$$(x+3)(x-5)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ \text{ou} \\ x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ \text{ou} \\ x=-5 \end{cases}$$

b. Equations du type $x^2 = a$

Théorème :

Soit $a > 0$; l'équation « $x^2 = a$ » admet exactement deux solutions, $\sqrt{a}$ et - $\sqrt{a}$

Démonstration :

$$x^2 = a \Leftrightarrow x^2 - a = 0 \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{a}^2 = 0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a}) \Leftrightarrow \begin{cases} x-\sqrt{a}=0 \\ \text{ou} \\ x+\sqrt{a}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{a} \\ \text{ou} \\ x=-\sqrt{a} \end{cases}$$

Exemple :

$x^2 = 3$ équivaut à $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ \text{ou} \\ x=-\sqrt{3} \end{cases}$

Attention : il ne faut pas confondre - $\sqrt{3}$ (qui est l'opposé de $\sqrt{3}$) et $\sqrt{\mathbf{-3}}$ qui n'existe pas !

Remarques :

- Si $a = 0$, l'équation « $x^2 = a$ » équivaut à « $x = 0$ ».
- Si $a < 0$, l'équation « $x^2 = a$ » n'a aucune solution dans $\mathbb{R}$.

c. Signe d'un produit

Le signe d'un produit est déterminé par le nombre de facteurs négatifs.
- Si ce nombre est pair, alors le produit est positif.
- Si ce nombre est impair, alors le produit est négatif.

Exemple :

Etude du signe de A = $(3x-2)(-4x-7)$ à l'aide d'un tableau de signe :

x		$-\frac{7}{4}$		$\frac{2}{3}$	
$3x-2$	+	0	−		−
$-4x-7$	−		−	0	+
$(3x-2)(-4x-7)$	−	0	+	0	−

Conclusion :

A est positif quand $x \in [-\frac{7}{4} ; \frac{2}{3}]$

A est négatif quand $x \in]-\infty ; -\frac{7}{4}] \cup [\frac{2}{3} ; +\infty[$

« $\cup$ » signifie « Union » ou « réunion » de deux intervalles.

d. Inéquation produit

Pour résoudre ces inéquations en procédant de la façon suivante :

1. On se ramène à une inéquation dont le second membre est nul.
2. On factorise l'autre membre.

3. On dresse un tableau de signe.
4. On en déduit l'ensemble des solutions de l'inéquation.

Exemple :

La solution de l'inéquation $(3x - 2)(-4x - 7) > 0$ est l'intervalle $]-\frac{7}{4} ; \frac{2}{3}[$

III. FONCTION CARRE

Tout nombre réel a un carré.
On appelle **fonction carré** la fonction $f : x \mapsto x^2$ définie sur $]-\infty ; +\infty[$.

a. Sens de variation de la fonction

Théorème :

La fonction $f : x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0; +\infty[$
La fonction $f : x \mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty ; 0]$

Démonstration 1 :

Soit a et b positifs tels que $a < b$
Si on multiplie par a positif : $a^2 < ab$. Et si on multiplie par b positif : $ab < b^2$. donc :

$$a^2 < ab < b^2$$

Donc f est croissante sur $[0; +\infty[$

Soit a et b négatifs tels que $a < b$
Si on multiplie par a négatif : $a^2 > ab$. Et si on multiplie par b négatif : $ab > b^2$. donc :

$$a^2 > ab > b^2$$

Donc f est croissante sur $]-\infty ; 0[$

ou

Démonstration 2 :

Soit a et b réels tels que $a < b$.
Etudions le signe de $f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$

Dans tous les cas $b - a > 0$ car $a < b$.

Si a et b sont positifs alors $b + a > 0$
donc $(b - a)(b + a) > 0$
donc f est croissante sur $[0; +\infty[$

Si a et b sont négatifs alors $b + a < 0$
donc $(b - a)(b + a) < 0$
donc f est décroissante sur $]-\infty ; 0[$

Conclusion :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		↘	0	↗	

b. Courbe représentative

D'après le tableau de variation, la courbe représentatif de la fonction $f : x \mapsto x^2$ admet pour minimum 0 quand x vaut 0.

Pour tout x, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$
On dit alors que cette fonction est **paire**, ce qui signifie qu'un nombre et son opposé ont toujours la même image.

Graphiquement, cela signifie que pour toute valeur de x, les points de la courbe M(x ; $f(x)$) et M'($-x$; $f(-x)$) ont la même ordonnée, et sont donc symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

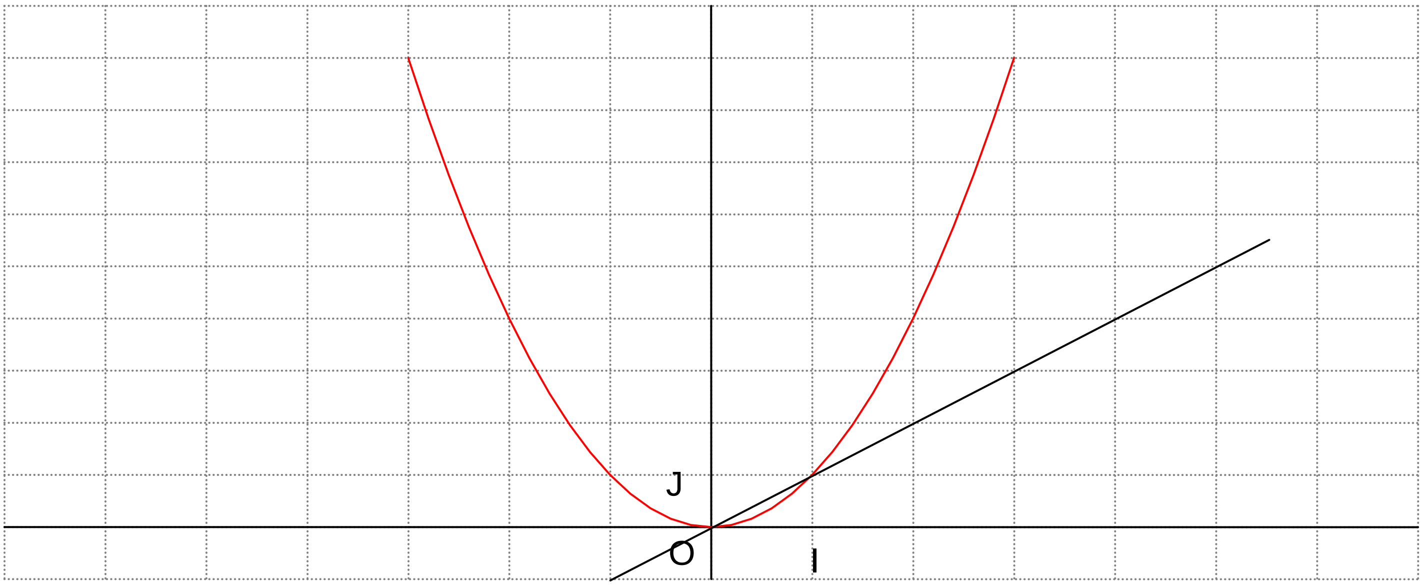
Pour construire la courbe, on va choisir quelques valeurs positives de x, puis on complétera le tracé par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées :

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	1	4	9

Remarque :

$\frac{1}{1} \neq \frac{2}{4}$: la fonction carré <u>n'est pas linéaire</u>.

$\frac{4-1}{2-1} \neq \frac{9-4}{3-2}$: l'accroissement n'est pas linéaire, donc la fonction carré <u>n'est pas affine</u>.



Cette courbe s'appelle une **parabole**.

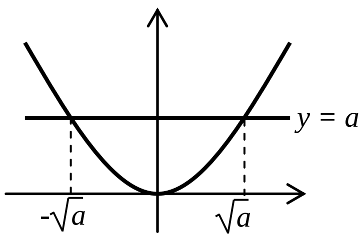
Remarques :

Si $0 < x < 1$, on a $x^2 < x$: la courbe est au dessous de la droite $y = x$

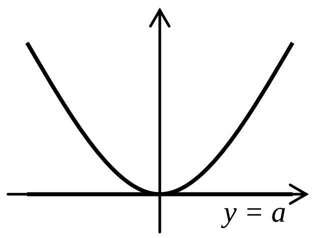
Si $x > 1$, on a $x^2 > x$: la courbe est au dessus de la droite $y = x$

Toute équation du type « $x^2 = a$ » admet :

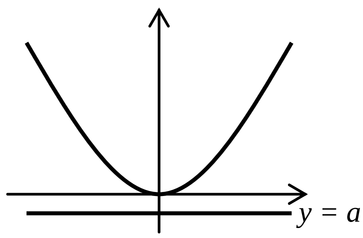
- Si $a > 0$, deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$
- Si $a = 0$, une solution unique : 0
- Si $a < 0$, aucune solution



2 solutions



1 seule solution



Pas de solution