Programme du Burkina Faso

Unité-Progrès-Justice

MAREMATHS

3ème

2023

Plus des exercices corrigés

COURS INTEGRAL DE MATHEMATIQUES

- Table trigonometrique
- Table des racines carées

MARE Christophe

Professeur certifié de Mathematiques et Physiques-Chimie

MAREMATHS

COURS DE MATHEMATIQUES

3ème

- *Ce cours est conçu sur la base du curriculum en vigueur de mathematiques du Burkina-.*
- *Il prend en compte les exigences des enseignants de Mathematiques et des apprenants*
- *Il va quelques fois au déla du programme de 3ème pour permettre aux eleves de bien amorcer la classe de 2nde C*

MARE Christophe Professeur Certifié de Mathématiques et PC WhatsApp 77763585

SOMMAIRES………2

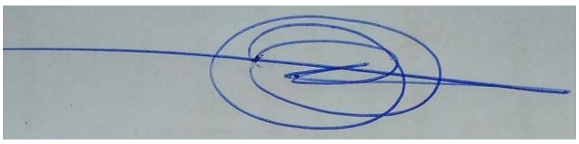
Chapitre1 : Les nombres réels………………………………………………………………………3
Chapitre2 : La multiplication d'un vecteur par un nombre réel………………………………10
Chapitre3 : Les coordonnées d'un vecteur…………………………………………………………16
Chapitre4 : La racine carrée…………………………………………………………………………23
Chapitre5 : Les équations et les inéquations dans IR…………………………………………27
Chapitre6 : Les monômes et les polynômes………………………………………………………31
Chapitre7 : Les fonctions rationnelles………………………………………………………………34
Chapitre8 : Le rapport de projection………………………………………………………………36
Chapitre9 : Le théorème de Pythagore……………………………………………………………40
Chapitre10 : Le théorème de Thalès…………………………………………………………………45
Chapitre11 : Le repère orthonormé-Distance………………………………………………………53
Chapitre12 : Les droites-Equations…………………………………………………………………57
Chapitre13 : Les systèmes d'équations-Les systèmes d'inéquation……………………………66
Chapitre14 : Les angles inscrits………………………………………………………………………74
Chapitre15 : La trigonométrie dans un triangle rectangle………………………………………78
Chapitre16 : Les applications linéaires-Les applications affines………………………………83
Chapitre17 : Les positions relatives d'une droite et d'un cercle………………………………92
Chapitre18 : Statistiques………………………………………………………………………………95
Chapitre19 : Les isométries du plan………………………………………………………………103
Chapitre20 : Les solides………………………………………………………………………………107

Table trigonométrique……………………………………………………………………113
Table des racines carrées des nombres de 1à 99…………………………………114

Ce cours est conçu sous la base du nouveau curriculum et prend en compte tout le programme de Mathématiques au Burkina Faso.
Vos suggestions seront les bienvenues pour l'amélioration de la version octobre 2024

Faites-en bon usage chers utilisateurs

Le Cr



Mail : marechristophe1988@gmail.com

CHAPITRE 1 : LES NOMBRES REELS

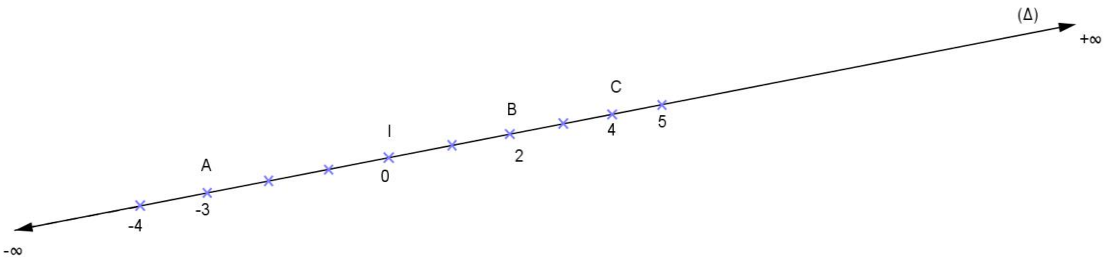
I)RAPPELS SUR LES ENSEMBLES DE NOMBRES

Tous nombres qui existent sont regroupés en deux grands groupes :
-les nombres rationnels ;
-les nombres irrationnels.
*Tous les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction sont appelés nombres rationnels : ce sont les entiers naturels (IN) ; les entiers relatifs ($\mathbb{Z}$) ; les décimaux relatifs (ID) et l'ensemble des nombres rationnel ($\mathbb{Q}$) ; avec
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$
Exemple :3 ;-2 ; 7,2 ;2,$\underline{55}$;0; $(0 = \frac{0}{2} = \frac{0}{5}$ =---).
*Il existe des nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous la forme d'une fraction : ce sont les irrationnels.
Exemples :π ;-2π ;$\sqrt{2}$;........
NB :-Tout nombre rationnel est une suite décimale illimitée périodique(SDIP)
Exemple :$\frac{5}{2}$=2,5$\underline{0}$; $\frac{10}{3}$=3,$\underline{3}$
-Un nombre irrationnel est une suite décimale illimitée non périodique.
-Un nombre réel est un nombre dont la partie décimale est périodique (nombre rationnel) ou non périodique (nombre irrationnel).
-L'ensemble des nombres réels se note :IR et on pose : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

II)LES INTERVALLES DE IR

1)La droite graduée

Une droite graduée est une droite sur laquelle on place un point origine correspondant au réel 0 et tous les autres réels se placent à des intervalles réguliers.
*à droite de zéro (0) ; on a les nombres réels positifs, rangés du plus petit vers le plus grand nombre imaginaire noté $+\infty$(plus l'infini).
*à gauche de zéro (0) ; on a les nombres réels négatifs rangés du plus petit nombre imaginaire noté -∞(moins l'infini) au plus grand qui est 0



On dit que delta (Δ) est une droite graduée.

Remarques :
*Tout nombre réel à sa place sur la droite graduée, c'est pourquoi on dit que la droite graduée représente l'ensemble IR.
*Tout point de la droite graduée correspond à un nombre réel qui est son abscisse sur la droite graduée.
Exemple : A(-3) et C(4)

2)Définition

Un intervalle est un segment de droite. On note un segment de droite à l'aide d'un crochet. Pour écrire un intervalle on utilise les crochets.

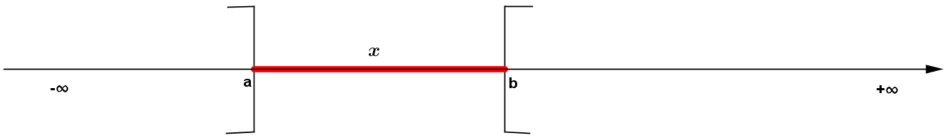
a) Intervalle ouvert

Etant donné des réels a et b

L'ensemble des réels x tels que $a < x < b$ est appelé intervalle ouvert d'origine a et d'extrémité b. On le note]a ;b[

$a < x < b \leftrightarrow x \in]a; b[$(les réels a et b n'appartiennent pas à l'intervalle)

On représente cet intervalle de la manière suivante

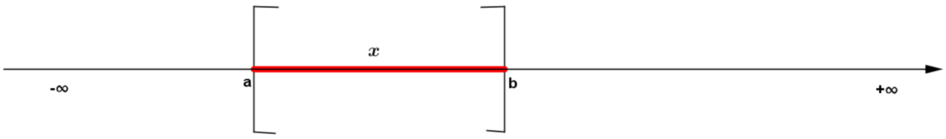


b) Intervalles fermés

Etant donné les réels a et b. L'ensemble des réels x tel que $a \leq x \leq b$ est appelé intervalle fermé d'origine a et d'extrémité b. On le note : $a \leq x \leq b \leftrightarrow x \in [a; b]$

Les réels a et b appartiennent à l'intervalle.

On représente cet intervalle de la manière suivante :



Exercice d'application

Ecrire l'ensemble des réels x et y tels que $-2 < x < 4 \ \ et - 3 \leq y \leq 2$ sachant que x et y sont des entiers relatifs.

Résolution

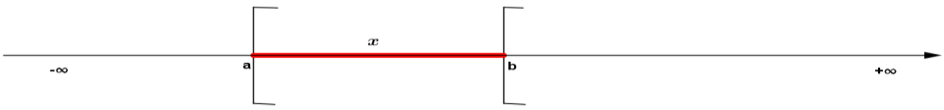
$-2 < x < 4 \leftrightarrow x \in]-2; 4[\leftrightarrow x \in \{-1; 0; 1; 2; 3\}$

$-3 \leq y \leq 2 \leftrightarrow y \in [-3; 2] \leftrightarrow y \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$

c)Intervalle semi-ouvert ou semi-fermé

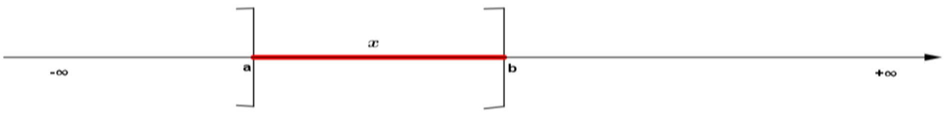
Etant donné les nombres réels a et b. L'ensemble des réels x tels que $a \leq x < b \ (ou\ a < x \leq b)$ est un intervalle semi-ouvert ou semi-fermé.

*$a \leq x < b \leftrightarrow x \in [a; b[$



Le réel a appartient à l'intervalle tandis que le réel b n'appartient pas à l'intervalle.

* $a < x \leq b \leftrightarrow x \in]a; b]$

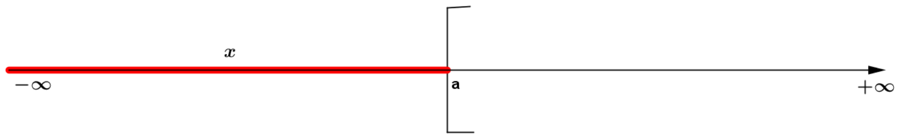


Le réel a n'appartient pas à l'intervalle tandis que b appartient à l'intervalle.

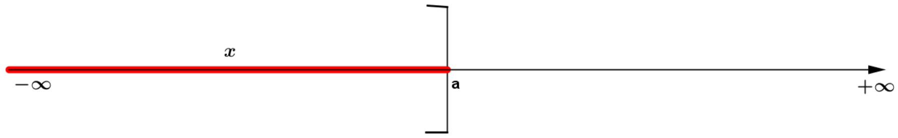
d)Intervalles illimités

*L'ensemble des réels x tels que $x < a \ (ou\ x \leq a)$ est un intervalle illimité à gauche

$\rightarrow x < a \leftrightarrow x \in]-\infty; a[$

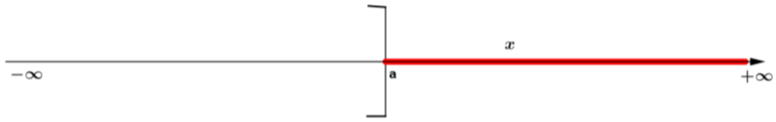


$\rightarrow x \leq a \leftrightarrow x \in]-\infty; a]$

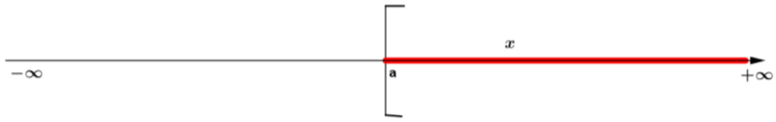


*L'ensemble des réels x tels que $x > a$ $(ou\ x \geq a)$ est un intervalle illimité à droite.

$\rightarrow\ x > a \leftrightarrow x \in]a; +\infty[$



$\rightarrow x \geq a \leftrightarrow x \in [a; +\infty[$



NB :IR* signifie IR privé de zéro (0)

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$; $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

$\mathbb{R}^- =]-\infty; 0]$;$\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$;$\mathbb{R}^{*+} =]0; +\infty[$;$\mathbb{R}^{*-} =]-\infty; 0[$

-Lorsqu'on a "et" entre deux inégalités ; on fait l'intersection (⋂) des deux intervalles pour trouver l'intervalle solution.

-Lorsqu'on a "ou" entre deux inégalités ; on fait la réunion (⋃) des deux intervalles pour trouver l'intervalle solution.

Exercices d'applications

Exercice 1

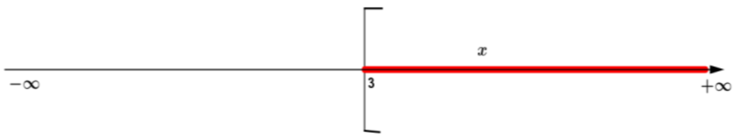
Représenter sur une droite graduée l'ensemble des réels dans chacun des cas suivants et préciser ou donner l'intervalle solution.

$a) x < 3\ et\ x \geq -2$; $b) x > 5\ et\ 3 < x$; $c) y > 7\ et\ y < -3$

$d) 3t < 6\ ou\ t \geq 0$; $e) - z \leq 0\ ou\ z \geq 1$; $f) x \geq \frac{1}{2}\ ou - 1 < x \leq \frac{3}{4}$

Exercice n°2

Compléter le tableau ci-dessous

Intervalle	Inégalité	Représentation graphique
	$-7 \leq x < 2$	
$x \in [-3; +\infty[$		
		
$y \in]-4 ;0[$		
	$-3 > y$	

III)ENCADREMENT D'UN NOMBRE REEL

1)Encadrement d'une somme

a)Propriété

Etant donné les nombres réels $a; a'; b; b'; x\ et\ x'$

Si $a < x < b\ et\ a' < x' < b' alors\ a + a' < x + x' < b + b'$ est un encadrement de la somme des deux nombres réels x et x'.

Disposition pratique

$$\begin{array}{rccccc} & a & < & x & < & b \\ + & a' & < & x' & < & b' \\ \hline & a + a' & < & x + x' & < & b + b' \end{array}$$

Remarque :Pour to ut nombre réel m ;si $a < x < b$ alors $a + m < x + m < b + m$

b) Exemple/Exercice

1)Soient x et y deux nombres réels tels que -11<x<-9 et 16<y<19

Donner un encadrement de x+y

2)Sachant que 3,14<π<3,15, donner un encadrement de π+3

2)Encadrement d'un produit

a) Propriété

Etant donné les nombres réels positifs a, a', b, b', x et x'.

Si a < x < b et a' < x' < b' alors a.a' < x.x' < b.b' est un encadrement du produit des deux nombres réels x et x'.

Dans la pratique on dispose les deux inégalités de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccccc} & a & < & x & < & b \\ \times & a' & < & x' & < & b' \\ \hline & a.a' & < & x.x' & < & b.b' \end{array}$$

b) Exemple/Exercice

1)On donne $3 \leq x \leq 5\ et\ \frac{1}{6} \leq y \leq \frac{2}{5}$;donner un encadrement de $x.y$

2)Les dimensions en mètre d'un champs rectangulaire de dimensions L et l vérifient :

$263 \leq L \leq 264\ et\ 115 \leq l \leq 116$

Donner un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$ de ce champ.

3)Encadrement de l'opposé

Etant donné les nombres réels a, b et x.

Si $a < x < b$ alors $(-1) \times a > (-1) \times x > (-1) \times b \leftrightarrow -a > -x > -b\ il\ résulte\ que$ $\boldsymbol{-b < -x < -a}$ est l'encadrement de $-x$

Exercice d'application

Donner un encadrement de $-t$ dans chacun des cas suivants :

$$a)\frac{3}{4} \geq t > 0 \quad ;b) -4 < t < -2 \quad ;c)1 > t > -1 \quad ;d) -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \quad ;e)0 > t > -1$$

4)Encadrement d'une différence

Soient les réels $x\ et\ y$ tels que $a < x < b\ et\ a' < y < b'$

Déterminons un encadrement de $x - y$
Pour trouver un encadrement de $x - y$ il faut :
*Savoir que $\boldsymbol{x - y = x + (-y)}$;
*Encadrer d'abord $\boldsymbol{-y}$; ensuite $\boldsymbol{x + (-y)}$
On a: $a < x < b\ et\ a' < y < b' \leftrightarrow a < x < b\ et - b' < -y < -a'; alors$:

$$\boldsymbol{a - b' < x - y < b - a'}$$

Exemple/Exercice1
1)Soient les réels x et y tel que $9 < x < 11\ et\ 4 < y < 7$. Déterminer un encadrement de $x - y$
2)on donne $-12 \leq x \leq -8\ et\ \ 1 \leq y \leq 4$ trouver un encadrement de $x - y$

Exemple/Exercice2 : BEPC 2012(2nd tour)
Deux nombres réels z et t sont tels que 2≤z≤7 et -5≤t≤-3. L'encadrement de z-t est alors :
$a) - 3 \leq z - t \leq 4$; $b)10 \leq z - t \leq 21$; $c)5 \leq z - t \leq 12$; $d)7 \leq z - t \leq 10$

5)Encadrement de l'inverse

Soient $a; b\ et\ x$ trois nombres réels tous non nul et de meme signe tel que $a \leq x \leq b$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{b}$; il résulte que $\boldsymbol{\frac{1}{b} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}}$ est l'encadrement de $\frac{1}{x}$.
Exemple/Exercice
Donner un encadrement de $\frac{1}{z}$ dans chacun des cas suivants :
$a)1 < z \leq 11$; $b)10 \geq z \geq 7$; $c) - 4 < z < -2$; $d) - 7 \geq z > -12$

6)Encadrement d'un quotient

Soient $a\,; b\,; a'\,; b'\,; x\ et\ y\ des\ reels\ \ (a'\,; b'et\ y\ tous\ non\ nul\ positifs)\ tel\ que\ a \leq x \leq b\ et$
$a' \leq y \leq b'$. Déterminons un encadrement de :$\frac{x}{y}$
Pour déterminer un encadrement de $\frac{x}{y}$ il faut :
*Savoir que $\boldsymbol{\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}}$
*Encadrer d'abord $\boldsymbol{\frac{1}{y}}$; ensuite $\boldsymbol{x \times \frac{1}{y}}$
On a :$a \leq x \leq b\ et\ a' \leq y \leq b' \leftrightarrow a \leq x \leq b\ et\ \frac{1}{b'} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{a'}$ alors :$\boldsymbol{\frac{a}{b'} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{b}{a'}}$
Exemple/Exercice
Trouver un encadrement de $\frac{x}{y}$ dans chacun des cas suivants :
$a)8 \leq x \leq 14\quad et\quad 2 \leq y \leq 4$; $b)3 < x < 10\quad et\ \ 4 < y < 6$
$c)5 < x < 6\ \ et\ 1 < y < 2$; $d)\frac{1}{2} \geq x \geq \frac{1}{4}\ \ et\ \frac{1}{2} \geq y \geq \frac{1}{6}$

Remarques
Soit le réel t tel que $1{,}22 < t < 1{,}23$
*1,22 est la valeur approchée de t par défaut à 10^{-2} près (ordre 2)
*1,23 est la valeur approchée de t par excès à 10^{-2} près (ordre2)

IV)VALEUR ABSOLUE-DISTANCE DE DEUX REELS

1)Valeur absolue

a) Activité

Compléter le tableau suivant :

b	-6	-3,9	0	2	9,45
-b					
$\|b\|$					

b) Définition

On appelle valeur absolue d'un réel x , le réel noté $|x|$ et définie par : $\begin{cases} si\ x \geq 0\ alors\ |x| = x \\ si\ x \leq 0\ alors\ |x| = -x \end{cases}$

c)Conséquences

Pour tout nombre réel x on a :

* $|x| \geq 0$ (la valeur absolue est toujours positive)
* $|x| = 0\ si\ x = 0$
*$x = 0\ si\ |x| = 0$

Attention : Si $|x| = a$ *avec* $a < 0$ *alors* x *n'existe pas.*

2)Distance de deux réels

a) Activité

1)Tracer (D) une droite graduée et placer les point A(-5) ;B(-1) ;C(0) ;D(2,5) et E(4).
2)Calculer les distances AC ; DA ; CB et BD.

b) Définition

Soient a et b deux réels. On note A et B les points d'abscisses respectives a et b sur la droite graduée.

On appelle distance des réels a et b le réel $|b-a|$.

On la note d(a, b) et on a d(a,b)=AB=$|b-a|$

c) Conséquences

*Si a=b alors d(a,b)=0
*Si d(a,b)=0 alors a=b
*d(a,b)=d(b,a)

3)Ecriture d'une expression sans le symbole de la valeur absolue

Pour écrire $|ax+b|$ sans le symbole de la valeur absolue ;il faut suivre le principe suivant :

1er cas : a> $\mathbf{0}$

Posons $\boldsymbol{ax+b=0 \leftrightarrow x=-\frac{b}{a}}$

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$\|\boldsymbol{ax+b}\|$	$-(\boldsymbol{ax+b})$ $\boldsymbol{-ax-b}$	0	$+(\boldsymbol{ax+b})$ $\boldsymbol{ax+b}$

$$|ax+b| = \begin{cases} -ax-b \ si \ x \in \left]-\infty ; -\frac{b}{a}\right] \\ ax+b \ si \ x \in \left]-\frac{b}{a} ; +\infty\right[\end{cases}$$

2ème cas : a< 0

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$\lvert ax+b\rvert$	$+(ax+b)$ $ax+b$		$-(ax+b)$ $-ax-b$

$$|ax+b| = \begin{cases} ax+b \ si \ x \in \left]-\infty ; -\frac{b}{a}\right[\\ -ax-b \ si \ x \in \left[-\frac{b}{a} ; +\infty\right[\end{cases}$$

4)Exercice résolu

Exercice1

Ecrire sans le symbole de la valeur absolue les expressions suivantes :

A=$|2x+1|$+$|-x+4|$

B=$|1-2x|$-3$|x-1|$

C=$|3-2x|+3x-2$

Correction

Posons :2x+1=0 ;-x+4=0

x=$-\frac{1}{2}$;x=4

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	4	$+\infty$
$\lvert 2x+1\rvert$	-2x-1	2x+1	2x+1	
$\lvert -x+4\rvert$	-x+4	-x+4	x-4	
A	-3x+3	x+5	3x-3	

A=$\begin{cases} -3x+3 \ si \ x \in \left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right] \\ x+5 \ si \ x \in \left]-\frac{1}{2} ; 4\right] \\ 3x-3 \ si \ x > 4 \end{cases}$

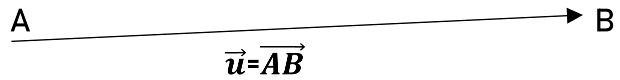
CHAPITRE2 : MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN NOMBRE REEL

I)RAPPELS SUR LES VECTEURS

1)Définition et notation d'un vecteur

Soit (A, B) un couple de point ou bipoint.
L'ensemble des points équipollents au bipoint (A, B) s'appelle un vecteur
Un vecteur contient une infinité de bipoints équipollents. Chaque bipoint est un représentant du vecteur.
Deux bipoints (A ; B) et (A' ;B') sont équipollents signifient que le quadrilatère ABB'A' est un parallélogramme.

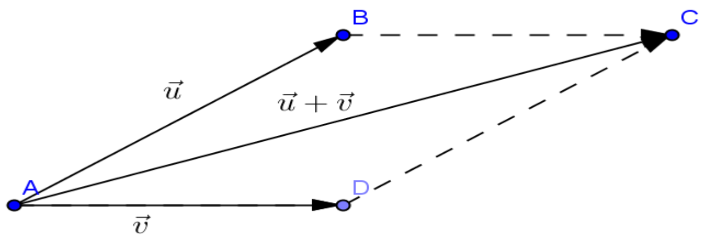
On note $\overrightarrow{AB}$ et on lit vecteur AB
Si le bipoint (A ; B) est un représentant du vecteur $\vec{u}$, on écrit $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$



Un vecteur est défini par : *Sa direction
*son sens : matérialisé par une flèche
*Sa longueur ou mesure

2)Addition vectorielle

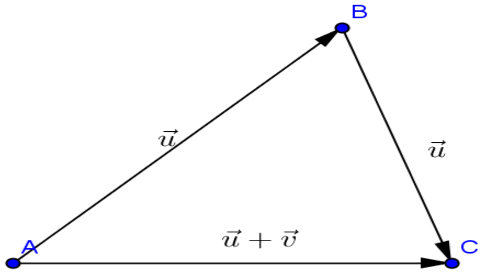
On sait que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$;Cette égalité est connue sous le nom de relation de CHASLES.
Les vecteurs de type : $\overrightarrow{AA}; \overrightarrow{BB}; \overrightarrow{CC}$; ... Representent le vecteur nul. $(\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \ldots = \vec{0})$
Tout vecteur du plan admet un vecteur opposé et la somme des deux vecteurs opposés est égale au vecteur nul.
Exemple :$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont deux vecteurs opposés; alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$
+Lorsque deux vecteurs ont une même origine ; alors leur somme est la diagonale du parallélogramme formé à partir de ces deux vecteurs.
Exemple
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ déterminons le vecteur somme $\vec{u}$+$\vec{v}$.
$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ car $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$; $alors$ $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$



+Lorsque deux vecteurs sont tels que l'extrémité de l'un correspond à l'origine de l'autre alors leur somme est le troisième coté du triangle formé par les deux vecteurs.

Exemple

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.Déterminons le vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$



$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

3)Propriétés de l'addition vectorielle

L'addition vectorielle admet trois propriétés :

*Propriété 1 : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$: l'addition vectorielle est commutative.

*Propriété 2 :$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$l'addition vectorielle est associative.

*Propriété 3 : $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$:l'addition vectorielle admet le vecteur nul comme élément neutre.

II)MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN REEL

1)Activité

Soient A et B deux points distincts de la droite (D) tels que AB=2cm (unité 1cm).

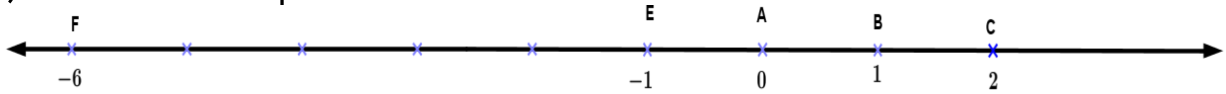
1)Construire le points C et E tels que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB}$

2)Donner l'abscisse des points C et E dans le repère (A ;B)

3)Placer le point F d'abscisse -6 dans le repère (A ; B) et exprimer $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$

Solution

1) Construisons les points C et E



2)Donnons l'abscisse des points C et E dans le repère (A ;B)

On a :C(2) et E(-1)

3)Plaçons le point F d'abscisse -6 et exprimons $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$

On a :F(-6) ;A(0) et B(1) ;alors $\overrightarrow{AF} = -6\overrightarrow{AB}$

2)Définition

A et B étant deux points distincts du plan, k étant un réel quelconque :

k.$\overrightarrow{AB}$ désigne le vecteur $\overrightarrow{AC}$ ou C est le point d'abscisse k dans le repère (A, B).

De façon générale,$\vec{u}$ étant un vecteur et k un réel quelconque, il existe un vecteur $\vec{v}$ définit par :$\vec{v}$=k.$\vec{u}$.

Le vecteur $\vec{v}$ ainsi définit est appelé produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k.

3)remarques

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs du plan non nul, tel que $\overrightarrow{AC}$=k.$\overrightarrow{AB}$.

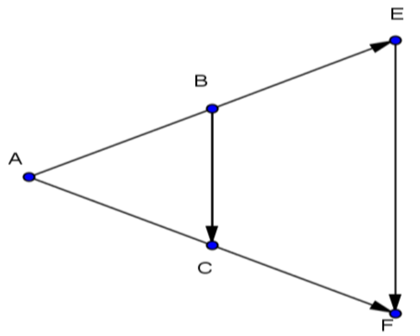
-Quelque soit le réel k, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont la même direction ;
-si k>0, c'est-à-dire k est strictement positif, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont le même sens.
-si k< 0, c'est-à-dire k est strictement négatif alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont des sens opposés.
Par conséquent : $\overrightarrow{AC} = k.\overrightarrow{AB} \leftrightarrow AC = |k|.AB$

3)Propriété

Pour tous réel x et y et pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$; on a :
$a)x(\vec{u} + \vec{v}) = x\vec{u} + x\vec{v}$; $b)x\vec{u} + y\vec{u} = (x + y)\vec{u}$; $c)x(y\vec{u}) = (xy)\vec{u}$

Exemple/Exercice

A, B et C sont trois points non alignés du plan. Construisons les points E et F tel que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{BC}$ $et\ montrons\ que$ $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AC}$



Démonstration

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{\boldsymbol{AE}} + \overrightarrow{\boldsymbol{EF}} = \mathbf{2}(\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BC}}) = \mathbf{2}\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$

Exercices d'application

Exercice1

(Δ) es une droite graduée (unité :1cm), on considère sur la droite (Δ) les points A, B, C et D d'abscisses respectives 3 ; -2 ; -1 et 5.
1) Placer les points A ; B ; C et D sur (Δ).
2) Calculer la distance AB ; CA ; DA et DC
3) Etablir une relation entre les vecteurs :
$a)\overrightarrow{DC}\ et\ \overrightarrow{DA}$; $b)\overrightarrow{CA}\ et\ \overrightarrow{DA}$; $c)\overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{DC}$

Exercice2

Placer trois points A ;B et C du plan non alignés. Soit M le point du plan défini par : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 2(\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA})$. Placer le point M après avoir réduire l'expression du vecteur $\overrightarrow{AM}$

Correction

Exercice1

1)Trivial
2)Trivial
3)La relation entre les vecteurs

a) On a :DC=$|k|DA \leftrightarrow k = \dfrac{DC}{DA} \leftrightarrow k = 3 \leftrightarrow \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DA}$ (car meme sens)

b) On a :CA=$|k|DA \leftrightarrow k = \dfrac{CA}{DA} \leftrightarrow k = -2 \leftrightarrow \overrightarrow{CA} = -2\overrightarrow{DA}$ (Car sens contraire)

c) On a :AB=$|k|DC \leftrightarrow k = \frac{AB}{DC} \leftrightarrow k = \frac{5}{6} \leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{5}{6}\overrightarrow{DC}$ (Car meme sens)

Exercice2

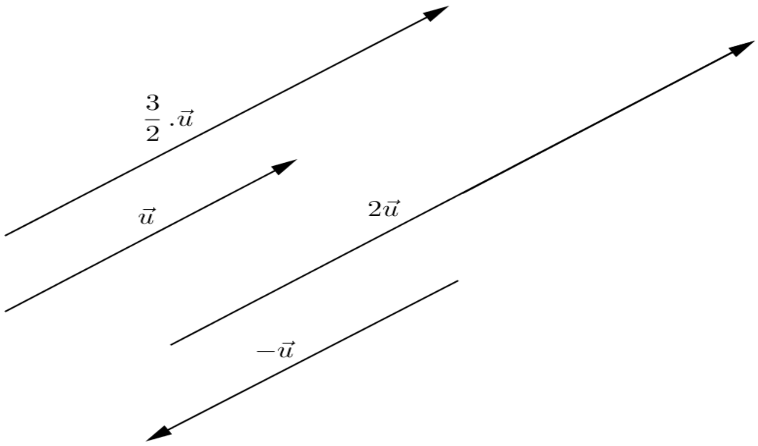
Après reduction on trouve $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{CB}$;puis construire

III)VECTEURS COLINEAIRES

1)Activité

Traçons un vecteur $\vec{u}$ non nul, puis construisons les vecteurs :$2\vec{u}$; $-\vec{u}$ *et* $\frac{3}{2}\vec{u}$.Que peut-on dire de la direction de ces vecteurs ?

Solution



On constate que les vecteurs ont tous la même direction (les droites qui les portent sont toutes parallèles) : on dit alors que ces vecteurs sont colinéaires.

2) Définition :

Etant donné deux vecteurs non nul $\vec{u}$ et $\vec{v}$.S'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k.\vec{u}$,on dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Remarque : Le vecteur nul ($\vec{0}$) est colinéaire à tout vecteur.

3)Caractérisation de trois points alignés

a) Activité

1) Placer deux points A et B dans le plan. Construire le vecteur $\overrightarrow{AC}$ tel que $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$
2) Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AB}$?
3) Que peut-on dire des points A ;B et C ?

Solution

1)Trivial

2)Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

3)Les points A ;B et C sont alignés.

Cas général

Considérons deux points A et B ; k un réel quelconque. Soit C le point tel que $:\overrightarrow{AC} = k.\overrightarrow{AB}$

D'après la définition du produit d'un vecteur par un réel, le point C se trouve sur la droite (AB) ; par conséquent les points A ; B et C sont alignés.

b) Propriété

Soient A ;B et C trois points du plan

Si $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires alors les points A ; B et C sont alignés.

Réciproquement : Si les points A ; B et C sont alignés alors les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

Exemple/Exercice

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul ($\vec{u}\neq 0$). On considère les points A ; B et C tel que :

$\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC} = 6\vec{u}$

Les points A ; B et C sont-ils alignés ?

Solution

Les points A, B et C sont alignés si $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires ; alors il existe un reel k tel que $\overrightarrow{AC}$=k.$\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AC}$=k.$\overrightarrow{AB} \leftrightarrow \overrightarrow{AC}$=k(2.$\vec{u}$).

$$\overrightarrow{AC} = 2k\vec{u} \ \ (1) \quad et \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 8\vec{u}\ (2)$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \ \leftrightarrow k = 4$$

k=4$\leftrightarrow$ $\overrightarrow{AC}$=4.$\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, donc les points A ; B et C sont alignés

3)Caractérisation du parallélisme de deux droites

a) Activité

1) Placer trois points E ;F et G non alignés ;puis construire le vecteur $\overrightarrow{GH}$ $tel\ que$ $\overrightarrow{GH} = 3\overrightarrow{EF}$

2)Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$?

3)Que peut-on dire des droites (EF) et (GH) ?

Solution

1)Trivial

2)Les deux vecteurs sont colinéaires

3)Les droites (EF) et (GH) sont parallèles.

b) Caractérisation

*1er cas

Si $\overrightarrow{AC} = k.\overrightarrow{AB}$;c'est-à-dire que C∈(AB) alors les droites (AB) et (AC) sont confondus (deux droites confondues sont parallèles).

*2ème cas

Si $\overrightarrow{AB}$ = $\overrightarrow{EF}$; alors ils ont la même direction, ils sont donc colinéaires. On en déduit que le quadrilatère ABFE est un parallélogramme. Donc les droites (AB) et (EF) sont parallèles (disjointes).

c)Propriété

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires non nuls alors les droites (AB) et (EF) sont parallèles.

Réciproquement : Si les droites (AB) et (EF) sont parallèles, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires non nuls.

Exemple/Exercice

Soient $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ deux vecteurs non colinéaires. On donne :$\vec{u} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{v} = 6\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$

Démontrer que les vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Solution

$\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires s'il existe un reel* k *tel que* $\vec{v} = k\vec{u}$

On a $\vec{v} = 3(2\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = 3\vec{u}$;il resulte que $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont colinéaires

4)Exercices résolu

Exercice1

1)Soit ABCD un parallélogramme et F les points tels que :$2\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AD}$ *et* $2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BA}$

a) Construire E et F.

b) Montrer que C, A et F sont alignés.

2) Soient trois points A, B et C tel que :$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

b) Montrer que les droites (AB) et (AC) sont parallèles

c)Deduire que les points A, B et C sont alignes.

Exercice2

E,F et G sont trois points non alignés du plan.

1) Construire les points H et I tels que : $\overrightarrow{EH} = 2\overrightarrow{EF}$ *et* $\overrightarrow{HI} = 2\overrightarrow{FG}$.

2) Exprimer $\overrightarrow{EI}$ en fonction de $\overrightarrow{EF}$ *et* $\overrightarrow{FG}$

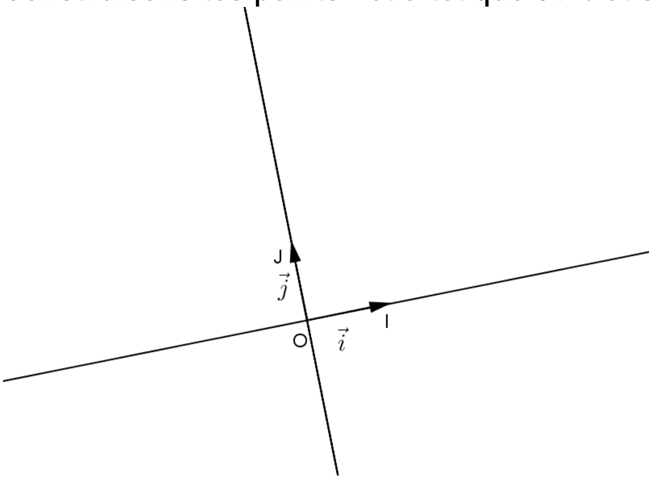
3) Montrer que $\overrightarrow{EI} = 2\overrightarrow{EG}$

CHAPITRE 3 : COORDONNEES D'UN VECTEUR

I)LE REPERE DU PLAN

Soit O un point du plan ;$\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ deux vecteurs non nuls et de direction différentes (vecteur non colinéaires).

Construisons les points I et J tel que $\overrightarrow{OI}=\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OJ}=\vec{\jmath}$



O ; I ; J étant trois points quelconques non alignés du plan ;$\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ deux vecteurs non nul et non colinéaire, le triplet (o ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) est appelé repère cartésien du plan

Remarques :

-On dit que le repère est normé si OI=OJ=1 ;

-On dit que le repère est orthonormé si OI=OJ=1 et que les axes sont orthogonaux.

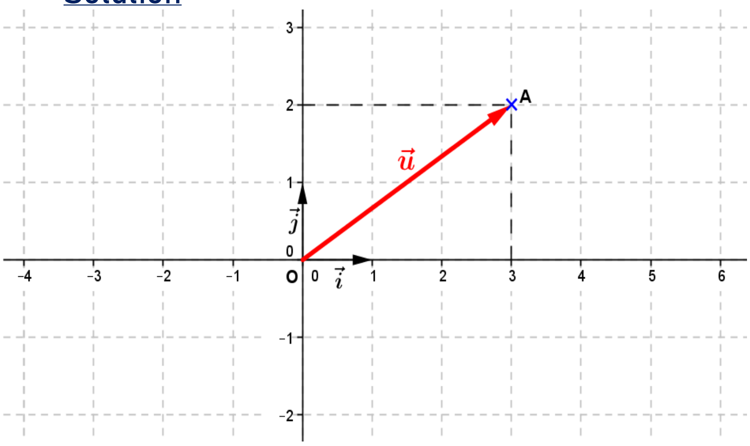
II)COORDONNEE D'UN VECTEUR ET D'UN POINT

1)Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans le repère (o,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$)

a) Activité

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ;$\vec{\imath}$;$\vec{\jmath}$) ; placer le point A(3 ;2) et exprimer le vecteur $\overrightarrow{OA}$ en fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

Solution

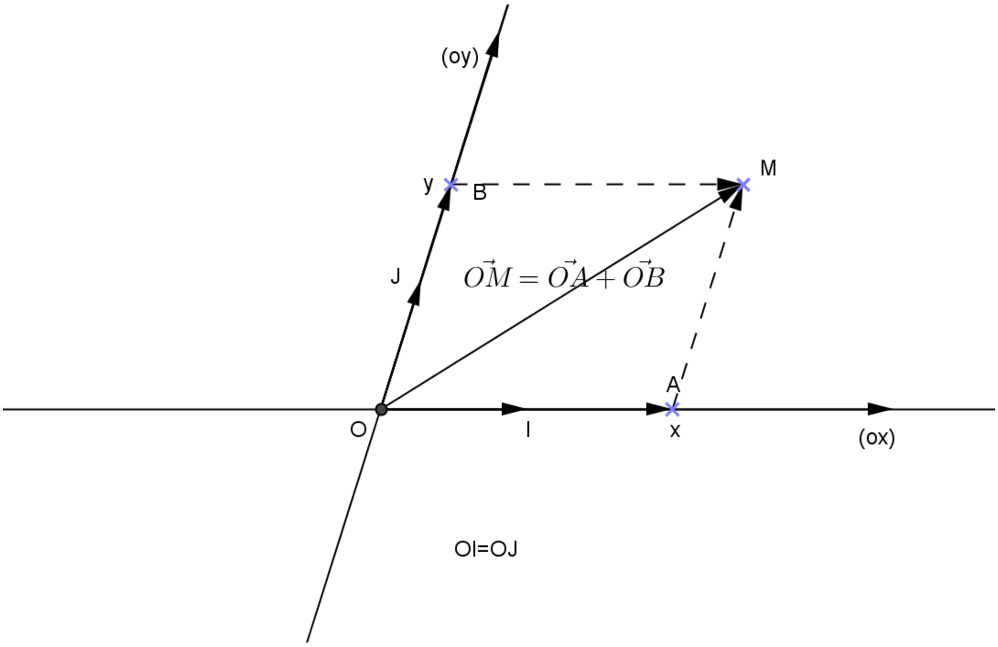


On a $\overrightarrow{OA} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$;on dit que 3 et 2 sont les coordonnées de $\overrightarrow{OA}$

b) Cas général

Soient A et B deux points tels que $\overrightarrow{OA}=x\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OB}=y\vec{\jmath}$ (x et y sont deux nombres réels)

Construisons le vecteur $\overrightarrow{OM}$ tel que $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ et précisons les coordonnées du point M dans le repère (o ;$\vec{\imath}$;$\vec{\jmath}$)



Le vecteurs $\overrightarrow{OM}$ est la somme des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{OB}$.On écrit $\overrightarrow{OM}$=$\overrightarrow{OA}$+$\overrightarrow{OB}$=x$\vec{\imath}$+y$\vec{\jmath}$.On remarque que le couple de réel (x ;y) représente les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans le repère (O ;$\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

On écrit : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \leftrightarrow \overrightarrow{OM}\binom{x}{y}$ $et\ M(x;y)$

c)Propriété

$\boldsymbol{\overrightarrow{OM}\binom{x}{y}\ signifie\ que\ \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}}$

Remarque :

Si O et M sont confondus, alors $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM} = \overrightarrow{OO} = \vec{0}$ de coordonnées $\binom{0}{0}$

Exercice d'application

Dans un repère cartésien (O ;$\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) du plan, on donne les points A, B et C tel que : $\overrightarrow{OA} = -2\vec{\imath}$; $\overrightarrow{OC} = -3\vec{\jmath}\ et\ \overrightarrow{OB} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$

Préciser les coordonnées des points A, B et C dans le repère (O ;$\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

2)Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le repère (O ;$\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

a) Activité

Dans le repère cartésien (O ;$\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) ; on donne les points A et B de coordonnées respectives (x_A ;y_A) et (x_B ;y_B).

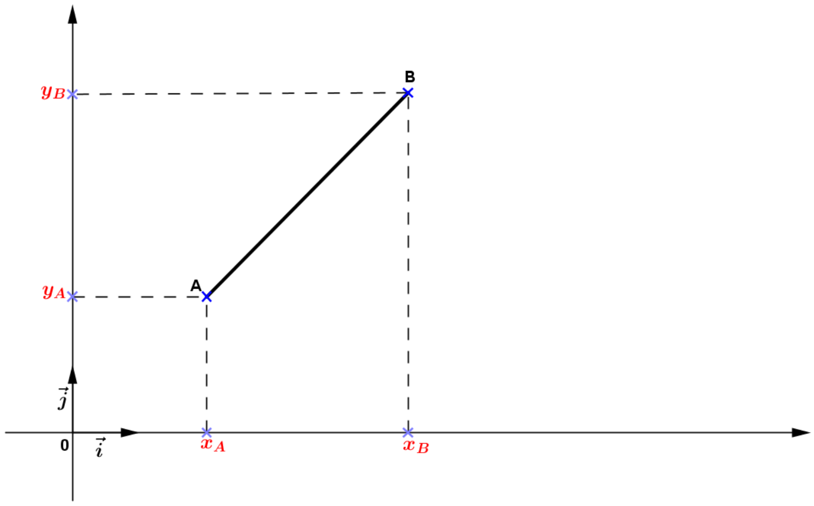
1)Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{OA}\ et\ \overrightarrow{OB}$ en fonction de $\vec{\imath}\ et\ \vec{\jmath}$

2)Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}\ et\ \overrightarrow{OB}$ à l'aide de la relation de Chasles

3)Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\vec{\imath}\ et\ \vec{\jmath}$; puis donner les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ dans le repère.

Solution

1) Exprimons les vecteurs $\overrightarrow{OA}\ et\ \overrightarrow{OB}$ en fonction de $\vec{\imath}\ et\ \vec{\jmath}$



$On\ a: \overrightarrow{OA} = x_A\vec{\imath} + y_A\vec{\jmath}\ et\ \overrightarrow{OB} = x_B\vec{\imath} + y_B\vec{\jmath}$

2)Exprimons le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}\ et\ \overrightarrow{OB}$ à l'aide de la relation de Chasles ;

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\ or\ \overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA}\ ; il\ résulte\ que\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

3)Déterminons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\vec{\imath}\ et\ \vec{\jmath}$; puis donnons les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ dans le repère.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\\ &= (x_B\vec{\imath} + y_B\vec{\jmath}) - (x_A\vec{\imath} + y_A\vec{\jmath})\\ &= (x_B - x_A)\vec{\imath} + (y_B - y_A)\vec{\jmath}\end{aligned}$$

Il resulte que pour tout point A et B de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ à pour coordonnnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

b) Propriété

Soient $A(x_A; y_A)\ et\ B(x_B; y_B)$ deux points du plan.

On a :$\boldsymbol{\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{\imath} + (y_B - y_A)\vec{\jmath}}$;on note $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}}$

NB : Le vecteur nul ($\vec{O}$) à pour coordonnées :$\vec{O}=0\vec{\imath}+0\vec{\jmath} \leftrightarrow 0(0;0)$ (coordonnées de l'origine du repère)

Exercice d'application

Dans le repère cartésien, on donne les points A(-2 ;3) ;B(1 ;-1) et C(0 ;-3).
Calculer les coordonnées des vecteurs$\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{AC}\ et\ \overrightarrow{BC}$ et Traduire chaque réponse par une égalité vectorielle.

3)Egalité de deux vecteurs

a) Activité

Soient $\vec{u}\binom{-1}{3}$ et $\vec{v}\binom{-1}{3}$ deux vecteurs du plan. Que peut-on dire de ces deux vecteurs ?

Réponses

Les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux

b) Propriété

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$

$\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j} \leftrightarrow \vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j} \leftrightarrow \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$Si\ \vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $x=x'$ et y=y'

Si $x=x'$ et $y=y'$ alors $\vec{u}=\vec{v}$

Réciproquement si $\vec{u}=\vec{v}$ $alors$ $x=x'et$ $y=y'$

Exemple exercice

1)Calculer les coordonnées du points C sachant que A(-2 ;3) et $\overrightarrow{AC}\binom{2}{6}$.

2)Soient A(-3 ;1) ;B(0 ;2) et C(-1 ;-2) ;déterminer les coordonné du point D tel que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

III)COORDONNEES ET OPERRATIONS

1)Coordonnées de la somme de deux vecteurs

a)Activité

Soient $\vec{u}=-2\vec{\imath}+3\vec{\jmath}$ et $\vec{v}=-3\vec{\imath}-4\vec{\jmath}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$

Solution

$\vec{w}=(-2\vec{\imath}+3\vec{\jmath})+(-3\vec{\imath}-4\vec{\jmath})=-5\vec{\imath}-\vec{\jmath}$; il résulte que $\vec{w}\binom{-5}{-1}$

Cas général

Dans le repère cartésien (O ;$\vec{\imath}$;$\vec{\jmath}$) du plan, on considère les vecteurs $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$.

Déterminons les coordonnées du vecteur somme $\vec{u}+\vec{v}$

Résultat

$\vec{u}+\vec{v}=x\vec{i}+y\vec{j}+x'\vec{i}+y'\vec{j}$

$=(x+x')\vec{i}+(y+y')\vec{j}$

Il résulte que le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ à pour coordonnées : $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$

On en déduit que les coordonnées de la différence $\vec{u}-\vec{v}$ sont : $\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \end{pmatrix}$

b) Règle

Soient $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ .Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}\binom{x+x'}{y+y'}$ et $\vec{u}-\vec{v}\binom{x-x'}{y-y'}$

Exemple/Exercice

On donne les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tel que $\vec{u}=-2\vec{i}-4\vec{j}$ et $\vec{v}=3\vec{i}+\vec{j}$. *Calculons* $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$

Résultat

$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\-5\end{pmatrix}$

2)Coordonnées du produit k.$\vec{u}$ (k∈IR)

a) Activité

On donne $\vec{u}=4\vec{i}-6\vec{j}$; donner les coordonnées de 2$\vec{u}$; $-\frac{1}{2}\vec{u}$ *et* $-\vec{u}$

Solution

$2\vec{u}\begin{pmatrix}8\\-12\end{pmatrix}$; $-\frac{1}{2}\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ *et* $-\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$

b)Cas général

Soit $\vec{v}=x\vec{i}+y\vec{j}$ un vecteur et k un réel quelconque

$$Si\ \vec{v}=x\vec{i}+y\vec{j}\leftrightarrow k.\vec{v}=k.(x\vec{i}+y\vec{j})$$

$$\leftrightarrow k.\vec{v}=kx\vec{i}+ky\vec{j}$$

Le produit $k.\vec{v}$ à pour coordonnées $k.\vec{v}\begin{pmatrix}k.x\\k.y\end{pmatrix}$

Exemple/Exercice

On donne le vecteur

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ tel que $\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$. Calculons les coordonnées des produits $2\vec{u}$ et $\frac{1}{2}\vec{v}$

IV)CONDITION DE COLINEARITE DE DEUX VECTEURS

a)Activité

(O ;$\vec{i}$;$\vec{j}$) est un repère cartésien du plan, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

Donnons la condition pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

Résultat

On a $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires si $\vec{u}=k.\vec{v}$

$$\vec{u}=k.\vec{v}\leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=k.\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\quad\leftrightarrow\begin{cases}x=k.x'\leftrightarrow k=\dfrac{x}{x'}\\ y=k.y'\leftrightarrow k=\dfrac{y}{y'}\end{cases}$$

$$k=k\leftrightarrow\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}\leftrightarrow x.y'=x'.y\leftrightarrow xy'-x'y=0$$

$$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\ \text{et}\ \vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\ \text{sont colinéaires si}\ xy'-x'y=0$$

b) Propriété

Etant donné deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

→Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors xy'-x'y=0 ;

→Réciproquement : Si xy'-x'y=0 alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exercices d'application

Exercice n°1

On considère les points A(4 ;-6) ; B(10 ;8) ;C(0 ;-2) et D(3 ;5)

a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires ;

b) les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils colinéaires ?

Exercice n°2

Dans quel(s) cas les points A ; B et C sont-ils alignés ?

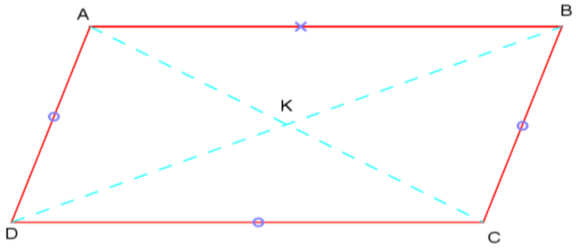
a) A(1 ; $\frac{7}{2}$) ;B($-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$) et C(0 ; $\frac{3}{2}$)

b) A(-2 ;-8) ;B(4 ;10) et C(2 ;5).

V)APPLICATIONS DE L'EGALITE DE DEUX VECTEURS

1)Le parallélogramme

Le parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.
Soient A, B, C et D un parallélogramme.



Par définition ABCD est un parallélogramme si : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ou $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

L'intersection des diagonales d'un parallélogramme est le centre de ce parallélogramme.

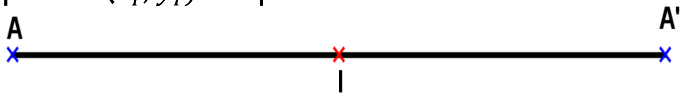
Soit K le centre du parallélogramme ABCD. Déterminons les coordonnées du point K.

K est milieu de [AC] et milieu de [BD] alors :

$$x_K = \frac{x_A + x_C}{2} \text{ et } y_K = \frac{y_A + y_C}{2} \text{ ou } x_K = \frac{x_B + x_D}{2} \text{ et } y_K = \frac{y_B + y_D}{2}$$

2)La symétrie centrale

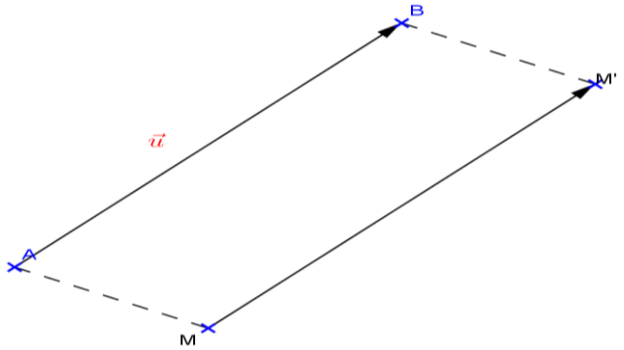
Le plan étant muni d'un repère (O ;I ;J).Soit A'($x_{A'}; y_{B'}$) symétrique de A($x_A; y_A$) par rapport à I($x_I; y_I$). Le point I est donc le milieu du segment $[AB]$



On la note :$S_I(A) = A' \leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IA'}$ Alors $\begin{cases} x_{A'} = 2x_I - x_A \\ y_{A'} = 2y_I - y_A \end{cases}$

3)La translation de vecteur

Soit $\vec{u}$ un représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et soit M un point quelconque du plan.
Construisons le point M' tel que $\overrightarrow{MM'}$=$\vec{u}$.



On appelle translation de vecteur $\vec{u}$; l'application $t_{\vec{u}}$ définie comme suit :

$t_{\vec{u}} : P \to P$

$M \to M' tel\ que\ \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

On dit que le point M' est l'image ou le translaté du point M par la translation de vecteur $\vec{u}$.

On le note : $t_{\vec{u}}(M) = M' \leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

Soient $M(x_M\ ; y_M)\ ; M'(x_{M'}\ ; y_{M'})\ et\ \vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} x_{M'} - x_M \\ y_{M'} - y_M \end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} - x_M = x \\ y_{M'} - y_M = y \end{cases}$; $alors: \begin{cases} \boldsymbol{x_{M'} = x + x_M} \\ \boldsymbol{y_{M'} = y + y_M} \end{cases}$

4)Exercice résolu

Dans un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on considère les points A, B et C tel que :

$\overrightarrow{OA} = -3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$; $\overrightarrow{BO} = -3\vec{\imath}\ et\ \overrightarrow{OC} = -2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$

1)Déterminer les coordonnées des points A, B et C.

2)Construire le repère ; placer les points A, B et C et le compléter au fur et à mesure $(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1)$

3)Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$ et exprimer le en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

4)Sachant que les points E et C sont symétriques par rapport au point A et que le point P est l'image de E par la translation du vecteur $\overrightarrow{CB}$ .Calculer les coordonnées des points E et P.

5)Calculer les coordonnées du point M tel que E soit le milieu du segment [MP

CHAPITRE 4 : RACINE CARREE D'UN REEL POSSITIF

I)RAPPELS ET DEFINITION

1)Rappels

- Le carré d'un nombre réel est le produit de ce nombre par lui-même.
- Le carré d'un réel a se note a^2 avec $a^2=a\times a$. Le carré d'un nombre réel est toujours positif, c'est pourquoi deux nombres opposés ont le même carré.

Exemple

$(-9)^2= (+9)^2=81$

- Soit x et y deux réels positifs : Si $x<y$ alors $x^2<y^2$

2)Définition

Pour tout réels x positif, on appel racine carrée de x, le réel positif dont le carrée est égale à x. On note $\sqrt{x}$ et on lit "racine carrée de x"

Le symbole" $\sqrt{}$ "s'appelle le radical et dans l'écriture $\sqrt{x}$;on dit que x est sous la radicale.

NB : Un nombre réel positif n'a qu'une seule racine carrée.

Exemple : -9 et 9 ont le même carré qui est 81 ; cependant la racine carrée de 81 est :$\sqrt{81}=9$

3)Quelques conséquence

*Un nombre négatif n'a pas de racine carrée
*Pour tout réel x positif,$\sqrt{x}\geq 0$ (toujours)
*Pour tous nombre réel x et y positifs ;si $x=y$ alors $x^2=y^2$
*Pour tout réel x positif,$\sqrt{x^2}= (\sqrt{x})^2=x$
*Pour tout réel x et y positifs ;si $x^2 < y^2 \leftrightarrow x < y$
*Pour tout réel x et y positifs ;si $x < y \text{ alors } x^2 < y^2$

Exemple

$\sqrt{9^2}=9$;$\sqrt{(-5)^2}=5$

II)PROPRIETES

1)Racine carrée d'un produit

Soient a et b deux nombres réels positifs. Calculons $\left(\sqrt{a}\times\sqrt{b}\right)^2$ et $\sqrt{a\times b}^2$.Que constate-t-on ?

Réponses

On a $\left(\sqrt{a}\times\sqrt{b}\right)^2=\sqrt{a}^2\times\sqrt{b}^2=a\times b$

et $\sqrt{a\times b}^2=\left(\sqrt{a\times b}\right)^2=a\times b$

On constate que $\sqrt{a\times b}^2=\left(\sqrt{a}\times\sqrt{b}\right)^2=a\times b$

Propriété 1 : Pour tout réel positif a et b ; on a : $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$

Exemple/Exercice : Calculons les réels :A= $\sqrt{2}\times\sqrt{50}$ et B=$2\sqrt{18}\times\sqrt{14}\times\sqrt{21}$

2)Racine carrée d'un quotient

Soit a et b deux réels positifs. Calculons $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2$ et $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2$.Que constate-t-on ?

Réponses

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2=\frac{a}{b} \text{ et } \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{\sqrt{a}^2}{\sqrt{b}^2}=\frac{a}{b}$$

On constate que $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{a}{b}$

Propriété 2 : Pour tout réel positifs a et b (b≠0) ; on a : $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Exemple/Exercice

Calculons les réels : $A=\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$ et $\sqrt{32}\times\sqrt{\frac{1}{2}}$

3)Somme et différence des radicaux

Propriété 3 : Pour tout réel a et b ; On a : $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$ et $\sqrt{a-b}\neq\sqrt{a}-\sqrt{b}$..

Exemple/Exercice

Posons a=16 et b=9

$\sqrt{a+b}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=\sqrt{5^2}=5$

$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7$

On constate que $\sqrt{16+9}\neq\sqrt{16}+\sqrt{9}$

Méthode : On effectue l'addition ou (la soustraction) des radicaux que lorsqu'ils ont le même nombre sous radical. Dans ce cas, on effectue l'addition ou la soustraction des réels qui sont devant les radicaux et on garde le nombre sous radical.

Exemple/Exercice

Calculer les réels suivants : $A=9\sqrt{11}-5\sqrt{11}$;B=$3\sqrt{2}+\sqrt{2}$ et C=$13\sqrt{7}-15\sqrt{7}$

NB : Lorsque les nombres qui sont sous radical sont assez-grand ;il faut d'abord les décomposés en produit de facteurs premiers avant d'effectuer l'addition ou la soustraction.

Exemple/Exercice

Calculer A ;B et C tel que :

$A=6\sqrt{75}+5\sqrt{12}$-$5\sqrt{27}$;B=$3\sqrt{200}-5\sqrt{18}$-$\sqrt{32}$ et C=$13\sqrt{125}-\sqrt{50}+\sqrt{72}+2\sqrt{18}$

4)Comparaison des radicaux

Pour comparer les radicaux, il suffit de les élever au carré et comparer leurs carrés.

Exemple/exercice : Comparons les réels suivants : $a)2\sqrt{7}$ et $\sqrt{21}$ b)8 et $4\sqrt{5}$

Propriété :

Deux nombres réels positifs sont dans le même ordre que leurs carrés :x<y alors $\sqrt{x} < \sqrt{y}$

5)Calcul des quotients avec radicaux

Lorsqu'on effectue des calculs de quotient avec les radicaux, la réponse finale ne doit jamais avoir de radical au dénominateur.

*Pour supprimer le radical au dénominateur, il faut "rendre rationnel" le dénominateur.

1er cas : Calculons les réels $A = \frac{5}{\sqrt{7}}$ et $B = \frac{2}{3\sqrt{2}}$

Propriété : Pour tout réels a et b avec b≠0 ; on a $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$

2ème cas : Calculons le réel $C = \frac{2\sqrt{5}-3}{7-\sqrt{5}}$

*Pour supprimer le radical au dénominateur, on utilise dans ce cas l'expression conjuguée du dénominateur.

Calculons le produit : $(7-\sqrt{5})(7+\sqrt{5})$

$(7-\sqrt{5})(7+\sqrt{5}) = 44$. On constate que le résultat est sans radicale. On dit que $(7-\sqrt{5})$ à pour expression conjuguée $(7+\sqrt{5})$

Retenons : Pour calculer le réel B, il suffit de multiplier le dénominateur et le numérateur par l'expression conjuguée du dénominateur.

$$B = \frac{2\sqrt{5}-3}{7-\sqrt{5}} = \frac{(2\sqrt{5}-3)(7+\sqrt{5})}{(7-\sqrt{5})(7+\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Exercice d'application

Ecrire sans radical au dénominateur les expressions suivantes :

$A = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$; $B = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ et $C = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} - \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$

6)Racine carrée et valeur absolue

Soit le tableau suivant à compléter

x	-5	-2	0	1	9
$\sqrt{x^2}$					
$\lvert x\rvert$					

On remarque que $\sqrt{x^2} = |x|$

Propriété : Pour tout réel x ; on a $\sqrt{x^2}=|x|$

Exercice d'application :
Soit le réel A=$3\sqrt{3}-2\sqrt{7}$
1)Comparer les réels $3\sqrt{3}$ et $2\sqrt{7}$ .En déduire le signe du réel A.
2)Calculer A^2 et en déduire une écriture simplifier de B=$\sqrt{55-12\sqrt{21}}$

7)Résolution d'équations du type $x^2=k$

La résolution de l'équation $x^2=k$ peut se présenter sous trois cas :
1er cas : k<0
Si k<0 alors $x^2=-k$; alors x n'existe pas, car le carré d'un nombre est toujours positif.
$X^2=k \leftrightarrow S=\phi$ ou $\{\ \}$
2ème cas : k>0
Si k est positif, l'équation $x^2=k$ admet deux solutions qui sont :$-\sqrt{k}$ et $\sqrt{k}$
$X^2=k \leftrightarrow S=\{-\sqrt{k};\sqrt{k}\}$
3ème cas : k=0
Si k=0, l'équation $x^2=k$ admet une seule solution qui est zéro (0)
$X^2=0 \leftrightarrow S=\{0\}$

Exercice d'application
1)Résoudre dans IR l'équation suivante :$x^2+1=0$
2)Résoudre dans IR les équations suivantes :$x^2-9=0$ et $x^2-3=0$
3)Résoudre dans IR les équations suivantes :$x^2+5=5$ et $4x^2-7=-7$

8)Exercices résolus

Exercice 1
1)Calculer $(1-\sqrt{3})^2$ et en déduire l'écriture du réel $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ sous la forme $x+\sqrt{y}$.
2-a) On pose a=$\sqrt{8+3\sqrt{5}}$ et b=$\sqrt{8-3\sqrt{5}}$ .Calculer a^2+b^2 et a.b
b)En déduire $(a+b)^2$; puis a+b et par la même méthode calculer a-b

Exercice 2
1)Sachant que A=$\sqrt{10}-3$; E=$3-\sqrt{10}$ et F=$-3-\sqrt{10}$
a) Montrer que A+B=0.que peut-on dire de A et B ?
b) Montrer que ExF=1 ; que peut-on dire de E et F ?
2)On donne les nombres a=$2\sqrt{5}-3$ et b=$2\sqrt{5}+3$
Calculer a+b ; a-b ; a^2+b^2 ; a.b et $(a+b)^2$.

CHAPITRE 5 : EQUATIONS ET INEQUATION DANS IR

I)Equations du 1er degré à une inconnue

1)Rappels

Une équation est une égalité dans laquelle figure un réel inconnu souvent désigné par une lettre (x ;y ;z ;t…).Résoudre une équation, c'est trouver l'ensemble des valeurs du réel inconnu qui vérifient l'équation ou l'égalité connu.
Exemple :
-3x+7=11 ;2a-10=0 ;-5y+3=-2 .sont des équations du 1er degré à une inconnue

2)Résolution des équations du types x+a=b

On admet généralement que lorsqu'un terme d'une équation change de membre ;il change aussi de signe :c'est la règle de transposition.
Pour trouver l'ensemble des valeurs de l'inconnue, il suffit de transposer le terme "a".
x+a=b $\leftrightarrow$ x=b-a
S=$\{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\}$.

2)Résolution des équations du type ax=b

Posons ax=b
En multipliant les deux membres de l'égalité par $\frac{1}{a}$;on obtient une nouvelle égalité
$\frac{1}{a}\times ax = b\times\frac{1}{a}$
Le réel $\frac{b}{a}$ vérifie l'égalité donnée ;on écrit S=$\left\{\frac{b}{a}\right\}$

Exemple/Exercice

Résoudre dans IR les équations suivantes :
1)x+14=5 ; 2)-5x+11=10 ;3)5y+7=-2y-4 ;4)2t-4+7t=10t-4.

3)Résolution des équations du type (ax+b)(cx+d)=0

Posons (ax+b)(cx+d)=0
Un produit de facteur est nul si l'un des facteurs est nul.
$$(ax+b)(cx+d)=0 \leftrightarrow ax+b=0 \text{ ou } cx+d=0 \leftrightarrow x=\frac{-b}{a} \text{ ou } x=\frac{-d}{c}$$
$$S=\left\{\frac{-b}{a};\frac{-c}{d}\right\}$$

Exemple/Exercice

Résoudre dans IR les équations suivantes : $a)\ (20x-4)(6x+12)=0$; $b)\ (3x-5)^2=9x^2$

4)Equation du type $\frac{ax+b}{cx+d}=e$

Résoudre dans IR les équations suivantes :$a)\ \frac{2x+3}{x-2}=-2$; $b)\ \frac{-5x+2}{2x+3}=\frac{3}{2}$; $c)\ \frac{7x-1}{2x-3}=\frac{5}{3}$

5)Autres types d'équations

Soit à résoudre dans l'ensemble IR ; $\frac{3x-1}{4}=\frac{x+2}{6}-\frac{1}{3}$.

Pour résoudre ces types d'équations ;il faut d'abord réduit au même dénominateur les deux membres de l'équation.
On a PPCM(3 ;4 ;6)=12
Alors notre équation devient :

$$\frac{3(3x-1)}{12}=\frac{2(x+2)}{12}-\frac{4}{12}\leftrightarrow 9x-3=2x+4-4\leftrightarrow x=\frac{3}{7}$$

$$S_{IR}=\left\{\frac{3}{7}\right\}$$

II)EXERCICES RESOLU

Résolvons dans IR les équations suivantes :

1) $|x+4|=2$;

2) $\sqrt{(x+3)^2}=2x+1$;

3) $|2x-1|=|3-3x|$

Solution

1)Résolvons dans IR l'équation $|x+4|=2$

$$On\ a\ |x+4|=\begin{cases}-x-4 \text{ si } x\leq -4\\ x+4 \text{ si } x\succ -4\end{cases}$$

*pour x ≤ -4 on a -x-4=2 $\leftrightarrow$ x=-6 ;

*Pour x $\succ -4$ on a x+4=2 $\leftrightarrow$ x=-2 .

$S_{IR}=\{-6;-2\}$

2)Résolvons dans IR l'équation $\sqrt{(x+3)^2}=2x+1$

$$\sqrt{(x+3)^2}=2x+1 \leftrightarrow |x+3|=2x+1$$

*$Pour$ $x\leq -3$ on a $-x-3=2x+1\leftrightarrow -3x=4\leftrightarrow x=-\frac{4}{3}\notin]-\infty;-3]$ alors $S_1=\varnothing$

*$Pour$ $x\geq -3$ on a x+3=2x+1 $\leftrightarrow$ -x=-2 $\leftrightarrow$ x=2 $\in[-3;+\infty[$ alors $S_2=\{2\}$

$S_{IR}=S_1\cup S_2=\{2\}$

3)Résolvons dans IR l'équation $|2x-1|=|3-3x|$

$Posons$ 2x-1=0 ; 3-3x=0

$x=\frac{1}{2}$; x=1

X	$-\infty$ 1/2	1	$+\infty$
$\lvert 2x-1\rvert$	-2x+1	2x-1	2x-1
$\lvert 3-3x\rvert$	-3x+3	-3x+3	3x-3

1er cas :x∈$]-\infty;\frac{1}{2}]$

-2x+1=-3x+3$\leftrightarrow$x=2$\leftrightarrow$x=2$\notin \left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$; $S_1=\phi$

2ème cas :x∈$[\frac{1}{2};1]$

2x-1=-3x+ 3⟺5x=4⟺x=$\frac{4}{5}\in[\frac{1}{2};1]$;S₂=$\left\{\frac{4}{5}\right\}$

3ème cas : x∈[1 ;+∞[

2x-1=3x-3⟺x=2∈[1 ;+∞[$S_3=\{2\}$

$S_{IR}=S_1\cup S_2\cup S_3=\left\{\frac{4}{5};2\right\}$

III)INEQUATION DU 1ER DEGRE A UNE INCONUE

1)Définition

Une inéquation est une inégalité dans laquelle figure un réel inconnu souvent désigné par une lettre (x ;y ;z ;t…).

Résoudre une inéquation, c'est déterminé l'intervalle ou la réunion des intervalles dans lequel (laquelle) est compris le réel.

2)Exercices résolu

a) Résolvons dans IR les inéquations suivantes : $4x+5>3$ et $2x-4<0$

b) Résolvons dans IR, l'inéquation : $3x+7\leq 5x-11$

c)Résolvons dans IR, l'inéquation : $\frac{4x-5}{5}\geq\frac{7x+3}{4}$

d)Résolvons dans IR, les inéquations suivantes :$(x-2)(x+3)\leq 0$ et $(1-x)(-x+2)>0$

Pour ces types d'inéquations, un tableau de signe est efficace pour étudier le signe de chaque facteur ; puis déterminer le signe du produit des facteurs.

e) Résolvons dans IR, l'inéquation :$\begin{cases}4x-7>2x-1\\5x-30<3x-12\end{cases}$

Pour ces types d'inéquation, on fait une résolution séparée de chaque inéquation. La solution du système est obtenue en faisant le l'intersection des deux intervalles obtenus.

f) Résolvons dans IR l'inéquation :$|x-5|<2$

Pour ce type d'inéquation ; on écrit l'expression en valeur absolue sans le symbole de la valeur absolue. On résout les inéquations obtenues par intervalles et la solution de l'inéquation est obtenue en faisant l'intersection des intervalles obtenus.

IV)RESOLUTION DE PROBLEME

1)Les étapes de résolution.

Pour résoudre un problème se ramenant à une équation du 1er degré a une inconnue, on procède comme suite :

a) Choisir ou désigner l'inconnue ;

b) Faire la mise en équation du problème ;

c)Résoudre l'équation obtenu ;

d)Vérifier la solution obtenue ;

e) Expression de la solution obtenue

2)Exemple/Exercice

Exemple1

Trouver trois entiers consécutifs dont la somme est 1515.

Solution

a) Soit x le 1er entier naturel ; alors x+1 est le 2ème et le 3ème est x+3.

b) x+x+1+x+2=1515↔3x+3=1515

c)3x+3=1515↔x=504↔x+5=505 et x+2=506

d)504+505+506=1515

e) les trois entiers naturels consécutif dont la somme est 1515 sont :504 ;505 et 506.

Exemple2

Dans une classe de 3ème la moitié des élèves pratiquent le volley-ball ; le 5ème des élèves le football ; la moitié de ceux qui pratiquent le football jouent au basketball. Le reste, soit 10 élèves ne pratiquent aucun sport. Quel est le nombre total des élèves de cette classe ?

Résolution

a) Soit t l'effectif total de la classe

b) volleyball :$\frac{1}{2}$t ;

*football :$\frac{1}{5}$t ;

*basket :$\frac{1}{10}t$

*reste : 10

t=$\frac{1}{2}$t+$\frac{1}{5}$t+$\frac{1}{10}$t+10

c)Résolution de l'équation obtenue

On a PPCM (2 ;5 ;10) =10

↔10t=5t+2t+t+100↔t=50

Le nombre d'élève total de la classe est 50.

3)Exercices résolus

1)Trouver tous les nombres x, dont le carré de la différence avec 3 soit strictement inferieur à la différence des carrés de x et de 3.

2)Il vous manque 5F pour acheter une douzaine de cahiers, mais il vous reste 25F si vous en achetez seulement 10. Quel est le prix d'un cahier ?

3)Un cheval trottine sur une piste circulaire de 10m de rayon. Pour quels nombre (entiers) de tours la distance parcourue est-elle comprise entre 850m et 1km ? (Pour π prendre 3,14).

CHAPITRE6 : LES MONOMES ET LES PLYNOMES

I)LES APPLICATONS MONOMES

1)Définition

Etant donné un nombre réel a non nul($a \neq 0$) et n un entier naturel non nul($n \neq 0$) ; l'application : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto f(x) = ax^n$ est une application monôme de coefficient a et de degré n

Exemple

$f(x) = 8x^3$: *coefficient* 8 et degré 3
$g(x) = -3x$: *Coefficient* -3 et degré 1 Sont des applications monômes
h(x)=3:coefficient 3 et degré 0

2)Remarque

Soit le tableau suivant à compléter :

x	-2	-1	0	1	$\sqrt{3}$	a
$f(x)=3x^2$						

$f(x)=3x^2$
Pour $x=-2 \Leftrightarrow f(-2)=3(-2)^2=12$

On remarque que x peut prendre n'importe quelle valeur numérique de IR : On dit que x est une variable réelle et f une application monôme de la variable x : on écrit $f(x)=3x^2$.

La variable réelle peut être désignée par une autre lettre (autre que x).

Exemple

$f(t)=2t^3$;$g(z)=-5z$;$h(y)=4$

Posons : $f(x)=ax^n$
*Si $n=0 \Leftrightarrow f(x)=ax^0=a$; on dit que f est une application constante.
NB : Tout nombre réel est un monôme de coefficient lui-même et de degré 0 (zéro)
*Si le coefficient a=0 alors $f(x)=0x^n=0$; on dit que f est une application nulle.

II)APPLICATIONS POLYNOMES

1)Définition

Un polynôme est une somme d'au moins deux monômes.
L'application : $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{IR} \to \boldsymbol{IR}$
$x \mapsto f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + px^1 + a_0$ est une application polynôme de la variable réelle x.
Le degré d'un polynôme correspond au degré de son monôme de plus haut degré.
L'application $g(x) = 5x^4 - 3x^{-2} - 4$ n'est pas une application polynôme à cause de son degré -2.
Le degré du polynôme $f(t) = -t^7 + 5t^2 + 25$ est 7.

2)Opérations sur les polynômes

a) Addition des polynômes

Soient f et g deux applications polynômes telle que :

$f(x)=5x^3-3x^2-4$ et $g(x)=-4x^3+3x^2-2x+1$.

Calculons f(x)+g(x).

Réponses :$f(x)+g(x)=x^3-2x-3$

On ne peut additionner ou soustraire deux monômes que s'ils ont le même degré. Pour additionner ou soustraire deux monômes de même degré, on fait la somme ou la différence des coefficients et on conserve le degré commun aux deux monômes. La somme de deux monômes de degré différent est tout simplement un polynôme.

Exemple :$f(x)=-3x^2$ et $g(x)=x+2$

$f(x)+g(x)=-3x^2+x+2$

b) Développement d'un polynôme

Calculons :$A=-5x^2\times 2x$; $B=7x^3\times 5x^4$ et $C=(-3x^3)\times(-2x)$

Réponses : $A=-10x^3$; $B=35x^7$ et $c=6x^4$

Le produit de deux monômes est un monôme dont le coefficient est le produit des coefficients et le degré est la somme des degrés (même si les monômes ont le même degré).

Exemple/Exercice

Développons les expressions suivantes : $f(x)=3x^2(-2x+3)$ et $g(x)=(2x^2-3x)(7x+2)$

Dans ce cas, on utilise la règle de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou la soustraction :

$a(b+c)=a.b+a.c$ et $a(b-c)=a.b-a.c$

Généralement après avoir développé un polynôme, il est nécessaire (si cela est possible) de le réduire et de l'ordonner suivant les puissances croissantes ou décroissantes de la variable x.

Exercice d'application

Développer, réduire et ordonner les applications f et g définies par :

$f(x)=-3x(5-2x)$;$g(x)=(2x+1)(-x+3)+(3x-1)(-2x+3)+2x(x+1)$;

$h(x)=9x^2+5x-(2x-1)^2+4x^2(-2x+1)$

3)Factorisation d'un polynôme

a) Mise en facteur d'un facteur commun

Factoriser les polynômes suivants :

$f(x)=(2x-3)(x+2)-x(2x-3)$;$g(x)=-2x(-1+x)-x+1$

$g(x)=(3x+1)(-2x+1)+(x+1)(-3x-1)+3x^2+x$

b) Utilisation des identités remarquables

On rappelle: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$; $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2=(a-b)(a-b)$;$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=(a+b)(a+b)$

Factoriser les polynômes suivants :

$f(x)=9x^2-16$; $g(x)=25x^2-11$; $h(x)=4x^2-9(2x-3)^2$

$t(x)=9x^2-24x+16$ et $k(x)=x^2+6x+9$.

c)Factorisation partielle

Factoriser les polynômes f et g tel que $f(x)=9x^2-1-(1-3x)-2x(3x-1)$ et
$g(x)=-x(2x-1)-6x+3$

4)Exercice résolu

Exercice1

1)Développer, réduire et ordonner les polynômes suivants :

$f(x)=-2x(5x^2-x-1)+2x^2$; $g(t)=5t(t+2)-(2t-1)^2+3t$; $h(y)=(-y+\frac{1}{2})(2y-4)+(3y-1)(y-1)$

2)Factoriser les polynômes suivants : $i(x)=4x^4-16x^3+16x^2$; $j(t)=(2x+1)^2-9(x-3)^2$

Exercice2

Soient les applications f et g définies par :

$f(x)=(-x+1)(-2-x)+(x+2)^2$ et $g(x)=(9-3x)(-x+3)-12x^2+12x-3$.

1)Développer, réduire et ordonner f(x) et g(x) suivant les puissances décroissantes de x.

2-a) Montrer que $(9-3x)(-x+3)=3(3-x)^2$

b) Montrer que $12x^2-12x+3=3(2x-1)^2$

3)Factoriser f(x) et g(x)

4)Résoudre dans IR les équations $f(x)=2$ et $f(x)=g(x)$.

CHAPITRES 7 : LES FONCTIONS RATIONNELLES

1)Activité

Soit l'application q définie par :$q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto q(x) = \frac{x+3}{x-1}$$

Compléter le tableau suivant :

x	-2	-1	0	1	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	2
q(x)							

Solution

Compléter le tableau suivant :

x	-2	-1	0	1	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	2
q(x)	$-\frac{1}{3}$	-1	-3	Non définie	$4\sqrt{2}+5$	-7	5

On constate que le réel 1 n'a pas d'image par la fonction q. La fonction q n'a de sens que si x≠1 ; C'est-à-dire x-1≠0. On dit alors que q est une fonction rationnelle.

2)Définition

On appelle fonction rationnelle toute fonction dont l'expression est le rapport (quotient) de deux polynômes.

Si f et g sont deux polynômes, l'application q tel que $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ avec $(g(x) \neq 0)$est une fonction rationnelle.

3)Domaine ou ensemble de définition d'une fonction rationnelle

Le domaine de définition d'une fonction rationnelle est l'ensemble des réels pour lesquels la fonction est définie ; ainsi donc une fonction rationnelle n'a de sens que si le dénominateur est différent de zéro (0).

Dans l'activité précédente, la fonction q n'a de sens que si x-1≠0, c'est-à-dire x≠1.

L'ensemble de définition de la fonction rationnelle q est l'ensemble IR privé du réel 1. On note :$D_q = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

Exercice d'application

Soit la fonction rationnelle défini par $h(x) = \frac{2x-3}{(-x+2)(x+4)}$

1)Calculer, si possible les images par h des réels -4 ;0 ;$\frac{2}{3}$ et 2

2)En déduire le domaine de définition D_h de la fonction rationnelle h.

4)Simplification d'une fonction rationnelle

Pour simplifier une fonction rationnelle, il faut :

●Factoriser le numérateur et/ou le dénominateur si cela est nécessaire ;

●Préciser toujours le domaine de définition de la fonction à simplifier ;car une fonction rationnelle n'est simplifiable que sur son domaine de définition
●Simplifier les facteurs communs au numérateur et au dénominateur.

Exercice d'application

Soit la fonction rationnelle q définie par $q(x)=\dfrac{2(x+3)+x^2-9}{x^2+6x+9}$

1)Déterminer le domaine de définition D_q de q
2)Simplifier la fonction rationnelle q(x) sur D_q

5)Images et antécédents

Soient f et g deux applications définies par :f(x)=(2x-1)(-x+3) et $g(x)=4x^2-5$
1)calculer les images de -1 ;0 et 3 par f
2)Déterminer les antécédents de -5 et 0 par g

6)Exercice résolu

f et g sont deux applications polynômes définies de IR vers IR par :
$f(x)=9x^2-(x-2)^2$ et $g(x)=(9x^2-6x+1)-(x-1)(1-3x)$
1)Développer, réduire et ordonner f(x) et g(x)
2)Factoriser f(x) et g(x)
3)Montrer que le réel $\frac{1}{\sqrt{2}}$ à pour image $2\sqrt{2}$ par f.
4)Déterminer les antécédents de 2 par g.
5)Soit q la fonction rationnelle définie par : $q(x)=\dfrac{(4x+4)(2x-1)}{2(3x-1)(2x-1)}$

a) Déterminer l'ensemble de définition E de q.
b) Simplifier q(x) sur E.
c)Calculer $q(\dfrac{1}{\sqrt{2}})$ (rendre rationnelle le dénominateur)
d)Résoudre dans E les équations suivantes : $q(x)=\dfrac{2}{3}$ et $|q(x)|=6$
e) Résoudre dans E l'inéquation $q(x)\geq 0$

CHAPITRES 8 : RAPPORT DE PROJECTION

I)RAPPORT DE PROJECTION SUIVANT LA DIRECTION D'UNE DROITE

1)Activité

Soient (D) et (D') deux droites sécantes en O et (∆) une droite qui n'est ni parallèle à (D) ni à (D').

1)Placer les points A ; B et M sur la droite (D) tel que : OA=2 ; OB=4 et OM=5

2)Construire les points A' ; B' et M' les projetés respectifs des points A ;B et M sur la droite (D') parallèlement a (∆)

3)Mesurer les longueurs OA' ; OB' ; OM' et calculer les rapports suivants :

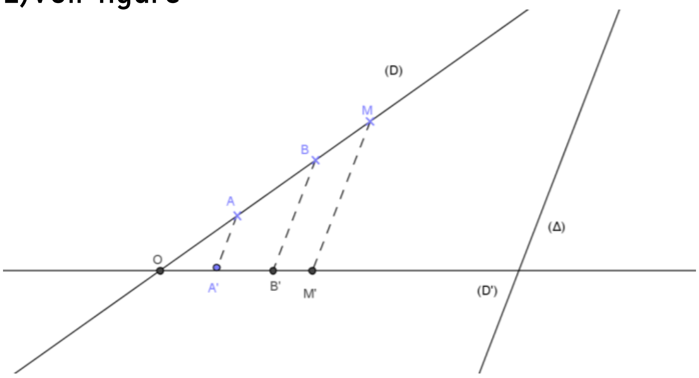
$\frac{OM'}{OM};\frac{OA'}{OA};\frac{OB'}{OB}$ et $\frac{A'B'}{AB}$

Quel constat faites-vous ?

Résolution

1)Voir figure

2)Voir figure



3)Mesurer et calculer les différents rapports

Après les différents calculs ; On constate que les rapports sont sensiblement égaux.

2)Définition

Le nombre constant k de ces rapports est appelé rapport de projection de la droite (D) sur la droite (D') parallèlement à la droite (∆). On peut alors écrire :

$$k=\frac{OM'}{OM}=\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{A'B'}{AB}.$$

3)Procéder de détermination de k

De façon pratique, pour calculer les rapports de projections des points d'une droite (D) sur une autre droite (D') parallèlement à une droite (∆) ; on détermine les projetés respectifs des points de la droite (D) sur la droite (D') parallèlement à la droite (∆).

Par exemple, si on a deux points A et B de la droite (D), leurs projetés respectifs sur la droite (D') parallèlement à la droite (∆) sont A' et B' ; On écrit : p(A)=A' et p(B)=B'.

Le rapport de projection k de la droite (D) sur la droite (D') parallèlement a la droite (∆) s'écrit :

$k = \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{\text{distance des images(projections)}}{\text{distance des points}}$

Remarque

Le rapport de projection de la droite (D') sur la droite (D) parallèlement a la droite (Δ) sera note : $k' = \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{1}{k}$

Exercice d'application

Construire un triangle ABC tel que AB=5cm ; BC=6cm et AC=7cm

1)Calculer le rapport de projection k de la droite (BC) sur la droite (AB) parallèlement a la droite (AC)

2)Calculer le rapport de projection k' de la droite (AB) sur la droite (BC) parallèlement a la droite (AC).

Que constate-t-on ?

II)RAPPORT DE PROJECTION ORTHOGONALE

1)Définition

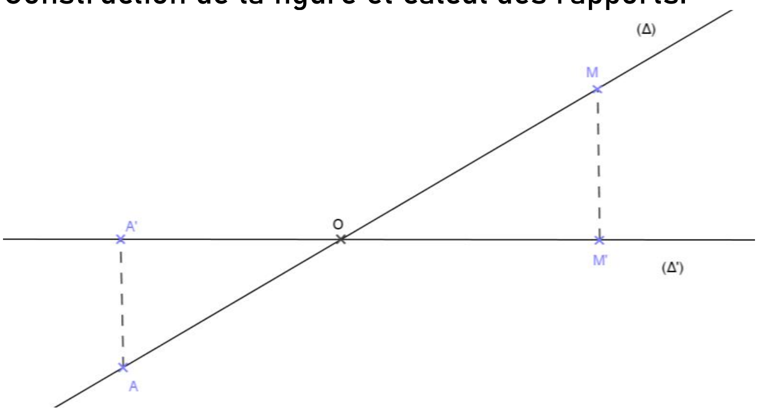
a) Activité

Soient (Δ) et (Δ') deux droites sécantes en O. Soit A et M deux points de (Δ) ; A' et M' leurs projeté orthogonaux sur la droite (Δ').

Mesurer les longueurs OA ; OM ; OA' et OM', puis calculer le rapport de projection $\dfrac{OA'}{OA}$ et $\dfrac{OM'}{OM}$

Résolution

Construction de la figure et calcul des rapports.



On constate comme précédemment que les rapports sont sensiblement égaux.

b) Définition

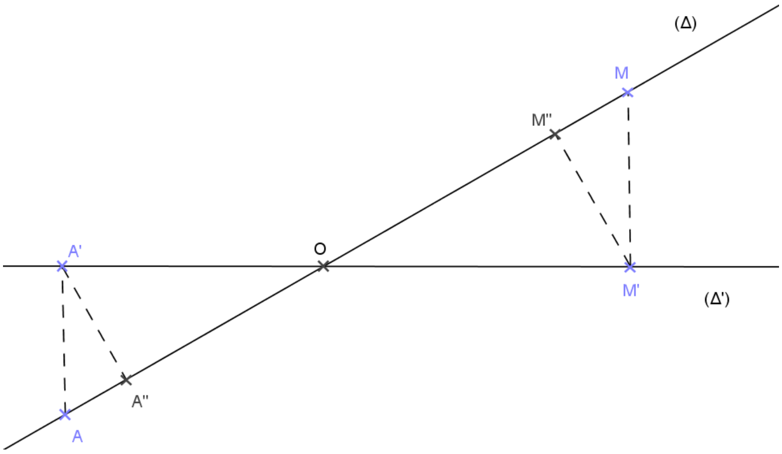
Le nombre constant k de ces deux rapports est appelé rapport de projection orthogonale de la droite (Δ) sur (Δ') : on note $k = \dfrac{OM'}{OM} = \dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{A'M'}{AM}$

2)Propriété du rapport de projection orthogonal

a) Activité

Reprendre l'activité précédente. Soient A" et M" les projetés orthogonaux respectifs de A' et M' sur la droite (Δ). Mesurer et calculer le rapport de projection orthogonal k' de la droite (Δ') sur la droite (Δ).

Solution



Solution

Mesurons et calculons les rapports : $\frac{OA''}{OA'} = 0{,}7$; $\frac{OM''}{OM'} = 0{,}7$

On constate que k et k' sont égaux.

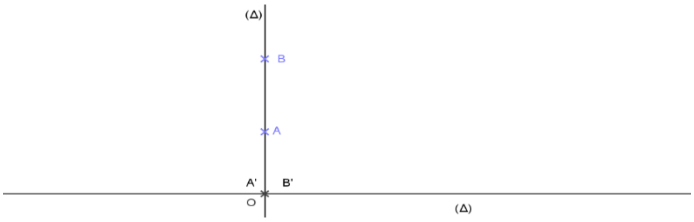
b) Propriété

Etant donné deux droites sécantes (Δ) et (Δ'). Le rapport de projection orthogonal k de (Δ) sur (Δ') est égal au rapport de projection orthogonal k' de (Δ') sur (Δ) ; On a k=k'.

3)Cas particuliers

a) Cas ou les deux droites sont perpendiculaires

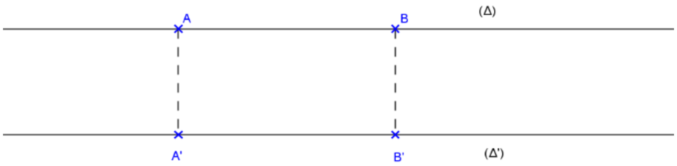
Si (Δ) et (Δ') sont perpendiculaires, alors le rapport de projection orthogonal k de (Δ) sur (Δ') est égal à 0 (k est nul)



$$k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{0}{2} = 0$$
$$k = 0$$

b) Cas ou les deux droites sont parallèles

Si (Δ) et (Δ') sont deux droites parallèles, alors le rapport de projection orthogonal k de (Δ) sur (Δ') sera égal à 1.



$$\boldsymbol{k = \frac{A'B'}{AB} = 1 \; car \; AB = A'B'}$$
$$\boldsymbol{k = 1}$$

4)Exercices résolus

Exercice1

1)Tracer une droite (Δ) puis placer les points O, A et B tels que OA=2 et OB=5. (On prendra le cm pour unité)

2)Tracer une autre droite (Δ') perpendiculaire à (Δ) passant par O.

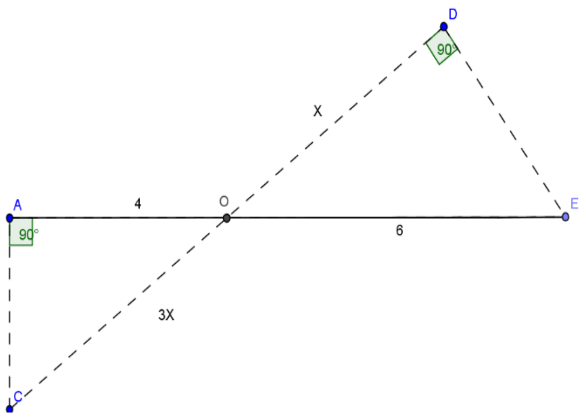
3)Construire les points O', A' et B' les projections orthogonales de O, A et B sur (Δ')

4)Calculer le rapport de projection k de AB sur (Δ').

5)Conclure en énonçant une propriété du cours.

Exercice2

Soit la figure suivante :



Ecrire en justifiant une équation dont x est solution, puis la résoudre.

CHAPITRE9 : LE THEOREME DE PYTHAGORE

I)RELATIONS METRIQUES DANS LE TRIANGLE RECTANGLE

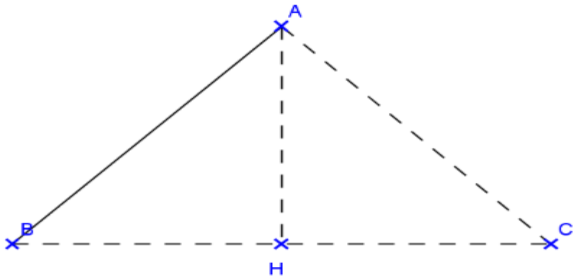
A) Première relation métrique

1)Activité

1)Construisons un triangle ABC rectangle en A, puis traçons sa hauteur [AH].
2)Mesurons les longueurs des segment AB ; BH et BC ; puis calculons et comparer BA^2 et BHxBC

Résolution

1)Construisons le triangle ABC rectangle en A puis construisons AH



2)Après les différentes mesures et les différents calculs, On constate que $BA^2=BH\times BC$.

2)Théorème

Soit ABC un triangle de hauteur [AH].
Si ABC est rectangle en A, alors :$BA^2=BH\times BC$ (*première relation métrique*).

3)Démonstration du théorème

Considérons d'une part le rapport de projection orthogonal k de la droite (AB) sur la droite (BC), on a : p(B)=B ;p(A)=H ;alors $k=\frac{BH}{AB}$.

Considérons d'autre part le rapport de projection orthogonal k' de la droite (BC) sur la droite (AB), on a : p(B)=B ;p(C)=A ;alors $k'=\frac{AB}{BC}$.

En projection orthogonale ; k=k'

$K=k' \leftrightarrow \frac{BH}{BA}=\frac{BA}{BC} \leftrightarrow BA\times BA=BH\times BC$; *Cqfd.*

B) Deuxième relation métrique

1)Activité

Considérons d'une part le rapport de projection orthogonal k de (AC) sur (BC) ; on a :p(C)=C ;p(A)=H ;alors $k=\frac{CH}{CA}$.

Considérons d'autre part le rapport de projection orthogonal k' de la droite (BC) sur la droite (AC) ;on a :p(C)=c ;p(B)=A ;alors $k'=\frac{AC}{AB}$

D'après la propriété du rapport de projection orthogonal ; on a k=k'

$K=k' \leftrightarrow \frac{CH}{CA}=\frac{CA}{BC} \leftrightarrow CA^2=CH\times BC$

2)Théorème

Soit ABC un triangle de hauteur AH.
Si ABC est un triangle rectangle en A, alors :$CA^2=CH\times BC$ (*deuxième relation métrique*)

Exercices d'application

Exercice1

Enoncer les deux premières relations métriques pour :
1)Un triangle MNP rectangle en P de hauteur [PH]
2)Pour un triangle ABC rectangle en B de hauteur [BB']

Exercice2

ABC est un triangle rectangle en A. Soit H le projeté orthogonal de A sur le segment [BC]. On donne AC=3cm et BC=5cm.
Construire le triangle rectangle ABC puis calculer les longueurs BH et CH.

II)THEOREME DE PYTHAGORE ET SA RECIPROQUE

1)Théorème de Pythagore

a) Activité

Considérer les deux premières relations métriques :$BA^2=BH\times BC$(1) et $CA^2=CH\times BC$(2).
Exprimer BC en fonction de AB et AC.

Solution

En additionnant membre a membre les deux égalités
On a: $BA^2+CA^2=BH\times BC + CH\times BC$
$=BC(BH+CH)$ ou $(BH+HC)$
$=BH\times BC$
Il résulte que : $AB^2+AC^2=BC^2$
Cette égalité est connue sous le nom de théorème de Pythagore (mathématicien grec né en -570 et mourut vers -520).

b) Théorème de Pythagore

Si ABC est un triangle rectangle en A, alors : $BC^2=AB^2+AC^2$.
Dans un triangle rectangle le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres cotes de l'angle droit.

Exercice d'application

ABC est un triangle rectangle en A. Calculer BC dans chaque cas ci-dessous :
1)AB=9cm et AC=12cm
2)AB=15cm et AC=8cm

2)Réciproque du théorème de Pythagore

a) Activité

ABC est un triangle. Calculer AB^2+AC^2 puis BC^2 dans les deux cas ci-dessous ; en déduire la nature du triangle ABC.
1er cas : AB=4 ; AC=9 et BC=12
2ème cas : AB=$\sqrt{13}$;AC=$\sqrt{15}$ et AC=$2\sqrt{7}$

Solution
1er cas : $BC^2 \neq AB^2+AC^2$ alors le triangle n'est pas rectangle.
2ème cas : $AB^2+AC^2=BC^2$ alors ABC est un triangle rectangle en A.

b) Réciproque du théorème de Pythagore

Si dans un triangle $BC^2=AB^2+AC^2$ alors le triangle ABC est un triangle rectangle en A. On admettra que si $BC^2 \neq AB^2+AC^2$ le triangle ABC n'est pas rectangle.

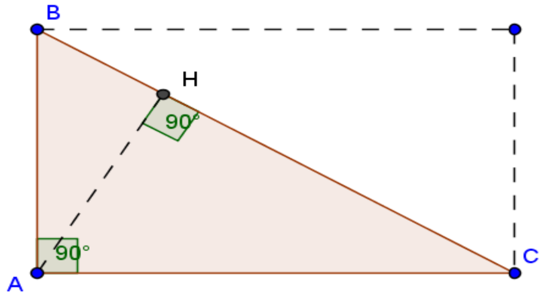
NB : ●Le théorème de Pythagore est utilisé pour calculer la longueur d'un côté d'un triangle connaissant la longueur des deux autres cotés.

●La réciproque du théorème de Pythagore quant à elle est utilisée pour prouver qu'un triangle est rectangle (nature du triangle).

III)AUTRES RELATION METRIQUES

1)Activité

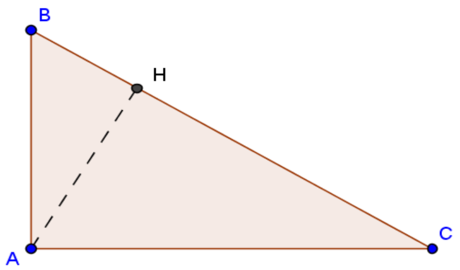
Considérons la figure ci-dessous ABC est un triangle rectangle en A et AH en est la hauteur.



1)Calculer l'aire du triangle ABC de deux manières différentes.
2)En égalisant ces deux surfaces ; établir que ABxAC=BCxAH
3)Mesurer AH ; BH et CH ; puis comparer AH^2 et HBxHC.

Solution
1)Calculons l'aire du triangle ABC de deux manières différentes.
1ère manière :ABC étant rectangle en A alors : $S_1=\frac{AB\times AC}{2}$.
2ème manière :ABC rectangle en A et AH la hauteur, alors : $S_2=\frac{BC\times AH}{2}$
2)Etablissons que ABxAC=BCxAH
Comme les deux surfaces sont égales, alors $S_1=S_2$
$\frac{AB\times AC}{2}=\frac{BC\times AH}{2}$,par conséquent : ABxAC=BCxAH (*3ème relation métrique*)
3)En mesurant AH ; BH et CH ; puis en comparant on constate que : $AH^2=BH\times HC$ (*4ème relation métrique)*

2)Théorème



Si ABC est un triangle rectangle en A de hauteur [AH],
Alors : BCxAH=ABxAC (*3ème relation métrique*)
$AH^2=BH\times HC$ (*4ème relation métrique*)

3)Démonstration (4ème relation métrique)

On a BC=HB+HC$\leftrightarrow$$BC^2=(HB+HC)^2=HB^2+2HBxHC+HC^2$

Alors :$2HBxHC=BC^2-HB^2-HC^2$ *(1)*

En appliquant le théorème de Pythagore aux triangles AHB et AHC rectangle en H ; on a :

$HB^2=AB^2-AH^2$ et $HC^2=AC^2-AH^2$.

D'après *(1)* ; $2HBxHC=BC^2-(AB^2-AH^2)-(AC^2-AH^2)\leftrightarrow 2HBxHC=BC^2-AB^2-AC^2+AH^2+AH^2$

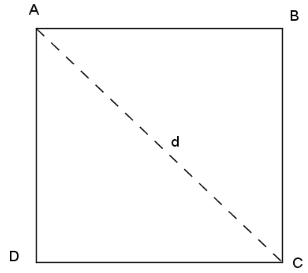
or : $BC^2=AB^2+AC^2$

D'où :2. HBxHC=2.AH2$\leftrightarrow$$HBxHC=AH^2$.*cqfd*

IV)APPLICATION DU THEOREME DE PYTHAGORE

1)La longueur de la diagonale d'un carré

Soit ABCD un carré de côté a

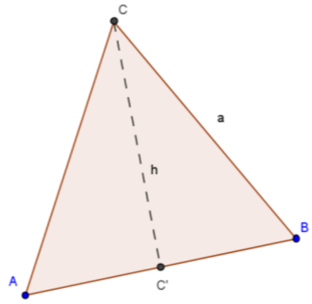


Considérons le triangle ABC rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore :

On a :$AC^2=AB^2+BC^2\leftrightarrow d^2=a^2+a^2\leftrightarrow$ $d=a\sqrt{2}$ (*Mesure de la diagonal d'un carré de côté a)*

2)La hauteur d'un triangle équilatéral

Soit ABC un triangle équilatéral de cote a. Déterminons la hauteur h du triangle équilatéral.

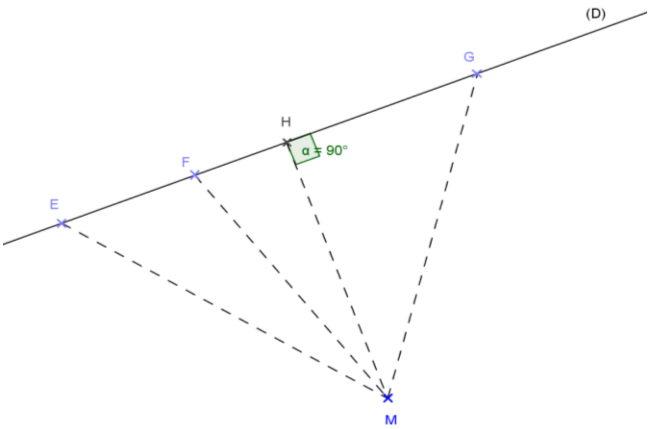


Considérons le triangle ABC rectangle en C', d'après le théorème de Pythagore :$AC^2=CC'^2+AC'^2$

Ce qui donne : $a^2=h^2+(\frac{a}{2})^2\leftrightarrow h^2=\frac{3a^2}{4}$ alors $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (*hauteur d'un triangle équilatéral de côté a*)

3)Distance d'un point à une droite

Soit (D) une droite. E, F et G trois points de la droite (D). Soit M un point n'appartenant pas à la droite (D). Existe-il un point H de la droite (D) tel que la distance MH soit la plus petite possible ?



Pour que MH soit la plus petite distance ,il faut que H soit le projeté orthogonal de M sur la droite (D).

Définition :On appelle distance d'un point M a une droite (D) la disdance de M a son projete orthogonal sur la droite (D).

4)Exercices resolu

Exercice1

L'unité de longueur est le centimètre.

1)Interpréter l'égalité $(2\sqrt{5})^2=6^2-4^2$ en utilisant la réciproque du théorème de Pythagore dans un triangle rectangle.

2)Construire un segment [MN] de longueur $2\sqrt{5}$. Enoncer votre programme de construction.

Exercice2

ABC est un triangle rectangle en A. Soit H le projeté orthogonal de A sur le segment [BC].

On donne AC=3cm et BC=5cm.

1)Construire le triangle ABC

2)Calculer les longueurs BH et CH.

Exercice3

ABCD est un rectangle tel que AB=4cm et BC =3cm.

M est un point de [AB] tel que AM=1cm

N est un point de [BC] tel que BN=1cm

1)Démontrer que les droites (MD) et (MN) sont perpendiculaires.

2)La droite perpendiculaire a (DN) et passant par M coupe [DN] en H. Calculer MH.

CHAPITRE10 : LE THEOREME DE THALES

I)LE THEOREME DE THALES RELATIF AUX TRIANGLES

1)Activité

I)Soit ABC un triangle tel que AB=6cm ; AC=5cm et BC=8cm.Soit M un point du segment [AB] tel que AM=3cm.

1) Faire une figure
2) Construire le point N tel que les droites (NM) et (BC) soient parallèles
3)Mesurer les longueurs MN et AN puis comparer les rapports :$\frac{AM}{AB}$;$\frac{AN}{AC}$ et $\frac{MN}{BC}$

Que constate-t-on ?

II)Reprendre le triangle ABC

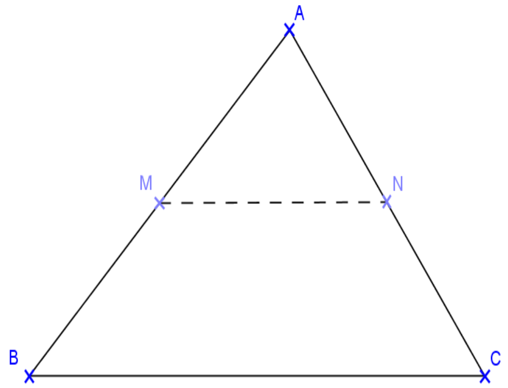
1)Construire le point E sur [BA] tel que AE=2cm.La parallèle à (BC) passant par E coupe la droite AC en F.

2)Mesurer les longueurs AF ; AE et EF ; puis comparer les rapports $\frac{AF}{AC}$;$\frac{AE}{AB}$ et $\frac{EF}{BC}$.

Solution

I-1) Construction

2)Voir figure

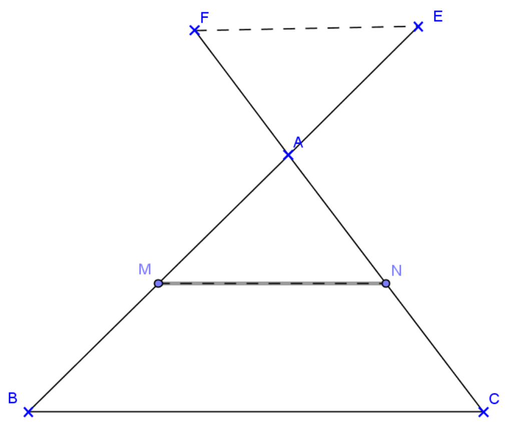


3)Mesurons et comparons

On a :$\frac{AM}{AB}=\frac{1}{2}$;$\frac{MN}{BC}=\frac{1}{2}$;$\frac{AN}{AC}=\frac{1}{2}$

On constate que les rapports sont égaux.

I- 1) Construction

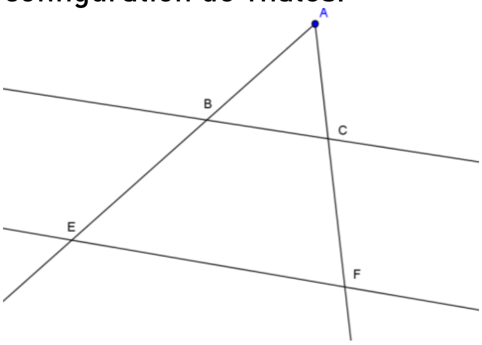


2)Mesurons et comparons les rapports

On a : $\frac{AE}{AB}=\frac{1}{3}$;$\frac{AF}{AC}=\frac{1}{3}$ et $\frac{EF}{BC}=\frac{1}{3}$.
On constate que : $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$

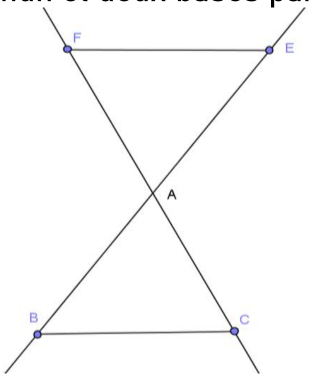
2)Definition
On dit que deux triangles forment une configuration de Thalès ,lorsqu'ils sont detreminés par deux droites sécantes coupées par deux droites parallèles.

3)Cas de triangles en configuration de Thalès
→Deux troites secantes coupées par deux droites parallèles forment une configuration de Thalès.



Les droites (BC) et (EF) étant parallèles, alors les triangles ABC et AEF forment une configuration de Thalès. On peut donc écrire : $\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AF}=\frac{BC}{EF}$.

→Deux triangles forment une configuration de Thales, lorsqu'ils ont un sommet commun et deux bases parallèles.



Les droites (BC) et (EF) étant parallèles, alors les triangles ABC et AEF forment une configuration de Thalès. On peut donc écrire : $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$.

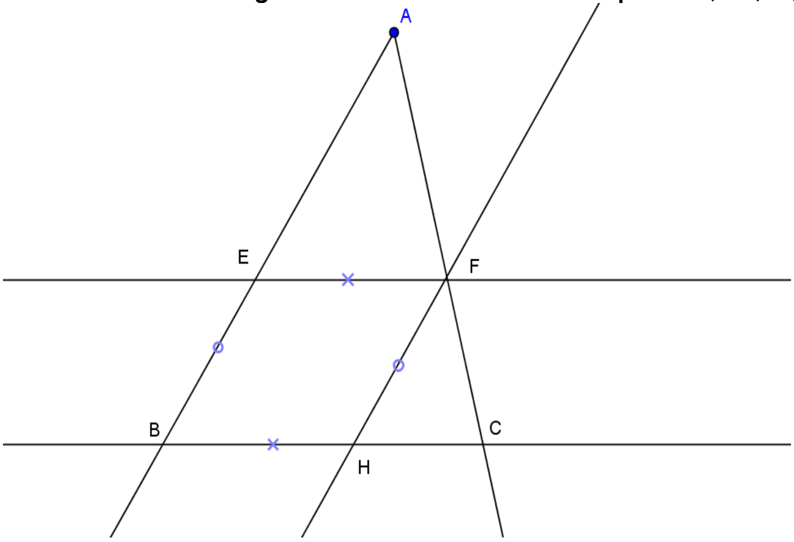
Exercice d'application
ABC est un triangle tel que AB=12cm ; AC=16cm et BC=20cm.
Soit M le point de [AB] tel que AM=3cm. La parallèle à la droite (BC) passant par M coupe (AC) en N.
Calculer les longueurs AN et MN.

Correction
●La distance AN

On a : ANxAB=ABxAC alors AN=4cm
●La distance MN
On a : MNxAB=AMxBC alors MN=5cm

4)Démonstration du théorème de Thalès

Considerons la figure ci-dessous dans laquelle (BC)∕∕(EF)



→Les droites (BC) et (EF) étant parallèles, les triangles ABC et AEF forment une configuration de Thalès.
→Si B et E sont les projetés respectifs des points C et F sur la droite (AB) parallèlement à la droite (BC). On a : $k=\frac{AE}{AF}=\frac{AB}{AC}$;cela signifie que AExAC=ABxAF (1), en divisant les deux membres de l'égalité (1) par le produit ABxAC, on obtient : $\frac{AE\times AC}{AB\times AC}=\frac{AB\times AF}{AB\times AC}\leftrightarrow\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$

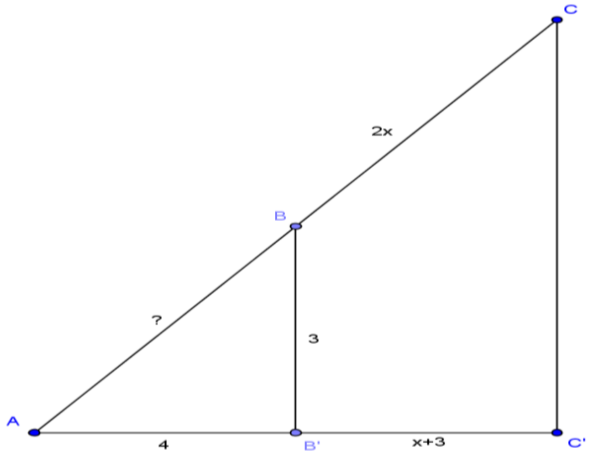
Reprenons la même figure et par F traçons la parallèle a la droite (AB), elle coupe la droite (BC) en H.
→Les points B et H sont les projetés respectifs des points A et F sur la droite (BC) parallèlement à la droite (AB).
→Si k' est le rapport de projection de la droite (AC) sur (BC) parallèlement a (AB), alors : $k'=\frac{BH}{AF}=\frac{BC}{AC}$

Le quadrilatère BHFE étant un parallélogramme, alors BH=EF. Il résulte que : $k'=\frac{EF}{AF}=\frac{BC}{AC}\leftrightarrow EF\times AC=BC\times AF\ (2)$ .En divisant les deux membres de l'égalité (2) par le produit ACxBC, on obtient : $\frac{EF\times AC}{AC\times BC}=\frac{BC\times AF}{AC\times BC}\leftrightarrow\frac{EF}{BC}=\frac{AF}{AC}$

Théorème de Thalès :
Si les triangles ABC et AEF forment une configuration de Thalès, alors :
$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$

Exercice d'application

Soit la figure suivante ou ABB' et ACC' sont deux triangles rectangles respectivement en B' et C'.



1)Calculer la distance AB
2)Calculer la valeur du réel x en utilisant :
a) Le rapport de projection orthogonale de (AC) sur (AC') ;
b) Le théorème de Thalès.
3)Calculer les distances AC ; AC' puis CC'.

5)Activité de construction

a) Partage d'un segment dans un rapport donné

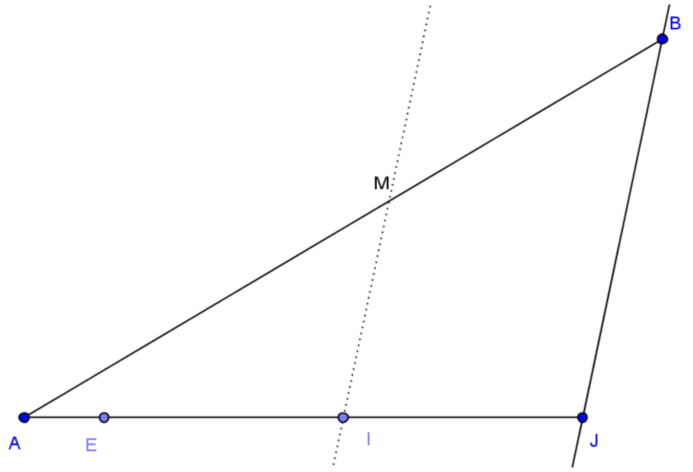
Soit [AB] un segment. Construisons le point M de [AB] tel que AM=$\frac{4}{7}$AB

→1er cas : construction à la règle graduée

AM=$\frac{4}{7}$AB↔$\frac{AM}{AB}$=$\frac{4}{7}$

On trace le segment [AB], on le mesure à l'aide de la règle graduée.
On divise cette mesure par 7 et on prend 4 parties.

→2ème cas : construction à la règle et au compas (*méthode préconisée*).
On trace une demie droite d'origine A et à l'aide du compas ; on construit sur cette demi-droite les points E, I, J tel que AE=1cm ; AI=4cm et AJ=7cm.
Par le point I, on mène la parallèle à (BJ) ; elle coupe la droite (AB) en M.



Les droites (MI) et (BJ) étant parallèles ; les triangles AMI et ABJ forment une configuration de Thalès.

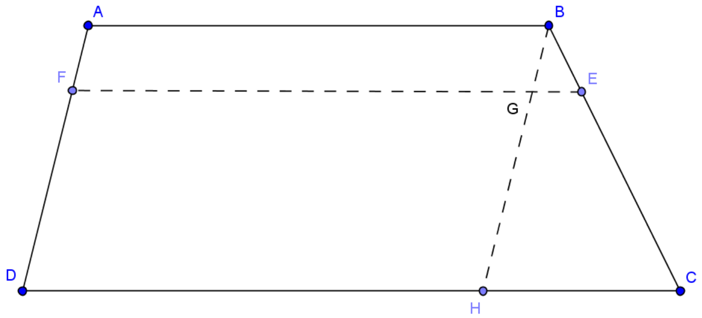
$$\frac{AM}{AB}=\frac{AI}{AJ}=\frac{MI}{BJ}\leftrightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{AI}{AJ}\leftrightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{4}{7}$$

$\frac{AM}{AB}=\frac{4}{7}\leftrightarrow AM=\frac{4}{7}AB$: on dit qu'on a partagé le segment [AB] dans le rapport $\frac{4}{7}$

.

b) Cas du trapèze

Soit ABCD un trapèze quelconque



Soit E le point du segment [BC] tel que BE=$\frac{1}{4}$BC.

La parallèle à (DC) passant par E coupe (AD) en F. Montrons que AF=$\frac{1}{4}$AD.

→1ère méthode

Les points A, F et D sont les projetés respectifs des points B, E et C sur la droite (AD) parallèlement à la droite AB. On peut alors écrire :

$$\frac{AF}{BE}=\frac{AD}{BC}\leftrightarrow\frac{AF}{AD}=\frac{BE}{BC}\leftrightarrow\frac{AF}{AD}=\frac{1}{4}\leftrightarrow AF=\frac{1}{4}AD$$

→2ème méthode

Sur la même figure, traçons la parallèle à la droite (AD) passant par le point B. Elle coupe les droites (EF) et (CD) respectivement en G et H.

Les droites (GE) et (CH) étant parallèles, les triangles BGE et BCH forment une configuration de Thalès. Alors : $\frac{BG}{BH}=\frac{BE}{BC}=\frac{GE}{CH}\leftrightarrow\frac{BG}{BH}=\frac{BE}{BC}$.

Les quadrilatères ABGF et ABHD étant des parallélogrammes ; alors BG=AF et BH=AD.

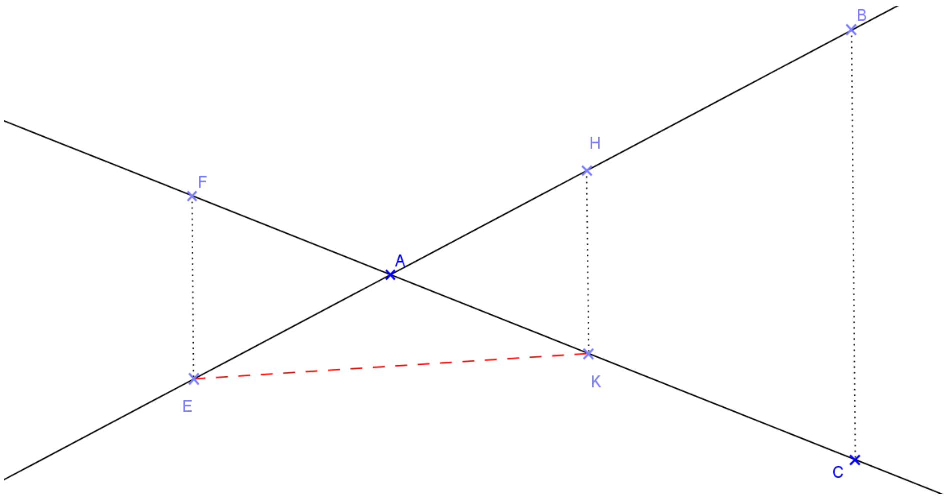
Il résulte que : $\frac{BG}{BH}=\frac{BE}{BC} \leftrightarrow \frac{AF}{AD}=\frac{1}{4} \leftrightarrow AF=\frac{1}{4}AD$.

II)RECIPROQUE DU THEOREME DE THALES

1)Activité

1)Tracer un segment [AC] de mesure 7cm et marquer le point K tel que AK=3cm ;
2)Soit B un point n'appartenant pas à la droite (AC). Construire le point H du segment [AB] tel que AH=$\frac{3}{7}$AB.
3)Le point E est le symétrique de H par rapport à A. Comparer les rapports $\frac{AE}{AB}$ et $\frac{AK}{AC}$ .Les triangles AEK et ABC forment-ils une configuration de Thalès ? Justifier
4)Le point F est le symétrique de K par rapport à A. Comparer les rapports $\frac{AE}{AB}$ et $\frac{AF}{AC}$ .Les triangles AEF et ABC forment une configuration de Thalès ? Justifier.

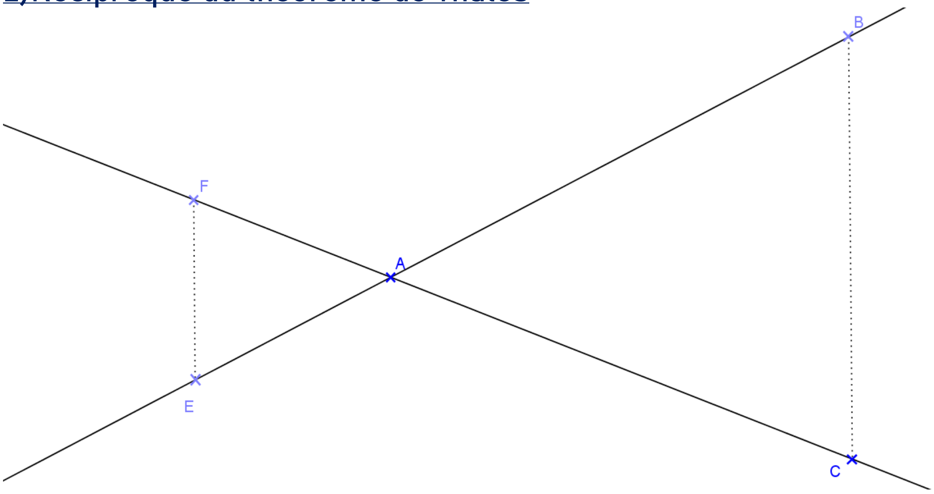
Correction
1)Voir figure



2)Voir figure
3)Voir figure(construction)
On a : $\frac{AE}{AB}=\frac{3}{7}$ et $\frac{AK}{AC}=\frac{3}{7}$; *il* resulte que $\frac{AE}{AB}=\frac{AK}{AC}$. Les triangles AEK et ABC ne forment pas une configuration de Thalès ; car (EK) n'est pas parallèle (BC).

Remarque importante : L'égalité $\frac{AE}{AB}=\frac{AK}{AC}$ ne suffit pas pour conclure sur le parallélisme des droites (EK) et (BC).
4)Voir figure(construction)
On constate que les rapports $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{3}{7}$.
Les triangles AEF et ABC forment une configuration de Thalès ; car ils sont déterminés par deux sécantes coupes par deux droites parallèles (EF) et (BC).

2)Réciproque du théorème de Thales



ABC est un triangle. E un point de la droite (AB) et F un point de la droite (AC). Si $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$ et si les points E ,A et B sont dans le même ordre que les points F,A et C ; alors les droites (BC) et (EF) sont parallèles.

NB *: Le théorème de Thales est utilisé pour calculer des distances ; tandis que la réciproque du théorème de Thalès est utilisée pour démontrer que deux droites sont parallèles*.

3)Exercice résolu

Soit ABC un triangle tel que AB=6cm ; AC=8cm et BC=10cm.

1-a) Faire une figure puis déterminer la nature tu triangle.

b) Calculer le rapport de projection de (AB) sur (AC) parallèlement à (BC).

2) Le point E est le point de [AC] tel que AE=3cm. La médiatrice de [EC] coupe [EC] en H ;[BC] en J et [BE] en M.

a) Démontrer que les droites (JH) et (AB) sont parallèles.

b) Démontrer que le segment [HC] mesure 2,5cm

c)Calculer la valeur exacte de [JH]

d) Calculer HM.

CHAPITRE 11 : REPERE ORTHONORME-DISTANCE DE DEUX POINTS

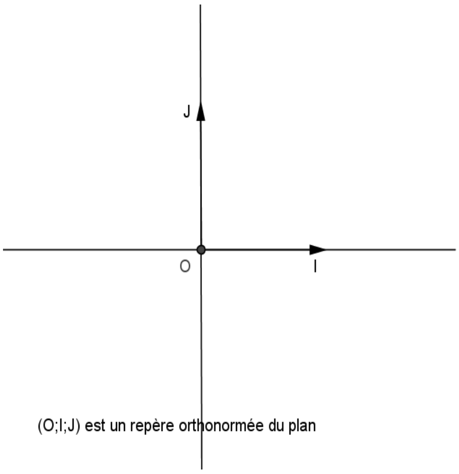
I)LES REPERES ORTHONORMES

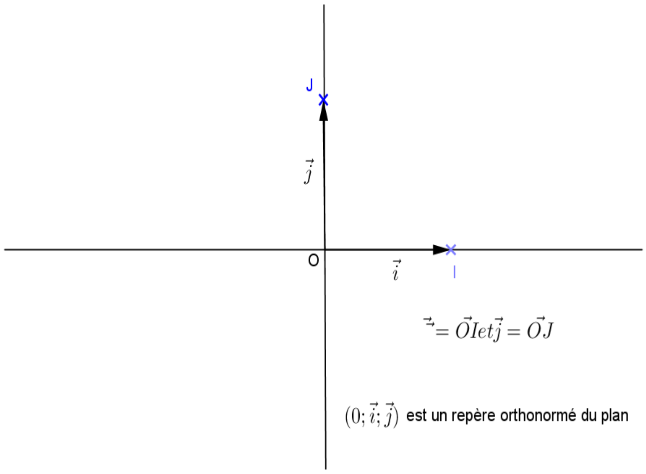
1)Définition

Soit (O ; I ; J) un repère du plan.
On dit que (O ; I ; J) est un repère orthonormé (orthonormal) ; si :
-Les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires ;
-L'unité de graduation est la même sur les deux axes.

2)Représentation

Si on pose $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$;(O ;I ;J) étant un repère orthonormé du plan, il résulte que $(O;\vec{i};\vec{j})$ est aussi un repère orthonormée du plan.





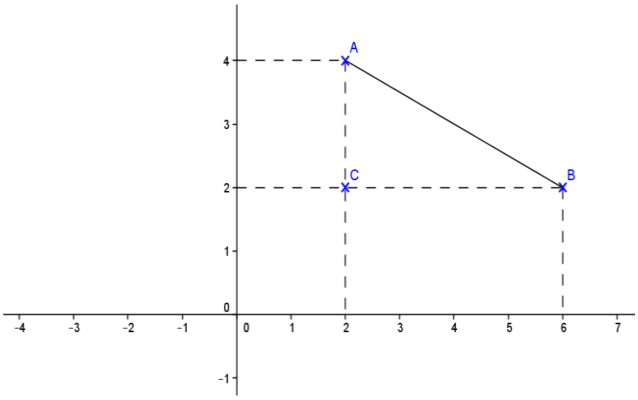
II)DISTANCE DE DEUX POINTS DANS LE REPERE ORTHONORME

1)Activité

1)(O ;I ;J) est un repère orthonormé d'unité (1cm).
a) Placer les points A(2 ;4) ;B(6 ;2) et C(2 ;2).
b) Calculer AC et BC
c) En considérant le triangle ABC et en appliquant le théorème de Pythagore ; calculer AB^2 et trouver la valeur exacte de AB.
2)Dans un repère orthonormé (O ;I ;J) ;placer les points $A(x_A ;y_A)$;$B(x_B ;y_B)$ et $C(x_c ;y_C)$.
a) Exprimer BC^2 en fonction de x_A et x_B ;AC^2 en fonction de y_A et y_B
b) Calculer AB^2 et en déduire AB en fonction de x_A ; x_B ; y_A et y_B.

Correction

1-a) Plaçons les points A ;B et C



b) Calculons AC et BC

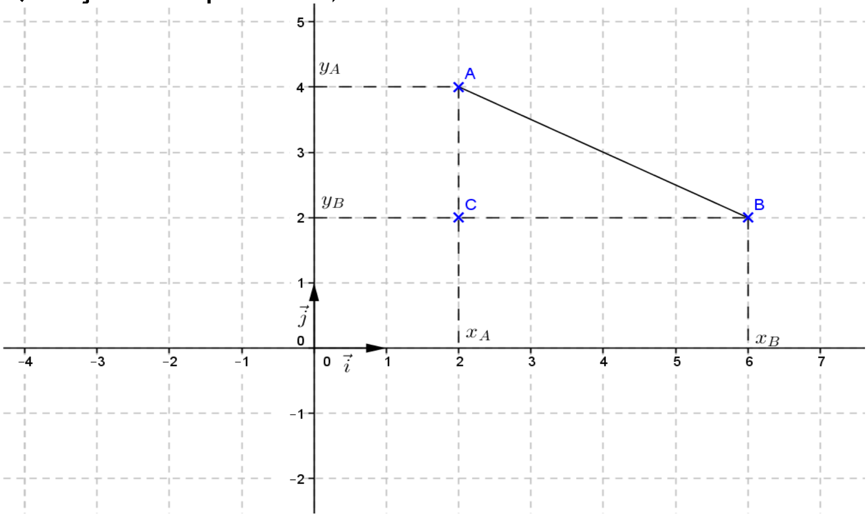
AC=$|y_C-y_A|=|2-4|=|-2|=2$

BC=$|x_C-x_B|=|2-6|=|-4|=4$

c)ABC est un triangle rectangle en C ; d'après la propriété de Pythagore, on a :

$AB^2=2^2+4^2=4+16=20 \Leftrightarrow AB=2\sqrt{5}$.

2)Plaçons les points A ;B et C



a) Expression de AC^2 et BC^2

AC=$|y_B-y_A| \leftrightarrow AC^2=(y_B-y_A)^2$ et BC=$|x_B-x_A| \leftrightarrow BC^2=(x_B-x_A)^2$

b) Déduisons AB^2 et déduisons l'expression demandée

ABC est un triangle rectangle en C ; d'après la propriété de Pythagore, on a :

$AB^2=AC^2+BC^2 \leftrightarrow AB^2=(y_B-y_A)^2+(x_B-x_A)^2$; il résulte que AB=$\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

2)Définition

Si A(x_A ;y_A) et B(x_B ;y_B) sont deux points dans un repère orthonormé (O ;I ;J) ;la distance entre le point A et Le point B est donne par la relation :AB=$\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

Exercice d'application

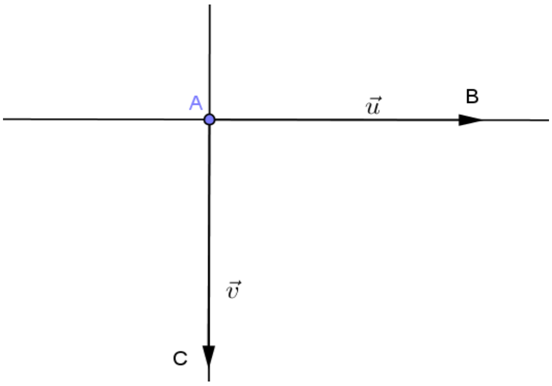
Dans un repère orthonormé (O, I, J) ; on donne les points A(5 ;2) ;B(3 ;2+$\sqrt{3}$) et C(1 ;2).

Montrer que le triangle ABC est isocèle

III)VECTEURS ORTHOGONAUX

1)Représentation

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tel que :$\vec{u}=\overrightarrow{AB}$; $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ et (AB)⊥(AC)



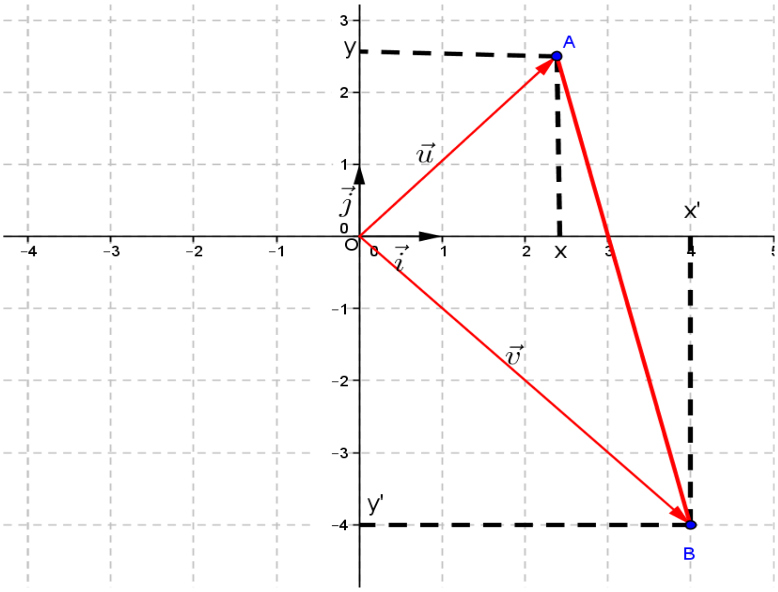
2)Définition

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux signifient que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

3)Caractérisation de l'orthogonalité de deux vecteurs

a) Caractérisation

(O ;$\vec{i}$;$\vec{j}$) est un repère orthonormé du plan. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux et non nuls de coordonnées respective $\binom{x}{y}$ et $\binom{x\prime}{y\prime}$.Soient A et B deux points tels que le vecteur $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$.



Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant orthogonaux, alors les droites (OA) et (OB) sont perpendiculaires. Le triangle AOB est donc rectangle en O.
D'après le théorème de Pythagore :
$AB^2=OA^2+OB^2$

$\overrightarrow{OA}=\vec{u} \leftrightarrow \overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $A(x;y)$

$\overrightarrow{OB}=\vec{v} \leftrightarrow \overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $B(x';y')$

$$AB^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2=(x'-x)^2+(y'-y)^2$$

$$AB^2=OA^2+OB^2 \leftrightarrow (x'-x)^2+(y'-y)^2=x^2+y^2+x'^2+y'^2$$

$$\leftrightarrow 2xx'+2yy'=0$$

$$\leftrightarrow xx'+yy'=0$$

b) Théorème

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. *Soient* $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ deux vecteurs non nuls :

→Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors :$xx'+yy'=0$

→Si $xx'+yy'=0$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

NB : Dans un repère orthonormé $(o\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$;$\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ étant deux vecteurs non nuls.

Si xx'+yy'≠0 ; alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux

3)Exercice résolu

Exercice1

Dans le repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$; on considère les vecteurs $\vec{u}\binom{-2}{5}$ et $\vec{v}\binom{10}{4}$.Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice2

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) ; unité 1cm. On donne les points A(-2 ;5), B(-1 ;-2) et C(3 ;0).

1)Placer les points A, B et C dans le repère (O,I,J).

2)Calculer les distance AB ; AC et BC. En déduire la nature du triangle ABC.

3)Soit D le point tel que $\overrightarrow{OD}$=x$\vec{\imath}$+$\vec{\jmath}$ (x∈IR). Calculer la valeur de x pour que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ soient orthogonaux.

4)Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABD. Préciser les coordonnées de son centre I et calculer sont rayon.

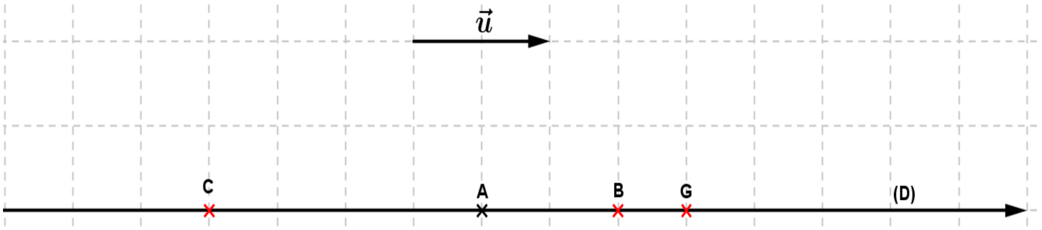
CHAPITRE 12 : DROITES-EQUATIONS

I)EQUATIONS DE DROITES

1)vecteur directeur d'ue droite

a) Activité

Soit (D) une droite du plan et A un point de la droite. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan. Construisons les points B, C et G tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$; $\overrightarrow{AC} = -2\vec{u}$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\vec{u}$. Que constate-t-on ?



On constate que les point B, C et G sont tous sur la droite D.

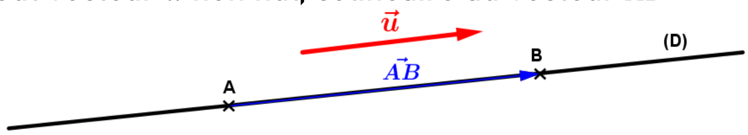
M étant un point quelconque du plan, s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k.\vec{u}$; alors M est élément de la droite D.

Réciproquement : Si M∈(D), alors les point A, B et M sont alignés ; alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. Il en est de même pour les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$.

On dit que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (D).

b) Définition

Etant donné deux points A et B d'une droite (D), On appelle vecteur directeur de (D) ; tout vecteur $\vec{u}$ non nul, colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$.



Remarques

-Si A et B sont deux points d'une droite (D) ; alors $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (D) ;

-Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (D), alors tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de la droite (D) ;

-Une droite du plan contient au moins deux vecteurs qui sont colinéaires.

2)Equation cartésienne d'une droite

a) Equation cartésienne d'une droite connaissant un point et un vecteur directeur

i)Activité

Soient $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan et (D) une droite passant par le point A(2 ;-3) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.Determinner une équation de (D)

ii)Solution

Soit M(x ;y)∈(D) tel que $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y+3\end{pmatrix}$ colinéaire à $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ .Alors $(D): 2x + y - 1 = 0$

$2x + y - 1 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (D).

b) Equation cartésienne d'une droite connaissant deux points de cette droite

i)Activité

Soient $(O, \vec{i};\ \vec{j})$ un repère orthonormé du plan et (D) une droite passant par les points A(-2 ;-3) et B(-1 ;1). Déterminer une équation cartésienne de la droite (D).

ii)Solution

Soit M(x ;y)∈(D) tel que $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+2 \\ y+3 \end{pmatrix}$ $colinéaire$ à $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.Alors $(D) \colon 4x - y + 5 = 0$.

$4x - y + 5 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (D).

Remarques

*D'une manière générale si $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan ; une équation cartésienne d'une droite (D) est sous la forme : (D) :ax+by+c=0 ou a, b et c sont des nombres réels non tous nul.

*Pour tout réel k non nul ; k(ax+by+c=0) est aussi une équation cartésienne de la droite (D).

*Une droite à donc une infinité d'équations ; c'est pourquoi on parlera de ≪ *une équation de la droite* ≫ et non de ≪ *l'équation de la droite* ≫.

c)propriétés

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient a et b deux réels non tous nul et c un réel quelconque.

*L'ensemble des points M dont les coordonnées (x ;y) vérifient ax+by+c=0 est une droite.

*ax+by+c=0 est appelée équation cartésienne de la (D) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

*Le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (D).

Exemple/Exercice

Soient (Δ) et (Δ') deux droites du plan d'équation respective (Δ) :4y-5x=1 et (Δ') :$\frac{2}{3}x + y - 5 = 0$. Déterminer les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vecteurs directeur de (Δ) et (Δ').

Remarques

"ax+by+c=0" est une équation cartésienne de la droite (D) signifie que :

-Tout point M(x ;y) tel que ax+by+c est un point qui appartient à la droite (D).

-Tout point M(x ;y) tel que ax+by+c≠0 est un point qui n'appartient pas à la droite (D)

Exemple/Exercice

Soit la droite (D) d'équation : 3x-2y+5=0. Les points A(0 ;$\frac{5}{2}$) et B(1 ;-1) sont-ils éléments de la droite (D) ?.

3)Forme réduite d'une équation

Soit la droite (Δ) d'équation :ax+by+c=0.

On peut transformer la forme générale d'une équation de la façon suivante :

ax+by+c=0 ↔by=-ax-c↔ $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ (b$\neq 0$).

Si on pose m=$-\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$;alors l'équation devient y=mx+p.
y=mx+p est la forme réduite d'une équation cartésienne.

Théorème

Si une droite (D) à pour équation y=mx+p alors :

*$\vec{u}\binom{1}{m}$ est un vecteur directeur de la droite (D)

*Le réel m est appelé pente ou coefficient directeur de la droite (D).

*Le réel p est l'ordonnée du point d'abscisse 0. On dit que le reel p est l'ordonnée à l'origine

Exemple/Exercice

Donner la pente et un vecteur directeur des droites (D) :-x+2y-5=0 et

(Δ):$\frac{4}{5}x - 2y = -1$

4)Construction d'une droite dans un repère

Soit à tracer dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$; $\vec{j}$) la droite (Δ) d'équation -2x+y-3=0.

Pour tracer la droite (D) dans le repère, il suffit de trouver deux points qui l'appartient et les placer dans le repère (O, $\vec{i}, \vec{j}$).

Comment trouver ces deux points ?

On fixe (on donne) une valeur à x ou à y dans l'équation donnée ; puis on calcul l'autre valeur (x ou y)

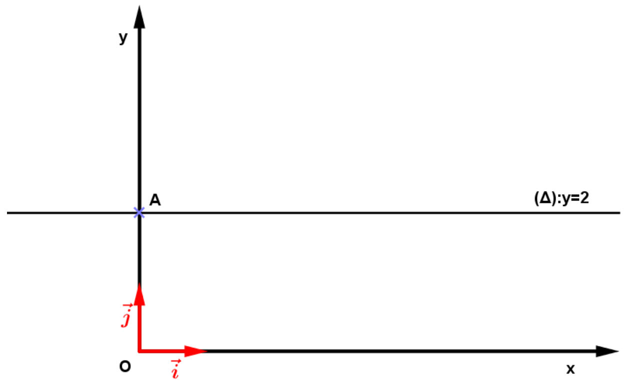
La première valeur étant à choisir, il faut la choisir judicieusement de telle sorte qu'en calculant l'autre, on puisse obtenir un entier ou tout au plus un nombre décimal.

Construction à terminer.

II)Cas particuliers

1)Droites parallèles à l'axe des abscisses

Soit (O, $\vec{i}, \vec{j}$) un repère orthonormé du plan. Considérons la droite (Δ) passant par A(0 ;2) et parallèle à l'axe des abscisses.

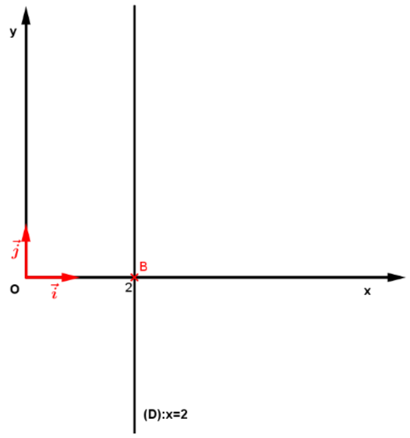


La relation y=2 caractérise l'ensemble des points de la droite (Δ). Tout point de la droite (Δ) on pour ordonnées 2.

Théorème : Toute droite parallèle à l'axe des abscisses à une équation de la forme "y=b" ou b est l'ordonnée d'un point de cette droite.
Remarques : Si b=0 alors (Δ) :y=0 .La droite (Δ) est confondue avec l'axe des abscisses.
L'axe des abscisses est une droite qui à pour équation "y=0"

2)Droite parallèle à l'axe des ordonnées

Soit (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère orthonormé du plan. Construisons la droite (D) passant par le point B(2 ;0) et parallèle à l'axe des ordonnées.



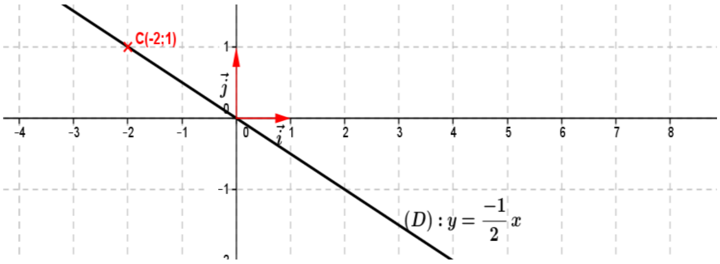
La relation $\ll x = 3 \gg$ caractérise tous les points de la droite (D) dont l'abscisse est 3 :On dit que x=3 est une équation de la droite (D).

Théorème
Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées à une équation de la forme "x=a" ou a est l'abscisse d'un point de cette droite.
Remarques
*Si a=0 alors la droite (D) est confondue à l'axe des ordonnées.
*L'axe des ordonnées est une droite qui a pour équation "x=0".
NB : Les droites parallèles à l'axe des abscisses et les droites parallèles à l'axe des ordonnées n'ont pas de pente.

3)Droites passant par l'origine du repère

a)Activité

Soit (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère orthonormé du plan. Soit la droite (D) passant par l'origine du repère et contenant le point C(-2 ;1). Déterminer une équation de la droite (D).
Solution
On a C(-2 ;1) et O(0 ;0) élément de la droite (D) ;alors $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (D).
Soit M(x ;y)∈(D) tel que $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y-1\end{pmatrix}$ colinéaire à $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.Il résulte que $y = -\frac{1}{2}x$.



b) Théorème

-Toute droite passant par l'origine du repère et distincte de l'axe des ordonnées a une équation de la forme "y=ax" ou $\vec{u}\binom{1}{a}$ est un vecteur directeur de cette droite.

-Toute droite d'équation "y=ax" passe toujours par l'origine du repère.

III)DROITES PARALLELES-DROITES PERPENDICULAIRES

1)Droites parallèles

a) Rappels

*Si deux droites sont parallèles, alors leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
*Si deux droites ont leurs vecteurs directeurs colinéaires, alors elles sont parallèles.

b) Activité

Le plan est muni d'un repère (O,I,J). On donne (D) : y=2x-4 et (D') : y=2x+1
1-a) Représenter les droit (D) et (D') dans le repère.
b) Que dire des droites (D) et (D') ? Justifier
3)Soit la droite (Δ) : y=ax+b. On suppose que (Δ)//(D). Déterminer la valeur de a en utilisant la colinéarité des vecteurs directeurs.

Solution

1-a) trivial
b) On constate que les droites (D) et (D') sont parallèles. Car ils ont le même coefficient directeur.
3) Soient $\vec{u}\binom{1}{2}$ et $\vec{v}\binom{1}{a}$ les vecteurs directeurs respectifs de (D) et (Δ). Comme (D)//(Δ) alors $\vec{u}\binom{1}{2}$ $colinéaire$ $\vec{v}\binom{1}{a}$ .Il résulte que 1xa-2x1=0↔a=2.

c)Propriétés

*Si deux droites (D) et (D') ont le même coefficient directeur, alors elles sont parallèles (1).
*Si deux droites (D) et (D') non parallèles à l'axe des ordonnées, sont parallèles si et seulement si elles ont la même pente ou coefficient directeur.

Exercice d'application

Exercice1

1)Les droites (D) :-2x-7y=5 et (D') :2x+7y-1=0 sont-elles parallèles ?
2)Soient (Δ) et (Δ') deux droites d'équations respectives x-y+2=0 et -x+2y=0. Les droites (Δ) et (Δ) sont-elles parallèles ?

NB : On utilisera deux méthodes différentes (les vecteurs directeurs et les coefficients directeurs).

Exercice2

Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) passant par D(-1 ;2) et parallèle à la droite (Δ') :3x-2y-5=0.

a) En utilisant les vecteurs directeurs.

b) En utilisant les pentes.

2)Droites perpendiculaires

a) Rappel

*Si deux droites sont perpendiculaires, alors leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

*Si deux droites ont leurs vecteurs directeurs orthogonaux alors, elles sont perpendiculaires.

b) Activité

Le plan étant muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$; on donne les droites (D) :$-\frac{1}{2}x + 2y - 1 = 0$ et (Δ) :$4x + y = 3$

1-a) Représenter les droites (D) et (Δ) dans le repère.

b) Que peut-on dire de (D) et (Δ) ?

2-a) Démontrer en utilisant les vecteurs directeurs que les droites (D) et (Δ) sont perpendiculaires.

b) Déterminer les pentes des deux droites et calculer leur produit. Conclure.

Solution

1-a) Trivial

b) On constate que les droites (D) et (Δ) sont perpendiculaires.

2-a) soient $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ les vecteurs directeurs respectifs des droites (D) et (Δ)

On a :$-2 \times 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-4) = -2 + 2 = 0$;Il résulte que les droites (D) et (Δ) sont perpendiculaires.

b) Soit $a = \frac{1}{4}$ et $a' = -4$ les pentes respectives des droite (D) et (Δ).

On a $a \times a' = \frac{1}{4} \times (-4) = -1.$

On peut dire que deux droites sont perpendiculaires si le produit de leur pente est -1.

c)Propriété

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan, deux droites non parallèles aux axes, sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leur pente est égal à -1.

Dans un repère orthonormé, si le produit des pentes des deux droites est -1 alors ces droites sont perpendiculaires.

Preuve

Soit (O,I,J) un repère orthonormé du plan. Soient (D) et (D') deux droites de vecteur directeur respectifs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\a'\end{pmatrix}$.

(D) et (D') perpendiculaires, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. Il résulte que
$1 \times 1 + a \times a' = 0 \leftrightarrow a \times a' = -1$ .cqfd

NB : On admettra que si le produit des pentes des deux droites n'est pas égal à -1, alors les deux droites ne sont pas perpendiculaires.

Exercices d'applications

Exercice1

1)Les droites (D) :-2x+3y-1=0 et (D') :y=$\frac{2}{3}$x+5 sont-elles perpendiculaires ?Justifier en utilisant les vecteurs directeurs.

2)Les droites (D) :-2x+5y=-2 et (D') :-y=$\frac{5}{2}$x-10 sont-elles perpendiculaires ?Justifier en utilisant les pentes des droites.

Exercice2

1)Déterminer une équation de la droite (Δ) passant par le point A(-1 ;2) et perpendiculaire à la droite (Δ') :-x-3y-2=0 en utilisant les vecteurs directeurs.

2)Déterminer une équation de la droite (D) passant par le point B(3 ;-2) et perpendiculaire à la droite (D') :2x+5y=-4 en utilisant les pentes.

IV)Application au triangle

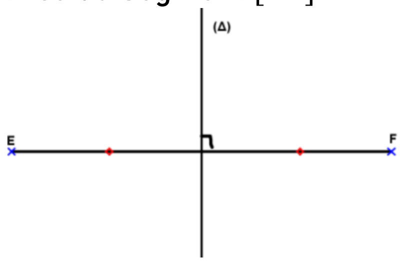
1)Equation de la médiatrice d'un segment

a) Définition

La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu.

Soit $[EF]$ un segment ;

Traçons la droite (Δ) médiatrice du segment $[EF]$



b) Méthode de détermination

*Pour déterminer une équation de la médiatrice d'un segment, on calcul d'abord les coordonnées du milieu de ce segment. Ensuite, on considère un point quelconque M(x ;y) appartenant a la médiatrice du segment et on calcul les coordonnées du vecteur directeur de la médiatrice. Enfin on montre que les vecteurs directeurs sont orthogonaux.

*Soit $[EF]$ un segment et I son milieu. Si la droite (D) est la médiatrice du segment $[EF]$ et M(x ;y)∈(D) ;alors $\overrightarrow{IM}$ est orthogonal à $[EF]$.

Exemple/Exercice

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On donne B(-2 ;5) et C(-1 ;-3). Déterminer une équation de la droite (D') médiatrice du segment [BC].

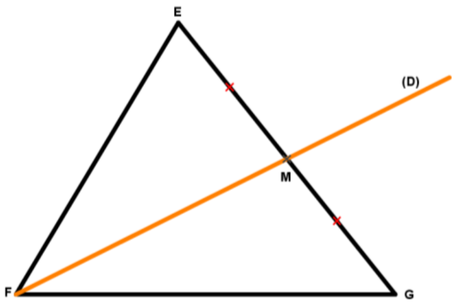
2)Equation de la médiane d'un triangle

a) Définition

La médiane d'un triangle est la droite issue d'un sommet du triangle et qui passe par le milieu du coté opposé à cet angle.

Exemple

Soit EFG un triangle quelconque ;la droite (D) est une médiane du triangle EFG issue du sommet F.



b) Méthode de construction

*Pour déterminer une équation de la médiane d'un triangle ; on calcul d'abord les coordonnées du milieu du côté opposé à l'angle concerné.

*On considère ensuite un point quelconque N(x ;y) sur la médiane ;puis on calcul les coordonnées du vecteur directeur de la médiane .

*On applique enfin la condition de colinéarité aux deux vecteurs.

Exemple/Exercice

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i},\vec{j}$). On considère les points : A(-1 ;-2) ;B(3 ;1) et C(2 ;-3).Déterminer une équation de la droite (D) médiane issue du sommet A du triangle ABC.

Solution

Déterminons une équation de la droite (D) médiane issue du sommet A

Soit K milieu du segment $[BC]$ .On a :K($\frac{5}{2}$; -1).

Soit M(x ;y)∈(D) tel que $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y+2 \end{pmatrix}$ *colinéaire* à $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.Il résulte que

(D) :$x-\frac{7}{2}y-6=0$.

Remarque

*On appel centre de gravité d'un triangle, le point d'intersection de trois médianes de ce triangle. On le note généralement G.

*Les coordonnées du centre de gravité d'un triangle ABC sont calculées de la manière suivante : $x_G = \frac{x_A+x_B+x_C}{3}$ $et\ y_G = \frac{y_A+y_B+y_C}{3}$.

Exemple/Exercice

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère les points :
A(-1 ;-2) ;B(3 ;1) et C(2 ;-3). Calculer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.

3)Equation de la hauteur d'un triangle

a) Définitions

*On appelle hauteur d'un triangle, la droite issue d'un sommet du triangle et qui est perpendiculaire au coté opposé à cet angle.

*On appelle orthocentre d'un triangle, le point d'intersection des trois hauteurs du triangle. On le note généralement H.

b) Méthode de construction

Pour déterminer une équation de la hauteur d'un triangle.
*On détermine d'abord un vecteur directeur de la hauteur ;
*On détermine ensuite un vecteur directeur du coté opposé au sommet considéré.
*enfin on applique la condition d'orthogonalité pour trouver l'équation de la droite.

Exemple/Exercice

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère un triangle ABC tel que :
A(2 ;-3) , B(1 ;5) et C(3 ;-1). Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) hauteur du triangle ABC issue du sommet C.

Solution

Soit H(x ;y)∈(Δ) tel que $\overrightarrow{CH}\binom{x-3}{y+1}$ $orthogonale$ à $\overrightarrow{AB}\binom{-1}{8}$ .Il résulte que :
(Δ) $:x - 8y + 11 = 0$.

V)Exercices résolus

Exercice1

1-a) Tracer la droite (Δ) passant par le point A(2 ;3) et de coefficient directeur -2 .
b) Donner deux points de (Δ) et deux points hors de (Δ).
2)Donner l'abscisse du point B de (Δ) dont l'ordonnée 7.
3)L'abscisse du point C de (Δ) est -11. Quelle est son ordonnée ?

Exercice2

Soit un repère orthonormal (O ;I ;J).(l'unité est le centimètre)
1)Tracer dans ce repère la droite (D) d'équation y=3x-6
2-a) Placer dans ce même repère les points A(6 ;3) et B(5 ;$\frac{9}{2}$)
b) Le symétrique K du point A par rapport au point B est-il situé sur la droite (D) ? Justifier par le calcul
3)Trouver une équation de la droite (OB).

CHAPITRE13 : SYSTEMES D'EQUATTIONS-SYSTEMES D'INEQUATIONS

I)EQUATIONS ET SYSTEMES D'EQUATIONS DANS IRxIR

1)EQUATION DANS IRxIR

a) Exemple/Exercice

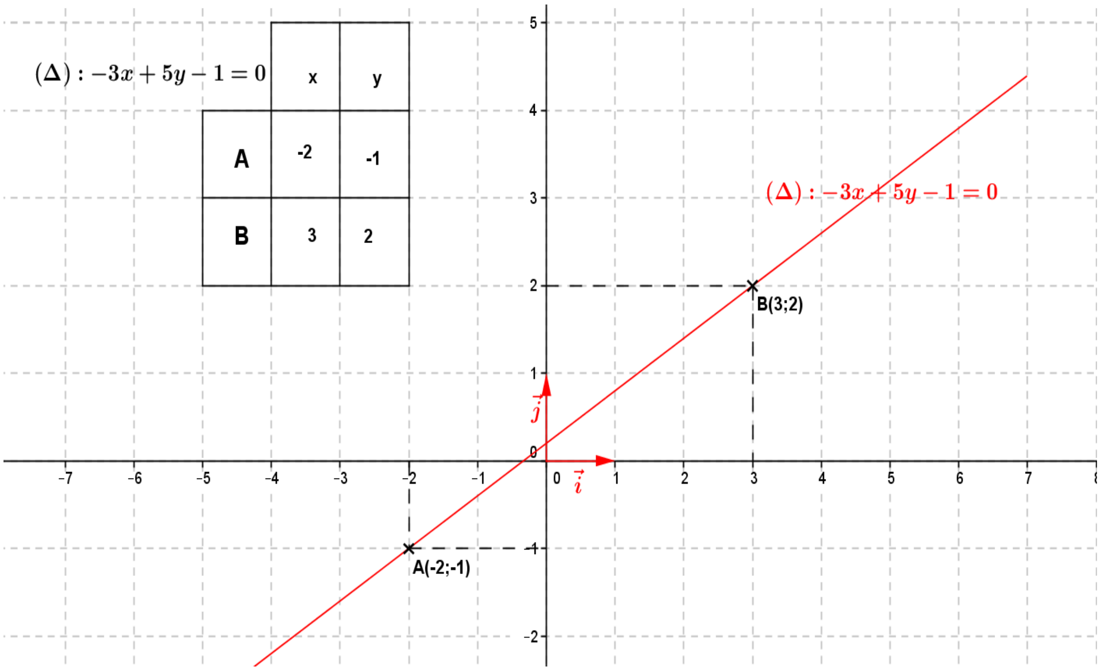
*Soit à résoudre l'équation -3x+5y-1=0 dans IRxIR.
Résoudre une telle équation revient à trouver tous les couples de nombre réels (x ;y) tel que l'équation -3x+5y-1=0 soit vraie.
*Le couple (x ;y) est donc l'inconnue de l'équation -3x+5y-1=0. On dit que -3x+5y-1=0 est une équation du premier degré à deux inconnues.

b) Exemple de résolution

On a $-3x+5y-1=0 \leftrightarrow y=\frac{3x+1}{5}$ ou $x=\frac{5y-1}{3}$.
Il résulte que le couple$\left(x;\frac{3x+1}{5}\right)$ ou $(\frac{5y-1}{3};y)$ est une solution de l'équation -3x+5y-1=0
Par consequant l'équation -3x+5y-1=0 admet une infinité de solution ; parmi lesquelles on peut citer :$\left(0;\frac{1}{5}\right);(3;2);(-2;-1);(8;5)$ ...

c)Résolution graphique

*Résoudre graphiquement l'équation -3x+5y-1=0 ; c'est trouver dans un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) tous les couples (x ;y) dont les coordonnées vérifient l'équation.
*L'ensemble des solutions d'une telle équation est la droite (Δ) d'équation -3x+5y-1=0



L'ensemble des solutions de l'équation -3x+5y-1=0 est l'ensemble des coordonnées de la droite (Δ).

2)Système d'équation dans IRxIR

a)Exemple/Exercice

Soit à résoudre dans IRxIR le système (E) définie par (E) :$\begin{cases} x - y = -1 & (1) \\ 3x - 5y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$

(E) est un système d'équation du premier degré dans IRxIR.

*Résoudre le système (E) revient à trouver l'ensemble des couples (x ;y) qui sont à la fois solution de l'équation (1) :x-y=-1 et de l'équation (2) :3x-5y+1=0.

*Si S_1 est l'ensemble des solutions de l'équation (1) et S_2 l'ensemble des solutions de l'équation (2) ; alors l'ensemble des solutions S du système est S=$S_1 \cap S_2$=$\{(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})\}$.

*Le couple (x ;y) est le point d'intersection des deux droites du système.

b)Les méthodes de résolution d'un système d'équation

i)La méthode par identification ou comparaison

+Principe

Le principe de cette méthode consiste à choisir une des inconnues (x ou y) que l'on exprimera en fonction de l'autre inconnue (x ou y) dans chacune des deux équations.

+Exemple de résolution

Résolvons par la méthode d'identification le système (E) :$\begin{cases} x - y + 1 = 0 & (1) \\ 3x - 5y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Exprimons x en fonction de y :

Dans (1) on a :$x = y - 1$ et dans (2) on a :$x = \frac{5y-1}{3}$

$x = x \leftrightarrow y - 1 = \frac{5y-1}{3}$;Il résulte que $y = -1$. En remplaçant y par sa valeur dans (1), on trouve $x = -1 - 1 = -2$. D'où S_{IRxIR}=$\{(\mathbf{-2};\mathbf{-1}\}$

ii)La méthode par substitution

+Principe

Le principe de cette méthode consiste à exprimer x en fonction de y (ou y en fonction de x) dans une des deux équations de votre choix et on reporte le résultat dans l'autre équation.

+Exemple de résolution

Résolvons par la méthode de substitution le système (E) :$\begin{cases} x - y + 1 = 0 & (1) \\ 3x - 5y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Dans (1) exprimons x en fonction de y ; on obtient :$x = y - 1$.

Remplaçons x par son expression dans (2) ; on obtient $3(y-1) - 5y + 1 = 0$

En résolvant on trouve $y = -1$.

En replaçant y par sa valeur dans l'une des équations (1) ou (2) ;on a :$x = -2$. D'où S_{IRxIR}=$\{(\mathbf{-2};\mathbf{-1})\}$

iii)La méthode par combinaison linéaire ou méthode par addition

+Principe

Le principe de cette méthode consiste à éliminer une des inconnues (x ou y) ;puis l'autre inconnue (x ou y) en multipliant à chaque fois les deux membres de chaque équation par un réel judicieusement choisi.

+Exemple de résolution

Résolvons par la méthode de combinaison linéaire le système

(E) : $\begin{cases} -3x + 5y - 1 = 0 & (1) \\ x - y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Eliminons x en multipliant l'équation (1) par 1 et l'équation (2) par 3. On obtient

alors : $\begin{cases} -3x + 5y - 1 = 0 \\ 3x - 3y + 3 = 0 \end{cases}$

$0 + 2y + 2 = 0$ On trouve $y = -1$

Eliminons y en multipliant l'équation (1) par 1 et l'équation (2) par 5. On obtient alors :

$\begin{cases} -3x + 5y - 1 = 0 \\ 5x - 5y + 5 = 0 \end{cases}$

$2x + 0 + 4 = 0$ On trouve $x = -2$ $S_{IRxIR}=\{(\mathbf{-2}; \mathbf{-1})\}$.

iv)La méthode graphique

+Principe

Cette méthode consiste à tracer dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$; $\vec{j}$) les deux droites (D) et (D') dont les équations sont celles du système donné.

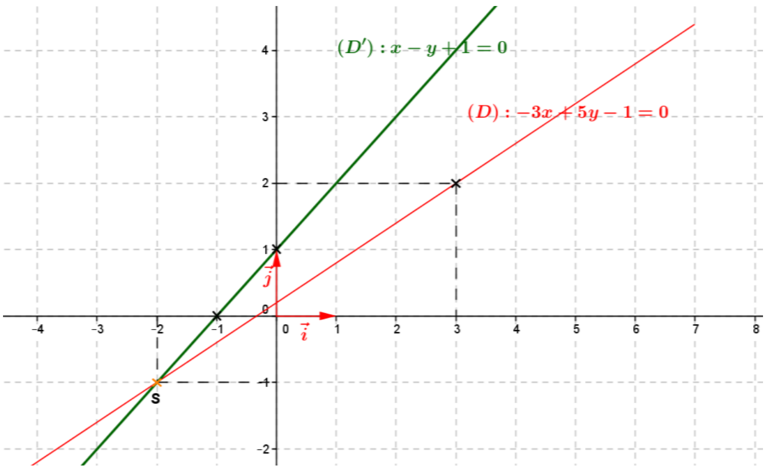
Le point d'intersection des deux droites est la solution du système.

*Lorsque les deux droites (D) et (D') sont parallèles et disjointes ; alors le système n'a pas de solution et on note dans ce cas $S_{IRxIR}=\{ \ \}$ ou $\emptyset$

*Lorsque les deux droites sont parallèles et confondues ; alors le système admet une infinité de solution tous situées sur la droite (D).

+Exemple de résolution

Résolvons par la méthode graphique le système (E) : $\begin{cases} -3x + 5y - 1 = 0 & (D) \\ x - y + 1 = 0 & (D') \end{cases}$



Construction des droites (D) et (D')

Les couples (3 ;2) et (-2 ;-1) sont éléments de (D).

Les couples (-1 ;0) et (0 ;1) sont éléments de (D').

La solution du système est : $S_{IRxIR}=\{(\mathbf{-2}; \mathbf{-1})\}$

3)Résolution de problème conduisant à un système d'équation dans IRxIR

a) Principe de résolution

*Les problèmes conduisant à un système d'équation du premier degré dans IRxIR ont la caractéristique de présenter des éventualités ; ou chaque éventualité peut être traduite par une équation.

*Pour résoudre de façon efficace de tel problème il faut successivement :

-Faire le choix des inconnues ;
-Faire la mise en équation ;
-Résoudre le système obtenu par la méthode de votre choix si cela n'est pas imposé
-Vérifier si la solution obtenue est solution du système ;
-Conclure

b) Exemple de résolution

i)Exemple/Exercice1

Un libraire part pour acheter des manuels scolaires chez un grossiste et on lui propose un carton contenant 35 documents de Mathématiques et de Physique-Chimie à 31250francs. Sachant que les documents de Mathématiques valent 1000francs et ceux de Physique-Chimie 750francs.
Calculer le nombre de document de chaque matière contenue dans le carton.

Résolution du problème

-Choix des inconnues :
Soit x le nombre de document de Mathématiques (x∈IN);
Soit y le nombre de document de Physique-Chimie (y∈IN) ;
-Mise en équation du problème :
D'après l'énoncé :x + y =35 et 1000x +750y = 31250. On obtient le système suivant :
(E): $\begin{cases} x+y=35 & (1) \\ 1000x+750y=31250 & (2) \end{cases}$ en simplifiant on a :(E) : $\begin{cases} x+y=35 & (1) \\ 4x+3y=125 & (2) \end{cases}$
-Résolution du système :
Résolvons le système par la méthode de substitution :
Exprimons y en fonction de x dans (1) ; on a : y = -x + 35 ; en remplaçant y par son expression dans (2) ; on obtient :4x +3(-x+35) = 125 ↔x = 20
En remplaçant x par 20 dans l'équation (1), on a :20 + y = 35 ↔y = 15.
-Vérification :
$\begin{cases} 20+15=35 \\ 1000\times 20+750\times 15=31250 \end{cases}$
-Conclusion :
Le carton contient 20 documents de Mathématiques et 15 documents de Physique-chimie.

ii)Exemple/Exercice2

Il y a 4 ans, Jean était 6 fois plus âgé que son petit frère François. Aujourd'hui il est deux fois plus âgé que François.
Déterminer l'âge actuel des deux frères.

Résolution du problème

Soit x l'âge actuel de Jean et y l'âge actuel de François.
D'après l'énoncé ;x – 4 = 6(y – 4) et x = 2y.
On obtient donc le système suivant (E) : $\begin{cases} x-2y=0 & (1) \\ x-6y=-20 & (2) \end{cases}$
Résolvons le système par la méthode de comparaison :
En exprimant x en fonction de y dans les deux équations, on obtient :$2y=6y-20$
Et on trouve $y=5$

En remplaçant y par sa valeur dans l'une des équations, on a :$x - 2 \times 5 = 0$ $\leftrightarrow x = 10$. Conclusion Jean à 10 ans et François à 5 ans.

iii)Exercice

Dans une ferme, il y a des lapins et des pintades. Sachant qu'il y a au total 62 pattes et 23 tètes ; calculer le nombre de lapin et de pintades.

II)INEQUATIONS ET SYSTEMES D'INEQUATION DANS IRxIR

1)INEQUATION DANS IRxIR

a) Définition

Toute inégalité du type $ax + by + c \leq 0$ est une inéquation du premier degré dans IRxIR. Le couple de réel (x ;y) est l'inconnu de l'inéquation.

Une inéquation admet une infinité de couple de solution.

b) Principe de résolution

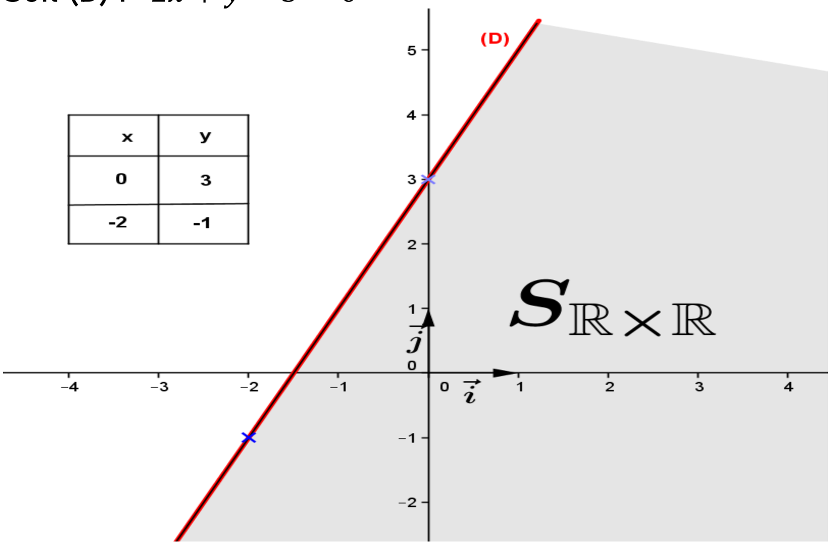
Dans la pratique pour résoudre une inéquation, on progresse graphiquement.
Soit à résoudre dans IRxIR l'inéquation -2x+y-3≤0.
Pour résoudre cette inéquation, il faut :
-Tracer dans un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) la droite (D) :$-2x + y - 3 = 0$
-Cette droite divise le plan en deux demis plans.
-On choisit un couple de point dans chaque demi-plan et on vérifie si le couple est solution de l'inéquation.
-On hachure la partie solution ou non solution de l'inéquation.

Remarque

Lorsque la droite ne passe pas par l'origine du repère, il est préférable de considère le point O(0 ;0) (origine du repère) pour faire la vérification.

c)Exemple de résolution

Résolvons dans IRxIR l'inéquation $-2x + y - 3 \leq 0$.
Soit (D) :$-2x + y - 3 = 0$



Soit O(0 ;0) ;on a :$-2 \times 0 + 0 - 3 = -3 \leq 0$ cette inégalité est vraie.

Le demi plan contenant le point O(0 ;0) est la solution de l'inéquation $-2x + y - 3 \leq 0$.

Conclusion : l'ensemble des solutions est la partie hachurée y compris la droite (D)

Exercice d'application

Résoudre graphiquement dans IRxIR l'inéquation :$3x - 4y + 12 < 0$.

2)Systèmes d'inéquations dans IRxIR

a) Principe de résolution

Pour résoudre un système d'inéquation, il faut :

-Résoudre graphiquement chaque inéquation du système dans le même repère ;

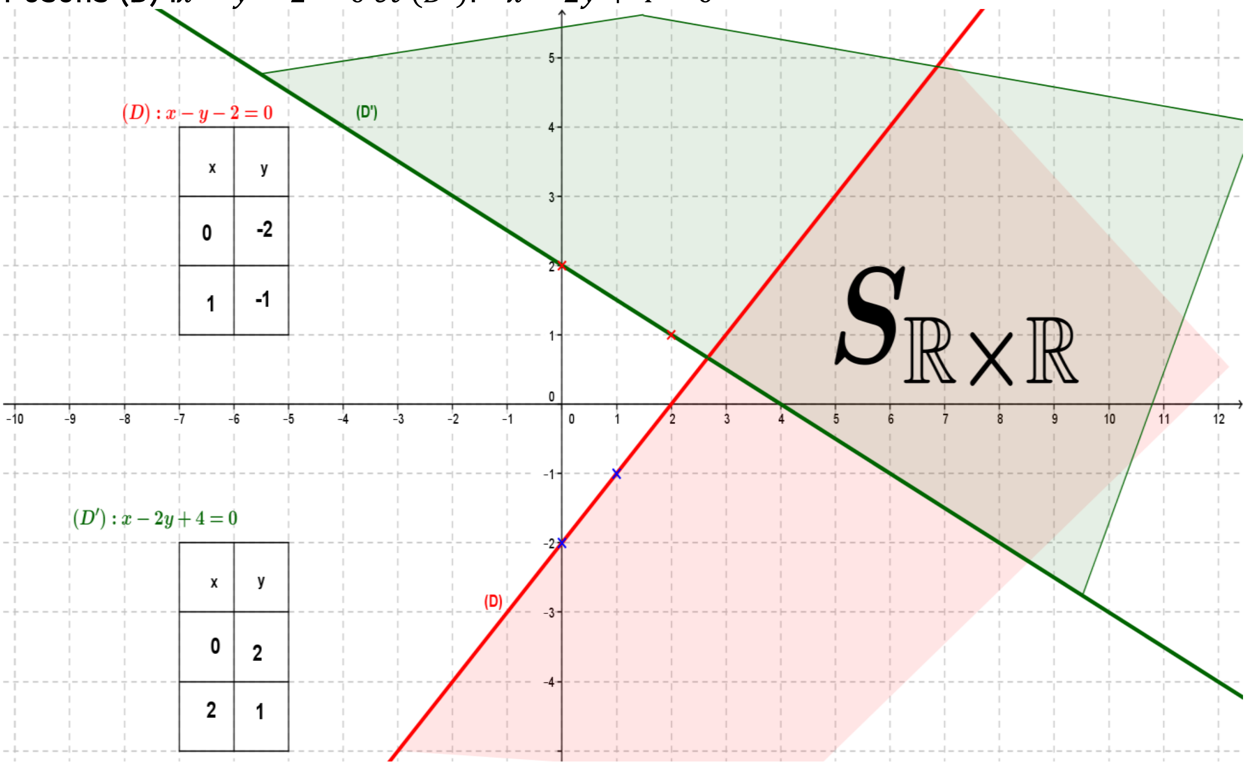
-Lorsque les deux parties de chaque inéquation se recoupe ; la partie commune (doublement hachurée ou non hachurée) est la solution du système.

NB :Si les deux solution des deux inéquations ne se recoupe pas, le système n'a pas de solution. (S_{IRxIR}=∅)

b) Exemple de résolution

Résolvons dans IRxIR le système d'inéquation suivant :$\begin{cases} x - y - 2 \geq 0 & (1) \\ -x - 2y + 4 < 0 & (2) \end{cases}$

Posons (D) :$x - y - 2 = 0$ et $(D'): -x - 2y + 4 = 0$



L'ensemble des solutions du système est la partie doublement hachurée y compris (D) et privé de (D').

Exercice d'application

Résoudre graphiquement dans IRxIR le système :$\begin{cases} x - 3y - 4 \geq 0 \\ 2x + 5y < -3 \end{cases}$

3)Résolution de problème conduisant à un système d'inéquation dans IRxIR

a) Principe de résolution

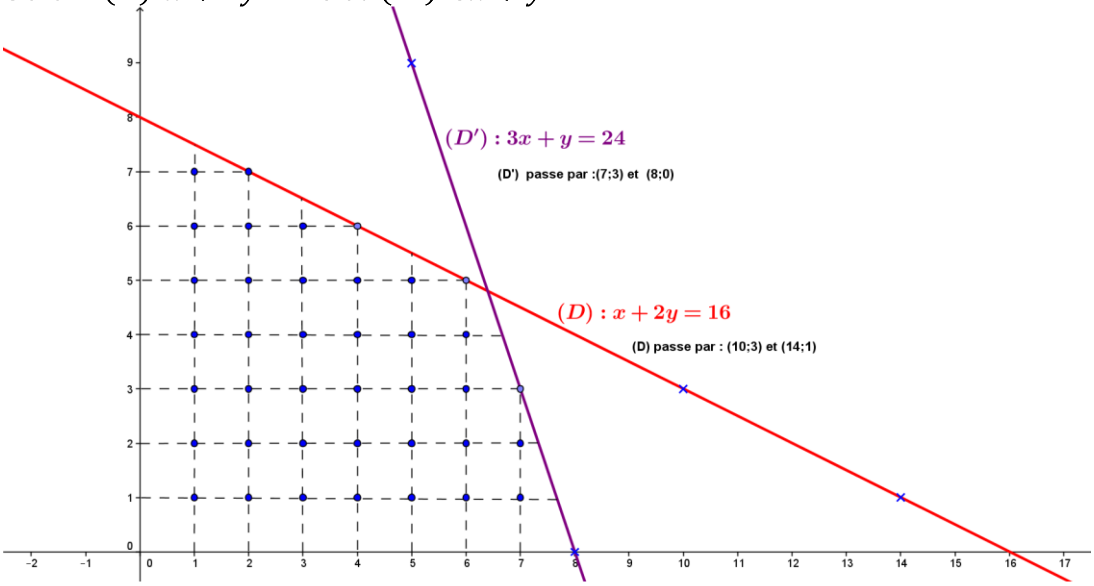
Pour résoudre un problème conduisant à un système d'inéquation, il faut :
-Faire le choix des inconnues
-Faire la mise en inéquation
-Résoudre graphiquement le système obtenu
-Faire une interprétation graphique si cela est nécessaire

b) Exemple de résolution

Une usine fabrique deux produits A et B. Il faut 1h de travail pour fabriquer une tonne du produit A et 2h pour fabriquer une tonne du produit B. L'usine travail au maximum 16h par jours. La fabrication d'une tonne de chaque produit A et B entraine successivement une dépense de 3000 francs et 1000 francs. L'entreprise ne peut pas consacrer plus de 24000 francs par jour pour cette fabrication.
Un client commande à cette usine x tonnes du produit A et y tonnes du produit B. (x et y tous non nuls).
1)Déterminer graphiquement l'ensemble des couples de naturels (x ;y) qui correspondent aux commandes que l'usine peut fabriquer en une journée.
2)Déterminer le couple de naturel (x ;y) pour lequels la masse totale des produits A et B fabriquées est maximale.

Solution

-Choix des inconnues
Soit x le nombre de tonnes du produit A et y le nombre de tonnes du produit B. tel que $> 0 \; et \; y > 0$.
-Mise en équation
D'après l'énoncé, on a :$x + 2y \leq 16 \; et \; 3000x + 1000y \leq 24000$. On a le système suivant :$\begin{cases} x + 2y \leq 16 & (1) \\ 3000x + 1000y \leq 24000 & (2) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x + 2y \leq 16 & (1) \\ 3x + y \leq 24 & (2) \end{cases}$
-Résolution graphique du problème
Soient $(D): x + 2y = 16 \; et \; (D'): 3x + y = 24$



1)En observant le graphique, les couples de naturels (x ;y) qui correspondent aux commandes que l'usine peut fabriquer en une journée
sont :(1 ;1) ;(1 ;2) ;(1 ;3) ;(1 ;4)…….
On a au total 39 couples possible qui correspondent aux points d'intersections des lignes en pointillées.
2)Le couple (6 ;5) est le couple pour lequel la masse totale de produit fabriqués est maximale.
Ce qui correspond à 6 tonnes du produit A et 5 tonnes du produit Soit au total 11 tonnes.

Exercice d'application

Un groupe d'organisateur d'un tournoi de football, veut s'acheter des teeshirts et des polos pour s'habillé le jour de la finale. Un teeshirt coute 1000 francs et un polo coute 1500 francs. Compte tenu de la répartition des rôles dans le groupe, il faut au moins 10 teeshirts et au moins 7 polos. En outre pour être subventionné par la mairie, l'achat doit atteindre 21000 francs, mais ne dois pas dépasser 24000 francs.
1) Determiner les couples donnant le nombre de teeshirts et de polo ;
2) Quel est le couple qui donne respectivement le cout minimal et le cout maximal ?

Indication : Exprimer le prix de x teeshirt et de y polo.

Compte tenu de la valeur minimale et de la valeur maximale du prix, former deux inéquations.

$\begin{cases} 2x+3y \leq 48 \\ 2x+3y \geq 42 \end{cases}$ *et n'oublier pas la condition* $x \geq 10$ *et* $y \geq 7$.

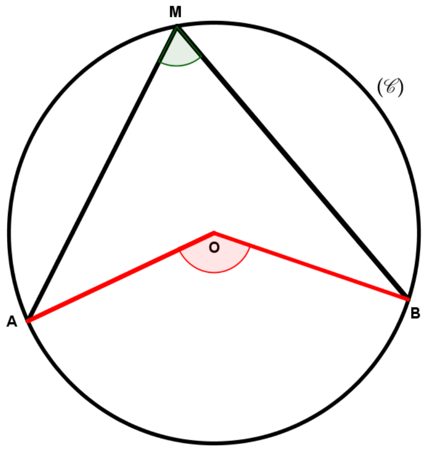
CHAPITRE 14 : LES ANGLES INSCRITS

I)ANGLE INSCRIT ET ANGLE AU CENTRE ASSOCIE

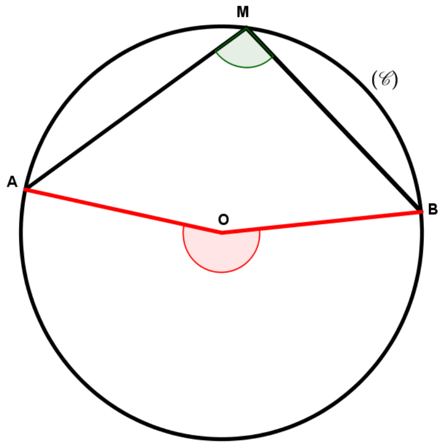
1)Activité

A et B sont deux points distincts d'un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O. Marquer un point M distinct de A et B. Mesurer les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{AOB}$. Quelle remarque faites-vous ?

Solution



1er cas



2e cas

Quelques résultats des élèves

$\widehat{\mathbf{AMB}}$	45°	69,5°	89°	102°	140°	158,9°
$\widehat{\mathbf{AOB}}$	90°	139°	178°	204°	280°	317,8°

Remarque : On constate que dans tous les cas l'angle $\widehat{\mathbf{AOB}}$ **est le double** $\widehat{\mathbf{AMB}}$

2)Quelques définitions et rappels

En considérant les figure ci-dessus ou les points A, B et M sont trois points distincts d'un cercle $(\mathcal{C})$.

-Les segments $[\mathrm{MA}]$ et $[\mathrm{MB}]$ sont appelés corde. Une corde est un segment joignant deux points distincts d'un cercle.

-Dans un cercle le diamètre est la corde la plus longue.

-L'angle $\widehat{\mathbf{AMB}}$ est un angle inscrit dans le cercle $(\mathcal{C})$. On dit qu'un angle est inscrit dans un cercle, si le sommet de cet angle est un point du cercle.

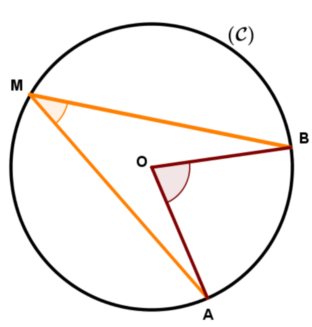
-L'angle $\widehat{\mathbf{AMB}}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{\mathbf{AB}}$ ou $\overset{\smile}{AB}$ (*respectivement le petit ou le grand arc). On dit aussi que* l'arc $\overset{\frown}{\mathbf{AB}}$ ou $\overset{\smile}{AB}$ est un arc intercepté.

-L'angle $\widehat{\mathbf{AOB}}$ est un angle au centre associé ; Car il intercepte le même arc $\overset{\frown}{AB}$ ***ou*** $\overset{\smile}{AB}$ que l'angle inscrit $\widehat{\mathbf{AMB}}$.

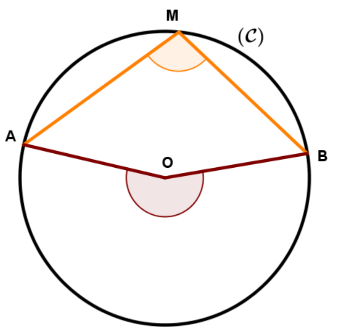
-L'angle dont le sommet est le centre du cercle et qui intercepte le même arc que l'angle inscrit est appelé angle au centre associé.

3)Théorème de l'angle inscrit

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O. Si A, B et M sont trois points distincts du cercle, alors :$\widehat{\mathbf{AOB}} = \mathbf{2}\widehat{\mathbf{AMB}}$ **ou** $\widehat{\mathbf{AMB}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\widehat{\mathbf{AOB}}$



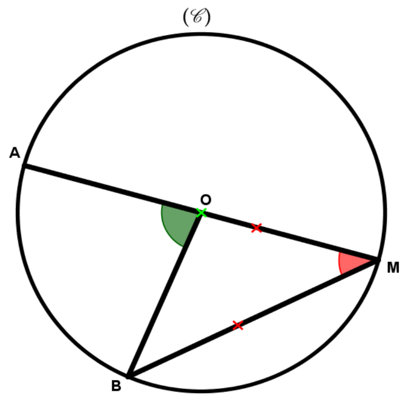
$\widehat{AMB}$ **est aigu**



$\widehat{AMB}$ **est obtus**

Démonstration du théorème

1er cas : Le centre O du cercle est sur l'un des côtés de l'angle inscrit



Démontrons que $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$

Il est clair que OBM est un triangle isocèle en O. Car OM=OB. Il résulte que $\widehat{AMB} = \widehat{OBM}$

*Considérons le triangle MOB isocèle en O.

On a :$\widehat{OMB} + \widehat{OBM} + \widehat{BOM} = 180°$.(1)

Or $\widehat{OMB} = \widehat{OBM} = \widehat{AMB}$

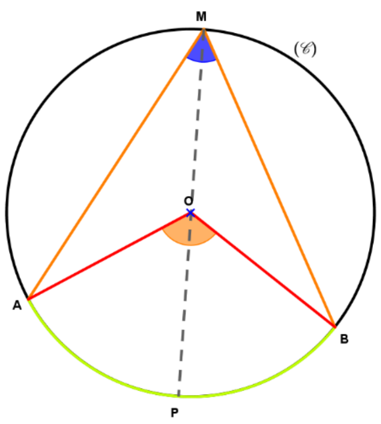
De (1) on a:$\widehat{AMB} + \widehat{AMB} + \widehat{BOM} = 180°$

$\leftrightarrow$ $2\widehat{AMB} + \widehat{BOM} = 180°$ (2).

De plus $\widehat{AOM} = \widehat{AOB} + \widehat{BOM}$

$\leftrightarrow$ $\widehat{AOB} + \widehat{BOM} = 180°$ (3)

De (2) et (3), on a: $2\widehat{AMB} + \widehat{BOM} = \widehat{AOB} + \widehat{BOM}$ $\leftrightarrow$ $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$ .cqfd



2ème cas : Le centre O du cercle est à l'intérieur de l'angle inscrit

Démontrons que $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$

En considérant le segment $[MP]$ qui es le diamètre du cercle $(\mathcal{C})$. En comparant les angles $\widehat{POA}$ *et* $\widehat{PMA}$ d'une part et les angles $\widehat{POB}$ *et* $\widehat{PMB}$ d'autres part (confer 1er cas).

Il résulte que :$\widehat{POA} = 2\widehat{PMA}$ (1) *et* $\widehat{POB} = 2\widehat{PMB}$ (2)

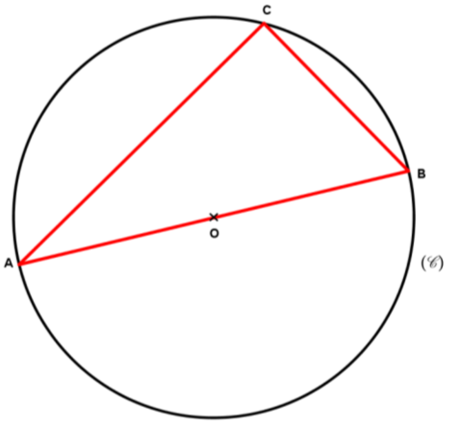
On a: (1) +(2)$\leftrightarrow$ $\widehat{POA} + \widehat{POB} = 2\widehat{PMA} + 2\widehat{PMB}$

$\leftrightarrow$ $\widehat{AOB} = 2(\widehat{PMA} + \widehat{PMB})$; il résulte que $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$.

4)Application : Triangle inscrit dans un demi-cercle

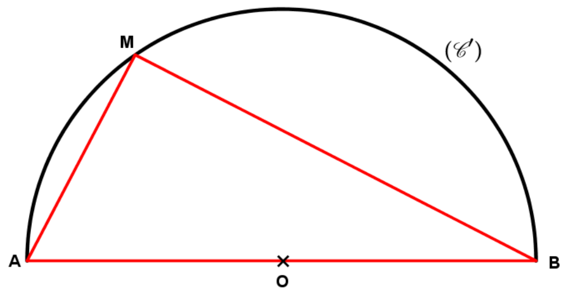
a) Théorème

Si un triangle ABC est inscrit dans un cercle de diamètre [AB] ; alors ABC est un triangle rectangle en C.



Démonstration

Soit la figure suivante ou $(\mathcal{C})$ est un demi-cercle de centre O et AMB un triangle inscrit dans le demi-cercle.



Déterminons la nature du triangle AMB.
$\widehat{AMB}$ est un angle inscrit interceptant l'arc $\overset{\frown}{AB}$ et $\widehat{AOB}$ (angle plat) est un angle au centre associé interceptant le même arc.

D'où $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB} \leftrightarrow \widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$

$\leftrightarrow \widehat{AMB} = \frac{1}{2} \times 180^{\circ}$

$\leftrightarrow \widehat{AMB} = 90°$

Il résulte que le triangle AMB est rectangle en M

II)ANGLES INSCRITS INTERCEPTANT LE MEME ARC

1)Activité

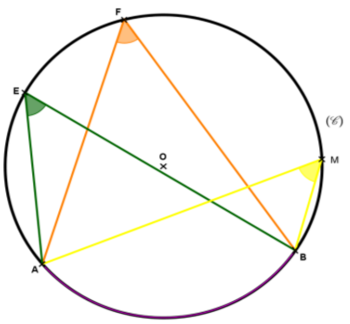
1)Tracer un cercle de centre O et marquer sur ce cercle deux points A et B.

2-a) Marquer trois points distincts E, F et G sur le grand arc $\overset{\frown}{AB}$.

b) Mesurer les angles inscrits de sommet E, F et G. Que constate-on ?

Solution

1)Construction

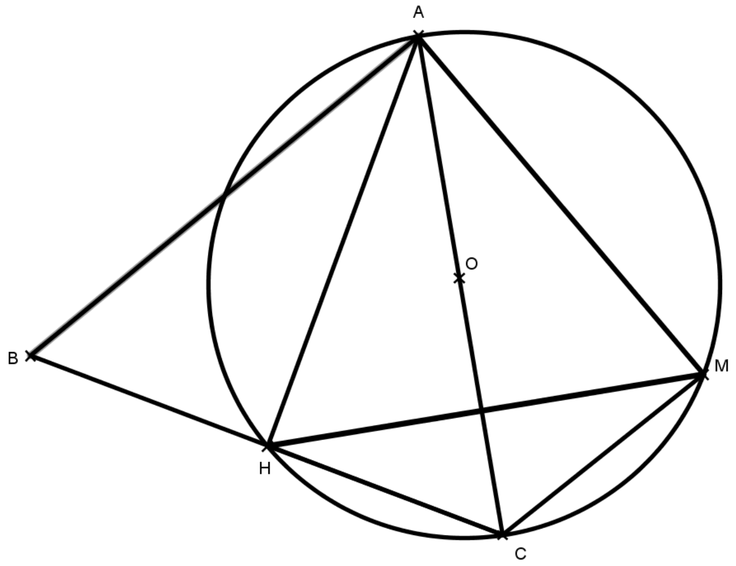


2)En mesurant les angles $\widehat{AEB}$; $\widehat{AFB}$ et $\widehat{AMB}$; on constate que ces trois angles sont tous égaux.

2) Propriété

*Si deux angles interceptent le même arc alors ils ont la même mesure.
*si deux angles interceptent des arcs de meme logueurs alors ces angles ont la meme mesure.

3)Exercice résolu



Soit ABC un triangle équilatéral et H le milieu de [BC].
Soit M un point du cercle circonscrit au triangle AHC tel que M=$S_{(AC)}$(H).
1)Démontrer que AHC est un triangle rectangle
2-a)Démontrer que $\widehat{CAM} = 30°$
b)Demontrer que le triangle AHM est un triangle équilatéral
3)Déterminer la mesure des angles $\widehat{HMC}$ et $\widehat{CHM}$.
4)Déterminer la mesure des angles $\widehat{HCM}$ et $\widehat{HAM}$

CHAPITRE 15 : RELATION TRIGONOMETRIQUE DANS UN TRIANGLE RECTANGLE

I)DEFINITIONS

1)Cosinus d'un angle aigu

a) Activité

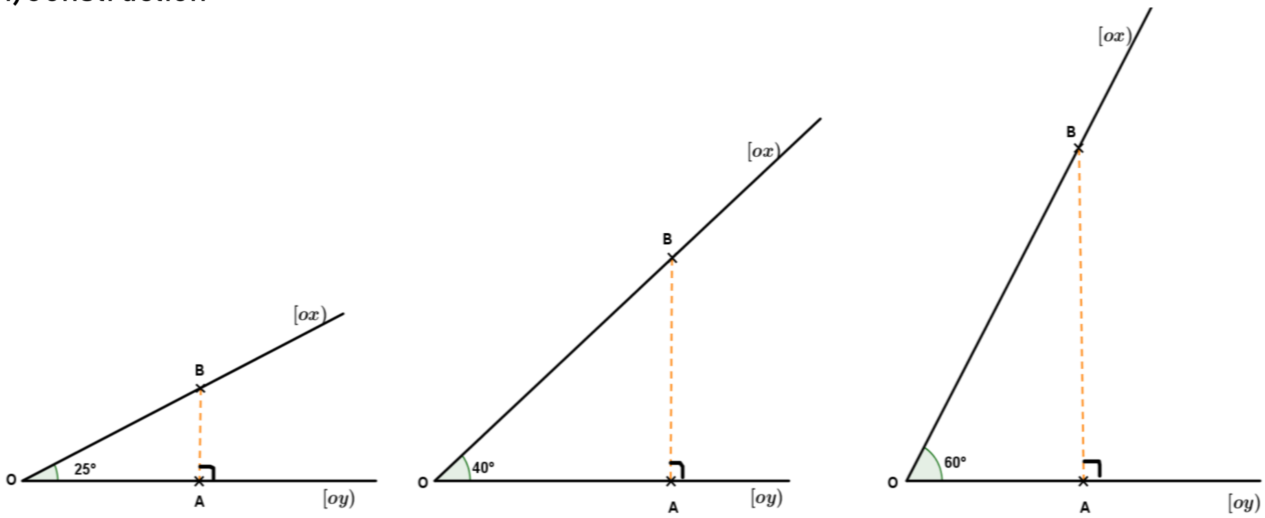
Soient deux demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$. B est un point de [Ox) et A son projeté orthogonal sur [Oy).

1)Faire une figure dans chaque cas suivant : $\widehat{xoy} = 25°$; $\widehat{xoy} = 40°$; $\widehat{xoy} = 60°$.

2)Mesurer et calculer les rapports de projection orthogonal k de (OB) sur (OA) ($k = \frac{OA}{OB}$). Que constate-on ?

Solution

1)Construction



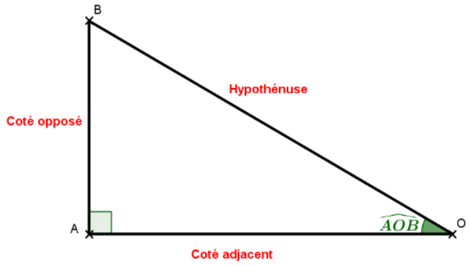
2)Mesures et calcule des rapports de projection

$\widehat{AOB}$	25°	25°	40°	40°	60°	60°
$k = \frac{OA}{OB}$	0,91	0,91	0,78	0,79	0,51	0,50

On remarque que le rapport de projection orthogonal k de OA sur OB ne dépend pas de la position du point B sur [ox), mais plutôt de l'angle $\widehat{AOB}$. Plus l'angle augmente, plus le rapport de $k = \frac{OA}{OB}$ diminue.

La valeur de ce rapport est appelée Cosinus de l'angle $\widehat{AOB}$. Par exemple si $\widehat{AOB} = 25°$ alors $\cos(\widehat{AOB}) = 0,9$.

b) Définition



AOB est un triangle rectangle en A.

On appelle Cosinus de l'angle $\widehat{AOB}$ le réel $\frac{OA}{OB}$.

On note $Cos(\widehat{AOB}) = \frac{OA}{OB} = \frac{Coté\ adjacent}{Hypoténuse}$

c) Valeurs remarquables

Si $\widehat{AOB} = 0° \; alors \; OA = OB \; ; il \; résulte \; que \cos(0°) = 1$

Si $\widehat{AOB} = 90° \; alors \; OA = 0 \; ; il \; résulte \; que \; Cos(90°) = 0$

Exercice d'application

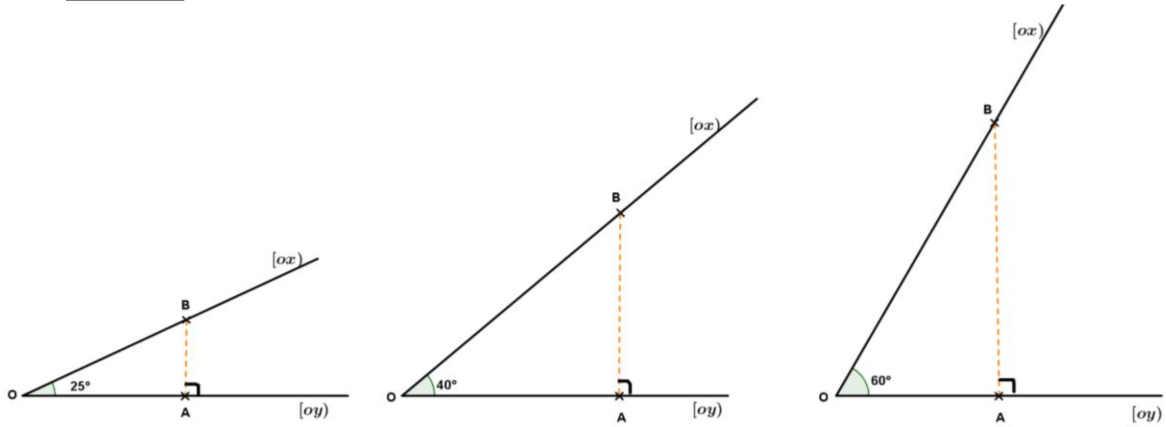
EFG est triangle rectangle en G, tel que EF=10 et GF=4. Calculer le cosinus de l'angle F et donner à l'aide de la table trigonométrique un encadrement de l'angle $\widehat{EFG}$ à 1 degré près.

2) Sinus d'un angle aigu

a) Activité

Reprendre l'activité sur le Cosinus et calculer le rapport de projection orthogonal k' de (OB) sur (AB) dans chaque cas ($k' = \frac{AB}{OB}$). Que remarque-t-on ?

Solution

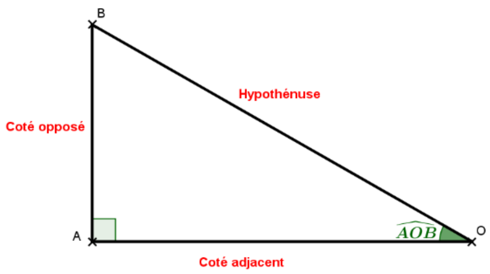


$\widehat{AOB}$	25°	25°	40°	40°	60°	60°
$k' = \frac{AB}{OB}$	0,42	0,44	0,65	0,64	0,87	0,86

On remarque que le rapport k' ne dépend toujours pas de la position de B sur [ox) ; mais de l'angle $\widehat{AOB}$. De plus on constate que plus $\widehat{AOB}$ augmente, plus le rapport $k' = \frac{AB}{OB}$ augmente. Ce rapport est appelé Sinus de l'angle $\widehat{AOB}$.

Si $\widehat{AOB} = 40°$, $alors \; Sin(\widehat{AOB}) = Sin(40°) = 0{,}64$

b) Définition



ABO est un triangle rectangle en A.

On appelle Sinus de l'angle $\widehat{AOB}$ le réel $\frac{AB}{OB}$.

On le note $Sin(\widehat{AOB}) = \frac{AB}{OB} = \frac{Coté \; opposé}{Hypothénuse}$

c) Valeurs remarquables

Si $\widehat{AOB} = 0° \; ; alors \; AB = 0 \; ; donc \; Sin(0°) = 0$

Si $\widehat{AOB} = 90°$, $alors \; AB = OB \; ; donc \; Sin(90°) = 1$

Remarque fondamentale

Dans un triangle rectangle le Sinus de l'un des angles aigus est égal au Cosinus de l'autre angle aigu (car les deux angles aigus sont complémentaires)
Il résulte que sin(30°)=cos(60°) ;cos(45°)=sin(45°) ;sin(50°)=cos(40°)

Exercices d'applications

Exercice1

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB=3 et BC=5.
1)Calculer sin($\hat{C}$) et sin($\hat{B}$).
2)En utilisant la table trigonométrique donner une valeur approchée de l'angle $\hat{C}$ par excès et une valeur approchée de l'angle $\hat{B}$ par défaut.

Exercice2

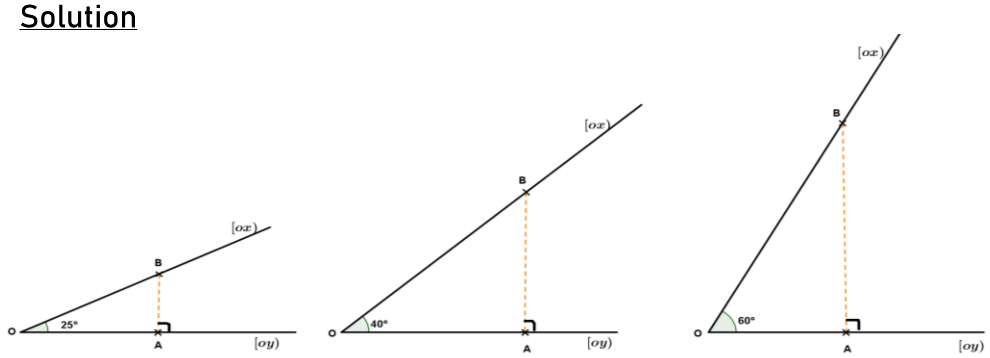
EFG est un triangle rectangle en F. Sachant que EG=3$\sqrt{3}$ et sin($\hat{G}$)=$\frac{\sqrt{3}}{3}$ .Calculer EF.

3)Tangente d'un angle aigu

a) Activité

Reprendre l'activité précédente.
Mesurer et calculer le rapport k'' ($k'' = \frac{AB}{OA}$) dans chacun des cas.
Que remarque-t-on ?

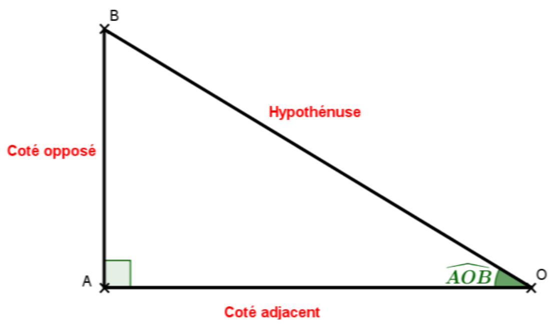
Solution



$\widehat{ABO}$	25°	25°	40°	40°	60°	60°
$k'' = \frac{AB}{OA}$	0,47	0,45	0,82	0,84	1,72	1,74

On remarque le rapport k'' ne dépend pas de la position du point B ; mais de l'angle $\widehat{AOB}$. Ce réel ***$k'' = \frac{AB}{OA}$ est appelé tangente de l'angle $\widehat{AOB}$.***

b) Définition



ABO est un triangle rectangle en A.
On appelle tangente de l'angle $\widehat{AOB}$;le réel $\frac{AB}{OA}$
On le note $\tan(\widehat{AOB}) = \frac{AB}{OA} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$.

c)Valeurs remarquables

Si $\widehat{AOB} = 0° \; alors \; AB = 0\,;d'où \tan(\widehat{AOB}) = \tan(0°) = 0$

Si $\widehat{AOB} = 90° \; alors \; AO = 0 : donc \tan(90°) \; n'existe \; pas.$

Exercice d'application

1)EFG est un triangle rectangle en G tel que GE=4 et tan($\hat{E}$)=$\sqrt{3}$ .Calculer GF.

2)ABC est un triangle rectangle en A tel que AB=5 et AC=9. Déterminer un encadrement de l'angle $\widehat{FEG}$ à un degré près (utiliser la table trigonométrique).

II)Propriétés

1)Relation entre sinus, cosinus et tangente d'un angle aigu

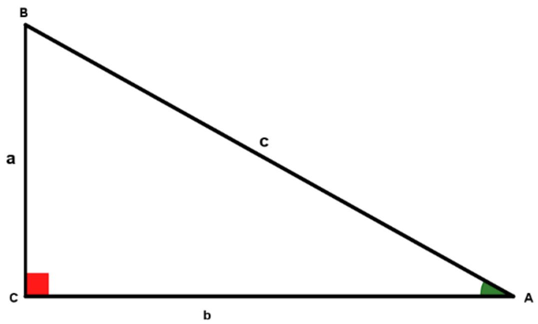
a) Activité

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que AB=c ; BC=a et AC=b.

Exprimer sin($\hat{A}$) ;cos($\hat{A}$) et tan($\hat{A}$) ;puis calculer $\frac{\sin(\hat{A})}{\cos(\hat{A})}$ en fonction de a, b et c.

Que constate-t-on ?

Solution



On a : sin($\hat{A}$)=$\frac{a}{c}$;cos($\hat{A}$) $= \frac{b}{a}$; $\tan(\hat{A}) = \frac{b}{c}$

Calculons $\frac{\sin(\hat{A})}{\cos(\hat{A})}$

On a $\frac{\sin\hat{A}}{\cos\hat{A}} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{a}} = \frac{a}{b}$

On constate que tan$\hat{A} = \frac{\sin\hat{A}}{\cos\hat{A}}$

b) Propriété

Pour tout angle $\hat{A}$, tel que cos($\hat{A}$)≠0, tan$\hat{A} = \frac{\sin\hat{A}}{\cos\hat{A}}$

2)Relation fondamentale de la trigonométrie

Considérons le triangle ABC rectangle en C ci-dessus :

On a sin$\hat{A}$=$\frac{BC}{AB}$ ↔sin²$\hat{A} = \frac{BC^2}{AB^2}$ (1) et cos$\hat{A} = \frac{AC}{AB}$ ↔ $\cos^2\hat{A} = \frac{AC^2}{AB^2}$ (2)

(1)+ (2) ↔ cos²$\hat{A}$ + sin²$\hat{A} = \frac{BC^2}{AB^2} + \frac{AC^2}{AB^2}$ ↔ cos²$\hat{A}$ + sin²$\hat{A} = \frac{BC^2+AC^2}{AB^2}$

Or ABC est un triangle rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore $BC^2 + AC^2 = AB^2$

Il résulte que cos²$\hat{A}$ + sin²$\hat{A} = \frac{AB^2}{AB^2} = 1$

Conclusion

Pour tout angle aigu $\hat{A}$,on a **cos²$\hat{A}$ + sin²$\hat{A}$ = 1**

De cette relation ;on déduit les relation suivantes :

$$\sin^2\hat{A} = 1 - \cos^2\hat{A} \;\; et \;\; \cos^2\hat{A} = 1 - \sin^2\hat{A}$$

Exercice d'application

1)Sachant que sin$\hat{a} = \frac{3}{4}$; calculer $\cos\hat{a}$ et $\tan\hat{a}$

2)Sachant que sin$\widehat{b}$=0,8 ; calculer cos$\widehat{b}$ et donner un encadrement de l'angle $\widehat{b}$ à un degré près à l'aide de la table trigonométrique.

3)Tableau récapitulatif

$\hat{A}$	0°	30°	45°	60°	90°
sin$\hat{A}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos$\hat{A}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan$\hat{A}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Non définie

CHAPITRE 16 : APPLICATIONS LINEAIRES-APPLICATIONS AFFINES

I)APPLICATION LINEAIRE

1)Exemples

a) Activité 1

Soit f l'application definie de IR vers IR par :$f : IR \to IR$
$x \mapsto f(x) = -3x$

1)Calculer $f(-1)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f(5)$.

2)Calculer x sachant que $f(x) = -5$; $f(x) = 3$; $f(x) = 14$

Solution

1)$f(-1) = -3 \times (-1) = 3$; $f(0) = -3 \times 0 = 0$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = -3 \times \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$;
$f(5) = -3 \times 5 = -15$

2)$f(x) = -5 \leftrightarrow -3x = -5 \leftrightarrow x = \frac{5}{3}$; $f(x) = 2 \leftrightarrow -3x = 3 \leftrightarrow x = x = -1$

$$f(x) = 14 \leftrightarrow -3x = 14 \leftrightarrow x = -\frac{14}{3}$$

b) Activité 2

Un cycliste parcourt parcours 10km en 40min.

1)Sachant que la vitesse du cycliste est constante, compléter le tableau suivant :

Temps (en min)	20			40	4
Distance (en km)		30	5		

2)Calculer le rapport distance (en km) sur temps en (min) :$\frac{d}{t}$ dans chacun des cas ; que constate-t-on ?

Solution

1)Complétons le tableau

Temps (en min)	30	120	20	40	4
Distance (en km)	7,5	30	5	10	1

2)Apres tout calcul, on constate que le rapport $\frac{d}{t}$ est constant dans tous les cas $\frac{d}{t} = \frac{1}{4}$.

Il résulte que $d=\frac{1}{4}t$

La distance d et le temp t étant positive, le tableau ci-dessus traduit une application de IR^+ vers IR^+.

Les exemples 1 et 2 sont des exemples d'applications linéaires.

2)Définition

On appelle application linéaire de IR dans IR toute application définie par :

$$\boldsymbol{f : IR \to IR}$$
$$\boldsymbol{x \mapsto f(x) = ax \ (a \in IR)}$$

Remarques

-Une application linéaire de IR dans IR est une application monôme de degré 1 et de coefficient a

-Le réel a est appelé coefficient de l'application linéaire.

3)Représentation graphique

a) Activité

Soit l'application f définie de IR dans IR par $f(x) = -2x$.

Recopier et compléter le tableau suivant ; puis représenter graphiquement l'application linéaire f dans un repère $(o, \vec{\imath}\,; \vec{\jmath}\,)$.

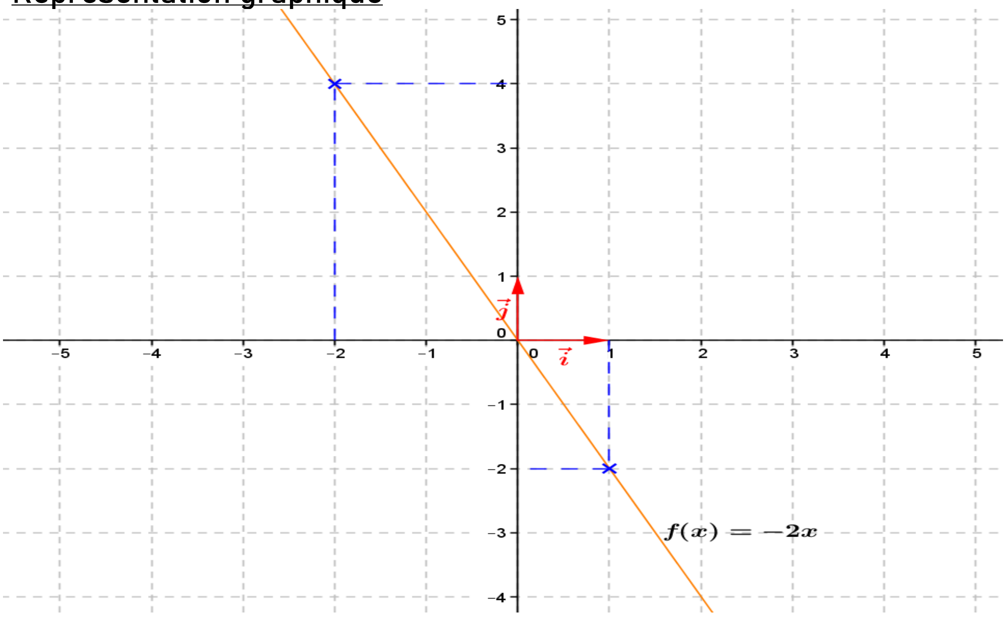
x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$		
$f(x)$					-1	-6

Solution

Recopions et complétons le tableau :

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
$f(x)$	4	2	0	-1	-2	-6

Représentation graphique



Remarques

-La représentation graphique de l'application linéaire f définie par $f(x) = -2x$ est la droite (D) d'équation $y = -2x$

-cette droite passe par l'origine du repère et par le point $M(1; -2)$

-Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de cette droite.

-Le tableau ci-dessus est un tableau de proportionnalité dont le coefficient de proportionnalité -2 ; c'est-à-dire pente de la droite.

b) Théorème

La représentation graphique de l'application linéaire :$\boldsymbol{f : IR \longrightarrow IR}$

$\boldsymbol{x \mapsto ax}$

est la droite qui passe par l'origine du repère et le point de coordonnées (1 ;a). Le vecteur $\vec{\boldsymbol{u}}\binom{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a}}$ est un vecteur directeur de cette droite.

Exercices d'applications

Soit g l'application linéaire définie de IR vers IR tel que $g(-2) = 3$. Représenter graphiquement g dans un repère orthonormé (o, $\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}$) en justifiant la construction.

4)Propriétés

a) Image de la somme de deux réels

i)Activité

Soit h l'application linéaire définie de IR vers IR par $h(x) = -4x$. On donne $x_1 = -2$ $et\ x_2 = 3$. Calculer $h(x_1) + h(x_2)\ \ et\ \ h(x_1 + x_2)$. Que constate-on ?

Solution

On a :$h(x_1) + h(x_2) = -4 \times (-2) + (-4) \times 3 = 8 - 12 = -4 \longrightarrow h(x_1) + h(x_2) = -4$

et $h(x_1 + x_2) = h(-2 + 3) = h(1) = -4 \times 1 = -4 \longrightarrow h(x_1 + x_2) = -4$

On constate que $\boldsymbol{h(x_1 + x_2) = h(x_1) + h(x_2)}$

ii)Propriété 1

Si h est une application linéaire de IR vers IR et x_1 , x_2 deux réels ;alors :

$\boldsymbol{h(x_1 + x_2) = h(x_1) + h(x_2)}$

b) Image du produit de deux nombres réels

i)Activité

Soit f l'application définie de IR vers IR par $f(x) = 3x$. On donne $x = -2\ et\ k = 3$.

Calculer $f(k.x)\ et\ k.f(x)$. Que constate-on ?

Solution

On a :$f(k.x) = f(-2 \times 3) = f(-6) = 3 \times (-6) = -18 \rightarrow f(k.x) = -18$

et $k.f(x) = 3 \times f(-2) = 3 \times 3 \times (-2) = 3 \times (-12) = -18 \rightarrow k.f(x) = -18$.

On constate que :$\boldsymbol{f(k.x) = k.f(x)}$

ii)Propriété 2

Si f est une application linéaire de IR vers IR ; x et k deux nombres réels, alors :

$\boldsymbol{f(k.x) = k.f(x)}$

c)Image de zéro (0) par une application linéaire

i)Activité

Soient g et h deux applications définies de IR vers IR par $g(x) = 7x\ et\ h(x) = -\frac{3}{4}x$.

Calculer g(0) et h(0).

Solution

On a :$g(0) = 7 \times 0 = 0\ \ et\ h(0) = -\frac{3}{4} \times 0 = 0$

ii)Propriété 3

Pour toute application linéaire f définie de IR vers IR ; on a :$f(0) = 0$

Exercice d'application

Une application f est telle que f(4)=3. Calculer f(8) de trois (3) façons différentes :
1)En déterminant l'application f ;
2)En utilisant la propriété 1 ;
3)En utilisant la propriété 2.

II)APPLICATION AFFINE

1)Exemples

a) Activité 1

Dans son taxi VIP, Moussa a affiché ses tarifs :500 francs CFA pour la prise en charge et 50 francs par kilomètre parcouru.
1)Recopier et compléter le tableau suivant :

Nombre kilomètre parcouru (en km)	1	5			10	x
Somme à payer (en francs CFA)			900	1200		

2)Exprimer la somme S à payer en fonction du nombre x de kilomètre parcouru.

Solution

1)Recopions et complétons le tableau :
Recopier et compléter le tableau suivant :

Nombre kilomètre parcouru (en km)	1	5	8	14	10	x
Somme à payer (en francs CFA)	550	750	900	1200	1000	50x+500

2)Exprimons S en fonction de x : S=50x+500f

b) Activité 2

Soit g une application définie de IR vers IR par :$g(x) = -3x + 2$ .Recopier et compléter le tableau suivant :

X	-6		$-\frac{1}{3}$			$\frac{2}{3}$	$\sqrt{3}$
g(x)		11		2	-1		

Solution

Recopions et complétons le tableau le tableau suivant :

x	-6	-3	$-\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	$\sqrt{3}$
g(x)	20	11	3	2	-1	0	$-3\sqrt{3} + 2$

Remarque :On dit que les applications des activités 1 et 2 sont des applications affine.

2)Définition

a et b désignent deux nombres réels donnés.
Une fonction affine ou application affine est une fonction qui, à un nombre x, associe le nombre $ax + b$.

Si $\boldsymbol{f}$ désigne cette fonction, on la note : $x \mapsto \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}$.
On dit que $ax + b$ est l'image de x et on note $\boldsymbol{f}(x) = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}$

3)Cas particuliers

-Pour b=0, la fonction $x \longmapsto ax + b$ devient $x \longmapsto ax + 0$, donc $x \longmapsto ax$.
Une fonction affine pour laquelle b=0 est une fonction linéaire.
-Pour a=0, la fonction $x \longmapsto ax + b$ devient $x \longmapsto 0 \times x + b$, donc $x \longmapsto b$.
Cette fonction, à un nombre x, associe le nombre b. Par cette fonction tous les nombres ont la même image. On dit que cette application est une application constante.
Une application affine pour laquelle a=0 est une application constante.

4)Proportionnalité des accroissements

Propriété : a et b désignent des nombres relatifs ;$\boldsymbol{f}$ est la fonction affine telle que $\boldsymbol{f}(x) = ax + b$.
Pour deux nombres distincts x_1 et x_2 , on a :

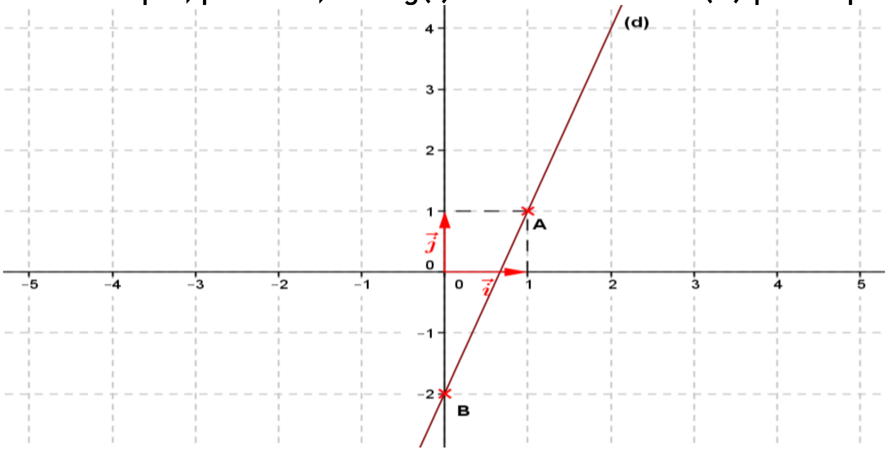
$$\boldsymbol{f}(x_2) - \boldsymbol{f}(x_1) = a(x_2 - x_1) \text{ ou encore } a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Exemple : Soit f une application affine telle que f(3)=6 et f(5)=12. Calculer a.
$a = \frac{f(5)-f(3)}{5-3} = \frac{12-6}{2} = \frac{6}{3} = 3$; donc a=3

5)Représentation graphique

a) Exemple/Exercice

On considère la fonction affine $g: x \longmapsto 3x - 2$
Sa représentation graphique dans un repère est une droite (d).
Le nombre 3 est le coefficient directeur de la droite (d) et le nombre -2 est l'ordonnée à l'origine de la droite (d).
$g(0) = -2$; donc la droite (d) passe par le point B(0 ;-2).
Pour tracer la droite (d), on peut déterminer par le calcul les coordonnées d'un deuxième point.
Par exemple, pour x=1, on a g(1)=1. Donc la droite (D) passe par le point A(1 ;1)



b) Théorème

La représentation graphique d'une application affine :$f : IR \longrightarrow IR$
$x \longmapsto f(x) = ax + b$
est une droite qui passe par le point M(0 ;b) .

Exercices d'application

Exercice1

Soit h une application définie de IR vers IR par $h(x) = -\frac{1}{2}x + 3$.

1)Calculer $h(-2)$; $h(-\sqrt{2})$ et $h(0)$

2)Représenter graphiquement h dans un repère orthonormé (0,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$).

Exercice2

Soit g une application affine de IR vers IR. Determiner l'expression de g telle que :g($\sqrt{2}$) = **1** et g(0) = **3**

6)Sens de variation d'une application affine

a) Activité

Soit l'application affine f définie par $f(x) = ax + b$. Considérons deux réels x_1 et x_2 tel que $x_1 < x_2$.

Calculer $f(x_2) - f(x_1)$.

Solution

On a $f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - (a_2 + b) = a(x_2 - x_1)$

Le signe du réel $\boldsymbol{a}(x_2 - x_1)$ dépend du coefficient a ; car la différence $x_2 - x_1 > 0$

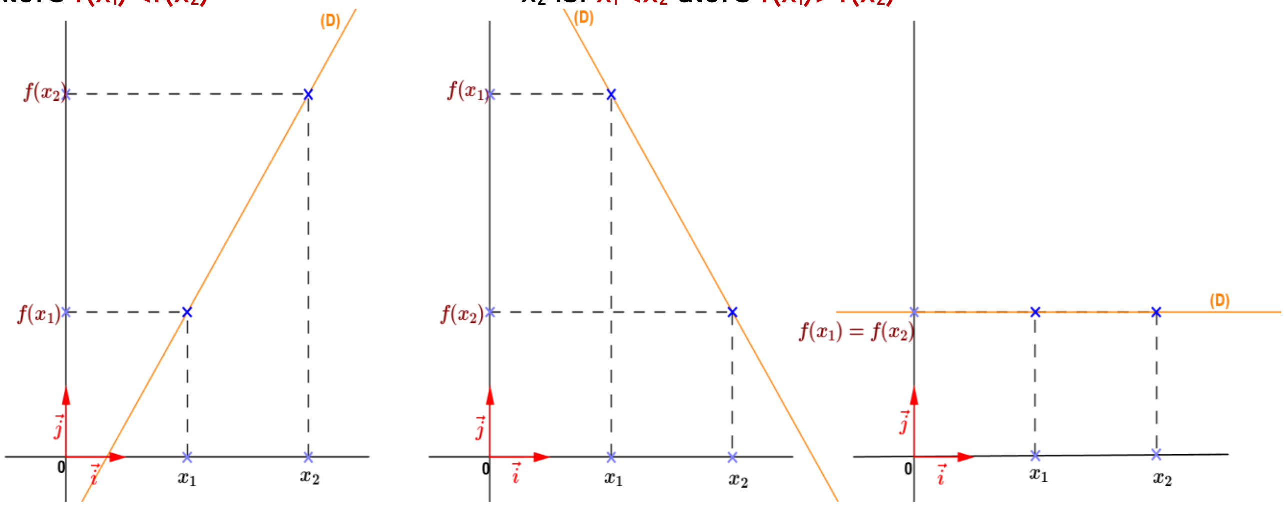
b) Théorème

L'application affine f définie de IR vers IR par $f(x) = ax + b$ est :

*Croissante si $\boldsymbol{a > 0}$. C'est-à-dire : Pour tous réels x_1 et x_2 : si $x_1 < x_2$ Alors $f(x_1) < f(x_2)$

*Décroissante si a< 0. C'est-à-dire : pour tous réels x_1 et x_2 :si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$

*Constante si a=0. c'est-à-dire : f(x)=b



Exercice d'application

Donner le sens de variation des applications suivantes :

$f(x) = -\sqrt{3}x + 4$; $g(y) = \frac{3}{4}y$; $h(t) = 12$; $f(t) = (\pi - 3)t + 1$ *et*
$g(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ Justifier les réponses.

III)APPLICATION AFFINES PAR INTERVALLES

1)Exemple/Exercice 1

Soit l'application affine f définie par :$f(x) = |x+1| + |-x+3|$.
1)Montrer que f est une application affine par intervalles.
2)Donner le sens de variation de f sur chaque intervalle. Justifier les réponses
3)Dans un repère orthonormé (o, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$), représenter graphiquement l'application affine f
4)Donner suivant les valeurs du paramètre k le nombre de solution de l'équation $f(x) = k$

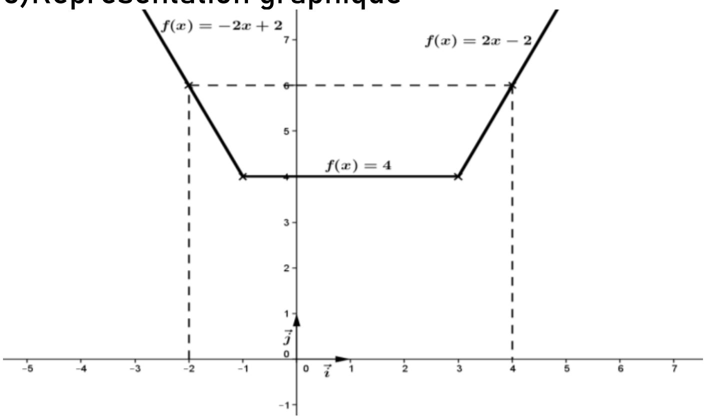
Solution

1)Ecrivons f sans le symbole de la valeur absolue.
Posons $x + 1 = 0$;$-x + 3 = 0$
$x = -1$;$x = 3$

x	$-\infty$ -1	3	$+\infty$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$
$\lvert -x+3\rvert$	$-x+3$	$-x+3$	$x-3$
$f(x)$	$-2x+2$	4	$2x-2$

-Pour tous $x \in]-\infty; -1]$;$f(x) = -2x + 2$;f est une application affine sur cet intervalle
-Pour tous $x \in]-1; 3]$;$f(x) = 4$;f est une application affine sur cet intervalle :
-Pour tous $x \in [3; +\infty[$;$f(x) = 2x - 2$;f est une application affine sur cet intervalle
f étant une application affine sur chaque intervalle ;on dit que f est une application affine par intervalle.
2)Donnons le sens de variation de f.
*Sur $]-\infty; -1]$;$f(x) = -2x + 2$ avec $a = -2 < 0$; alors f est décroissante
*Sur $[-1; 3[$; $f(x) = 4$ avec $a = 0$; alors f est constante
*Sur $[1, +\infty[$; $f(x) = 2x - 2$ *avec* $a = 2$, *alors* f est croissante.

3)Représentation graphique



4)Donnons suivant le paramètre k le nombre de solution de l'équation $f(x) = k$
-Pour $k \in]-\infty; 4[$; l'équation $f(x) = k$ n'a pas de solution ;
-Pour $k = 4$; l'équation $f(x) = k$ admet une infinité de solution ;

-Pour $k \in]4; +\infty[$; l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions.

2)Exemple/Exercice 2

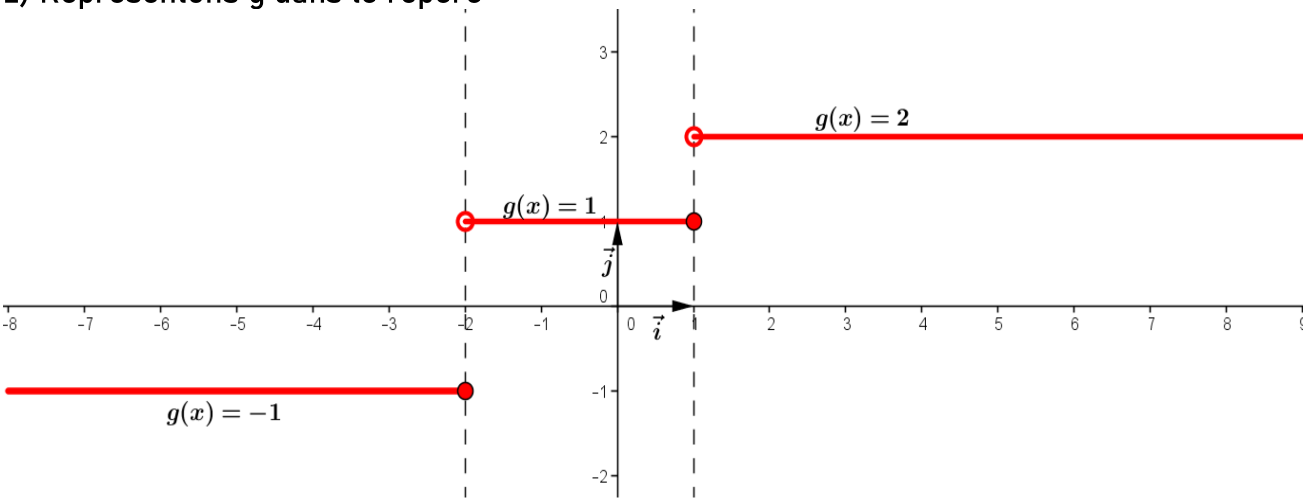
Soit g l'application définie de IR dans IR par :$g(x) = \begin{cases} -1 \; si \; x \leq -2 \\ 1 \; si - 2 < x \leq 1 \\ 2 \; si \; x > 1 \end{cases}$

1) Montrer que g est une application affine par intervalle
2) Représenter graphiquement l'application g dans un repère orthonormé (o, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

Solution

1)Montrons que g est une application affine par intervalle
-Pour tout $x \in]-\infty; -2]$; $g(x) = -1$;
-Pour tout $x \in]-2; 1]$; $g(x) = 1$;
-Pour tout $x \in]1; +\infty[$ $g(x) = 2$.
g est une application affine sur chaque intervalle ;il résulte que g est une application affine par intervalle.

2) Représentons g dans le repère



Conclusion
-Sur chacun des trois intervalles, l'application g est constante. C'est-à-dire g(x)=ax+b avec a=0.
-La réunion des trois intervalles donne :$]-\infty; -2] \cup [-2; 1[\cup [1; +\infty[= IR \; ou \;]-\infty; +\infty[$.
-Pour traduire la faite que g est une application constante sur chacun des intervalles ; on dit que g est une fonction en escalier sur IR.
-Représentation graphique d'une fonction affine constante est une droite parallèle à l'axe des absides.

Exercices d'applications
Exercice1
Soit l'application affine f définie par : f(x)=|2x+1|+|-x+2|-2x-1
1)Montrer que f est une application affine par intervalle

2)Préciser le sens de variation de f sur chaque intervalle
3)Dans un repère orthonormé (O ;$\vec{i}$;$\vec{j}$) ; représenter graphiquement l'application affine f
4)résoudre graphiquement les équations f(x)=-5 ;f(x)=1 et f(x)=4
5)Résoudre suivant les valeurs du paramètre m, l'équation f(x)=m (*donner seulement le nombre de solution)*

Exercice2

1)Montrer que les fonctions $f(x)=5|2x-4|-|3-x|$ et $g(x)=\sqrt{x^2+2x+1}+5\sqrt{(3x-2)^2}$ sont des application affines par intervalles
2)Préciser le sens de variation de f et g sur chaque intervalle
3)Résoudre dans IR, l'équation f(x)=5 et l'inéquation $f(x)\leq 5$.

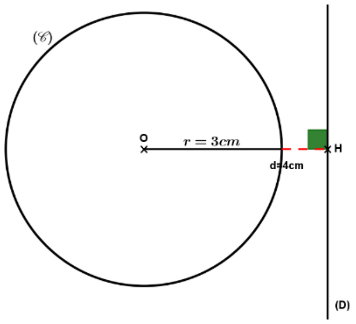
CHAPITRE 17 : POSITIONS RELATIVES D'UNE DROITE ET D'UN CERCLE

I)POSITION RELATIVES D'UNE DROITE ET D'UN CERCLE

1)Activité

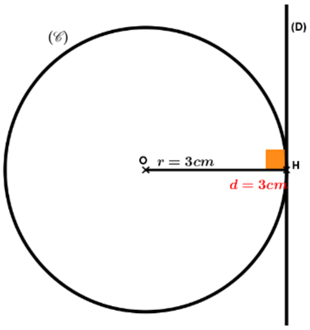
Soit O un point du plan et $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et de rayon r=3cm. Soit (D) une droite du plan et H le projeté orthogonal du point O sur la droite (D)
On note d=OH la distance du point O à la droite (D).
Faire une figure dans les cas suivants :
a)d=4cm ;b)d=2cm ;c)d=3cm
Quelles remarques faites-vous dans chacun des cas ?

Solution
Construction :
a)d=OH=4cm



On remarque que (D) et $(\mathcal{C})$ n'ont aucun point en commun. On note (D)∩($\mathcal{C}$)=∅.
On dit que la droite (D) est extérieure au cercle ($\mathcal{C}$).

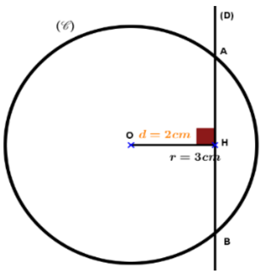
b)d=OH=3cm



H est le seul point commun à ($\mathcal{C}$) et à (D). On note (D)∩($\mathcal{C}$)=$\{H\}$.
On dit que la droite (D) est tangente au cercle ($\mathcal{C}$) en H ; On dit aussi que H est le point de tangence.

Equation cartésienne de la tangente à un cercle :
Si la droite (D) est la tangente en H au cercle ($\mathcal{C}$) de centre O et de rayon r ; alors on choisit M(x ;y)∈(D). D'où une équation de (D) est de la forme $\overrightarrow{HM} \perp \overrightarrow{OH}$ $(xx' + yy' = 0)$

c)d=OH=2cm



Les points A et B sont les deux points communs à ($\mathcal{C}$) et à (D).
On note :(D)∩($\mathcal{C}$) $= \{A; B\}$;on dit que (D) est sécante à ($\mathcal{C}$) ou que (D) est isocèle à ($\mathcal{C}$)

NB : L'intersection de la droite (D) et du cercle ($\mathcal{C}$) dépend de la distance d et non du rayon r du cercle

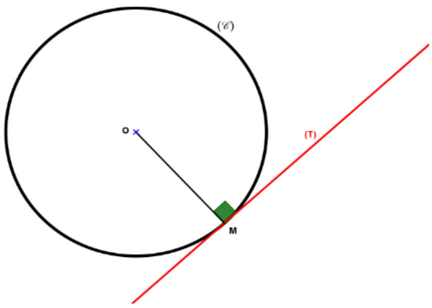
b) Propriétés

-Une droite (D) est dite extérieure à un cercle $\mathcal{C}$) si sa distance au centre du cercle est strictement supérieure au rayon de ce cercle. Par conséquent le cercle ($\mathcal{C}$) et la droite (D) non aucun point en commun.
-Une droite (D) est dite sécante ou isocèle à un cercle ($\mathcal{C}$), si sa distance au centre du cercle est inférieure au rayon du cercle. Par conséquent le cercle et la droite ont deux points en commun.
-Une droite (D) est dite tangente à un cercle ($\mathcal{C}$), si sa distance au centre du cercle est égale au rayon de ce cercle. Par conséquent le cercle et la droite ont un seul point en commun.

II)TANGENTE EN UN POINT-CONSTRUCTION

1)Unicité de la tangente

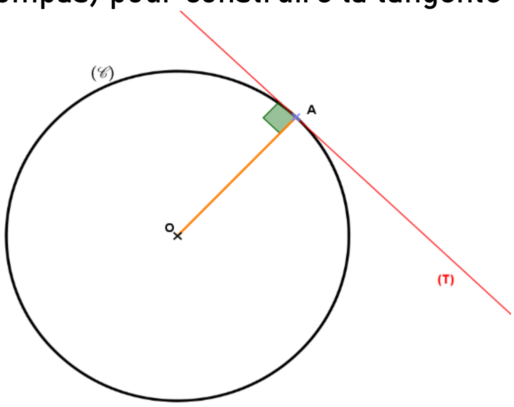
Soit ($\mathcal{C}$) un cercle de centre O. Le cercle ($\mathcal{C}$) admet en tout point M une tangente et une seule : C'est la perpendiculaire en M à la droite (OM).
La tangente à un cercle est toujours perpendiculaire au rayon de ce cercle.



2)Méthode de construction

a)Le point A appartient au cercle

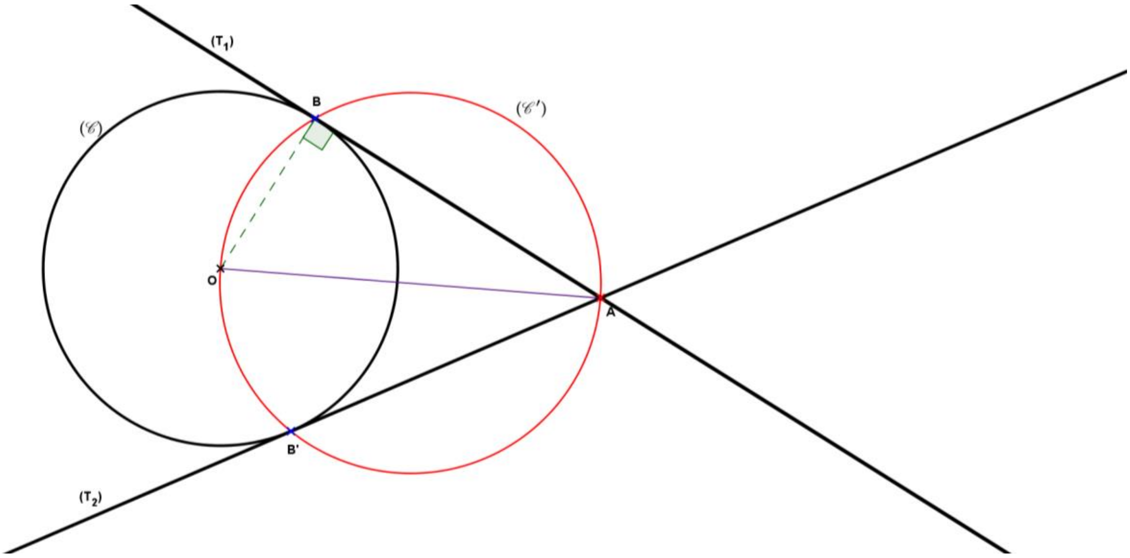
On trace le cercle ($\mathcal{C}$) de centre O ; on place ensuite le point A sur le cercle.
On trace ensuite le rayon OA et on utilise (la règle +l'équerre ou la règle + le compas) pour construire la tangente (T).



Lorsque le point A est sur le cercle ($\mathcal{C}$) ; on a une seule tangente (T)

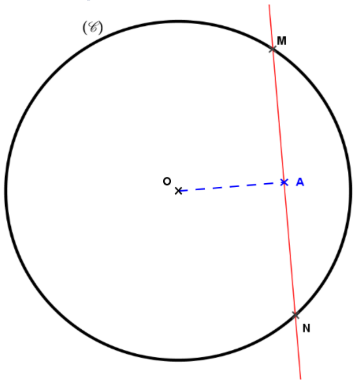
b) Le point A est à l'extérieur du cercle

Construction à la règle et au compas
On trace le cercle ($\mathcal{C}$) de centre O ; on place le point A à l'extérieur du cercle.
On construit ensuite le cercle ($\mathcal{C}'$) de diamètre [OA]. Ce cercle coupe le cercle ($\mathcal{C}$) en deux points B et B'. Les droites (AB) et (AB') sont les deux tangentes du cercle ($\mathcal{C}$).



Lorsque le point A est extérieur au cercle ; on a deux tangente (AB) et (AB')

c)Le point A est à l'intérieur du cercle.



On constate que toute droite passant par le point A coupe le cercle $(\mathcal{C})$ en deux points distincts. Il n'y a donc pas de tangente (T) possible au cercle $(\mathcal{C})$ passant par le point A.

Exercice d'application

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) ; on considère les points A, B et C tel que :

$\overrightarrow{OA} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$;$\overrightarrow{OB} = -3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{OC} = -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$.

1)Placer les points A, B et C dans le repère (O, I, J). *On complètera la figure au fur et à mesure.*

2)Quelle est la nature du triangle ABC. Justifier la réponse.

3)Soit $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au triangle ABC. Donner les coordonnées de sont centre I et calculer son rayon.

4)Soit (T) la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en B et (T') la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en C. Déterminer une équation cartésienne de (T) et de (T').

5)Soit S le point d'intersection des droites (T) et (T'). Calculer les coordonnées de S.

6)Le point M(2 ;-3) appartient -il au cercle $(\mathcal{C})$? Justifier la réponse.

7)Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

CHAPITRE 18 : STATISTIQUES

I)VOCABULAIRE STATISTIQUE

1)Population

Une population statistique est l'ensemble sur lequel se fait l'étude statistique. Ce ensemble peut être des personnes physique ; des animaux ou des objets… .

Exemple : Les élèves de 3ème du CEG de Djigouèra ; les naissances dans une maternité ; les joueurs d'une équipe de football ; la volaille d'une basse-cour ; les types arbres d'un foret ……

2)Individu

Un élément d'une population statistique, qu'il soit une personne physique, un animal ou un objet est appelé individu ou unité statistique.

Exemple : L'élève TRAORE Adama est un individu ou unité statistique des élèves de la classe de 3ème du CEG de Djigouèra.

3)Effectif d'une population

On appelle effectif d'une population statistique le nombre total d'individu que compte cette population.

L'effectif total d'une population est encore appelé :la taille de la population.

Exemple : La taille ou l'effectif total des élèves de 3ème du CEG de Djigouera est de 68 élèves.

4)Le caractère

Un caractère statistique est une propriété que l'on étudie au sein d'une population.

Exemple : Le poids, le sexe, la taille, le moyen de déplacement, le nombre de frère et sœurs, les notes de mathématiques sont des caractères qui peuvent être études dans une population statistique.

Un caractère statistique peut être quantité ou qualitatif :

-Un caractère est dit quantitatif lorsque les valeurs du caractère sont chiffré (la note, le poids, l'âge ….)

-Un caractère est dit qualitatif lorsque les valeurs du caractère ne sont pas chiffrées (le sexe, la nationalité, la couleur…)

5)Fréquence d'une valeur du caractère

La fréquence d'une valeur du caractère est le rapport de l'effectif correspondant à cette valeur du caractère sur l'effectif total de la population.

$$Fréquence = \frac{l'effectif\ de\ la\ valeur\ du\ caractère}{l'effectif\ total\ de\ la\ population}$$

NB : Le total des fréquences est égal 1 ou sensiblement à 1 si les fréquences sont exprimées en décimale ou à 100 ou sensiblement égal à 100 si les fréquences sont exprimées en pourcentage.

Exemple : Dans la classe de 3ème du CEG de Djigouèra, il y a 68 élèves dont 30 garçons et 38 filles.

Soient f_1 la fréquence des filles et f_2 la fréquence des garçons :

$$f_1 = \frac{30}{68} = 0{,}44\ soit\ 44\%\ de\ filles\ \ et\ f_2 = \frac{38}{68} = 0{,}56\ soit\ 56\%\ de\ garçons$$

6)Mode et classe modale

a) Le mode

Le mode d'une série statistique est la valeur du caractère ayant le plus grand effectif.

b) La classe modale

Dans le cas ou les valeurs du caractère sont regroupées en classe d'amplitude égale : On parle de classe modale.
La classe modale est donc la classe qui à le plus grand effectif.

7)Etendue (à titre informatif)

L'étendue d'une série statistique est un nombre qui précise la dispersion des données.
C'est la différence entre la valeur la plus grande et la valeur la plus petite.
Exemple : On a relevé l'âge de quelques élèves d'une école primaire ; et voici les valeurs trouvées :5 ;10 ;12 ;6 ;12 ;10 ;9,8 ;12 ;5.
La valeur la plus grande est 12 et la valeur la plus petite est 5. On a 12-5=7
L'étendue de cette série statistique est 7.

II)DIAGRAMMES

1)Diagramme en bâton

Une enquête menée sur la matière préférée de 50 élèves d'une classe de 3ème au cours de l'année scolaire 2020-2021 a donne les résultats suivants :

Matière préféré	Physique-Chimie	Français	Mathématiques	Anglais	Total
Effectif	10	20	12	8	50

1)Définir la population étudiée et donner le mode de cette série statistique
2)Définir le caractère étudié et donner sa nature
3)Donner les valeurs du caractère
4-a) Calculer les fréquences relatives en pourcentage.
 b) Quel est le pourcentage des élèves qui aiment les Mathématiques.
5)Représenter cette série statistique par un diagramme en bâton des effectifs

Solution

1)-La population étudiée est : les 50 élèves d'une classe de 3ème ;
 -Le mode est : Français
2)Le caractère étudié est :la matière préférée des élèves. Ce caractère est qualitatif.
3)Les valeurs du caractère sont : Physique-Chimie ; Français ; Mathématiques et Anglais.
4-a) Calculons les fréquences relatives en pourcentage

Moyen de déplacement	Physique-Chimie	Français	Mathématiques	Anglais	Total
Effectif	10	20	12	8	50
Fréquence relative	20%	40%	24%	16%	100%

b) Le pourcentage des élèves qui aiment les Mathématiques est de 24%.
5)Représentons cette série statistique dans un diagramme en bâton des effectifs

Echelle : $\begin{cases} en\ abscisse: 2cm \rightarrow 1\ matière \\ en\ ordonnée: 1cm \rightarrow 2\ élèves \end{cases}$

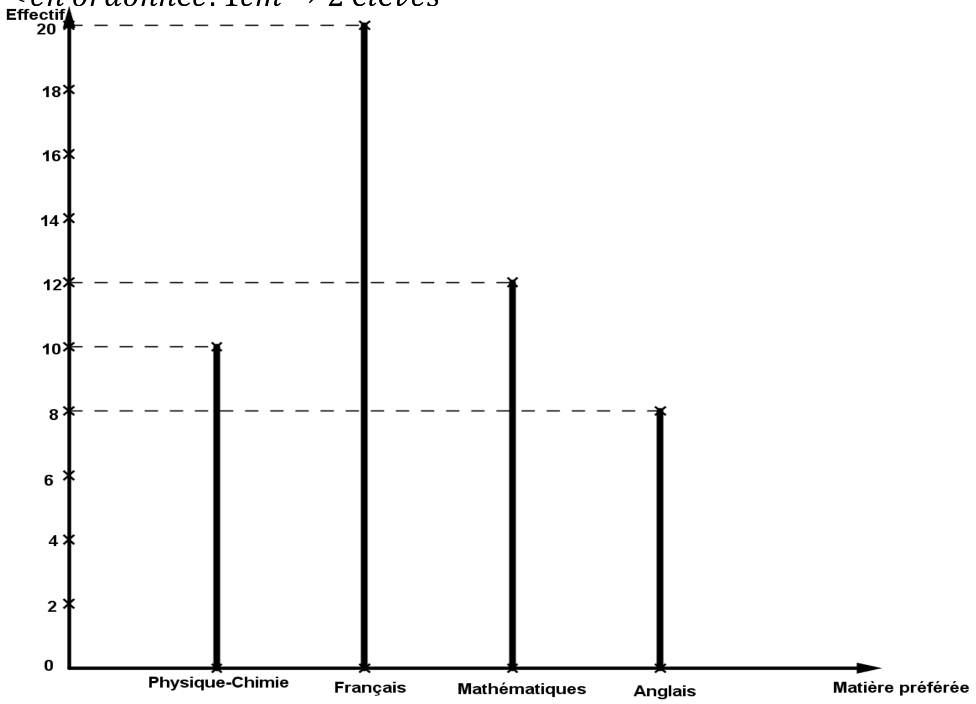


Diagramme en bâton des effectifs

2)Diagramme circulaire

Une enquête menée sur l'année de naissance des élèves d'une classe de 6ème d'une école publique de la ville de Bobo-Dioulasso au cours de l'annee scolaire 2021-2022 à donner les résultats consignés dans le tableau suivant :

Année de naissance	2010	2011	2012	2013
Effectif	10	23	35	12
Fréquence				

1)Définir la population étudiée ;le mode et donner son effectif
2)Définir le caractère étudié ; donner sa nature et les valeurs de ce caractère
3)Recopier et compléter le tableau ci-dessus.
4)Représenter cette série statistique dans un diagramme circulaire des effectifs.

Solution

1)La population étudiée est : les élèves d'une classe de 6ème d'une école publique de la ville de Bobo-Dioulasso. Son effectif est :80 élèves
Le mode de cette série statistique est :2012
2)-Le caractère étudié est l'année de naissance ;
-Sa nature est quantitatif ;
-Les valeurs du caractère sont :2010 ;2011 ;2012 et 2013

3)Recopions et complétons le tableau ci-dessus :

Année de naissance	2010	2011	2012	2013	Total
Effectif	10	23	35	12	80
Fréquence	0,12	0,29	0,44	0,15	1

4)Représentons cette série statistique dans un diagramme circulaire

Calculons les angles des différents secteurs :

-L'angle du secteur des élèves nés en 2010 :$S_1 = \frac{360\times10}{80} = 45°$

-L'angle du secteur des élèves nés en 2011 :$S_2 = \frac{360\times23}{80} = 103{,}5°$

-L'angle du secteur des élèves nés en 2012 :$S_3 = \frac{360\times35}{80} = 157{,}5°$

-L'angle du secteur des élèves nés en 2013 : $S_4 = \frac{360\times12}{80} = 54°$

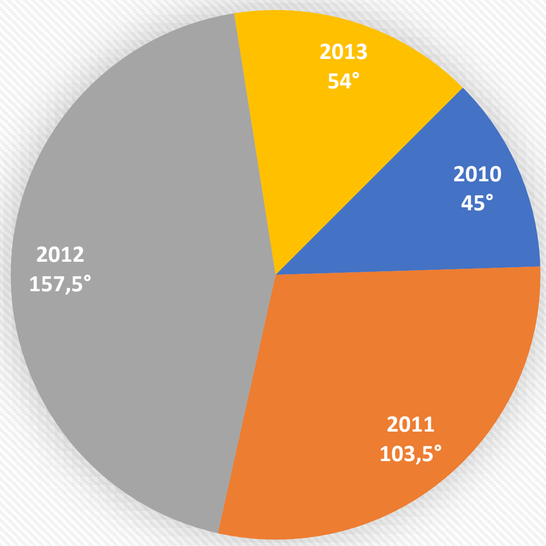


Diagramme circulaire des éffectifs

III)ETUDE DES CARACTERES A PLUSIEURS VALEURS

1)Introduction

Il arrive souvent que nous soyons face à une série statistique de grand nombre de valeur pris par les diffèrent caractères étudiés. Cela nous impose souvent un regroupement en intervalle de même longueur appelé amplitude. Ces intervalles sont appelés classe.

L'amplitude d'un intervalle est la différence entre les deux extrémités de la classe : C'est-à-dire la plus grande moins la plus petite valeur de l'intervalle.

2)Regroupement en classe

Une enquête menée sur le nombre de frère et sœur auprès des travailleurs d'une société de gardiennage a donné les résultats suivants :

3-6-0-2-9-7-5-4-2-3-3-0-1-8-8-4-5-3-3-7-8-1-1-2-2-7-5-4-8-9.

1)Définir la population ; le caractère et la nature du caractère étudiée.

2)Recopier et compléter le tableau suivant :

Classe	$[0;2[$	$[2;4[$	$[4;6[$	$[6;8[$	$[8;10[$	Total
Effectifs						
Fréquence						

3)Quel est la classe modale de cette série statistique.

Solution

1)-La population étudiée est : les travailleurs d'une société de gardiennage ;

-Le caractère étudié est : le nombre de frère et sœur

-La nature du caractère est : quantitative

2)Recopions et complétons le tableau :

Classe	$[0;2[$	$[2;4[$	$[4;6[$	$[6;8[$	$[8;10[$	Total
Effectifs	5	9	6	4	6	30
Fréquence	0,17	0,30	0,20	0,13	0,20	1

On dit qu'on a regroupé les valeurs du caractère en classe d'amplitude 2

3)La classe modale est :$[2;4[$

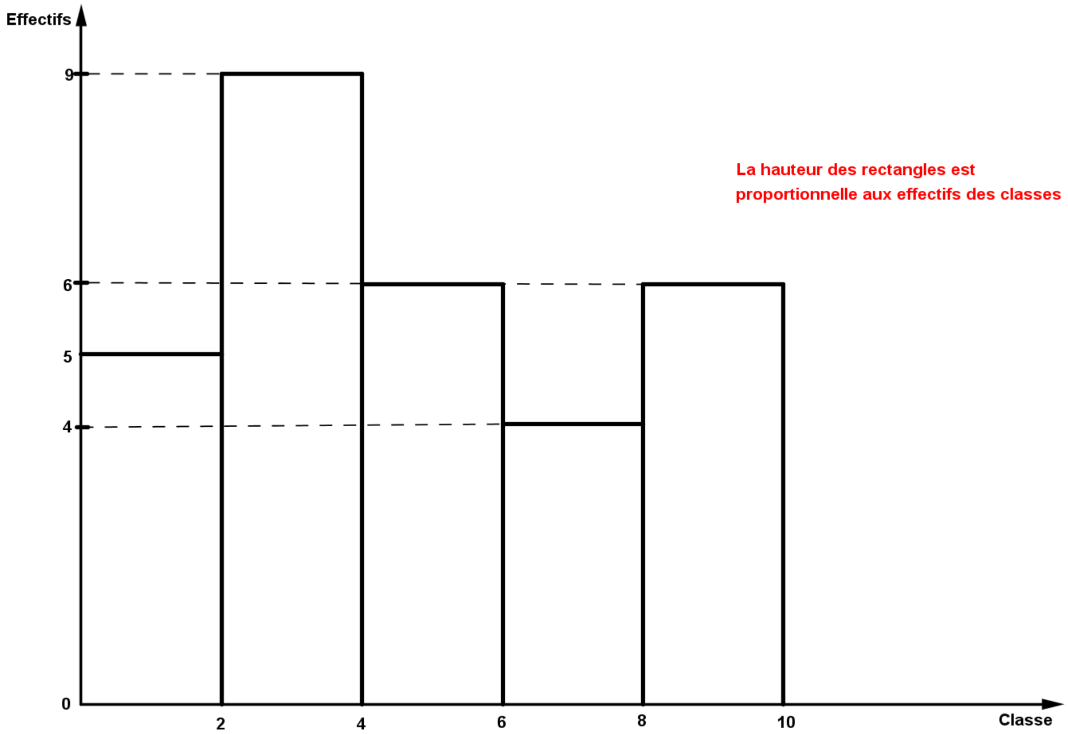
3)Représentation graphique

Lorsque les valeurs du caractère sont regroupées en classe d'amplitude ; la représentation graphique est un histogramme.

Les classes sont en abscisse et les effectifs ou les fréquences sont en ordonnées.

Représentons la série ci-dessus par un histogramme des effectifs

Echelle : $\begin{cases} abscisse: 2cm \rightarrow 1\ classe \\ ordonnées: 1cm \rightarrow 1\ frere\ er\ soeur \end{cases}$



Histogramme des effectifs

IV)EFFECTIFS ET FREQUENCES CUMULES

1)Effectifs cumulés

On distingue les effectifs cumulés croissants et les effectifs cumulés décroissants

Soit le tableau suivant traduisant les note relevées lors d'un devoir de Mathématiques dans une classe de 5ème :

Classe(notes)	$[0;5[$	$[5;10[$	$[10;15[$	$[15;20[$	Total
Effectif	9	23	18	10	60
Effectifs cumulés croissants	9	32			
Effectifs cumulés décroissants	60	51			

1)Recopier et compléter le tableau
2)Combien d'élèves ont une note comprise entre 5 et 15 ?
3)Combien d'élèves ont eu au moins 10/20 ?
4)Combien d'élèves ont eu moins de 10/20 ?

Solution

1)Recopions et complétons le tableau :

Classe (notes)	$[0;5[$	$[5;10[$	$[10;15[$	$[15;20[$	Total
Effectif	9	23	18	10	60
Effectifs cumulés croissants	9	32	50	60	
Effectifs cumulés Décroissants	60	51	28	10	

2)Le nombre d'élèves qui ont une note comprise entre 5 et 15 est :23+18=41
3)Le nombre d'élève ayant eu au moins 10/20 est 28 soit 18+10.
4)Le nombre d'élèves ayant eu moins de 10/20 est 32 soit 9+23

2)Fréquence cumulée

On distingue aussi les fréquences cumulées croissantes et les fréquences cumulées décroissantes.

Reprenons le tableau des notes ci-dessus :

Classe(notes)	$[0;5[$	$[5;10[$	$[10;15[$	$[15;20[$	Total
Fréquence en %	15	38,3	30	16,7	60
Fréquences cumulées croissants					
Fréquences cumulées décroissants					

1)Recopier est compléter le tableau
2)Quel est le pourcentage d'élèves ayant obtenu au moins 10/20 ?
3)Quel est le pourcentage d'élèves ayant obtenu une note inférieure à 10/20 ?

Solution

1)Recopions et complétons le tableau

Classe(notes)	$[0;5[$	$[5;10[$	$[10;15[$	$[15;20[$	Total
Fréquence en %	15	38,3	30	16,7	100
Fréquences cumulées croissants	15	53,3	83,3	100	
Fréquences cumulées décroissants	100	85	46,7	16,7	

2)Le pourcentage d'élèves ayant obtenu au moins 10/20 est 46,7% soit 30+16,7

3)Le pourcentage d'élèves ayant obtenu une note inférieure à 10/20 est 53,3 soit 15+38,3.

Remarque : On peut aussi construire l'histogramme des effectifs cumulés et des fréquences cumulées.

V)LA MOYENNE

1)La moyenne simple

On dit qu'une moyenne est simple lorsque chaque valeur du caractère à pour effectif 1 ; c'est-à-dire que les valeurs ne se répète pas.

Exemple/Exercice

Voici une liste de note obtenu par un groupe d'élèves :15 ;10 ;5 ;11 ;19 ;12 ;2 ;7 .

La moyenne de cette note est :$M = \frac{15+10+5+11+19+12+2+7}{8} = \frac{81}{8} = 10{,}12$

2)Moyenne pondérée

Lorsque les valeurs des caractères ont des effectifs différents, on parle de moyenne pondérée.

Soit les notes consignées dans le tableau suivant :

Notes	8	9	11	14	Total
Effectifs	17	20	15	18	70

La moyenne de ces notes est une moyenne pondérée.

On a :$M = \frac{8\times17+9\times20+11\times15+14\times18}{70} = \frac{733}{70} = 10{,}47$

3)Moyenne pondérée utilisant les centres de classes

Lorsque les valeurs du caractère sont regroupées en classe d'amplitude égale ; on considère que la valeur du caractère est le centre de la classe. Le centre de la classe s'obtient en divisant la somme des extrémités de la classe par 2.

Soit le tableau de notes de mathématiques suivant :

Classe(notes)	$[0;5[$	$[5;10[$	$[10;15[$	$[15;20[$	Total
Centre des classes	2,5	7,5	12,5	17,5	
Effectif	9	23	18	10	60

$$M = \frac{2{,}5\times9+7{,}5\times23+12{,}5\times18+17{,}5\times10}{60} = \frac{595}{60} = 9{,}91$$

NB : -La moyenne obtenue en utilisant les centres des classes n'est pas une moyenne exacte.

-Pour obtenir une moyenne exacte, on additionne toutes les valeurs du caractère une à une et on divise par l'effectif total.

4)Exercices résolu

Exercice1

Dans un CSPS on a mesuré le poids en kilogrammes (kg) des enfants reçues en consultation au cours d'une journée. Voici en vrac les résultats obtenus : 14,5-17-12,5-9-6-5-11-22-6,5-19-17-4-9,5-17,5-3,5-11,5-23-14,5-24,5-16-12-6,5-8-23-14-6-5-15-8,5-4,5.

1)Définir la population étudiée et donner son effectif.

2)Quel est le caractère étudié ; donner sa nature.

3)Regrouper c'est donné en classe d'amplitude 5 dans un tableau ; la première étant $[0;5[$. On y ajoutera la ligne des fréquences calculé en pourcentage (%) arrondi à l'entier le plus proche.
4)Quel est le mode de cette série statistique ?
5)Compléter dans le tableau précèdant les lignes des effectifs et des fréquences cumulées croissants.
5)Quel est le nombre d'enfants ayant au moins 15kg ?
6)Donner le pourcentage d'enfant ayant moins de 10kg
7)Représenter par un histogramme des effectif cette série statistique (échelle au choix).
8)En utilisant les centres des classes, calculer le poids moyen des enfants reçus en consultation au cours de cette journée.

Exercice2
Dans un village du Burkina Faso de 780 habitants, chacun exerce un métier. On dénombre 15% de cordonniers, 150 maçons, $\frac{1}{3}$ de forgerons, $\frac{1}{6}$ de tisserand et les autres sont des teinturiers.
1)Quelle est la population étudiée ; donner son effectif.
2)Quel est le caractère étudier ; donner sa nature.
3)Calculer le nombre de cordonniers, de forgerons et de tisserand.
4)En déduire le nombre de teinturiers et déterminer le pourcentage qu'ils représentent dans cette population.
5)Représenter ces résultats dans un tableau ; puis compléter les lignes des fréquences et des fréquences cumulées décroissantes
6)Représenter cette série statistique dans un diagramme circulaire ; puis par un diagramme semi-circulaire des effectifs.

CHAPITRE19 : ISOMETRIE DU PLAN

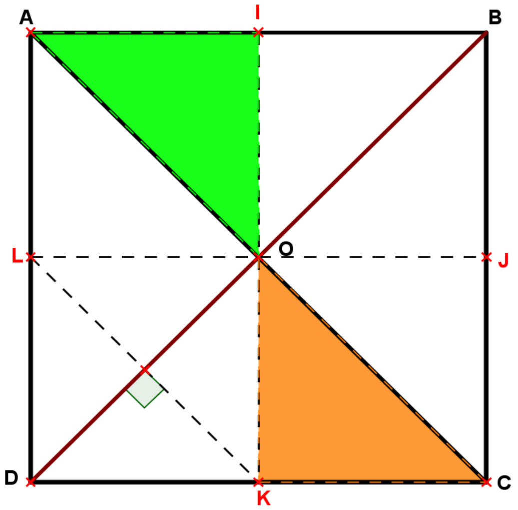
I)DEFINITION

1)Activité

Soit ABCD un carré de centre O. Soient I ; J ; K et L les milieux respectifs des cotés $[AB]; [BC]; [CD]$ et $[DA]$. On note $S_{(BD)}$ la symétrie orthogonale d'axe (BD) ;
Construire la figure et déterminer les images des points O ;A et L par $S_{(DB)}$.

Solution

Construisons la figure et déterminons les images des points O ;A et L par $S_{(BD)}$.



Les images par la symétrie orthogonale d'axe (BD) des points O ; A et L sont :
$S_{(BD)}(A)=C$; $S_{(BD)}(O)=O$ et $S_{(BD)}(L)=K$
On remarque que la symétrie orthogonale d'axe (BD) est une application qui transforme le triangle AIO en un triangle COK de même dimension. On dit alors que les triangles AIO et COK sont deux triangles Isométriques
Cette application conserve les distances ; elle est donc une isométrie du plan.

2)Définition

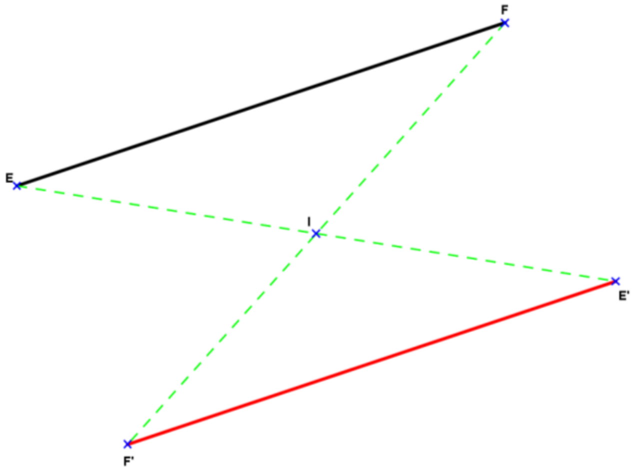
Du grec :"Isos" signifie égale et "metron" signifie mesure.
On appelle isométrie toute application du plan qui conserve les distances.

II)EXEMPLES D'ISOMETRIES

1)La symétrie centrale

Soit [EF] un segment et I un point quelconque du plan n'appartenant pas au segment EF.
Construisons le symétrique du segment [EF] par rapport au point I. Que constate-t-on ?

Résolution

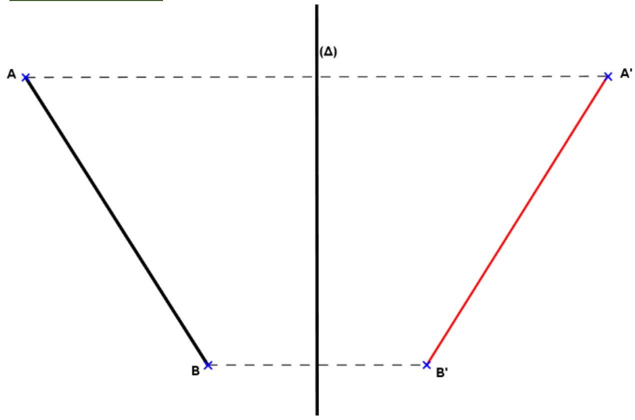


On constate que les deux segments [EF] et [E'F'] ont la même longueur et sont parallèles.
On note [EF]=[E'F'] et (EF)//(E'F)

2)La symétrie orthogonale d'axe (Δ)

Soient [AB] un segment et (Δ) un axe distinct de [AB]. Construisons le segment [A'B'] image du segment [AB] par la symétrie orthogonale d'axe (Δ).

Résolution

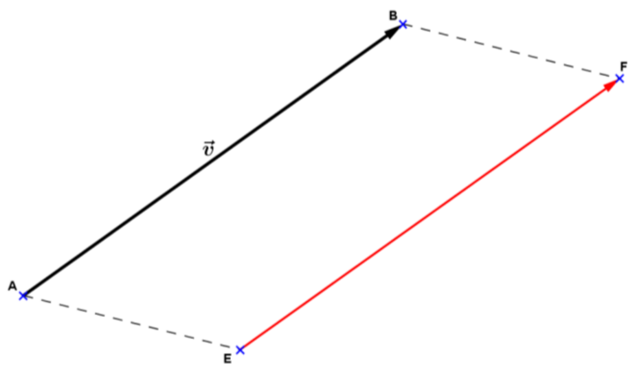


On constate que les segments [AB] et [A'B'] sont égaux. Ainsi l'axe (Δ) est la médiatrice des segments [AA'] et [BB'].

3)Translation de vecteur $\vec{v}$.

Soient $\vec{v}$ un vecteur de représentant (A ;B) et E un pont du plan distinct de (A ;B).
Construisons le point F image de E par la translation du vecteur $\vec{v}$.

Résolution

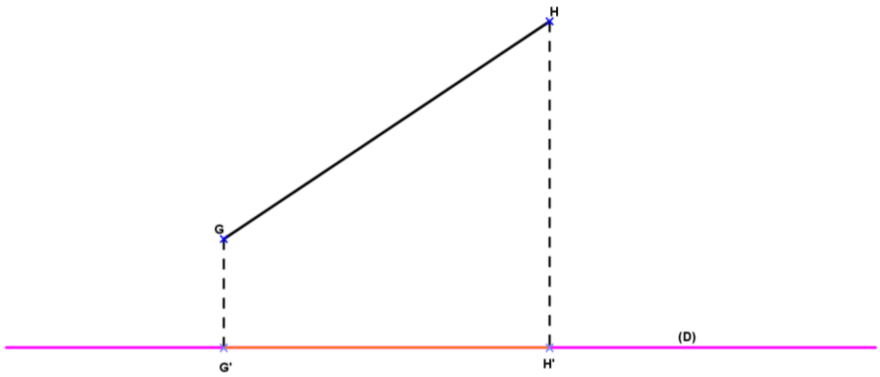


On a AB=EF ; il résulte que le quadrilatère ABFE est un parallélogramme.

3)La projection orthogonale sur une droite

Soient (D) une droite du plan et [GH] un segment distinct de (D). Construisons les points G' et H' projetés orthogonales des points G et H sur la droite (D). Que constate
t-on ?

Résolution



On constate que les segments [GH] et [G'H'] n'ont pas la même longueur. C'est-à-dire que GH≠G'H'.

4)Conclusion

*Les symétries (*symétrie orthogonale et symétrie centrale)* et la translation conservent les distances. Ce sont des isométries du plan.
*Les projections par contre ne conservent pas les distances. Les projections ne sont donc pas des isométries du plan.

III)PROPRIETES

Toute isométrie du plan possède au moins une propriété :

1)Images des points

-Les images par une isométrie de trois points alignés sont trois points alignés ;
-L'image d'un segment ; d'une droite ; d'une demie droite par une isométrie du plan est un segment ; une droite ; une demi-droite ;
-L'image par une isométrie du milieu d'un segment est le milieu des images des extrémités de ce segment.

2)Images de droites

-L'images par une isométrie de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires ;
-L'image par une isométrie de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.

3)Images d'angle et d'aires

-L'image par une isométrie d'un angle est un angle de même mesure ;
-L'image par une isométrie d'une surface est une surface de même aire ;
-L'image par une isométrie d'une figure géométrique est une figure géométrique de même dimension.

4)Exercices résolu

Exercice1

COD est un triangle isocèle rectangle en O.

1)Déterminer la mesure des deux angles $\widehat{OCD}$ et $\widehat{ODC}$

2)C'O'D' est l'image de COD par la symétrie orthogonale d'axe (d) ; sans faire la construction, déterminer la mesure de l'angle $\widehat{O'C'D'}$.

3)Quel serai la mesure de l'angle $\widehat{O'D'C'}$ si le triangle C'O'D' était l'image du triangle COD par une translation ? Justifier la réponse.

Exercice2

Soit les points M(-4 ;1) ;A(2 ;5) ;R(4 ;2) et E(-2 ;-2)

1)Placer les points M,A,R et E dans un repère orthonormé

2)Construire les symétriques N et S des points E et A par rapport a R

3)Démontrer que MARE est un rectangle

4)En déduire la nature du quadrilatère ANSE

Exercice3

1-a) dessiner un parallélogramme ABCD.

b) Quels sont les points P et Q tels que : $\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}$? ;$\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}$?

2)Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$

a) Construire l'image E du point C par la translation t.

b) Quel est le transformé, par la translation t du triangle ABC ?

c)Comparer $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE}$.

CHAPITRE 20 : LES SOLIDES

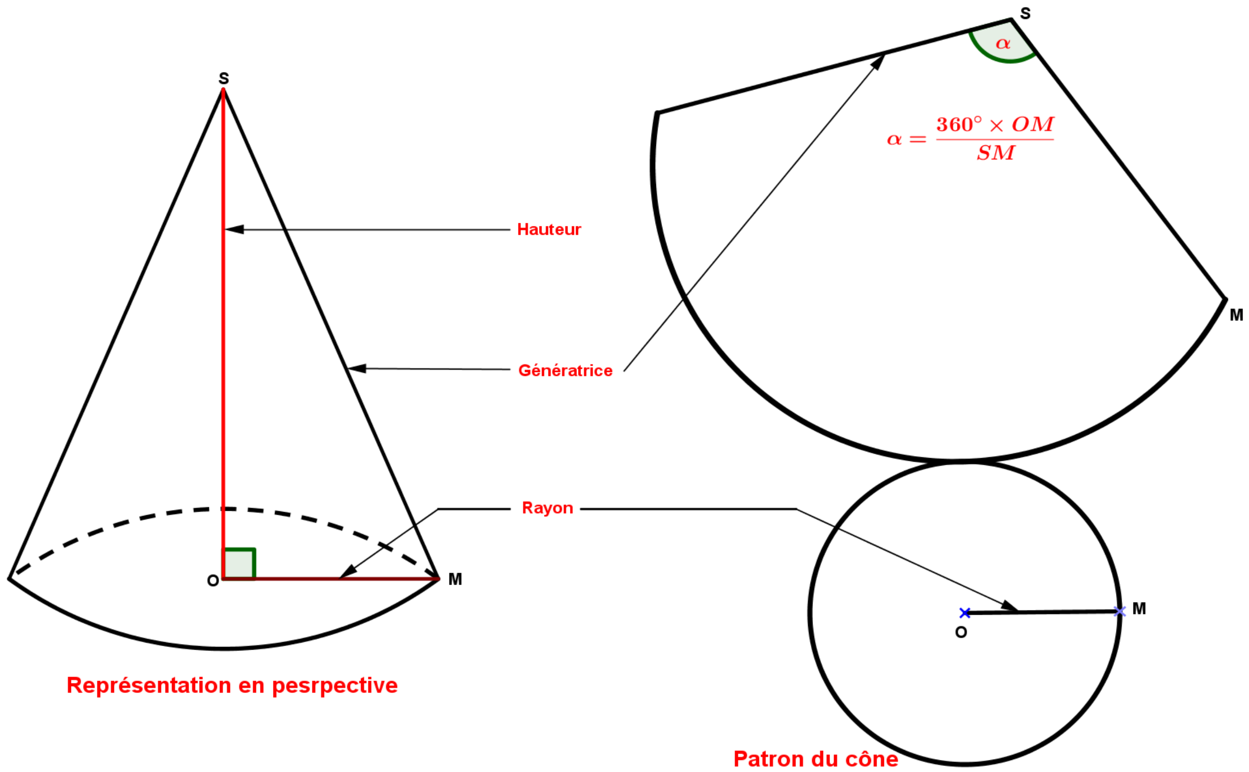
I)RAPPELS

1)Le polygone

-Un polygone est une figure géométrique qui à plusieurs cotés (le triangle ; les quadrilatères ; les pentagones…).

-On dit qu'un polygone est régulier lorsque tous ses cotés sont égaux et inscriptible dans un cercle (le triangle équilatéral ; le carré ;le pentagone régulier…).

2)Le cône de révolution



Représentation en pesrpective

Patron du cône

-Un cône de révolution est un solide obtenu en faisant tourner un triangle rectangle autour de l'un des cotes de l'angle droit.

-La base d'un cône de révolution est un disque de surface : $S_b=\pi r^2$

-Le volume d'un cône de révolution est donné par la formule :$\mathcal{V} = \frac{S_b \times h}{3}$ (avec S_b le surface de base et h la hauteur du cône).

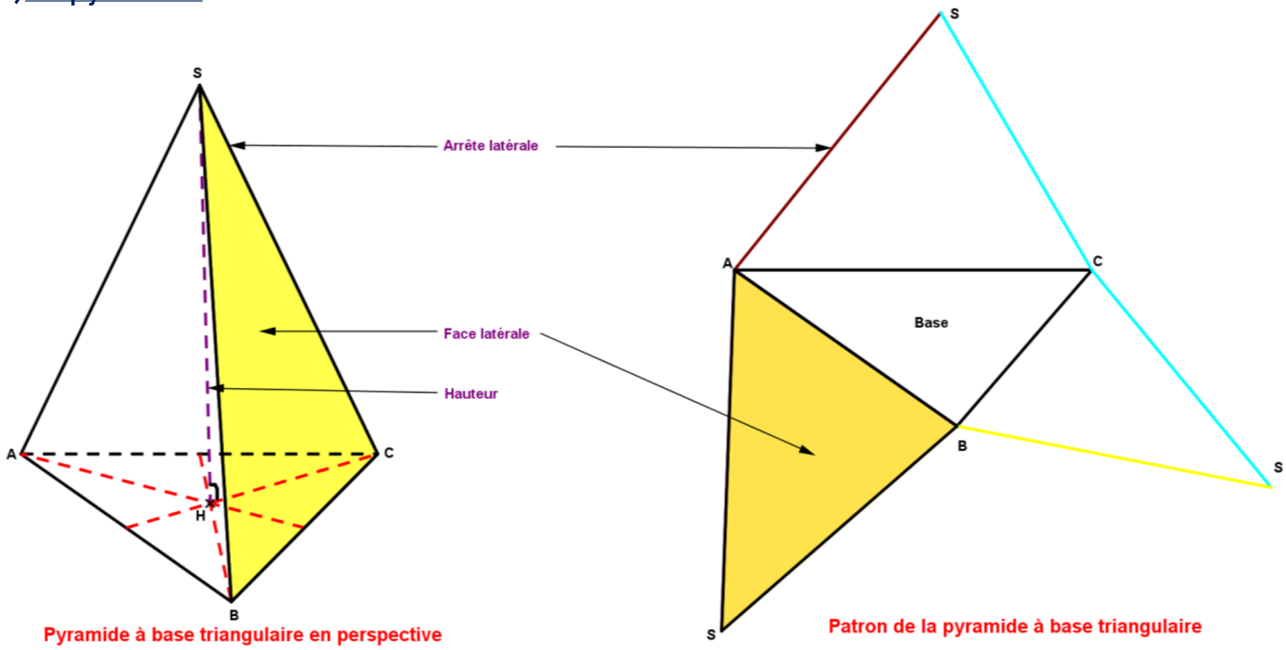
-L'aire latérale d'un cône est donné par la formule :$\mathcal{A}_\ell = \frac{\mathcal{P} \times a}{2}$ (avec $\mathcal{P}$ *le périmètre de la base et* a *la génératrice du cone*) .

-L'aire totale d'un cône de révolution est donné par la formule suivante :$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_\ell + \mathcal{S}_b$

-Dans la représentation du patron d'un, l'angle du secteur α est donner par la formule :

$\alpha = \frac{360° \times r}{a}$ (avec r le rayon de base du cône et a la génératrice du cône).

3)La pyramide



Pyramide à base triangulaire en perspective

Patron de la pyramide à base triangulaire

-Une pyramide est un solide dont la base est un polygone et les faces latérales sont des triangles ayant un sommet commun qui est le sommet de la pyramide.
-Une pyramide est dite régulière lorsque sa base est un polygone régulier et les arrêtes latérales ont la même longueur.
-Dans une pyramide régulière, la hauteur de la pyramide passe toujours par le centre du cercle circonscrit au polygone de base et est perpendiculaire à toute droite contenue dans le plan de cette base.
-Le volume d'une pyramide est donné par la formule :$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{S}_b \times h}{3}$ (avec $\mathcal{S}_b$ la surface de base et h la hauteur de la pyramide).
-Si la base est un :*carré alors :$\mathcal{S}_b = coté \times cote$
*triangle alors :$\mathcal{S}_b = \frac{Base \times hauteur}{2}$
*rectangle alors :$\mathcal{S}_b = L \times l$
-L'aire latérale d'une pyramide est donné par la formule :$\mathcal{A}_\ell = \frac{\mathcal{P} \times a}{2}$ (avec $\mathcal{P}$ *le périmètre de la base et* a *l'arrête latérale de la pyramide*)
-L'aire totale d'un cône de révolution est donné par la formule suivante :

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_\ell + \mathcal{S}_b$$

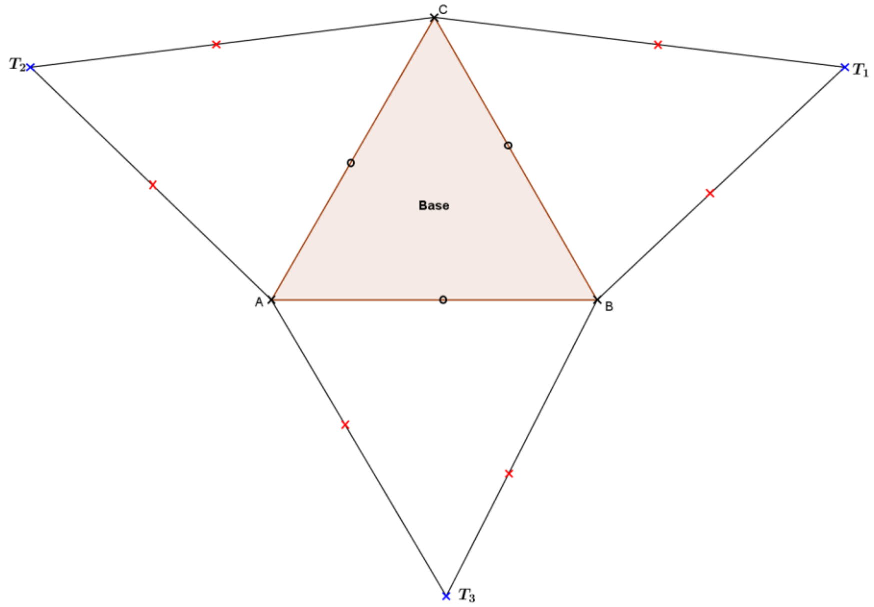
4)Autres formules
-Volume d'un cube :$\mathcal{V} = a \times a \times a = a^3$
-Volume d'un pavé ou parallélépipède rectangle :$\mathcal{V} = L \times l \times h$
-Volume d'un cylindre de révolution :$\mathcal{V} = \mathcal{S}_b \times h$ avec $\mathcal{S}_b = \pi r^2$ et h la hauteur du cylindre.

II)APPLICATION DU THEOREME DE PYTHAGORE
Exemple/Exercice
Soit TABC une pyramide régulière de hauteur TH, dont la base est un triangle équilatéral de côté 6cm et l'arrête latérale TA=8cm. Soit I le milieu du coté BC.

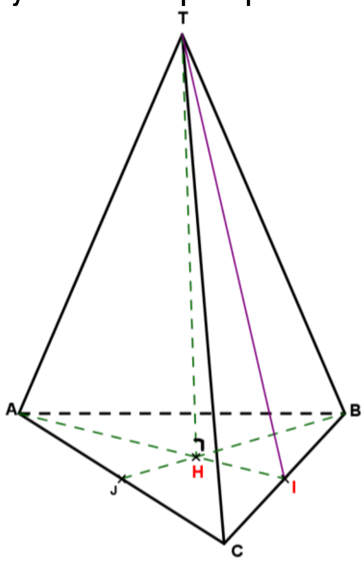
1)Réaliser un patron de cette pyramide
2)Représenter cette pyramide en perspective cavalière ; on placera les point I et H.
3)Calculer la surface latérale de cette pyramide ;
4-a) Démontrer que TIC est un triangle rectangle ;
 b) Démontrer que TI^2=55 et en déduire TI.
5-a) Démontrer que le triangle BIH est rectangle en I ;
 b) En déduire la mesure de l'angle $\widehat{HBI}$;
 c) Sachant que $cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; montrer que BH=$2\sqrt{3}$.
6)En considérant le triangle TBH rectangle en H ; montrer que la hauteur TH=$2\sqrt{13}$

Résolution

1)Réalisons un patron de cette pyramide



2)Représentons cette pyramide en perspective et plaçons les points I et H.



3)Calculons la surface latérale de cette pyramide.

La formule de la surface latérale est donnée par la formule :$\mathcal{A}_\ell = \frac{\mathcal{P}\times TB}{2}$ avec $\mathcal{P} = 6\times 3$

Il résulte que $\mathcal{A}_l = \frac{18\times 8}{2} = 72cm^2$

4-a) Démontrons que le triangle TIC est rectangle.

TBC est un triangle isocèle en T et I milieu de $[BC]$;alors la droite (TI) est la médiatrice de $[BC]$.D'où (TI)⊥(BC) ; il résulte que le triangle TIC est rectangle en I.

b) Démontrons que TI²=55 ; puis déduisons TI.

TIC est un triangle rectangle en I ; d'après le théorème de Pythagore : TI²=TC²-CI²

TI²=64-9=55. Il résulte que TI=$\sqrt{55}$.

5-a) Démontrons que le triangle BIH est rectangle en I

ABC est un triangle équilatéral et I milieu de $[BC]$;alors la droite (AI) est à la fois médiane et médiatrice de $[BC]$. D'où (AI)⊥(BC) ; il résulte que le triangle BIH est rectangle en I.

b) Déduisons en la mesure de l'angle $\widehat{HBI}$.

ABC est un triangle équilatéral ; alors la demie droite [BJ) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$. Or $\widehat{ABC} = 60°$;d'où $\widehat{JBC} = \frac{60}{2} = 30°$ .Comme H∈$[BJ]$ et I∈$[BC]$;il résulte que

$\widehat{HBI} = 30°$

c)Montrons que BH=2$\sqrt{3}$

BIH est un triangle rectangle en I ; d'où $cos\widehat{HBI} = \frac{BI}{BH} \leftrightarrow cos30° = \frac{3}{BH} \leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{BH}$

$\leftrightarrow BH = \frac{6}{\sqrt{3}}$. Il résulte que $BH = 2\sqrt{3}$.

6)Montrons que la hauteur TH=2$\sqrt{13}$.

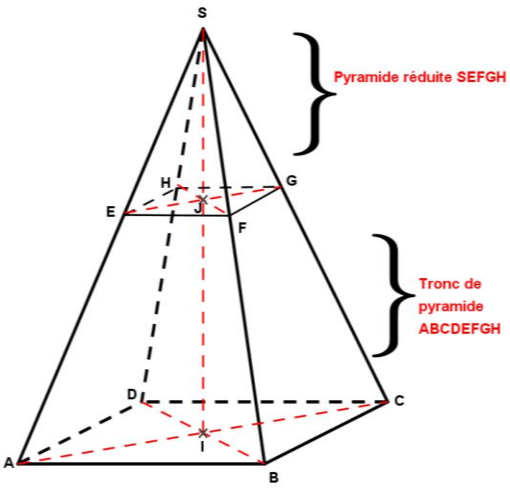
La hauteur d'une pyramide est toujours perpendiculaire au plan de la base. Comme H appartient au plan de la base ; alors le triangle TBH est rectangle en H.

D'après le théorème de Pythagore :TH²=TB²-BH² $\leftrightarrow TH^2 = 64 - 12 = 52 \leftrightarrow TH = \sqrt{52}$

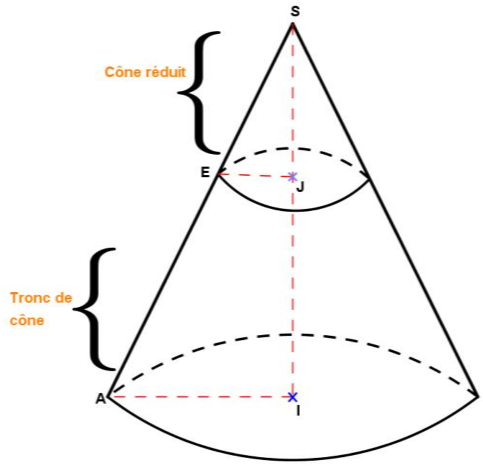
Il résulte que $TH = 2\sqrt{13}$.

III)APPLICATION DU THEOREME DE THALES

1)Sections planes



Pyramide SABCD a base rectangulaire en perspective



Cône de révolution en perspective

Il est souvent plus aisé d'utiliser l'échelle de réduction pour effectuer certaines operations. L'échelle de réduction noté généralement k est donné par la formule : $k = \frac{SE}{SA}$ (voir figures). Lorsque k est connu, elle peut être utiliser pour déduire des longueurs ; des aires et des volumes

*Pour calculer une longueur connaissant k ; on pose : $\boldsymbol{\frac{SE}{SA} = \frac{SJ}{SI} = \frac{EF}{AB} = \frac{EJ}{AI} = \cdots = k}$

*Pour calculer une surface (aire) ; on pose : $\boldsymbol{\frac{Aire\ de\ la\ face\ réduite}{Aire\ homologue\ de\ la\ face\ de\ la\ pyramide} = k^2}$

*Pour déduire un volume connaissant k ; on pose : $\boldsymbol{\frac{Volume\ de\ la\ pyramide\ réduite}{Volume\ homologue\ de\ la\ pyramide} = k^3}$

2)Application du théorème de Thales

On applique généralement le théorème de Thalès lorsque le solide est sectionné par un plan parallèle à la base. Les droites étant parallèles ; on obtient une configuration de Thalès.

Exemple/Exercice

Soit un cône de révolution de sommet S et de hauteur SH=8cm ; dont la base est un disque de centre H et de rayon r=6cm. Ce cône est sectionné par un plan parallèle à la base au $\frac{3}{4}$ à partir du sommet S ($\frac{SA'}{SA} = \frac{3}{4}$). Soit A un point du cercle de base ; on note A' le point d'intersection de la droite (SA) avec le plan de la section et H' le centre du cône réduit.

1)Faire un dessin de ce cône en perspective cavalière.

2)Calculer la génératrice SA de ce cône

3-a) Représenter un patron de ce cône.

b) Calculer la surface latérale et la surface totale de ce cône.

c)En déduire la surface du cône réduit en utilisant l'échelle de réduction $k = \frac{3}{4}$

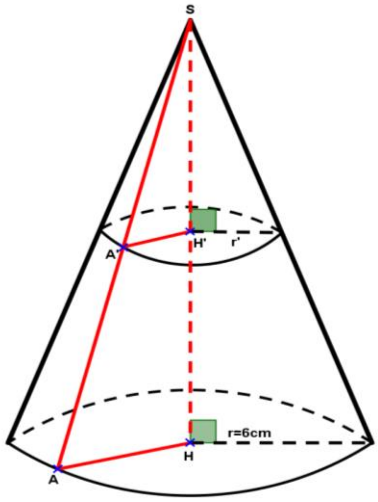
3-a) Démontrer que les triangles SAH et SA'H' forment une configuration de Thalès.

b) En déduire SH' ; SA' et calculer le rayon r' du cône réduit.

4) Calculer le volume $\mathcal{V}$ du cône ; puis en déduire le volume du cône $\mathcal{V}'$ réduit en utilisant l'échelle de réduction.

Résolution

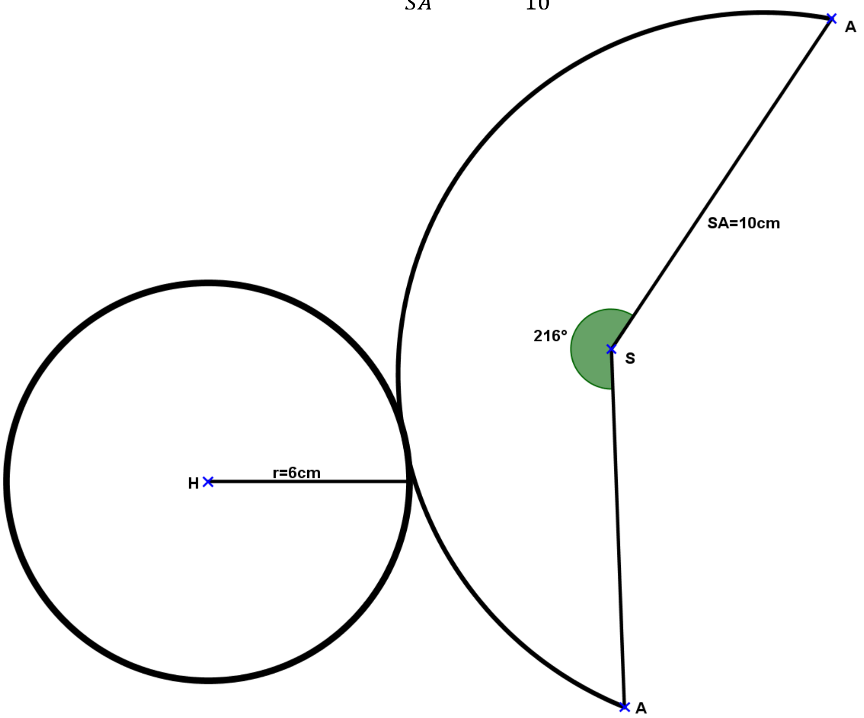
1)Faisons un dessin



2)Calculons la génératrice SA

Le triangle SAH est rectangle en H ; d'après le théorème de Pythagore :
$SA^2 = SH^2 + AH^2 \leftrightarrow SA^2 = 64 + 36 = 100 \leftrightarrow SA = 10$

3-a) Représentons un patron de ce cône
On a l'angle su secteur $\alpha = \frac{360° \times r}{SA} = \frac{360° \times 6}{10} \leftrightarrow \alpha = 216°$



b) Calculons la surface latérale et la surface totale de ce cône.
On a $\boldsymbol{\mathcal{A}_l = \frac{\mathcal{P} \times SA}{2} \leftrightarrow \mathcal{A}_\ell = \frac{2\pi r \times SA}{2} = \frac{2 \times \pi \times 6 \times 10}{2} = 60\pi = 188,4cm^2}$
$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{S}_b \leftrightarrow \mathcal{A}_t = 188{,}4 + 3{,}14 \times 36 = 188{,}4 + 113{,}04 = 301{,}44cm^2$

c)Déduisons la surface du cône réduit
Posons $\mathcal{A}_t$:la surface du cône et $\mathcal{A}'$:la surface du cône réduit
On a:$\frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}_t} = k^2 \leftrightarrow \mathcal{A}' = \mathcal{A}_t \times k^2 \leftrightarrow S' = \frac{9}{16} \times 301{,}44 = 169{,}56 \leftrightarrow S' = 169{,}56cm^2$

3-a) Démontrons que les triangles SAH et SA'H' forment une configuration de Thalès.
Les droites (SA) et (SH) sont sécantes en S ; de plus elles sont coupées par deux droites parallèles (AH) et (A'H'). Il résulte que les triangles SAH et SA'H' forment une configuration de Thalès.

b) Déduisons en SA' ; SH' puis calculons le rayon r' du cône réduit
-Déduisons en SA et SA'
On a $\frac{SA'}{SA} = \frac{3}{4} \leftrightarrow SA' = \frac{3}{4}SA \leftrightarrow SA' = \frac{3}{4} \times 10 = 7{,}5 \leftrightarrow SA' = 7{,}5cm$

On a $\frac{SH'}{SH} = \frac{3}{4} \leftrightarrow SH' = \frac{3}{4}SH \leftrightarrow SH' = \frac{3}{4} \times 8 = 6 \leftrightarrow SH' = 6cm$;
-Calculons le rayon r' du cône réduit

D'après le théorème de Thalès ; on a :$\frac{SA'}{SA} = \frac{r'}{r} \leftrightarrow r' = \frac{SA' \times r}{SA} \leftrightarrow r' = \frac{7,5 \times 6}{10} = 4,5$
Alors $r' = 4,5cm.$

4) Calculons le volume $\mathcal{V}$ du cône ; puis déduisons le volume $\mathcal{V}'$ du cône réduit en utilisant l'échelle de réduction

-Le volume du cône est :$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\pi r^2 h \leftrightarrow \mathcal{V} = \frac{1}{3} \times 3,14 \times 36 \times 8 = 301,44$
$\leftrightarrow \mathcal{V} = 301,44cm^3$

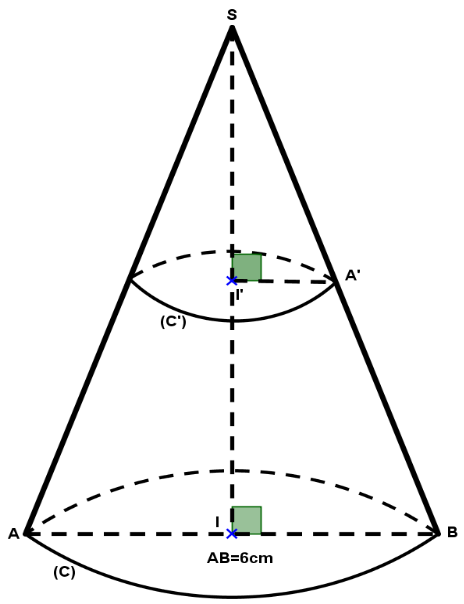
-Déduisons en le volume $\mathcal{V}'$ du cône réduit :

On a $\frac{\mathcal{V}'}{\mathcal{V}} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \leftrightarrow \mathcal{V}' = \frac{27}{64} \times 301,44 \leftrightarrow \mathcal{V}' = 127,17 \leftrightarrow \mathcal{V}' = 127,17cm^3$

Ou bien $\mathcal{V}' = \frac{1}{3}\pi r^2 h \leftrightarrow \mathcal{V}' = \frac{1}{3} \times 3,14 \times 4,5 \times 4,5 \times 6 = 127,17cm^3$

4)Exercices résolu

La figure ci-dessous représente un cône de révolution de révolution de sommet S et de base un disque de centre I et de diamètre AB=6cm. La section de ce cône par un plan parallèle au plan de la base, donne un cône réduit dont la base est un disque de rayon I'A'=2cm On appelle (C) le grand cône ; (C') le cône réduit et on donne SI'=3cm.



1)Calculer la hauteur SI du cône (C) ;
2)Calculer la génératrice SB du cône (C) ;
3)Calculer la SA' de deux manières différentes.
4)Calculer la surface latérale de ce cône ;
5)Calculer le volume de ce cône (C) ;
6)Calculer le volume du cône réduit (C') ; puis en déduire le volume du Tronc de ce cône.

TABLE TRIGONOMETRIQUE

Angle en degré	Sinus	Cosinus	Tangente		Angle en degré	Sinus	Cosinus	Tangente
0	0,0000	1,0000	0,0000		45	0,7071	0,7071	1,0000
1	0,0175	0,9998	0,0175		46	0,7193	0,6947	1,0355
2	0,0340	0,9994	0,0349		47	0,7314	0,6820	1,0724
3	0,0523	0,9986	0,0524		48	0,7431	0,6691	1,1106
4	0,0698	0,9976	0,0699		49	0,7547	0,6561	1,1504
5	0,0872	0,9962	0,0875		50	0,7660	0,6428	1,1918
6	0,1045	0,9945	0 ;1051		51	0,7771	0,6293	1,2349
7	0,1219	0,9925	0,1228		52	0,7880	0,6157	0,2799
8	0,1392	0,9903	0,1405		53	0,7986	0,6018	1,3270
9	0,1564	0,9877	0,1584		54	0,8090	0,5878	1,3764
10	0,1736	0,9848	0,1763		55	0,8192	0,5736	1,4281
11	0,1908	0,9816	0,1944		56	0,8290	0,5592	1,4826
12	0,2079	0,9781	0,2126		57	0,8387	0,5446	1,5399
13	0,2250	0,9744	0,2309		58	0,8480	0,5299	1,6003
14	0,2419	0,9703	0,2493		59	0,8572	0,5150	1,6643
15	0,2588	0,9659	0,2679		60	0,8660	0,5000	1,7321
16	0,2756	0,9613	0,2867		61	0,8746	0,4848	1,8040
17	0,2924	0,9563	0,3057		62	0,8829	0,4695	1,8807
18	0,3090	0,9511	0,3249		63	0,8910	0,4540	1,9626
19	0,3256	0,9455	0,3443		64	0,8988	0,4384	2,0503
20	0,3420	0,9397	0,3640		65	0,9063	0,4226	2,1445
21	0,3584	0,9336	0,3889		66	0,9135	0,4067	2,2460
22	0,3746	0,9272	0,4040		67	0,9205	0,3907	2,3559
23	0,3907	0,9205	0,4245		68	0,9272	0,3746	2,4751
24	0,4067	0,9135	0,4452		69	0,9336	0,3584	2,6051
25	0,4226	0,9063	0,4663		70	0,9397	0,3420	2,7475
26	0,4384	0,8988	0,4877		71	0,9455	0,3256	2,9042
27	0,4540	0,8910	0,8910		72	0,9511	0,3090	3,0777
28	0,4695	0,8829	0,5317		73	0,9563	0,2924	3,2709
29	0,4848	0,8746	0,5543		74	0,9613	0,2756	3,4874
30	0,5000	0,8660	0,5774		75	0,9659	0,2588	3,7321
31	0,5150	0,8572	0,6009		76	0,9703	0,2419	4,0108
32	0,5299	0,8480	0,6249		77	0,9744	0,2250	4,3315
33	0,5446	0,8387	0,6494		78	0,9781	0,2079	4,7046
34	0,5592	0,8290	0,6745		79	0,9816	0,1908	5,1446
35	0,5736	0,8192	0,7002		80	0,9848	0,1736	5,6713
36	0,5878	0,8090	0,7265		81	0,9877	0,1564	6,3138
37	0,6018	0,7986	0,7536		82	0,9903	0,1392	7,1154
38	0,6157	0,7880	0,7813		83	0,9925	0,1219	8,1443
39	0,6293	0,7771	0,8098		84	0,9945	0,1045	9,5144
40	0,6428	0,7660	0,8391		85	0,9962	0,0872	11,4301
41	0,6561	0,7547	0,8693		86	0,9976	0,0698	14,3007
42	0,6691	0,7431	0,9004		87	0,9986	0,0523	19,0811
43	0,6820	0,7314	0,9325		88	0,9994	0,0340	28,6363
44	0,6947	0,7193	0,9657		89	0,9998	0,0175	57,2900
45	0,7071	0,7071	1,0000		90	1,0000	0,0000	Indéfinie

TABLE DES RACINES CARREES DES NOMBRES DE 0 à 100

Dizaines / Unités	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	3,1623	4,4721	5,4772	6,3246	7,0711	7,7460	8,3666	8,9443	8,4868
1	1	3,3166	4,5828	5,5678	6,4031	7,1414	7,8102	8,4261	9	9,5394
2	1,4142	3,4641	4,6904	5,6569	6,4807	7,2111	7,8740	8,4853	9,0554	9,5917
3	1,7321	3,6056	4,7958	5,7446	6,5574	7,2801	7,9373	8,5440	9,1104	9,6437
4	2	3,7417	4,8990	5,8310	6,6332	7,3485	8	8,6023	9,1652	9,6954
5	2,2361	3,8730	5	5,9161	6,7082	7,4162	8,0623	8,6603	9,2195	9,7468
6	2,4495	4	5,0990	6	6,7823	7,4833	8,1240	8,7178	9,2736	9,7980
7	2,6458	4,1231	5,1962	6,0828	6,8557	7,5498	8,1854	8,7750	9,3274	9,8489
8	2,8284	4,2426	5,2915	6,1644	6,9282	7,6158	8,2462	8,8318	9,3808	9,8995
9	3	4,3589	5,3852	6,2450	7	7,6811	8,3066	8,8882	9,4340	9,9499

Mode d'emploi :

Problème1 : Trouver la racine carrée de 29.

2 est le chiffre des dizaines et 9 est le chiffre des unités.

La (valeur approchée de la) racine carrée de 29 est donc le nombre qui se trouve à l'intersection de la colonne 2 et la ligne 9 : Il résulte que $\sqrt{29} = 5,3852$.

Problème2 : Trouver la racine carrée de 92.

9 est le chiffre des dizaines et 2 est le chiffre des unités.

La (valeur approchée de la) racine carrée de 92 est donc le nombre qui se trouve à L'intersection de la colonne 9 et de la ligne 2 : Il résulte que $\sqrt{92} = 9{,}5917$.

Problème3 : Trouver le nombre dont la racine carrée est 7,5.

On voit dans la colonne 5 :7,4833 et 7,5498. On remarque que $7{,}4833 \leq 7{,}5 \leq 7{,}5498$.

Or 7,4833 est la (valeur approchée de la) racine carrée de 56 (d'après problème1 et 2)

Et 7,5498 est la (valeur approchée de la) racine carrée de 57.

Il résulte que le nombre cherché compris entre 56 et 57.

Dans ces cas de situation, le tableau ne permet pas d'avoir la valeur précise du nombre cherché. Il s'agira donc de donner une valeur approchée par excès ou par défaut en fonction de la consigne de l'enseignant.

Exemple : 56 est une valeur approchée par défaut de ce nombre et 57 en es la valeur approchée par excès de ce nombre.

FIN DU PROGRAMME

Bon usage à tous et à toutes

Vos suggestions sont attendues pour la correction et l'amélioration de ce cours

MERCI.

MARE Christophe *Professeur Certifié de Mathématiques et PC* **WhatsApp 77763585**