2N3 - FONCTION CARRE ET SECOND DEGRE

EXERCICE 4

On considère la fonction h : x = -3x + 5 définie sur l'intervalle]-∞ ; +∞[.
Démontrer que h est strictement décroissante sur]-∞ ; +∞[?

RAPPEL :

f est **croissante** sur I signifie que, pour tous réels a et b de I, f(a) et f(b) sont dans le même ordre que a et b.
f est **décroissante** sur I signifie que, pour tous réels a et b, f(a) et f(b) sont dans l'ordre inverse de a et b.

EXERCICE 1

Compléter par < ou > :

a < b et f(a) < f(b)	⇔	b – a ...... 0 et f(b) – f(a) 0	⇔	$\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 0
a < b et f(a) > f(b)	⇔	b – a ...... 0 et f(b) – f(a) 0	⇔	$\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 0
a > b et f(a) < f(b)	⇔	b – a ...... 0 et f(b) – f(a) 0	⇔	$\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 0
a > b et f(a) > f(b)	⇔	b – a ...... 0 et f(b) – f(a) 0	⇔	$\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 0

Le nombre $T = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est appelé **taux de variation** de f. On admet la propriété suivante :

f est **croissante** sur I ⇔ T est **positif** pour tout a et b appartenant à I
f est **décroissante** sur I ⇔ T est **négatif** pour tout a et b appartenant à I

EXERCICE 2 - Étude d'une fonction affine

Soit f la fonction définie sur]-∞ ; +∞[par f : x = -2x + 3

1. Montrer que f(b) – f(a) = -2(b – a)

2. On suppose que a < b. Calculer $T = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Quel est le signe de T ?

3. En déduire le sens de variation de f sur]-∞ ; +∞[.

EXERCICE 3 - Étude de la fonction « carré »

Soit g la fonction définie sur]-∞ ; +∞[par g : $x \mapsto x^2$

1. Montrer que g(b) – g(a) = (a + b)(b – a)

2. On suppose que a < b. Calculer $T = \dfrac{g(b) - g(a)}{b - a}$ en le simplifiant au maximum.

3. a. Quel est le signe de T si 0 < a < b ?
b. Quel est le signe de T si a < b < 0 ?

4. En déduire le tableau de variation de g.

EXERCICE 4 - Étude d'une fonction polynôme du second degré

Soit h la fonction définie sur]-∞ ; +∞[par h : x =x^2 – 6x + 5

1. Montrer que h(b) – h(a) = (b – a)(a + b – 6)

2. On suppose que a < b. Calculer $T = \dfrac{h(b) - h(a)}{b - a}$ en le simplifiant au maximum.

3. a. Quel est le signe de T si 3 ≤ a < b ?
b. Quel est le signe de T si a < b < 3 ?

4. En déduire le tableau de variation de h.

EXERCICE 5 - Étude d'une fonction rationnelle

Soit k la fonction définie sur]-∞ ; 3[∪]3 ; +∞[par k : $x = \dfrac{5}{x - 3}$

1. Montrer que $k(b) - k(a) = \dfrac{-5(b - a)}{(a - 3)(b - 3)}$

2. On suppose que a < b. Calculer $T = \dfrac{k(b) - k(a)}{b - a}$ en le simplifiant au maximum.

3. a. Quel est le signe de T si 3 ≤ a < b ?
b. Quel est le signe de T si a < b < 3 ?

4. En déduire le tableau de variation de k.

CONTENUS	CAPACITES ATTENDUES	COMMENTAIRES
Expressions algébriques Transformations d'expressions algébriques en vue d'une résolution de problème.	▪ Associer à un problème une expression algébrique. ▪ Identifier la forme la plus adéquate (développée, factorisée) d'une expression en vue de la résolution du problème donné. ▪ Développer, factoriser des expressions polynomiales simples ; transformer des expressions rationnelles simples.	Les activités de calcul nécessitent une certaine maîtrise technique et doivent être l'occasion de raisonner. Les élèves apprennent à développer des stratégies s'appuyant sur l'observation de courbes, l'anticipation et l'intelligence du calcul. Le cas échéant, cela s'accompagne d'une mobilisation éclairée et pertinente des logiciels de calcul formel.
Équations Résolution graphique et algébrique d'équations.	▪ Mettre un problème en équation. ▪ Encadrer une racine d'une équation grâce à un algorithme de dichotomie.	Pour un même problème, combiner résolution graphique et contrôle algébrique. Utiliser, en particulier, les représentations graphiques données sur écran par une calculatrice, un logiciel.
Inéquations Résolution graphique et algébrique d'inéquations.	▪ Modéliser un problème par une inéquation. ▪ Résoudre une inéquation à partir de l'étude du signe d'une expression produit de facteurs du premier degré. ▪ Résoudre algébriquement les inéquations nécessaires à la résolution d'un problème.	Pour un même problème, il s'agit de : ▪ combiner les apports de l'utilisation d'un graphique et d'une résolution algébrique, ▪ mettre en relief les limites de l'information donnée par une représentation graphique. Les fonctions utilisables sont les fonctions polynômes de degré 2
Fonctions de référence Variations de la fonction carré. Fonctions polynômes de degré 2.	▪ Connaître les variations de la fonction carré. ▪ Représenter graphiquement la fonction carré. ▪ Connaître les variations des fonctions polynômes de degré 2 (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes.	En particulier, faire remarquer que la fonction carré n'est pas linéaire. Les résultats concernant les variations des fonctions polynômes de degré 2 (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes sont donnés en classe et connus des élèves, mais peuvent être partiellement ou totalement admis. Savoir mettre sous forme canonique un polynôme de degré 2 n'est pas un attendu du programme

I. EXPRESSIONS ALGEBRIQUES

Dans une expression algébrique, certains nombres sont représentés par des lettres. On ne peut donc pas les calculer. Mais on peut les transformer (réduire, développer, factoriser) pour mieux les exploiter.

a. Distributivité

Pour tous nombres k, a et b, on a :

→ Développer →

$$k(a+b) = ka + kb$$

← Factoriser ←

Exemples :

$5(2x+3) = 10x + 15$ $\quad$ $3x(1-2x) = 3x - 6x^2$ $\quad$ $2x^2(7x+3) = 14x^3 + 6x^2$

b. Double distributivité

Pour tous nombres a, b, c et d on a :

→ Développer →

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

← Factoriser ←

Exemple :

$f(x) = (4x-3)(2x+5)$

$f(x) = 8x^2 + 20x - 6x - 15$

$f(x) = 8x^2 + 14x - 15$

c. Identités remarquables

Pour tous nombres a et b on a :

→ Développer →

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

← Factoriser ←

d. Polynôme du second degré

On appelle **polynôme du second degré** toute expression de la forme $ax^2 + bx + c$ avec a, b et c sont des nombres réelles, et $a \neq 0$.

Exemples :

$A(x) = x^2 + 8x - 9$ et $B(x) = -x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{7}$ sont des polynôme du second degré.

Le polynôme $A(x)$ peut s'écrire sous plusieurs formes :
- Forme développée : $A(x) = x^2 + 8x - 9$
- Forme factorisée : $A(x) = (x-1)(x+9)$
- Forme **canonique** : $A(x) = (x+4)^2 - 25$

On appelle forme canonique d'un polynôme du second degré toute écriture où la variable x n'apparaît qu'une seule fois.

Exemple :

On veut mettre sous forme canonique $A(x) = x^2 + 8x - 9$.

$A(x) = x^2 + 8x - 9$	
$A(x) = x^2 + 2 \times 4 \times x - 9$	(1) On fait apparaître une expression du type « a² ± 2ab… »
$A(x) = x^2 + 2 \times 4 \times x + 4^2 - 4^2 - 9$	(2) On rajoute/enlève un « + b² » pour pouvoir factoriser.
$A(x) = x^2 + 2\times 4x + 4^2 - 16 - 9$	(3) On reconnaît une identité remarquable que l'on va factoriser.
$\boxed{A(x) = (x+4)^2 - 25}$	(4) On obtient $A(x)$ sous forme canonique.

Remarque :

Tout polynôme peut être mis sous forme développée ou canonique. Mais tous ne sont pas factorisables (en l'état actuel de nos connaissances…).

II. EQUATIONS ET INEQUATIONS PRODUIT

a. Equations du type (ax +b)(cx + d) = 0

Théorème :

Un produit $A \times B$ est nul **si et seulement si** $A = 0$ ou $B = 0$

Autre formulation : $A \times B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ \text{ou} \\ B = 0 \end{cases}$

Exemple :