CONTENUS	CAPACITES ATTENDUES	COMMENTAIRES
Droite comme courbe représentative d'une fonction affine.	- Tracer une droite dans le plan repéré. - Interpréter graphiquement le coefficient directeur d'une droite.	
Équations de droites.	- Caractériser analytiquement une droite.	On démontre que toute droite a une équation soit de la forme y = mx + p, soit de la forme x = c.
Droites parallèles, sécantes.	- Établir que trois points sont alignés, non alignés. - Reconnaître que deux droites sont parallèles, sécantes. - Déterminer les coordonnées du point d'intersection de deux droites sécantes.	On fait la liaison avec la colinéarité des vecteurs. C'est l'occasion de résoudre des systèmes d'équations linéaires.

I. EQUATION DU PREMIER DEGRE A DEUX INCONNUES

$4x + y = 1$ est une équation du premier degré à deux inconnues.
Pour la résoudre, il faut trouver un couple de valeurs $(x\ ;\ y)$ qui rend l'égalité vraie. Cette équation admet une infinité de solutions.

Exemple :
Recherche d'un couple solution
1. On fixe une valeur à x. Par exemple $x = 1$.
2. L'équation devient alors : $4 \times 1 + y = 1 \Leftrightarrow 4 + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - 4 \Leftrightarrow y = -3$
Une solution de l'équation est donc le couple (1 ; -3)

Remarque :
Chaque droite admet une infinité d'équations équivalentes.
$4x + y = 1 \Leftrightarrow 8x + 2y = 2 \Leftrightarrow 4x = 1 - y \Leftrightarrow y = 1 - 4x$ (…)
Quand l'équation est sous la forme « $x = \ldots$ » ou « $y = \ldots$ » on dit qu'elle est sous sa **forme réduite**.

II. EQUATION D'UNE DROITE

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
Soit $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points distincts, et $M(x\ ;\ y)$ un point de la droite (AB).

$$\begin{aligned}
M(x\ ;\ y) \in (AB) \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x - x_A & x_B - x_A \\ y - y_A & y_B - y_A \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x - x_A)(y_B - y_A) - (y - y_A)(x_B - x_A) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \underbrace{(y_B - y_A)}_{a}x - \underbrace{(x_B - x_A)}_{b}y + \underbrace{x_A(y_B - y_A) - y_A(x_B - x_A)}_{c} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \boxed{ax + by + c = 0}
\end{aligned}$$

a, b et c sont trois nombres fixés, et uniquement déterminés par les coordonnées de A et B.
x et y sont les coordonnées d'un point M quelconque, donc des inconnues.

CONCLUSION :
Dire qu'un point $M(x\ ;\ y)$ appartient à une droite revient à dire que ses coordonnées vérifient une équation du 1er degré à deux inconnues du type $ax + by + c = 0$ appelée **équation cartésienne** de la droite.

Exemple :
Soit A(2 ; -3) et B(5 ; 1) et on veut déterminer l'équation cartésienne de (AB) :

$M(x\,;\,y) \in (AB) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y+3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \quad 4(x-2) - 3(y+3) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 4x - 8 - 3y - 9 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{4x - 3y - 17 = 0}$ **Equation cartésienne de (AB)**

a. Droite parallèle à l'axe des ordonnées (« verticale »)

(AB) parallèle à l'axe des ordonnées revient à dire que A et B ont la même abscisse.
Dans ce cas là, on a donc $x_A = x_B$ donc :

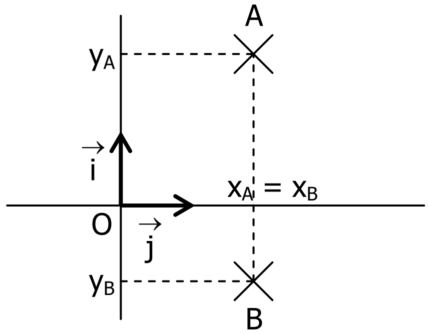
$$(y_B - y_A)x - \underbrace{(x_B - x_A)}_{0}y + x_A(y_B - y_A) - y_A\underbrace{(x_B - x_A)}_{0} = 0$$

$\Leftrightarrow \quad (y_B - y_A)x + x_A(y_B - y_A) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (y_B - y_A)x = -x_A(y_B - y_A)$

$\Leftrightarrow \quad x = -\dfrac{x_A(y_B - y_A)}{y_B - y_A}$

$\Leftrightarrow \quad x = c$



Exemple :

Soit A(2 ; -3) et C(2 ; 1) et on veut déterminer l'équation cartésienne de (AC) :

$M(x\,;\,y) \in (AC) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y+3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \quad 4(x-2) - 0 \times (y+3) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 4x - 8 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 4x = 8$

$\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{8}{4}$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{x = 2}$ **Equation réduite de (AC)**

b. Droite non parallèle à l'axe des ordonnées (« non verticale »)

Dans ce cas là, on a $x_A \neq x_B$

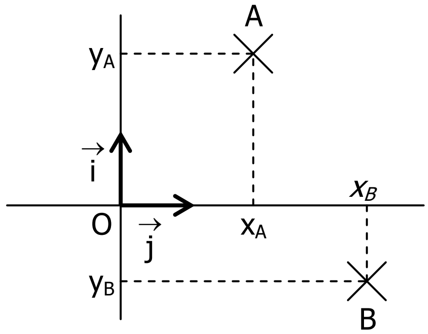
Donc $\quad (y_B - y_A)x - (x_B - x_A)y + x_A(y_B - y_A) - y_A(x_B - x_A) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (y_B - y_A)x + x_A(y_B - y_A) - y_A(x_B - x_A) = (x_B - x_A)y$

(on divise par $x_B - x_A$ qui est non nul !)

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}_{m}x + \underbrace{\frac{x_A(y_B - y_A) - y_A(x_B - x_A)}{x_B - x_A}}_{p} = y$$

$\Leftrightarrow \quad y = mx + p$



Exemple :

Précédemment, on a vu que si A(2 ; -3) et B(5 ; 1) alors (AB) a pour équation cartésienne :

$\Leftrightarrow \quad 4x - 3y - 17 = 0$

$\Leftrightarrow \quad -3y = -4x + 17$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{y = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{17}{3}}$ **Equation réduite de (AB)**

THEOREME :

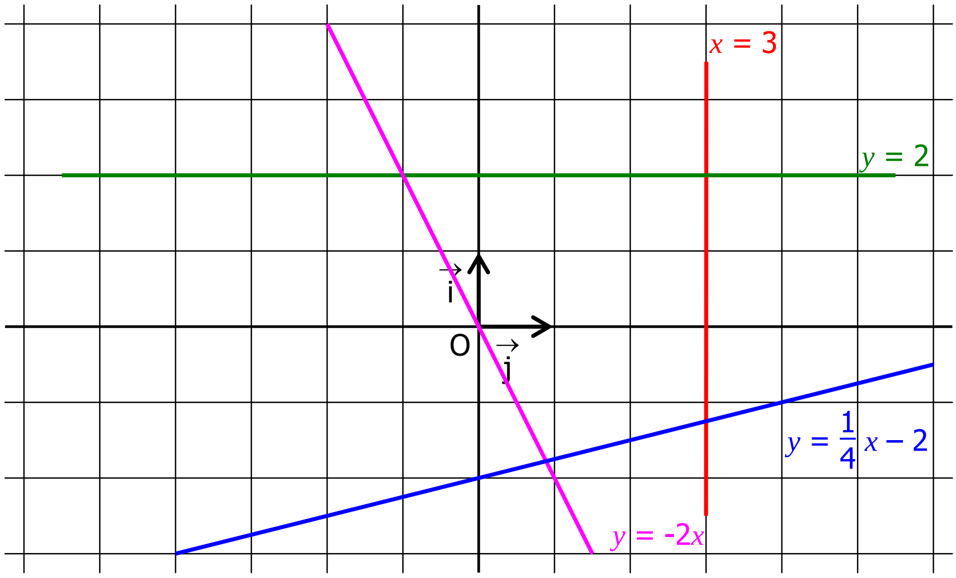
Tout droite non parallèle à l'axe des ordonnées est l'ensemble des points M dont les coordonnées vérifient une équation du type $y = mx + p$, où m et p sont des réels fixés.

→ m est appelé le **coefficient directeur de la droite**. Il détermine la direction (« inclinaison ») de la droite.

→ p est l'**ordonnée à l'origine** (c'est-à-dire l'ordonnée du point de la droite qui a pour abscisse zéro)
Tout droite parallèle à l'axe des ordonnées est l'ensemble des points M dont les coordonnées vérifient une équation du type x = c où c est un réel fixé.

Remarque :
On retrouve l'équation d'une fonction affine du type f(x) = ax + b, qui était représentée par… une droite !

Exemples :



III. PARALLELISME DE DEUX DROITES

a. Coefficient directeur d'une droite

Propriété :
Soit A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B). Le coefficient directeur de a droite (AB) est : $\boxed{m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$

Exemple :
Soit A(2 ; 3) et B(4 ; -5). On veut déterminer l'équation (du type $y = mx + p$) de la droite (AB)

→ On calcule le coefficient directeur de la droite :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-5 - 3}{4 - 2} = \frac{-8}{2} = -4$$

→ On remplace m par sa valeur, et x et y par les coordonnées de A ou B dans une des équations :

$3 = 2m + p$
$\Leftrightarrow$ $3 = 2 \times (-4) + p$
$\Leftrightarrow$ $3 = -8 + p$
$\Leftrightarrow$ $3 + 8 = p$
$\Leftrightarrow$ $\boxed{p = 11}$

L'équation de la droite (AB) est donc : $\boxed{y = -4x + 11}$

Théorème :
Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs coefficients directeurs sont égaux.

Exemple :

Soit les droites :

$(d_1) : y = 2x + 5$
$(d_2) : y = -3x + 5$
$(d_3) : y = -2x - 3$
$(d_4) : y = 2x - 3$

On compare les coefficients directeurs des droites (si on n'avait pas les équations, on devrait calculer le coefficient directeur de chaque droite au préalable). On peut dire que les droites (d_1) et (d_4) sont parallèles.

b. Vecteur directeur d'une droite

Définition :

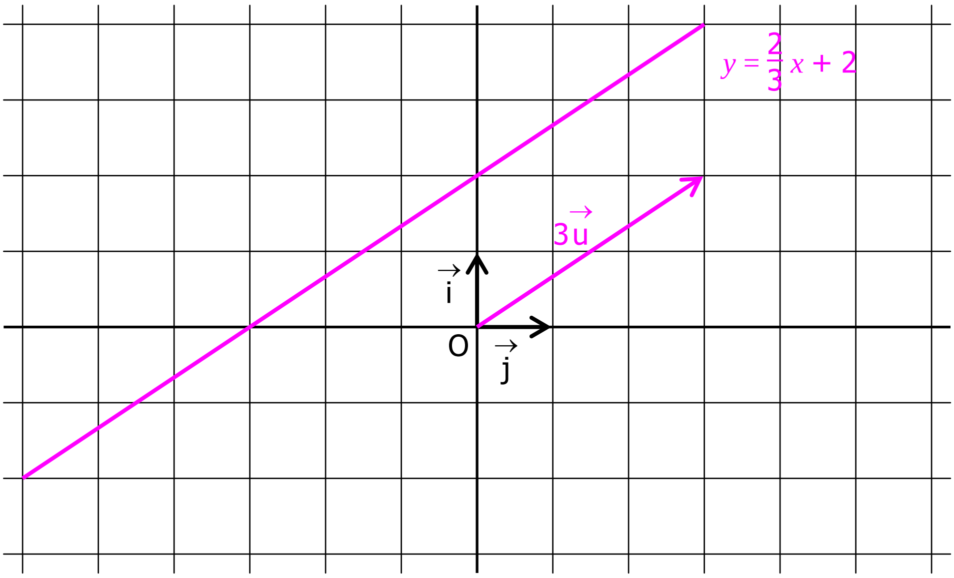
Soit (d) une droite d'équation $y = mx + p$. Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ a la même direction que la droite (d). On dit que c'est un vecteur directeur de (d).

Remarque :

Tout vecteur colinéaire à $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de (d). Une droite a donc une infinité de vecteurs directeurs.

Exemple :

Soit (d) : $y = \frac{2}{3}x + 2$. Un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$. Mais il est plus pratique (pour avoir des coordonnées entières) d'utiliser le vecteur $3\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ qui est un autre vecteur directeur de (d).



c. Droites parallèles

Propriété :

Soit les droites (d) d'équation $y = ax + b$ et (d') d'équation $y = a'x + b'$

Les droites (d) et (d') sont parallèles *si et seulement si* $\boxed{a = a'}$

Remarque :
Dans ce cas, le vecteur directeur d'une droite est aussi vecteur directeur de l'autre.

IV. DROITES SECANTES

Propriété :
Soit les droites (d) d'équation $y = \text{a}x + \text{b}$ et (d') d'équation $y = \text{a}'x + \text{b}'$
Les droites (d) et (d') sont sécantes *si et seulement si* $\boxed{\text{a} \neq \text{a}'}$

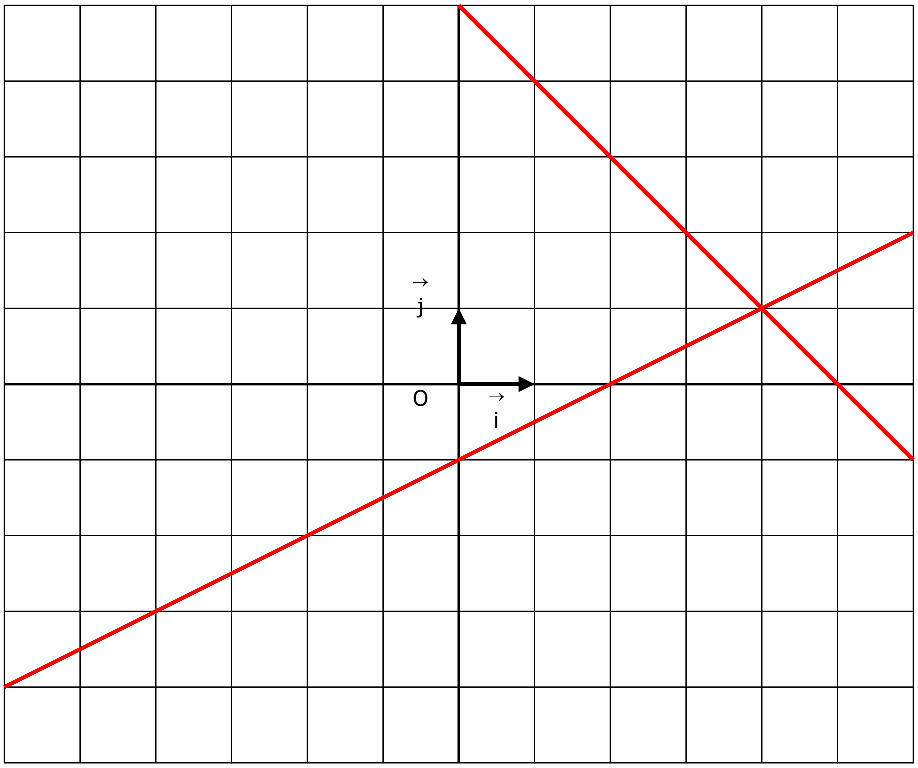
Le point d'intersection des deux droites est le point dont les coordonnées x et y vérifient le système linéaire :

$$\begin{cases} y = \text{a}x + \text{b} \\ y = \text{a}'x + \text{b}' \end{cases}$$

Exemple :

On considère les droites (d) et (d') dont voici les équations : $\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = \frac{1}{2}x - 1 \end{cases}$

On peut résoudre ce système algébriquement (par le calcul) ou graphiquement (en traçant les droites et lisant les coordonnées du point d'intersection).
Dans les deux cas on trouvera : $\boldsymbol{x = 4}$ et $\boldsymbol{y = 1}$



On considère les deux équations suivantes :

❶ $2x - y = 5$ ❷ $x - 4y = -1$

1. Tester chaque couple de solution pour chacune des deux équations :

❶ pour le couple (2 ; 1) : $\mathbf{2x - y = 2 \times 2 - 1}$ $\mathbf{= 4 - 1}$ $\mathbf{= 3}$ **Le couple (2 ; 1) n'est pas solution de ❶**	❷ pour le couple (2 ; 1) : $\mathbf{x - 4y = 2 - 4 \times 1}$ $\mathbf{= 2 - 4}$ $\mathbf{= -2}$ **Le couple (2 ; 1) n'est pas solution de ❷**	❶ pour le couple (7 ; 2) :	❷ pour le couple (7 ; 2) :
❶ pour le couple (1 ;-3) :	❷ pour le couple (1 ;-3) :	❶ pour le couple (-5;-1) :	❷ pour le couple (-5;-1) :
❶ pour le couple (-1; 0) :	❷ pour le couple (-1; 0) :	❶ pour le couple (0 ;-5) :	❷ pour le couple (0 ;-5) :
❶ pour le couple (3 ; 1) :	❷ pour le couple (3 ; 1) :	❶ pour le couple (2 ;-1) :	❷ pour le couple (2 ;-1) :

2. Placer les points **A(2 ; 1)**, B(7 ; 2), C(1 ; -3), D(-5 ; -1), E(-1 ; 0), F(0 ; -5), G(3 ; 1) et H(2 ; -1) dans le repère en utilisant les couleurs suivantes :

- **Rouge** si le couple $(x ; y)$ est solution de l'équation (1)
- **Vert** si le couple $(x ; y)$ est solution de l'équation (2)
- **Gris** si le couple $(x ; y)$ n'est solution d'aucune équation