 est une solution de l'équation $x^2 - 1 = x + 1$

x^2-1 = x+1 est équivalent à $x^2 - 1 - x - 1 = 0$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

1-3 : Exemple de résolution d'équations

a- Equations dont les membres sont des polynômes

Méthode :

Pour résoudre une équation du type : $P(x) = Q(x)$ *o*ù P et Q sont deux polynômes, on peut procéder comme suit :

- On se ramène à une équation du type : $H(x) = 0$ *o*ù $H(x) = P(x) - Q(x)$;
- On factorise si possible *H ;*
- On détermine les racines de *H.*

Exercice de fixation

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - x = 5x + 9$

Propositions de solution

$x^2 - x = 5x - 9$ équivaut à : $x^2 - x - 5x + 9 = 0$

$$x^2 - 6\,x + 9 = 0$$

$$(x - 3)^2 = 0$$

$$x = 3$$

D'où : S_{IR} = {3}

b- Equations dont les membres sont des fractions rationnelles

Méthode :

Pour résoudre une équation de la forme $f(x) = g(x)$, où f et g sont des fractions rationnelles :

- On détermine l'ensemble de validité de l'équation ;
- On se ramène à une équation liant deux polynômes ;
- On résout la nouvelle équation obtenue ;

- On conclut en tenant compte de l'ensemble de validité de l'équation initiale.

Exercice de fixation :

Résous dans IR l'équation : $\frac{3}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}$

Proposition de solution

Les contraintes sur l'inconnue sont : $(x^2 - 4) \neq 0$ et $x + 2 \neq 0$

$x \neq -2$ et $x \neq 2$

$x \in \mathbb{R}\backslash \{-2; 2\}$

$\frac{3}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}$ équivaut à $3\,(x + 2) = x^2 - 4$

$3\,(x + 2) = (x - 2)(x + 2)$

$3\,(x + 2) - (x - 2)(x + 2) = 0$

$(x + 2)(3 - x + 2) = 0$

$(x + 2)(5 - x) = 0$

$x = -2 \; ou \; x = 5$

D'où : $S_{IR} = \{ 5 \}$

c- Equations dont les membres comportent des valeurs absolues

Méthode

Pour résoudre une équation du type :$|f(x)| = |g(x)|$, on peut procéder comme suit :

- On utilise l'équivalence suivante : (E) $f(x) = g(x) \; ou \; f(x) = -g(x)$
- On résous successivement les équations (E_1) : $f(x) = g(x) \; et$ (E_2) : $f(x) = -g(x)$

L'ensemble des solutions de (E) est la réunion des ensembles de solutions de (E_1) et (E_2)

Exercice de fixation

Résolvons dans IR l'équation (E) : $|x - 1| = |3x + 2|$

Proposition de solution

Posons $f(x) = x - 1 \; et \; g(x) = 3x + 2$

(E) équivaut à : $f(x) = g(x)$ ou $f(x) = -g(x)$

Donc on obtient : $x - 1 = 3x + 2$ ou $x - 1 = -3x - 2$

$x - 3x = 2 + 1$ ou $x + 3x = -2 + 1$

$-2x = 3$ ou $4x = -1$

$x = -\frac{3}{2}$ ou $x = -\frac{1}{4}$

D'où : $S_{IR} = \left\{-\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right\}$

Remarque :

Soit l'équation (E) : $|x - a| = b,$ où $b \in \mathbb{R}$

- Si $b < 0$ alors $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$
- Si $b = 0$, alors (E) équivaut à : $x - a = b$
- Si b > 0, alors (E) équivaut à : x – a = b ou x – a = - b

2- Inéquations dans ℝ

2.1 : Définition

- Soient f et g deux fonctions de ℝ versℝ. L'inégalité (I) : $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq g(x)$ est appelée une inéquation dans ℝ, d'inconnue x.
- Tout élément x de ℝ vérifiant $f(x) \leq g(x)$ est appelée solution de l'inéquation (I)
- Résoudre dans ℝ l'inéquation (I), c'est rechercher l'ensemble des solutions de (I)
- Deux inéquations sont équivalentes lorsqu'elles ont le même ensemble de solutions.

Exemple :

$2n^2 - 2n + 1 \leq 0$; $\frac{x-6}{3} > 0$; $(k+1)(k-2) < 0$; $|n-5| < 3$ sont des inéquations à une inconnue dans ℝ.

Remarque :

- Le nom utilisé pour l'inconnue est sans importance, les inéquations $f(x) \leq g(x)$ *et* $f(n) \leq g(n)$ ont le même ensemble de solutions.
- Avant de résoudre une inéquation, il convient si nécessaire de préciser les contraintes sur l'inconnue.

2.2 : Exemple de résolution d'inéquations dans ℝ

a- Inéquations liant deux polynômes

Méthode

Pour résoudre une inéquation du type $f(x) < g(x)$ *o*ù f *et* g sont des polynômes :

- On se ramène au cas d'une inéquation de la forme $P(x) < 0$ *o*ù P est un polynôme obtenu par différence de f et g : $P(x) = f(x) - g(x)$
- On factorise si possible $P(x)$
- On étudie le signe de $P(x)$ dans un tableau de signes ;
- On détermine les solutions (si elles existent) de l'inéquation $P(x)$<0

Exercice de fixation

Résous dans IR l'inéquation : $n^2 > 5n - 6$

Proposition de solutions

Résolvons dans IR l'inéquation : $n^2 > 5n - 6$

$n^2 > 5n - 6$ équivaut à : $n^2 - 5n + 6 > 0$

Factorisons $n^2 - 5n + 6$.

$n^2 - 5n + 6 = \left(n - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6$

$= \left(n - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25+24}{4}$

$= \left(n - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

$= \left(n - \frac{5}{2}\right)^2 - (\frac{1}{2})^2$

$n^2 - 5n + 6$ = (n-2)(n -3)

- Etudions le signe du polynôme$(n-2)(n-3)$.
  Le tableau de signes

n	$-\infty$ 2	3	$+\infty$
$n-2$	-	+	+
$n-3$	-	-	+
$(n-2)(n-3)$	+	-	+

De ce qui précède, $(x-2)(x-3) > 0$ si $n \in]-\infty\,; 2\,[\, U\,]3;\, +\infty[$
D'où S_{IR} = $]-\infty\,; 2\,[\, U\,]3;\, +\infty[$

b) Inéquation liant deux fractions rationnelles.

Méthode

Pour résoudre une inéquation de la forme $f(n) < g(n)$ où f et g sont des fractions rationnelles :

- On détermine l'ensemble de validité de l'inéquation ;
- On se ramène à une inéquation de la forme $P(n) < 0$ où P est une fraction rationnelle obtenue en faisant la différence de f et g.
- On étudie le signe du numérateur et du dénominateur de P dans le tableau de signes.
- On conclut en tenant compte de l'ensemble de validité de l'inéquation initiale.

<u>Exercice de fixation</u>

Résous dans IR l'inéquation $\frac{3x}{2+x} > 0$.

<u>Proposition de solution</u> :

Résolvons dans IR l'inéquation : $\frac{3\,x}{2+\,x} > 0$.

- Les contraintes sur l'inconnue pour (I) : $x \in IR\setminus\{-2\}$.
- Etudions le signe de $3x \; et \; 2+x$.

Tableau de signe

x	$-\infty$ -2	0	$+\infty$
$3\,x$	-	-	+
$2+x$	-	+	+
$\frac{3\,x}{2+x}$	+	-	+

De ce qui précède, $\frac{3x}{2+x} > 0$ si $x \in]-\infty;\ -2\,[\cup]\,0\,;\,+\infty\,[$

D'où S_{IR} = $]-\infty\,;\ -2\,[\cup]\,0\,;\,+\infty\,[$.

III- SITUATION COMPLEXE

Dans le souci d'éviter des tractions après sa mort, un père de famille, croulant sous le poids de l'âge, propose de partager son épargne à ses quatre enfants et à sa femme de la manière suivante :

- L'ainé a le tiers de l'épargne diminué de 270.000 FCFA
- Le deuxième fils a le tiers du reste diminué de 270.000 FCFA
- Le troisième enfant a le tiers du reste diminué de 270.000 FCFA
- Le cadet a le tiers du reste diminué de 270.000FCFA
- Le reste revient à sa femme.

Le cadet des enfants, en classe de 2^{nde} C, décide de déterminer le montant minimum de l'épargne du père afin qu'il puisse avoir au moins 2.000.000 FCFA et connaître ensuite la part de chacun des enfants et celle de la femme.

IV- EXERCICES

1- Exercices d'application

EXERCICE 1

Mets une croix dans chaque case correspondant à une équation à une inconnue.

$x3 - 5x^2 = x + 1$	
$3x - 5\,y = 2\,n^2 - \,y^2$	
$x + 3y - z = 0$	
$4\,y - 5 \; = \; y^2 + 1$	

EXERCICE 2

Mets une croix dans chaque case correspondant à une inéquation à une inconnue.

$4t^2 - t \; \geq 2\,t$	
$4n - y \; < 0$	
$t3 - < t^2 - 1$	
$3y \; \geq \; \dfrac{y+1}{3}$	

EXERCICE 3

Résous dans IR les équations ci-dessous :

a) $/x^2 - x/ = 6$
b) $y^2 - 3 \; = \; (y+1)^2$

EXERCICE 4

Résous dans IR les inéquations suivantes :

a) $2x^2 - x + 1 \; \leq 5 + 2x^2$

b) $\frac{2x+7}{3} \leq \frac{x-9}{x}$

2- Exercices de renforcement et d'approfondissement

EXERCICE 5

On considère le polynôme P de degré 3 tel que :
$P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2.$

1- Ecris sous forme canonique puis factorise le polynôme de degré 2,
   $h(x) = x^2 - 3x + 2$
2- Soit le polynôme $t(x) = (x-1)(x^2 - 3x + 2)$.
   a- Justifie que $t(x) = P(x)$
   b- En déduis la forme factorisée de P
3- Résous dans IR l'équation $P(x) = 0$.

EXERCICE 6

On donne l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}, 2x^3 - x^2 - x - 3 = 0$

1- Vérifie que $\frac{3}{2}$ est un nombre réel solution de l'équation (E).
2- Résous l'équation (E).

EXERCICE 7

Résous dans IR les inéquations suivantes :

a) $\frac{3}{x+2} \leq \frac{1}{3x}$
b) $\frac{2x+1}{2-x} > \frac{3}{4-2x}$

EXERCICE 8

Une société veut imprimer des manuels scolaires. La location de la machine d'impression revient à 100.000F par jour. Les frais de papier pour la fabrication d'un manuel s'élèvent à 300F.
Détermine le nombre minimum de manuels à imprimer par jour pour que le prix de revient d'un manuel soit inférieur à 750F.

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE L'ALPHABETISATION

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Union – Discipline – Travail

MENET - FP

INISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT TECHN ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE

MON ECOLE A LA MAISON

2nde C
MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Durée : 06 heures   Code :

COMPETENCE 3 : **Traiter une situation relative à la géométrie du plan, à la géométrie de l'espace et aux transformations de plan.**

THEME 1 : **Géométrie du plan**

Leçon :12 **HOMOTHETIE**

A. - SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pendant le cours d'arts plastiques, un professeur demande à ses élèves d'une classe de 2nd C d'agrandir une image en respectant les proportions. Ne sachant pas comment procéder, ils sollicitent leurs ainés de la 1ère C qui leurs demandes de faire des cherches sur les homothéties.

B. - RESUME DE COURS

I. Définition et premières propriétés

1. Définition

Soit Ω un point du plan et k un nombre réel non nul.
On appelle homothétie de centre Ω et de rapport k, l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M du plan associe le point M'du plan tel que : $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$

- **Notation**

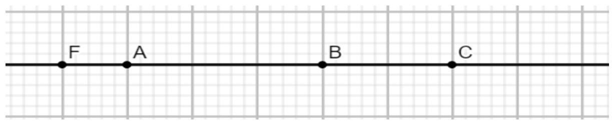
L'homothétie de centre Ω et de rapport k se note : $h_{(\Omega;k)}$, ainsi :

$$h_{(\Omega;k)}(M) = M' \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$$

Exemple

On considère la figure suivante :

- $\overrightarrow{FB} = 4\overrightarrow{FA}$ donc $h_{(F;4)}(A) = B$
- $\overrightarrow{BF} = -2\overrightarrow{BC}$ donc $h_{(B;-2)}(C) = F$



- **Cas particuliers**

- L'homothétie de rapport 1 est l'application identique du plan.
- L'homothétie de centre O et de rapport -1 est la symétrie centrale de centre O.

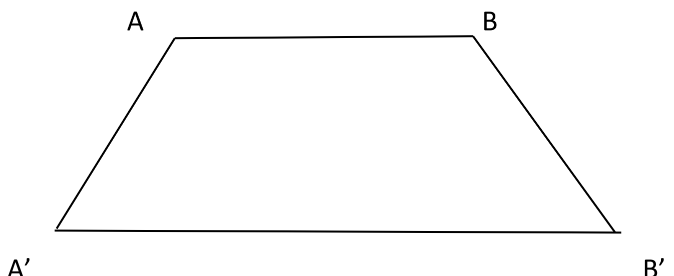
2. Conséquence de la définition

Propriété

Si M'est l'image de M par une homothétie de centre O, alors les points O, M et M'sont alignés.

Exercice de fixation.

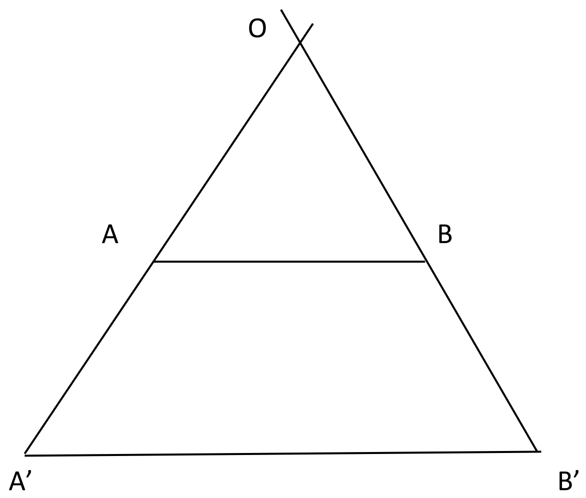
Sur la figure ci – dessous, ABB'A' est un trapèze de petite base [AB]. On admet qu'il existe une homothétie h qui transforme A en A' et B en B'.
Construis le centre O de cette homothétie.



Solution

- Comme l'homothétie h transforme A en A' alors son centre O et les points A et A' sont alignés donc O appartient à la droite (AA').
- Comme l'homothétie h transforme B en B' alors son centre O et les points B et B' sont alignés donc O appartient à la droite (BB').

O est donc le point d'intersection des droites (AA') et (BB')



3. Point invariant

Propriété

Toute homothétie de rapport différent de 1 a un seul point invariant : c'est son centre.

Exercice de fixation

Soit I, J et K trois points alignés du plan et h l'homothétie de centre I qui transforme J en K.
Réponds par Vrai ou par Faux à chacune des affirmations suivantes.

1) h(J) = J 2) h (I) = I 3) h (K) = K

Solution

1) Faux
2) vrai
3) Faux

4. Propriété fondamentale

Propriété

Si M et N sont deux points distincts d'images respectives M' et N' par une homothétie de rapport k, alors $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$

<u>Exercice de fixation</u>

Soit h une homothétie de centre Ω et de rapport -2.

On donne : h (E) = F et h (S) = T

Réponds par Vrai ou par Faux à chacune des affirmations suivantes :

a) $\overrightarrow{\Omega E} = -2\,\overrightarrow{\Omega S}$ b) $\overrightarrow{TF} = -2\overrightarrow{SE}$; c) $\overrightarrow{ES} = -2\overrightarrow{FT}$; d) $\overrightarrow{FT} = -2\overrightarrow{ES}$

<u>Solution</u>

a) Faux ; b) vrai ; c) Faux ; d) Vrai.

II. Images de figures simples

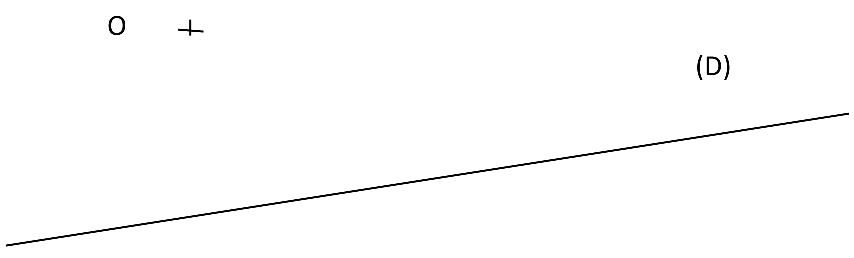
1. Image d'une droite, d'une demie droite

<u>Propriété</u>

- L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle.
- L'image d'une demi-droite par une homothétie est une demie droite.

Exercice de fixation

Dans la figure ci – dessous, (D) est une droite du plan et O est un point donné du plan n'appartenant pas à la droite (D). Construis l'image de la droite (D) par l'homothétie h de centre O et de rapport $\frac{3}{2}$.

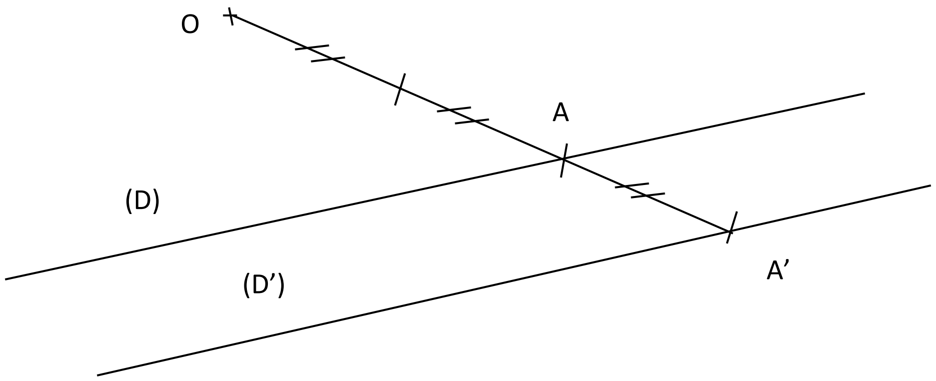


Solution

Soit A un point de la droite (D) et A' son image par l'homothétie h de centre O et de rapport $\frac{3}{2}$.

On a $\overrightarrow{OA'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA}$ et cette égalité vectorielle permet de construire le point A' connaissant le point A.

L’image (D’) de la droite (D) est alors la droite passant par A’ et parallèle à (D).



Remarque

Soit *h* une homothétie de centre O et (D) une droite du plan.
Si O appartient à la droite (D), alors l’image de la droite (D) par h est la droite (D) elle-même.
Dans ce cas on dit que la droite (D) est globalement invariante par l’homothétie h.

2. Image d’un segment

Propriété 1

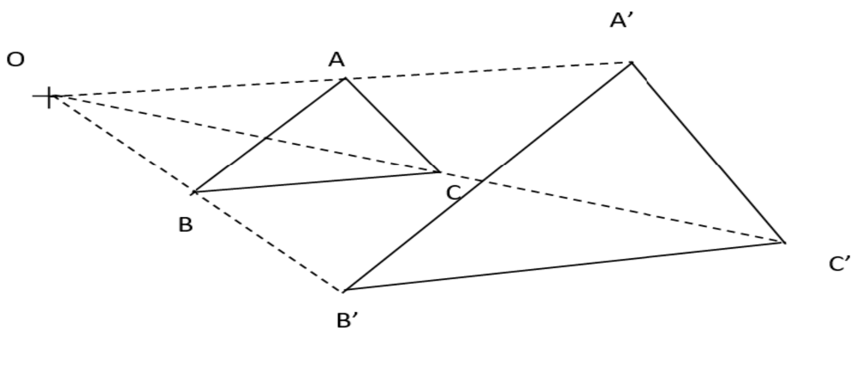
Si A et B sont deux points distincts du plan d’images respectives A’ et B’ par une homothétie de rapport k, alors l’image du segment $[AB]$ par cette homothétie est le segment $[A'B']$ et on a :
$A'\,B' = |k|AB$.

Propriété 2

L’homothétie multiplie les aires de surface plane par le carré de son rapport.

Exercice de fixation

Sur la figure ci-dessous les points A’, B’ et C’ sont les images respectives des points A, B et C par l’homothétie h de centre O et de rapport 2.
On donne AB=6 , AC=5 et BC=7



1. Détermine les images respectives des segments [AB] et [BC] par h.
2. Calcule A’C’ et B’C’.

Solution

1. On a h(A)=A’ et h(B)=B’ donc h([AB])= [A’B’].

De même h(B)=B’ et h(C)=C’ donc h([BC])= [B’C’].

2 .On a h([AC])= [A’C’] donc A’C’= |2|AC = 2×5 = 10

h([BC]) = [B’C’] donc B’C’= |2|BC = 2×7 = 14

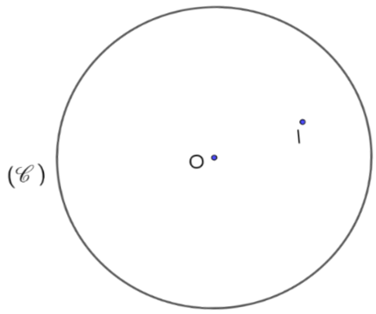
3. Image d’un cercle

Propriété

L’image d’un cercle (C) de centre O et de rayon r par une homothétie h de rapport k est le cercle (C) de centre h(O) et de rayon $|k|r$.

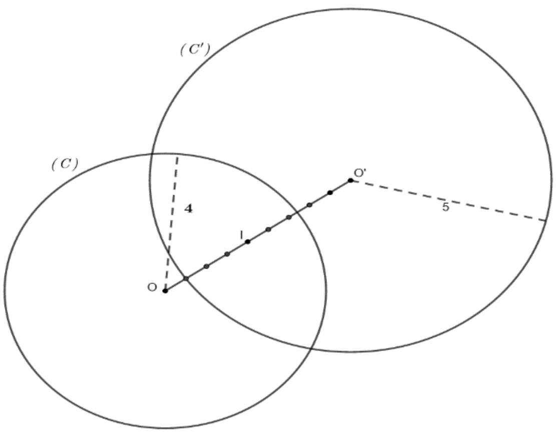
Exercice de fixation

L’unité de mesure est le centimètre.
Sur la figure ci-contre (C) est le cercle de centre O et de rayon 4 ; I ∉ (C).
Construis l’image du cercle (C) par l’homothétie h de centre I et de rapport $-\frac{5}{4}$.



Solution

On construit l’image O’ de O par h.
Le rayon de (C’) est 5.



4. Propriétés de conservation

Propriétés :

Par une homothétie ;

- Des points alignés ont pour images des points alignés.
- Le milieu d'un segment a pour image le milieu de l'image de ce segment.
- Deux droites parallèles ont pour images deux droites parallèles.
- Deux droites perpendiculaires ont pour images deux droites perpendiculaires.
- Un angle orienté a pour image un angle orienté de même mesure.

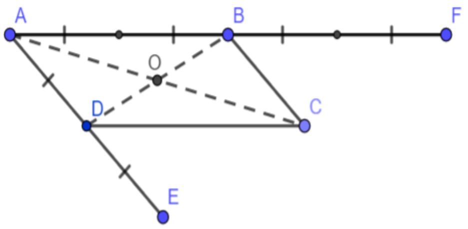
Exercices de fixation

Exercice 1

ABCD est un parallélogramme de centre O tel que AB = 2AD.
Soit E le symétrique de A par rapport à D et F celui de A par rapport à B.
On considère l'homothétie de centre A et de rapport 2

1. Démontrer que les points E , C et F sont alignés.
2. Justifier que C est le milieu de [EF].

Solutions



1-

E est le symétrique de A par rapport à D, alors $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{DE}$, on a donc :
$\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AE}$, par conséquent :
$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AD}$.
De même $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO}$
On a donc :

$h_{(A;2)}$

A	A
B	F
D	E
O	C

Les points D, O et B sont alignés donc leurs images respectives E,C et F par $h_{(A;2)}$ sont aussi alignés.

2-$h_{(A;2)}([DB]) = [EF]$ or O est le milieu de [DB] donc C est le milieu de [EF].

Exercice 2

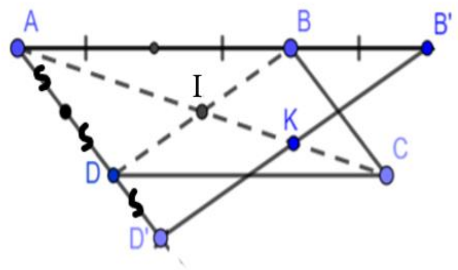
Soient un parallélogramme ABCD de centre I et h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{2}$.

On pose B' = h(B) et D'= h(D).

1. Démontrer que les droites (BD) et (B'D') sont parallèles.
2. La droite (AC) coupe (B'D') en K.

Démontrer que le point K est le milieu du segment [B'D'].

Solutions



h

A	A
B	B’
D	D’

1-$h((BD)) = (B'D')$ donc (BD)// (B’D’).

2-AD’K est un triangle tel que I$\in [AK], D \in [AD']$ et (DI)// (D’K).
D’après la conséquence de la propriété de Thalès on a :

$$\frac{\text{AK}}{\text{AI}} = \frac{\text{AD}'}{\text{AD}}$$

Alors AK $= \frac{3}{2}\ AI$

Comme $\overrightarrow{\text{AK}}$ et $\overrightarrow{\text{AI}}$ on le même sens donc $\overrightarrow{\text{AK}} = \frac{3}{2}\ \overrightarrow{\text{AI}}$.

Ainsi h(I)=K or I est le milieu de [DB] donc K est le milieu de [D’B’].

5. <u>Caractérisation d’une homothétie</u>

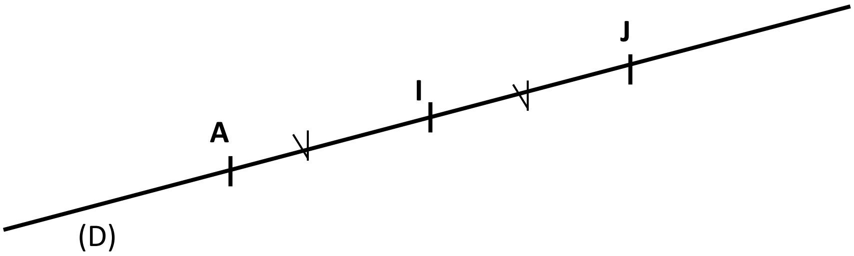
5.1- Homothétie caractérisée par son centre, un point et son image

Propriété

Soient A, B et C trois points alignés, deux à deux distincts du plan.
Il existe une homothétie et une seule de centre A qui applique B sur C.

<u>Exercice de fixation</u>

Dans la figure codée ci – dessous, (D) est une droite, A, I et J sont des points de (D).



1. Justifie qu’il existe une seule homothétie de centre I qui applique A sur J.
2. Détermine cette homothétie.

<u>Solution</u>

1. A , I et J sont trois points alignés, deux à deux distincts du plan alors il existe une seule homothétie de centre I qui applique A sur J.
2. Soit h cette homothétie.

On a $\overrightarrow{\text{IJ}} = -\overrightarrow{IA}$ alors h est l’homothétie de centre I et de rapport -1.

5.2- Homothétie caractérisée par son rapport, un point et son image

Propriété

Soient deux points distincts A et B, et k un nombre réel non nul et différent de 1.
Il existe une homothétie et une seule de rapport k qui applique A sur B.

<u>Exercice de fixation</u>

ABC est un triangle, G son centre de gravité et H le milieu de [BC].

Détermine l'homothétie de rapport $\frac{3}{2}$ qui applique H sur G.

Solution

Soit O le centre de cette homothétie alors $\overrightarrow{OG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OH}$.

Or $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AH}$ donc le centre de cette homothétie est A.

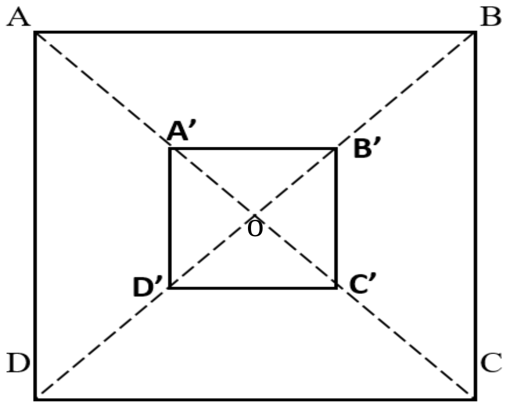
5.3- Homothétie caractérisée par deux points distincts et leurs images

Propriété

Soient M, N, N'et M' quatre points deux à deux distincts tels que (M'N') // (MN) et $\overrightarrow{M'N'} \neq \overrightarrow{MN}$.
Il existe une homothétie et une seule qui applique M sur M'et N sur N'.

Exercice de fixation.

Sur la figure ci-contre ABCD et A'B'C'D' sont des carrés
h est l'homothétie qui transforme A en A ',Ben B' ,C en C'
et D en D'.
Détermine le centre de cette homothétie.

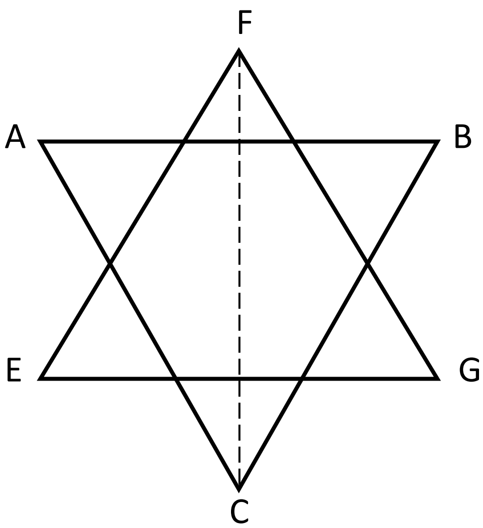


Solution

Ce centre appartient à (AA') et à(BB').
Alors c'est le point d'intersection O de (AA') et (BB').

C- Situation Complexe

Pendant la lecture d'un ouvrage, Sékou, élève en classe de seconde C au Lycée moderne de Korhogo découvre l'étoile de David qui est un schéma croisé de deux triangles équilatéraux ABC et EFG, comme l'indique la figure ci-dessous.



AB = 6 cm
EF = 6 cm

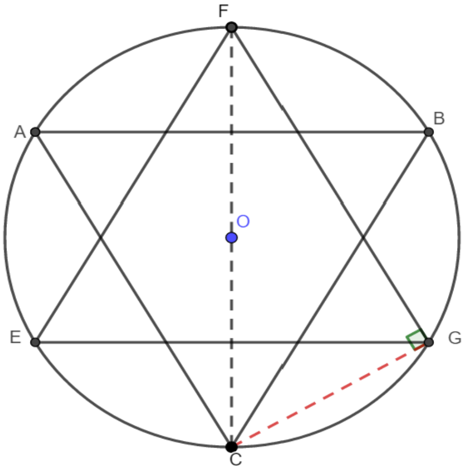
Impressionné par cette figure, Il désire la reproduire, mais il ne dispose que d'une feuille de forme carrée de côté 4 cm. Sa feuille n'étant pas très grande, il souhaite avoir la plus grande reproduction possible. Ne sachant pas comment procéder, il te sollicite.
En utilisant tes connaissances en mathématiques, apporte une solution à la préoccupation de Sékou.

Solution

Pour apporter une solution à la préoccupation de Sékou, nous allons utiliser des notions d'homothétie.
Pour cela, je vais :

- Déterminer la longueur du plus grand segment de la figure ;
- Déterminer le rapport de l'homothétie que je vais utiliser ;
- Déterminer la longueur des côtés des deux triangles équilatéraux ;
- Construire la figure sur la feuille.
  - Déterminons la longueur du plus grand segment de la figure
    le segment $[FC]$ est le plus grand segment de la figure

Considérons le cercle circonscrit aux deux triangles. Soit O son centre.



FGC est un triangle inscrit dans le cercle de diamètre [FC] donc il est rectangle en G.

On a : $cos\widehat{CFG} = \frac{FG}{FC}$ alors $FC = FGcos\widehat{CFG} = \frac{FG}{cos30°} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

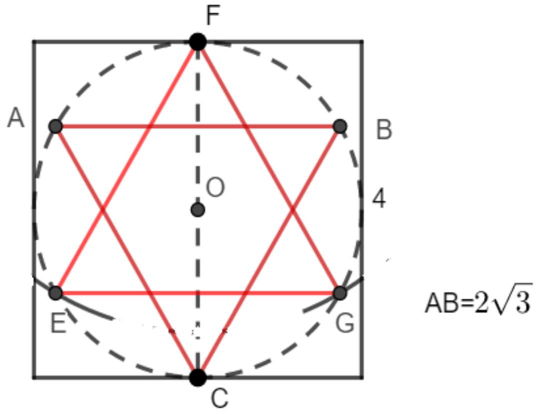
donc $FC = 4\sqrt{3}$

- Déterminons le rapport de l'homothétie que je vais utiliser
  Pour avoir la plus grande reproduction possible, le plus grand segment [FC] doit est de 4 cm de longueur, ainsi le rapport de l'homothétie à utiliser est : $r = \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- Déterminons la longueur des côtés des deux triangles équilatéraux
  La longueur des côtés des deux triangles équilatéraux sur la feuille carrée est :
  $\frac{\sqrt{3}}{3} \times 6 = 2\sqrt{3}$
- Construisons la figure sur la feuille

Programme de construction :

- On construit l'axe de symétrie (FC) du carré.
- On place O le milieu de [FC]
- On construit le cercle (C) de diamètre [FC]

- Le cercle (C') de centre F et de rayon $2\sqrt{3}$ coupe (C) en E et G.On obtient le triangle équilatéral FEG.
- On construit l'image du triangle FEG par l'homothétie de centre O et de rapport -1.

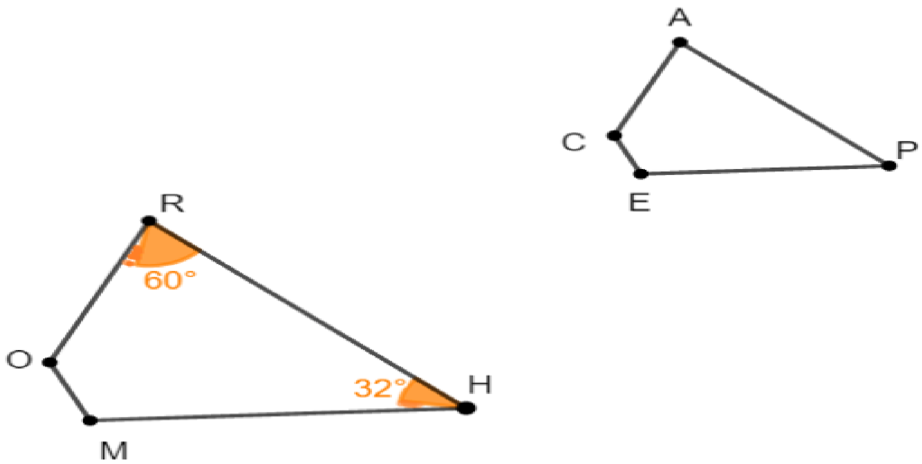


D- EXERCICES

Exercices de fixation

Exercice 1

Sur la figure ci-contre, le quadrilatère APEC est l'image du quadrilatère RHMO par une homothétie de rapport $\frac{2}{3}$.



1- Complète le tableau ci-dessous

Point	R	H	M	O
Image par h				

2- Détermine les mesures des angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AP}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PE}})$, justifie ta réponse.

Solution

1.

Point	R	H	M	O
Image par h	A	P	E	C

2. $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AP}}\right)=\frac{\pi}{3}$ et Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{PE},\overrightarrow{PA}}\right)=\frac{-8\pi}{45}$

EXERCICE 2

Détermine dans chaque cas, le rapport de l'homothétie h de centre A qui transforme B en C :

a) $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$

b) $4\,\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Solution

Soit k le rapport de cette homothétie.

$h(B)=C \iff \overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$

a) $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$ donc le rapport de h est 2

b) $4\,\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0} \iff \overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

Alors le rapport de h est $\frac{3}{4}$

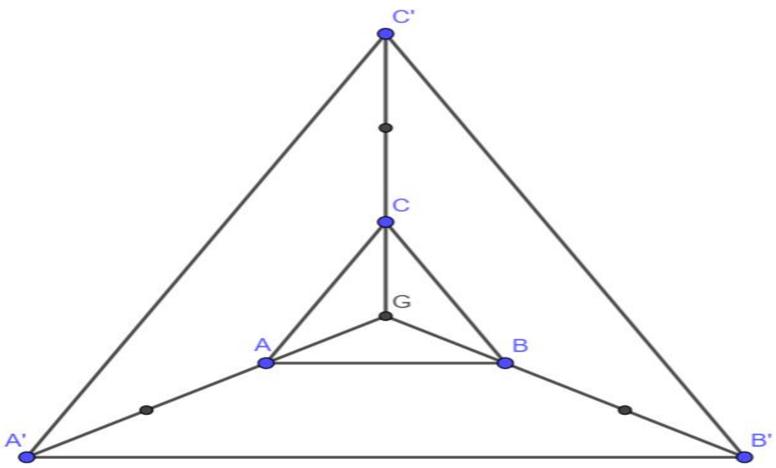
EXERCICE 3

ABC est un triangle équilatéral de côté 4 cm et G le centre de gravité du triangle ABC.

1- Fais une figure.

2- Construis l'image A' B' C'par l'homothétie de centre G et de rapport 3 du triangle ABC.

Solution

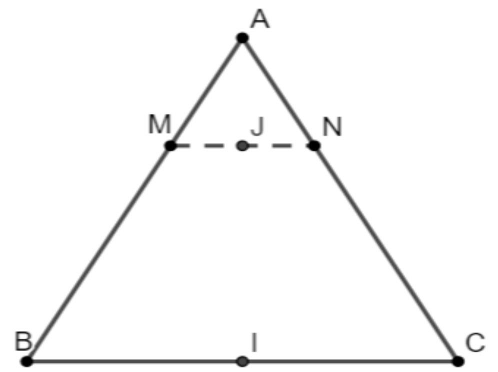


Exercices de renforcement et d'approfondissement

EXERCICE 4

Sur la figure ci-contre, les points M et N sont tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

I et J sont les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[MN]$.
Par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{3}$ démontre que les points A, I et J sont alignés.



Réponse

h(B)=M et h(C)=N donc h([BC])=[MN].Or I est le milieu de [BC] et J le milieu de [MN] donc h (I)= J car l'homothétie conserve le milieu d'un segment.
Par conséquent A, I et J sont alignés.

EXERCICE 5

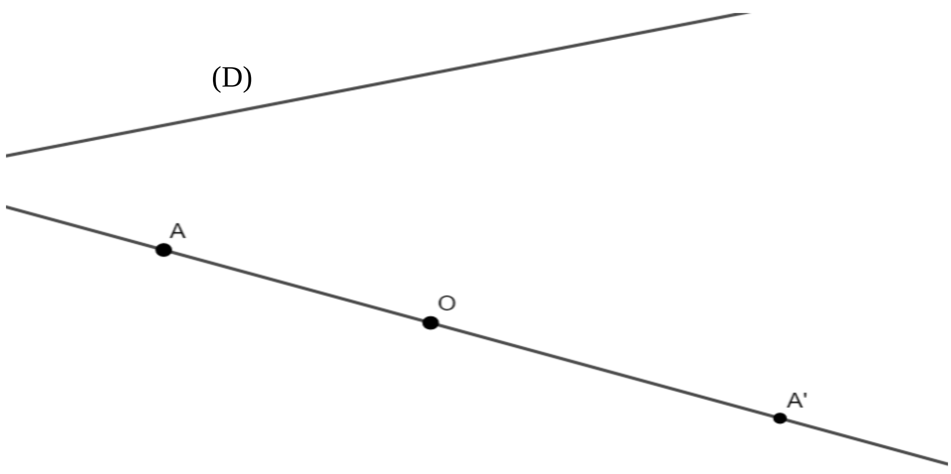
On considère un cercle (C) et A un point de (C).
M est un point quelconque de (C).
Détermine l'ensemble des points M', milieu du segment $[AM]$ lorsque M décrit le cercle (C).

Réponse

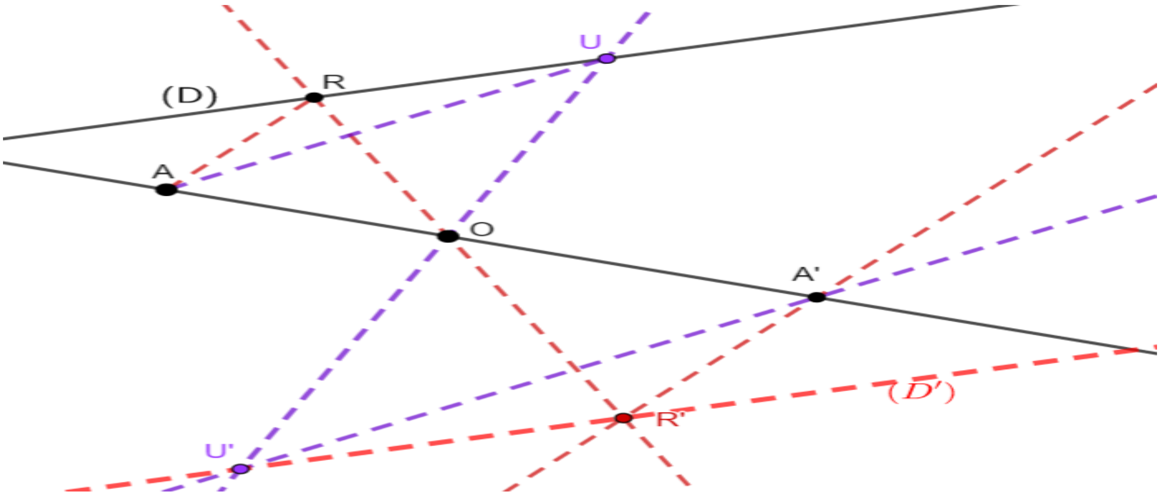
On a $\overrightarrow{AM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.
Soit l'homothétie h de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.
h(M)=M' donc M' décrit le cercle (C') image de (C) par h.

EXERCICE 6

On donne la figure ci-dessous.
On désigne par h l'homothétie de centre O qui transforme A en A'.
Construis l'image de la droite (D) par h.



Réponse



Programme de construction

- On place un point R sur (D).
- On trace la droite (RO).
- On trace la droite parallèle à (RA) et passant par A'.
- L'image R' de R par h est l'intersection des deux droites.
- De même on place un autre point U sur (D) et on construit son image U' par h.
- L'image de (D) est la droite (D') passant par R' et U'.

MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE L'ALPHABETISATION

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Union – Discipline – Travail

MON ÉCOLE À LA MAISON

SECONDAIRE
2^{nde} C
MATHÉMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

Durée : 12 heures   Code :

Compétence 1
Traiter une situation relative aux calculs algébriques et aux fonctions

Thème2 : Fonctions

Leçon 13 : ETUDE DE FONCTIONS ELELENTAIRES

A- SITUATION D'APPRENTISSAGE

Un projectile est lancé à un point du sol au sommet d'une montagne par un dispositif construit à cet effet.

Le professeur de mathématique qui a assisté à l'expérience informe que l'attitude du projectile, en mètres, repérée par rapport au niveau de l'eau en bas de la montagne, est exprimé en fonction du temps écoulé, en seconde, depuis son départ par : $h(t) = -40t^2$.

Un élève curieux qui a bien écouté le professeur veut connaître, la hauteur de la montagne, l'altitude maximum du projectile et le temps au bout duquel le projectile atteindra l'eau.

Les élèves qui partagent cette curiosité décident d'étudier la fonction h et de la représenter.

B- CONTENU DE LA LECON

I. Fonction affine par intervalles

Définition

Une fonction est dite affine par intervalles si elle est définie sur un ou plusieurs intervalles disjoints par restrictions de fonctions affines à ces intervalles.

Exemple

On considère les fonctions $f; g; h; i; j; k; l; m\ et\ n$ définies de $\mathbb{R}\ vers\ \mathbb{R}$ par :

$\begin{cases} f(x) = 3x - 2\,, si\ x \leq 4 \\ f(x) = 1 - x\,, si\ x > 4 \end{cases}$; $\begin{cases} m(x) = x + 8\,, si\ x \leq -5 \\ m(x) = 3\,, -5 \leq x \leq 5 \\ m(x) = 2x - 7\,, si\ x > 5 \end{cases}$

$\begin{cases} g(x) = x^2 + 3\,, si\ x \leq 0 \\ g(x) = 5x + 7\,, si\ x > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} l(x) = x + 13\,, si\ x < 1 \\ l(x) = \sqrt{x}\,,\ si\ x \geq 1 \end{cases}$

$\begin{cases} h(x) = 2020\,, si\ x \leq -2 \\ h(x) = -9x\,, si\ x > -2 \end{cases}$; $i(x) = |7x + 11|$; $j(x) = -4x + 1$

$k(x) = x^2 - 11$;

$\begin{cases} n(x) = -x - 2\,, si\ x < \frac{5}{4} \\ n(x) = 6x + 1\,, si\ x \geq \frac{5}{4} \end{cases}$

Parmi ces fonctions, les fonctions affines par intervalles sont : f ; h ; i ; m et n.

Remarque

La représentation graphique d'une fonction affine par intervalles est une réunion de segments ou de demi- droites.

1. Fonction partie entière

Définition et notation

La *partie entière* d'un nombre réel est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à ce nombre
La partie entière d'un nombre x est notée *E(x)*.

Propriété

Quelque soit le nombre réel x, il existe un unique nombre entier relatif z tel que :

$z \leq x < z + 1$

Exercice de fixation

Détermine la partie entière des nombres suivants : 7,8 ; $-4{,}02$; 9 et 31,365.

SOLUTION

$7 \leq 7{,}8 \leq 8$ donc $E(7{,}8) = 7$

$-5 \leq -4{,}02 < -4$ donc $E(-4{,}02) = -5$

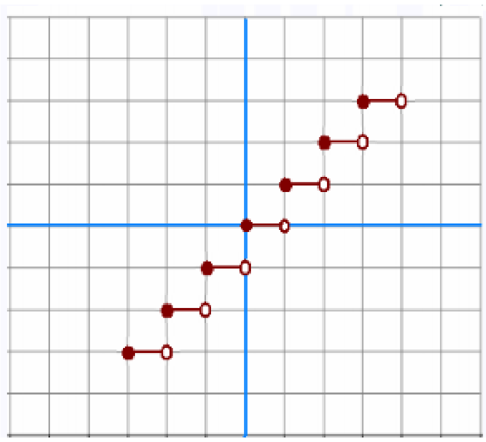
$9 \leq 9 < 10$ donc $E(9) = 9$

$31 \leq 31{,}365 < 32$ donc $E(31{,}365) = 31$

Remarque

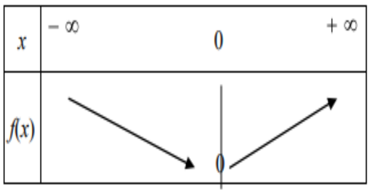
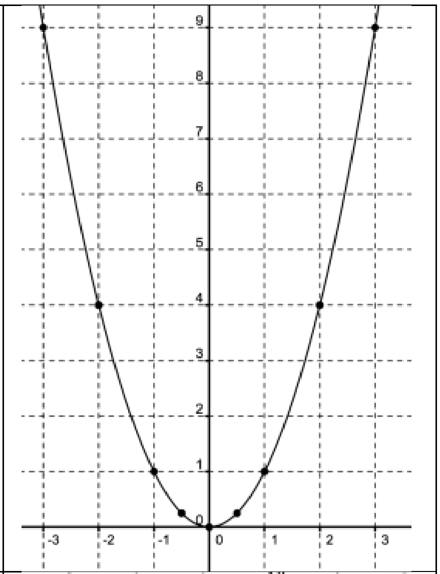
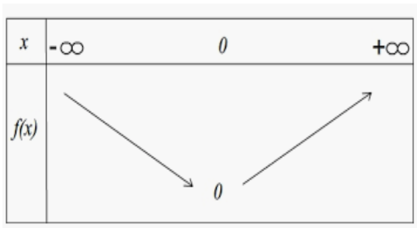
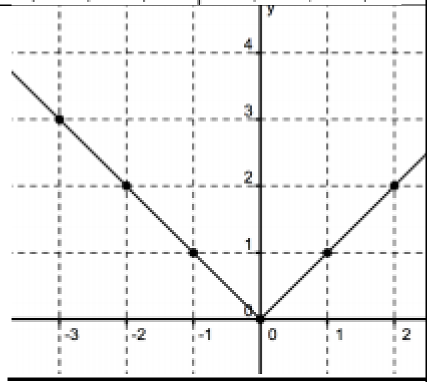
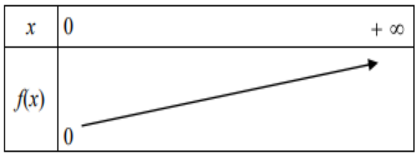
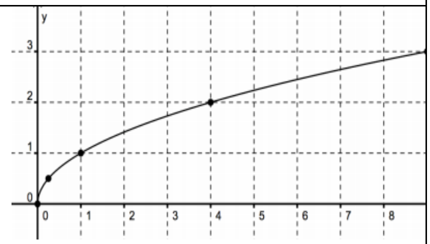
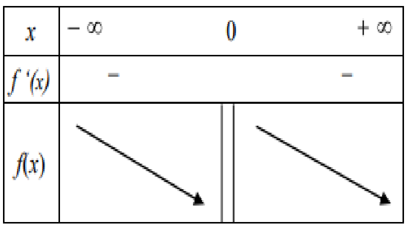
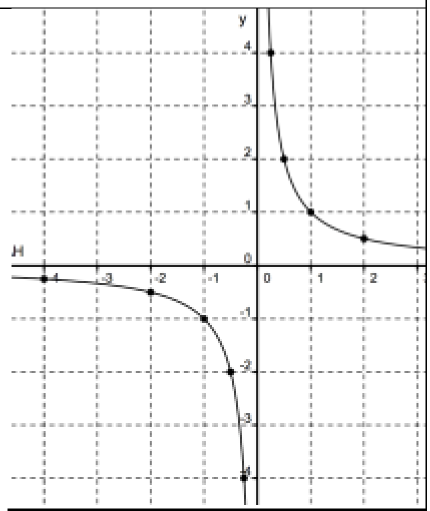
L'application $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto E(x)$

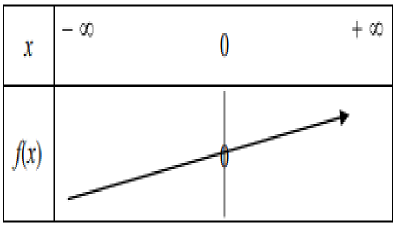
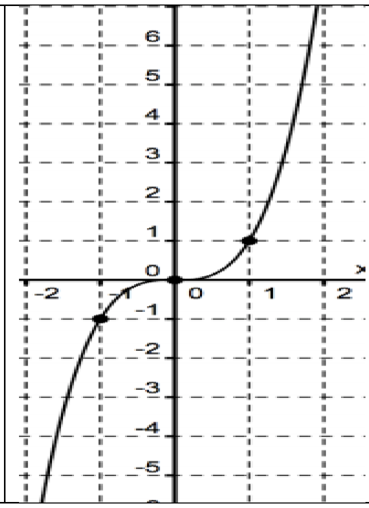
La représentation graphique de la fonction partie entier.



2. Etude de quelques fonctions élémentaires

Fonctions	Ensemble de définition	Sens de variation et tableau de variation.	Représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé

$\boldsymbol{x \mapsto x^2}$	$\mathbb{R}$	•f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ • f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ Tableau de variation : 	
$\boldsymbol{x \mapsto \lvert x \rvert}$	$\mathbb{R}$	• f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ • f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ 	
$\boldsymbol{x \mapsto \sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+$ ou $[\mathbf{0}; +\infty[$	f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ Tableau de variation : 	
$\boldsymbol{x \mapsto \dfrac{1}{x}}$	$]-\infty; \mathbf{0}[\cup]\mathbf{0}; +\infty[$ **Ou** $\mathbb{R}^*$	•f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ • f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ 	

$x \mapsto x^3$	$\mathbb{R}$	f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Tableau de variation : 	

C - Situation complexe

Mlle Moya, élève en classe de seconde, veut choisir un abonnement pour son téléphone portable. Les formules suivantes sont proposées :

	Forfait pour deux heures de connections	Supplément par minute de dépassement
Formule 1	300 F CFA	25 F CFA
Formule 2	150 F CFA	75 F CFA

Moya sait qu'elle va dépasser les deux heures de connection, et voudrait savoir quelle est la formule la plus intéressante en fonction du nombre x de minutes de dépassement.

Pour le mois prochain, Moya estime qu'elle va se connecter pendant 153 minutes. Elle te sollicite pour l'aider à choisir.

Détermine la formule qu'elle devra choisir. Justifie ta réponse.

SOLUTION

Pour résoudre cet exercice, je vais utiliser les fonctions élémentaires.

- Je vais faire la mise en équation des deux formules proposées.
- Je vais déterminer le nombre de minutes qui reste dans les 153 min après y avoir retrancher deux (2) heures.
- Je vais remplacer x dans chaque équation par le nombre de minutes trouver.
- Je vais comparer les différents couts par formule afin de faire le meilleur choix pour Mlle Moya.
  - Mise en équation de la formule 1 :

$$300 + 25x$$

  - Mise en équation de la formule 2 :

$$150 + 75x$$

On a : $2h = 120\ min$, alors en retranchant les 120min des 153, on obtient : 153-120=33 min.

En remplaçant le x par 33 dans :

- La formule 1, on obtient : $300 + 25 \times 33 = 1125$
- La formule 2, on obtient : $150 + 75 \times 33 = 2625$

$2625 > 1125$, alors la meilleure formule pour Mlle Moya est **la formule 1.**

D- EXERCICES

Exercices d'application

Exercice 1

f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = |3x - 6|$

1) Détermine l'ensemble de définition de f
2) Justifie que f est une fonction affine par intervalle
3) Représente graphiquement la fonction f.

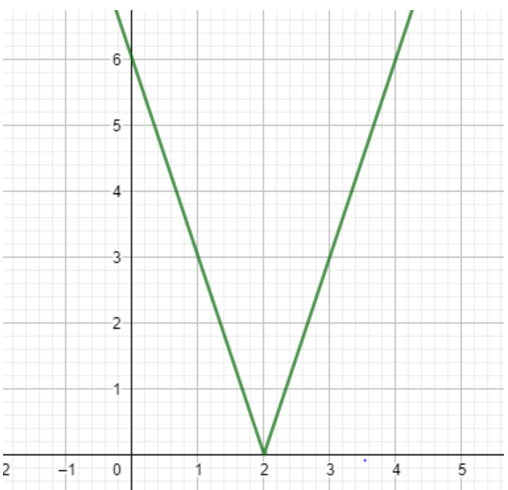
SOLUTION

1) Pour tout$x \in \mathbb{R}$; $3x - 6\ existe\ alors\ |3x - 6| existe$,donc $D_f = \mathbb{R}$.
2) $3x - 6 = 0 \rightarrow x = 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$3x - 6$	-	0	+
$\|3x - 6\|$	$-3x + 6$	0	$3x - 6$

on a donc :$f(x) = \begin{cases} -3x + 6 & pour\ x\ \in]-\infty; 2] \\ 3x - 6 & pour\ x \in [2; +\infty[\end{cases}$; alors f est une fonction affine par intervalle.

3) Représentation graphique



Exercice 2

On donne la fonction numérique : $f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 \end{array}$

1) Donne le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2) Dresse le tableau de variation de f
3) Trace la courbe représentative de la fonction f sur $[-2\,;2]$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$.

SOLUTION

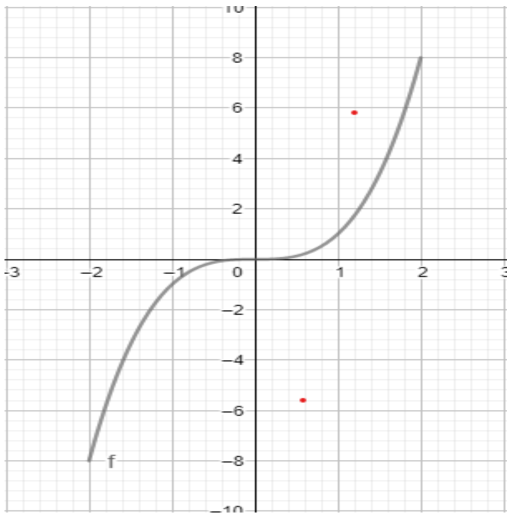
On donne la fonction numérique : $f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 \end{array}$

1) $f(x) = x^3$ alors la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

3) Représentation graphique



Exercice de renforcement

Exercice 3

Soit la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} pour\ x\ \in\ ]-\infty\,;0]\,,f(x) = -x-5 \\ pour\ x\ \in\ ]0\,;2[\,,f(x) = \dfrac{3}{2}x+1 \\ pour\ x\ \in\ [2\,;\ +\infty[\,;f(x) = x-5 \end{cases}$$

1) Détermine l'ensemble de définition de f.
2) Calcule $f(3); f(-5) et\ f(0)$
3) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$
4) Représente graphiquement la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;I\,;J)$.

SOLUTION

1) L'ensemble de définition de f est : $]-\infty\,;0] \cup]0\,;2[\cup [2\,;\ +\infty[= \mathbb{R}$
2) $3\ \in\ [2\,;\ +\infty[$; alors $f(3) = 3-5 = -2$
   $5\ \in]-\infty\,;0]$; alors $f(-5) = -(-5)-5 = 0$
   $0\ \in]-\infty\,;0]$; alors $f(0) = -0-5 = -5$
3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$
   - $pour\ x\ \in]-\infty\,;0]\,,f(x) = 0 \rightarrow -x-5 = 0;\quad x = -5$
   - $pour\ x\ \in\ ]0\,;2[\,,f(x) = 0 \rightarrow \frac{3}{2}x+1 = 0\ \ ;\quad x = -\frac{2}{3}$

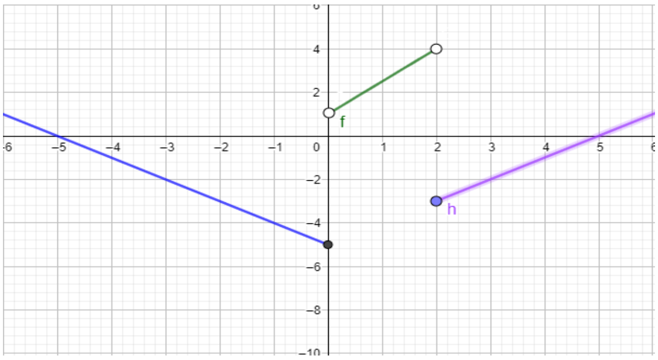
   $-\frac{2}{3} \notin\ ]0\,;2[$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]-\infty\,;0]$.
   - $pour\ x\ \in\ [2\,;\ +\infty[\,;f(x) = 0 \rightarrow x-5 = 0\quad ;x = 5$

$$pour\ x\ \in\ ]-\infty\,;0]\,,l'équation\ f(x)=0\ a\ pour\ solution\ -5$$

$$pour\ x\ \in\ ]0\,;2[\,,l'équation\ f(x)=0\ n'admet\ pas\ de\ solution$$

$$pour\ x\ \in\ [2\,;\ +\infty[\,;\ l'équation\ f(x)=0\ a\ pour\ solution\ 5.$$

4) Représentation graphique



Exercice 4

On donne la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} Pour\ x\ \in[-6\,;\ -4], f(x)=3x+8 \\ Pour\ x\ \in\,]-4\,;\ 3[, f(x)=-\dfrac{8}{7}x+\dfrac{10}{7} \\ Pour\ x\ \in\ [3\,;4], f(x)=\ -1 \\ Pour\ x\ \in\ ]4\,;8]\,, f(x)=2{,}5x-12 \end{cases}$$

1) Calcule l'image par f de chacun des nombres réels : $-5\,;0\,;3\,;7$
2) a- Etudie le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.
   b- Trace la courbe représentative (Cf) de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;I;J)$.
3) Utilise (Cf) pour résoudre chacune des équations suivantes :

$f(x)=-3\,;\ \ f(x)=-1\ \ ;f(x)=0\ \ ;f(x)=6\,;f(x)=7$

SOLUTION

1)
   - $-5\ \in[-6\,;\ -4], alors\ f(5)=3(-5)+8=-7$
   - $0\in\,]-4\,;\ 3[, alors\ \ f(0)=\ -\frac{8}{7}\times 0+\frac{10}{7}=\frac{10}{7}$
   - $3\in\ [3\,;4], alors\ \ f(3)=\ -1$
   - $7\in\ ]4\,;8]\,, f(7)=2{,}5\times 7-12=5{,}5$

2) a- sens de variation
   - $Pour\ x\ \in[-6\,;-4], f(x)=3x+8$; $3>0$ alors $f$est strictement croissante sur $[-6\,;\ -4]$
   - $Pour\ x\ \in\,]-4\,;\ 3[, f(x)=\ -\frac{8}{7}x+\frac{10}{7}$; $-\frac{8}{7}<0$, alors $f$est strictement décroissante sur $]-4\,;\ 3[$.
   - $Pour\ x\ \in\ [3\,;4], f(x)=\ -1$, alors f est constante sur $]-4\,;\ 3[$
   - $Pour\ x\ \in\ ]4\,;8]\,, f(x)=2{,}5x-12$; $2{,}5>0$, alors $f$est strictement croissante sur $]4;8]$.

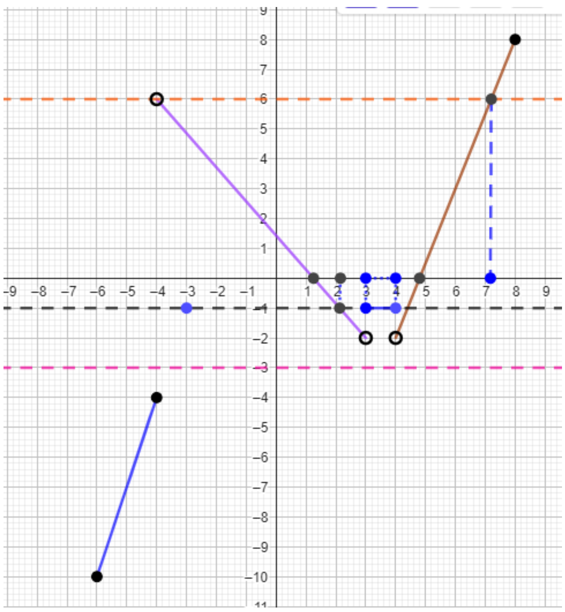
Tableau de variation

x	-6		-4		3		4		8
$f(x)$	-10	↗	-4	↘	-1	→	-1	↗	8

b- représentation graphique

3) Utilisons (Cf) pour résoudre chacune des équations suivantes :

$f(x) = -3$; $f(x) = -1$; $f(x) = 0$; $f(x) = 6$; $f(x) = 7$



MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE L'ALPHABETISATION

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE

Union – Discipline – Travail

MENET - FP

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE

MON ECOLE A LA MAISON

SECONDAIRE
2 C
MATHEMATIQUES

CÔTE D'IVOIRE – ÉCOLE NUMÉRIQUE

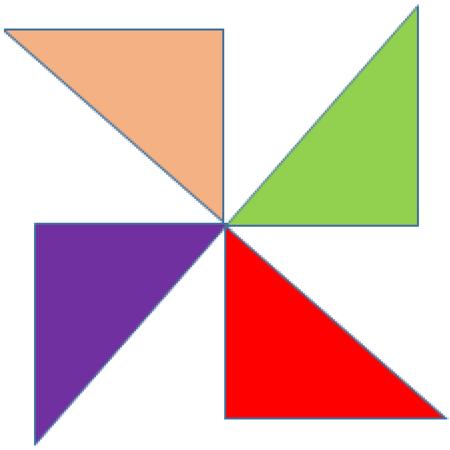
Durée :10 heures **Code :**

COMPETENCE 3	**Traiter une situation relative à la géométrie du plan , à la géométrie de l'espace et aux transformations du plan**
THEME 1	**Géométrie du plan**

Leçon 14 : Rotation

A-SITUATION D'APPRENTISSAGE

A la rentrée, les élèves d'une classe de 2^{nde} C découvrent la tableau ci-dessous dans leur classe. Il est écrit sous la figure la mention suivante : « Ma production est faite par vos camarades à partir des constructions basées sur la notion de rotation ». Impressionnés, les élèves veulent reproduire la figure à partir de l'un des triangles. Pour cela, ils décident de s'approprier les définitions et propriétés relatives à la rotation et de les appliquer pour réaliser différentes figures qui s'y prêtent.



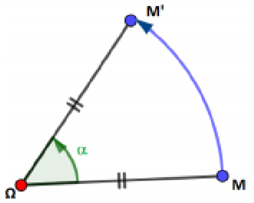
B- RESUME DE COURS

1. Rotation

1-1. Définition

Soit O un point du plan orienté et α un nombre réel appartenant à $]-\pi\,;\,\pi]$. On appelle rotation de centre O et d'angle orienté de mesure principale α, l'application du plan (dans lui-même) qui, à chaque point M associé le point M' du plan tel que :

- $si\ M \neq O\ alors\ OM = OM'et\ Mes\ \left(\widehat{\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{OM'}}\right) = \alpha$
- $si\ M = O, alors\ M' = O$



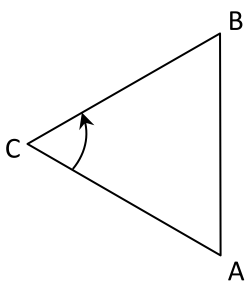
Le point O et α sont respectivement le centre et la mesure (principale) de l'angle de la rotation appelés les éléments caractéristiques de cette rotation.

M' est l'image de M par la rotation.

Notation

- La rotation est notée : $r_{(O;\,\alpha)}$ $ou\ r$ s'il n'y a pas d'ambiguité
- $M' = r_{(O;\,\alpha)}(M)\ \ ou\ \ M' = r(M)\ \ \ (s'il\ n'y\ a\ pas\ d'ambiguité)$

Exemple : ABC est un triangle équilatéral de sens direct.



On a : CA = CB et $Mes\ \left(\widehat{\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}}\right) = \frac{\pi}{3}$. Donc on peut dire que B est l'image de A par la rotation de centre C et de mesure d'angle $\frac{\pi}{3}$. On écrit : $B = r_{\left(C;\frac{\pi}{3}\right)}(A)$.

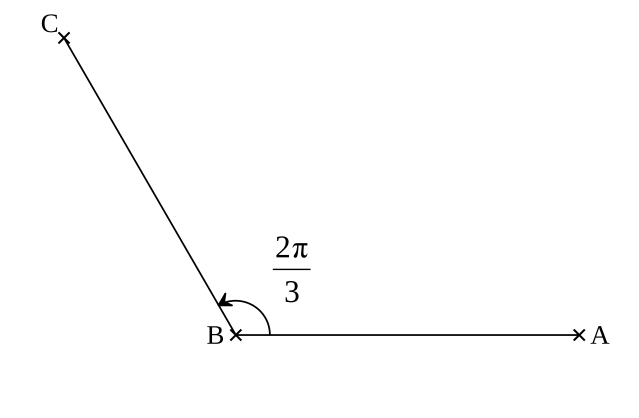
Cas particuliers

- Une rotation d'angle π ou demi-tour est une symétrie centrale.
- Une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ est appelée quart de tour direct.
- La rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ est appelée quart de tour indirect.

Remarque : Si r est une rotation de centre O tel que r(A) = B. Alors la relation OA = OB montre que le centre O est un point de la médiatrice du segment [AB].

1.2 <u>Exemple de construction de l'image d'un point par une rotation</u>

Sur la figure ci-dessous, A et B sont deux points distincts du plan orienté. Le point C est l'image A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.



BA = BC et Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

1-2. Points invariants

Propriété

Toute rotation d'angle non nul admet un unique point invariant : son centre.

<u>Exercice de fixation</u>

K est un point du plan. On considère la rotation r de centre K et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$.

quelle est l'image de K par la rotation r.

<u>**Solution**</u>

K est le centre de la rotation r, donc $r(K) = K$.

<u>**Remarque**</u>

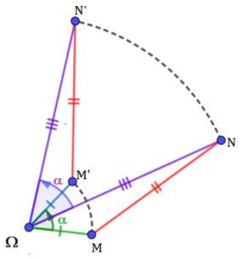
Si l'angle de la rotation est nul, alors chaque point du plan est invariant.

1-3. Propriété fondamentale

Soit r une rotation d'angle α.

Si M'et N' sont les images respectives de deux points distincts M et N par r alors

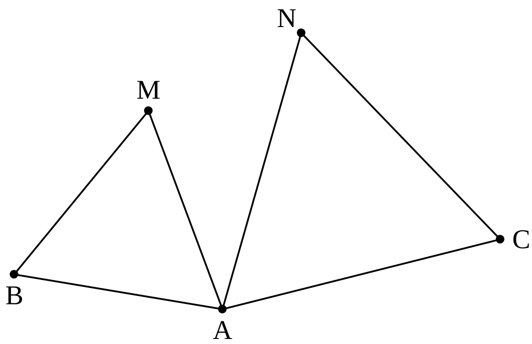
$$\begin{cases} M'N' = MN \\ Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MN}\,;\overrightarrow{M'N'}}\right) = \alpha \end{cases}$$



Exercice de fixation

Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle de sens direct. M et N sont les points du plan tels que les triangles AMB et ACN soient équilatéraux et de sens directs. On considère la rotation r de centre le point A et de mesure d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1. Détermine les images des points M et C par la rotation r.
2. Justifie que : MC = NB et Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{MC}\,;\,\overrightarrow{NB}}\right) = \frac{\pi}{3}$.



Solution

1) *Comme le triangle AMB est équilatéral et de sens direct alors :* $\begin{cases} AM = AB \\ Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AM}\,;\,\overrightarrow{AB}}\right) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

Donc r(M) = B.

Comme le triangle ACN est équilatéral et de sens direct alors : $\begin{cases} AC = AN \\ Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AN}}\right) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

Donc r(C) = N.

2) *Comme r(M) = B et r(C) = N alors, d'après la propriété fondamentale on a :*

MC = BN et $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MC}\,;\,\overrightarrow{NB}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

2- Images de figures simples par une rotation

2-1. Image d'une droite – d'une demi-droite – d'un segment

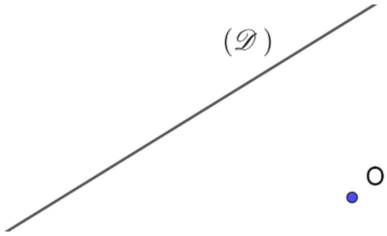
Propriété

Si A et B sont deux points distincts du plan d'images respectives A' et B' par une rotation.
Alors l'image :

- de la droite (AB) est la droite (A'B').
- de la demi-droite [AB) est la demi-droite [A'B').
- du segment [AB] est le segment [A'B']

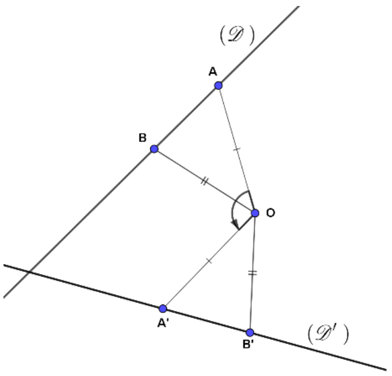
Exercice de fixation

Construire l'image de la droite $(\mathscr{D})$ par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.



Solution

Notons $(\mathscr{D}')$ l'image de $(\mathscr{D})$ par r.
Soit A et B deux points de la droite (D) ; A' et B' les images respectives de A et B par r.
Comme r(A) = A' alors $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}}\right) = \frac{2\pi}{3}$ *et OA = OA', d'où la construction de A'*
Comme: r(B) = B' alors $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OB'}}\right) = \frac{2\pi}{3}$ *et OB = OB', d'où la construction de B'.*
$(\mathscr{D}')$ est donc la droite (A'B'). (Voir figure ci-après).



Remarque : Pour déterminer graphiquement l'image :

- d'une droite, il suffit de trouver les images de deux points de cette droite.
- d'une demi- droite, il suffit de trouver les images de son origine et d'un autre point de cette demi-droite.
- d'un segment, il suffit de trouver les images de ses extrémités.

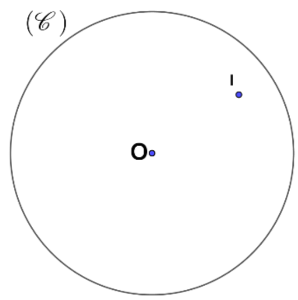
2-4. Image d'un cercle

Propriété

On considère un point O du plan et r une rotation telle que $r(O) = O'$. L'image du cercle (C) de centre O et de rayon R par la rotation r est le cercle (C') de centre O' et de même rayon R.

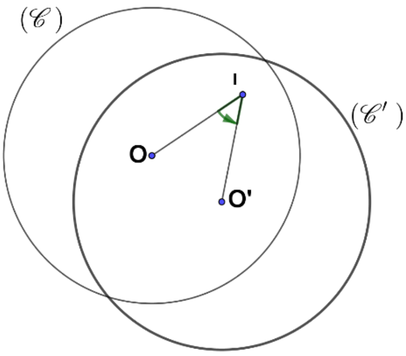
Exercice de fixation

Construire l'image du cercle ($\mathscr{C}$) ci-contre par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{4}$.



Solution

Notons ($\mathscr{C}$ ') l'image de ($\mathscr{C}$) par r.
($\mathscr{C}$ ') est le cercle de centre O' image de O par r et de même rayon que ($\mathscr{C}$).
Comme r(O) = O' alors Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IO'}}\right)$ *et IO = IO' , d'où la construction de O'.*
($\mathscr{C}$ ') est donc le cercle de centre O' et de même rayon que ($\mathscr{C}$) . (Voir figure ci-après).



3- Propriétés de conservation par une rotation

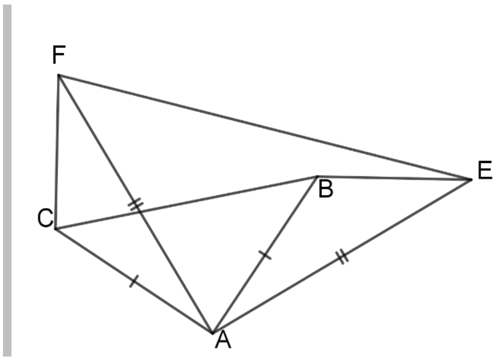
Propriétés

Toute rotation transforme :

- Deux droites parallèles en deux droites parallèles (**conservation du parallélisme**).
- Deux droites perpendiculaires en deux droites perpendiculaires (**conservation de l'orthogonalité**).
- Un angle orienté en un angle orienté de même mesure (**conservation de l'angle orienté**).
- Le milieu d'un segment en le milieu de l'image de ce segment (**conservation du milieu**).
- Trois points alignés en trois points alignés (**conservation de l'alignement**).
- Deux figures sécantes (ou tangentes) en deux figures sécantes (ou tangentes) (**conservation du contact**).

Exercice de fixation

Sur la figure ci – dessous, ABC et AEF sont deux triangles rectangles isocèles en A et de sens directs.
En utilisant la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et la propriété de conservation qui convient, démontre que : $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EA}}\right) = \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{FC}, \overrightarrow{FA}}\right)$.



Solution

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

r(B) = C car $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{2}$ *et AB = AC . r(E) = F car* $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF}}) = \frac{\pi}{2}$ *et AE = AF .*

	$\xrightarrow{r}$
E	F
A	A
B	C

Comme les points E, A et B ont pour images respectives les points F, A et C par r alors d'après la conservation des angles orientés par les rotations on a :

$$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EA}}) = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{FC},\overrightarrow{FA}}).$$

4- Caractérisation d'une rotation

4-1. Rotation caractérisée par son centre, un point et son image

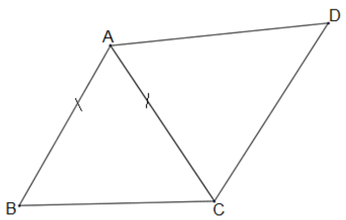
Propriété

Soit A, B et C trois points deux à deux distincts du plan tels que : $AB = AC$.
Il existe une rotation et une seule, de centre A qui applique B sur C.

Exercice de fixation

On considère deux triangles équilatéraux directs ABC et ACD.
Détermine l'angle de la rotation de centre A qui applique B sur D.

Solution



La rotation de centre A qui applique B sur D a pour angle $\frac{2\pi}{3}$

4-2. Rotation caractérisée par deux points distincts et leurs images

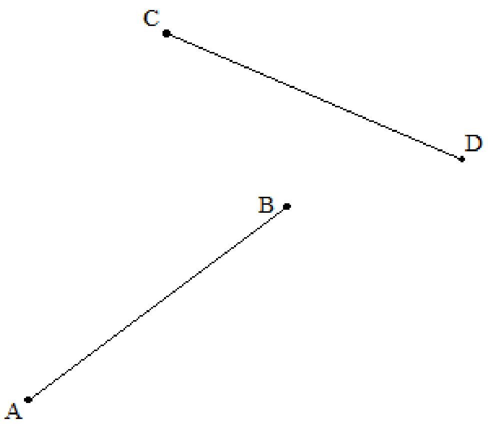
Propriété

Si M , N , M' et N' sont quatre points du plan tels que :

$MN = M'N'$, $M \neq N$ et $\overrightarrow{MN} \neq \overrightarrow{M'N'}$ alors il existe une rotation r et une seule telle que $r(M) = M'$ et $r(N) = N'$.

Exercice de fixation

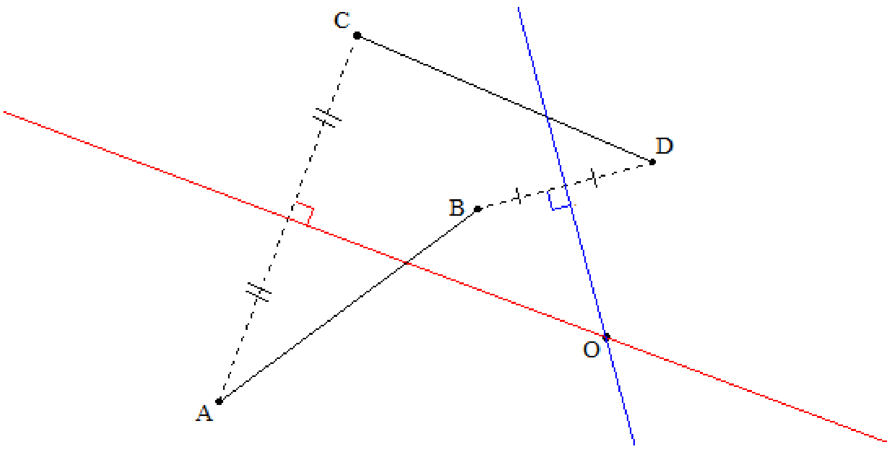
Dans chacun des cas de figure ci-dessous, A, B, C et D sont quatre points du plan deux à deux distincts tels que : $AB = CD$ et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$.
Reproduis la figure ci-dessous puis construis le centre O de la rotation r qui transforme A en C et B en D.



Solution

Considérons la rotation r qui transforme A en C et B en D, et O son centre.

On a donc : OA = OC et OB = OD. Alors O appartient à la fois à la médiatrice [AC] et à la médiatrice [BD].



Remarques

Lorsque la propriété précédente est vérifiée, notons (Δ) et (Δ') les médiatrices respectives des segments $[MM']$ et $[NN']$, alors :

- L'angle de la rotation r est $\left(\widehat{\overrightarrow{MN}\,;\overrightarrow{M'N'}}\right)$.

• Le centre Ω de la rotation r est :

- le point d'intersection de (Δ) et (Δ') si (Δ) et (Δ') sont sécantes,

- le point d'intersection de (Δ) et (MN) si (Δ) et (Δ') sont confondues. Dans ce cas la droite (M'N') est l'image de la droite (MN) par la rotation r.

4-3. Rotation déterminée par la donnée de l'angle, un point et son image.

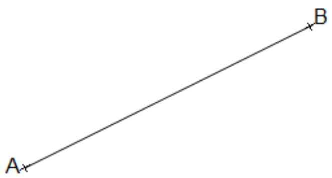
Propriété

Soit un angle orienté de mesure principale α. M et N sont deux points du plan. Il existe une unique rotation r de mesure d'angle α qui transforme M en N.

Dans ce cas, son centre Ω de cette rotation s'obtient comme l'intersection de la médiatrice du segment $[MN]$ et de l'arc capable de mesure principale α et d'extrémité $[MN]$.

Exercice de fixation

Soit deux points A et B. Construis le centre de la rotation qui applique A sur B et dont l'angle orienté a pour mesure principale $\frac{\pi}{3}$.



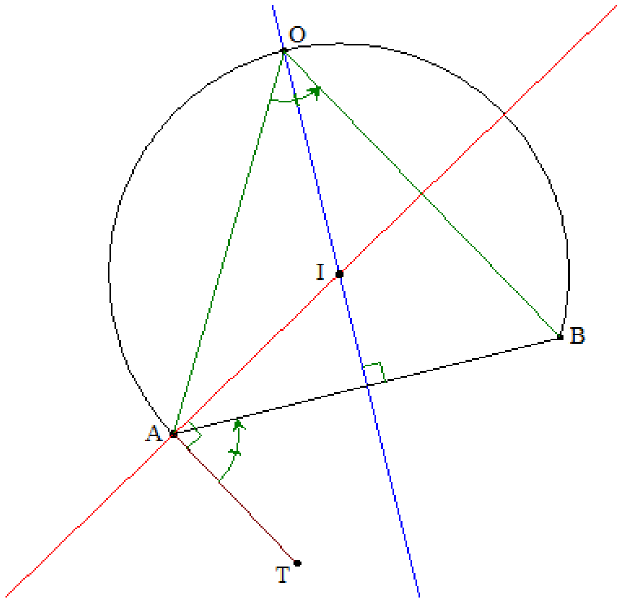
Solution

Soit le point T tel que $(\widehat{\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}}) = \frac{\pi}{3}$.

Le centre I de l'arc capable est point d'intersection de la médiatrice (Δ) du segment [AB] et de la perpendiculaire à [AT] passant par A.

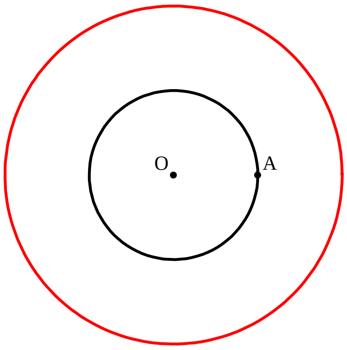
L'arc capable $(\mathbb{C})$ est l'arc de cercle d'extrémités A et B (privé des points A et B) puis situé dans demi-plan de bord (AB) ne contenant pas le point T.

Le centre O est le point d'intersection de (Δ) et $(\mathbb{C})$.



C- Situation complexe

Au cours d'une séance de formation, un membre du club de mathématiques construit deux cercles concentriques dont le rayons de l'un est le double de celui de l'autre. Après voir placé un point A sur le plus petit des deux cercles, il affirme que l'on peut construire un triangle ABC équilatéral où B et C sont l'un sur le plus petit cercle et l'autre sur le grand cercle. Curieux, les membres se proposent de réfléchir et si possible d'en donner une construction.
Elève de 2nde C, le club de mathématique te sollicite pour faire construction.
Propose une solution argumentée aux membres du club de mathématique.



Solution

Pour résoudre cette question, nous allons utiliser nos connaissances sur la leçon les rotations.

Pour cela nous allons :

- considérer la rotation r de centre A et de mesure d'angle $\frac{\pi}{3}$.
- déterminer (Γ) l'image du petit cercle (C_1) par r.
- identifier les points B et C tels que le triangle abc est équilatéral.

r(A) = A ; r(O) = O'$\Longrightarrow$ AO = AO' et mes $\widehat{OAO'} = \frac{\pi}{3}$. Donc le tringle OAO' est équilatéral. Par conséquent O'$\in$ (C_1). On a : OO' = R = 2R – R. Donc (Γ) et le grand cercle (C_2) sont tangents. Soit C ce point.

En outre, (Γ) et (C_1) se coupent en un second point. Soit B ce point.

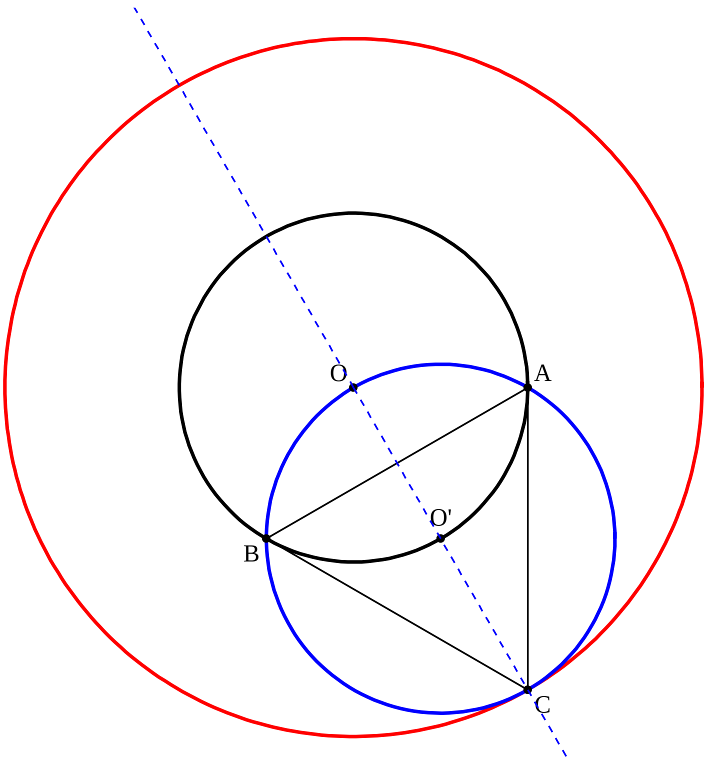
Montrons que le triangle ABC est équilatéral.

Le quadrilatère AOBO' est un losange et mes$\widehat{BO'A}$ = 2mes$\widehat{AOO'}$ = $\frac{2\pi}{3}$.

$\widehat{ACB}$ est un angle inscrit dans le cercle (Γ). $\widehat{BO'A}$ est son angle au centre associé.

Donc mes$\widehat{ACB} = \frac{1}{2} mes\widehat{BO'A} = \frac{\pi}{3}$.

La droite (CO) est médiatrice de [AB] par conséquent ABC est un triangle équilatéral.



En utilisant la rotation de centre A et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{3}$, on obtient le deuxième AB'C'. Les deux triangles sont symétriques par rapport à l'axe (AO).

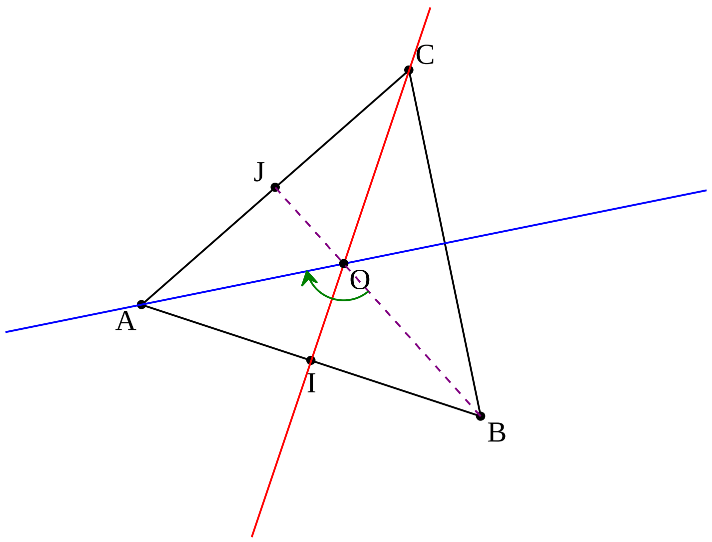
D-EXERCICES

Exercice 1

1. a) Construis ABC un triangle équilatéral de côté 4 centimètres de sens direct.
   b) Place les points I et J, milieux respectifs des côtés [AB] et [AC].
2. Détermine le centre et l'angle de la rotation r qui applique I en J et B en A.

Solution

1. Construction du triangle et repérage des milieux I et J.



2. Détermination des caractéristiques de la rotation r

   r(B) = A et r(I) = J.

   Soit O le centre de la rotation. (d_1) la médiatrice du segment [AB] et (d_2) celle du segment [IJ]. Donc : $\{O\} = (d_1) \cap (d_2)$.

   Comme le triangle ABC est équilatéral alors (d_1) et (d_2) en sont des hauteurs (ou médianes ou bissectrices). Par conséquent le point O est le centre de gravité du triangle ABC.

   La mesure d'angle est $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}}\right) = -\frac{2\pi}{3}$ car dans le triangle OAB on a : $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}}\right) = Mes\left(\widehat{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}}\right) = \frac{\pi}{6}$.

.

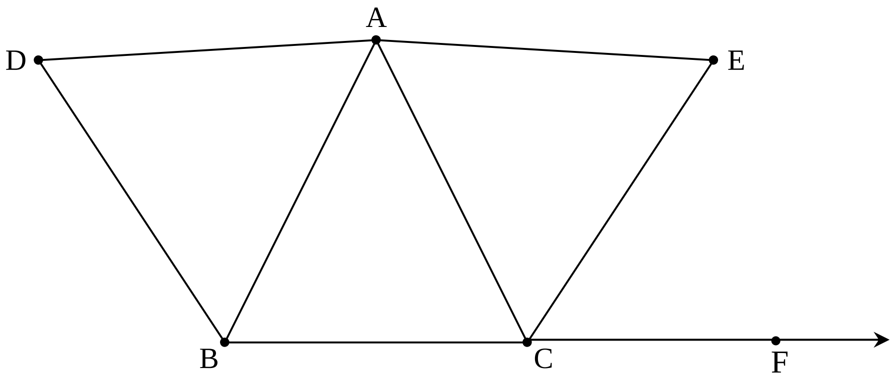
Exercice 2

Soit ABC un triangle isocèle direct de sommet A tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{6}$. On considère les triangles équilatéraux directs ADB et ACE.

1. Fais une figure
2. a) Justifie qu'il existe une rotation qui applique D sur B et C sur E.
   b) Détermine les éléments caractéristiques de cette rotation.
3. Détermine $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{DC} ; \overrightarrow{BE}}\right)$.
4. Justifie que : $DC = BE$.

Solution

1. Figure



2. a) Existence de la rotation

ABC un triangle isocèle de sommet A, on a : AB = AC.

Les triangles ADB et ACE sont équilatéraux, on a DB = AB et AC = CE. Donc DB = CE.

Les angles $\widehat{DBF}$ et $\widehat{ECF}$ sont correspondants. Donc : mes$\widehat{DBF}$ = mes$\widehat{DBA}$ + mes$\widehat{ABC}$ = $\frac{3\pi}{4}$

mes$\widehat{ECF}$ = mes $\widehat{BCF}$ – mes $\widehat{BCE}$ = $\frac{\pi}{4}$.

mes$\widehat{BDF}$ ≠ mes$\widehat{ECF}$ donc $\overrightarrow{BD} \neq \overrightarrow{CE}$.

En définitive, il existe une seule rotation r transformant D en B et C en E.

b) les éléments caractéristiques de la rotation r
Les médiatrices des segments [BD] et [CE] se coupent en A. d'où A est le centre de la rotation r.

La mesure d'angle de la rotation r est : $Mes(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}}) = \frac{\pi}{3}$.

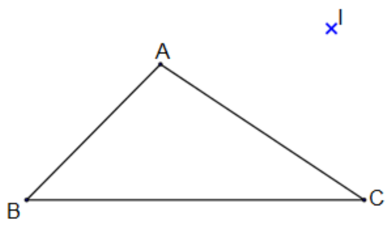
3. Déterminons $Mes(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BE}})$
$r(D) = B \text{ et } r(C) = E$. Donc $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BE}}\right) = \frac{\pi}{3}$

4. Montrons DC = BE
$r(D) = B \text{ et } r(C) = E$. Donc DC = BE car la rotation conserve la distance.

Exercice 3

Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle et I un point du plan.

Construis à la règle et au compas, l'image du triangle ABC par une rotation r de centre I sachant que l'image de C' de C par r est située sur la droite (BC).



Solution

r	
I	I
A	A’
B	B’
C	C’

Construction de C’.

C’ ∈ (BC). IC = IC’ ⟹ C’ appartient au cercle $(\mathcal{C}_1)$ de centre I passant par C et à la droite (BC).

C’ est donc le second point d’intersection de $(\mathcal{C}_1)$ et (BC).

Construction de A’.

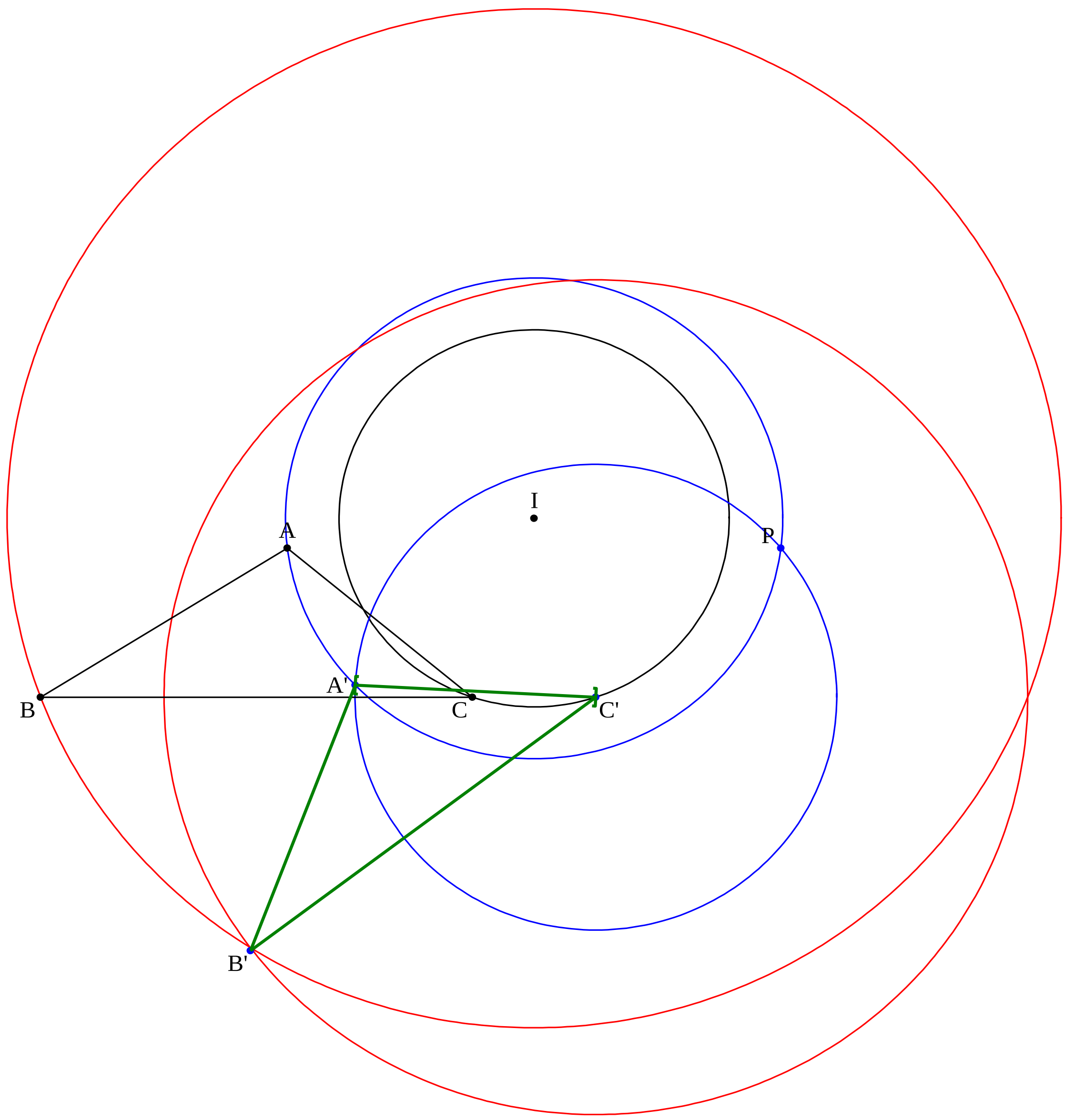
On a : IA = IA’ et AC = A’C’. Donc le point A’ un point d’intersection du cercle de centre I passant par A et du cercle de centre C’ et de rayon AC.

Le point A’ est tel que les triangles IA’C’ et IAC sont de même sens.

Construction de B’.

On a : IB = IB’ et BC = B’C’. Donc le point B’ un point d’intersection du cercle de centre I passant par B et du cercle de centre C’ et de rayon BC.

Le point B’ est tel que les triangles IB’C’ et IBC sont de même sens.



Exercice 4

$(\mathcal{C})$ est un cercle de centre O et A est un point extérieur à $(\mathcal{C})$. M est un point du cercle $(\mathcal{C})$ et N est le point du plan tel que le triangle AMN est rectangle et isocèle en A et de sens direct.

Détermine et construis l'ensemble des points N lorsque le point M parcourt le cercle $(\mathcal{C})$.

Solution

Le triangle AMN est rectangle et isocèle en A et de sens direct.

On a :AN=AM et

Mes$(\widehat{(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN})}) = \frac{\pi}{2}$ donc N est l'image de M par la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Or

$r(M) = N$, $r(\mathcal{C}) = (\mathcal{C}')$ et

M $\in (\mathcal{C})$ donc N $\in (\mathcal{C}')$.

Lorsque le point M parcourt le cercle $(\mathcal{C})$, l'ensemble des points N est le cercle $(\mathcal{C}')$.