MODULE : RELATIONS ET OPERATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES REELS

CHAPITRE : EQUATIONS ET INEQUATIONS DANS $\mathbb{R}$

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Le professeur de mathématiques forme deux groupes dans sa classe de $3^{ème}$. Tous les élèves affichent le nombre 6 sur leur calculatrice.
- A l'un des groupes, il demande de multiplier le nombre affiché par 5 puis ajouter 4 au résultat obtenu.
- A l'autre, il demande de multiplier le nombre affiché par 7 puis retrancher 8 au résultat obtenu.

Quand ils ont terminé, tous les élèves de la classe s'aperçoivent que leurs calculatrices affichent le même nombre.
Surpris par ce résultat, les élèves cherchent à savoir si d'autres nombres donnés au départ conduisent à un résultat similaire.
Pour cela, ils décident de mener des recherches sur les équations et inéquations dans IR.

B. CONTENU DE LA LEÇON

I. EQUATIONS DU 1^er^ DEGRE DANS $\mathbb{R}$

1- Equations du type : $x + a = b$ ou $ax = b$

Méthode de résolution

• Résolution des équations du type $x + a = b$, où a et b sont des nombres réels.

$x + a = b$ équivaut à $x = b - a$.

La solution de l'équation est $b - a$.

• Résolution des équations du type $ax = b$, où a et b sont des nombres réels tels que a soit non nul.

$ax = b$ équivaut à $x = \frac{b}{a}$.

La solution de l'équation est $\frac{b}{a}$.

Exemples

- Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation $x + 5 = 9$.

$x + 5 = 9$ équivaut à $x = 9 - 5$.
$x + 5 = 9$ équivaut à $x = 4$.
La solution de l'équation est 4.

- Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation $3x = 18$.

$3x = 18$ équivaut à $x = \frac{18}{3}$.
$3x = 18$ équivaut à $x = 6$.
La solution de l'équation est 6.

Remarque

- L'équation : $0x = 0$ admet une infinité de solutions (tous les nombres réels sont solutions de cette équation)
- L'équation : $0x = b$ où b est non nul n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

2) Equations du type $ax + b = cx + d$

a) Définition

a, b, c et d sont des nombres réels donnés. L'équation $ax + b = cx + d$ est appelée équation du 1er degré dans $\mathbb{R}$.
Un nombre est solution de cette équation si en remplaçant x par ce nombre, l'égalité obtenue est vraie.

Exemples
$-2x + 3 = 5x - 8$; $x - 6 = 4$ et $7x = -1$ sont des équations du 1er degré dans $\mathbb{R}$.

b) Propriétés

- Toute équation du type $ax + b = cx + d$ peut se ramener à une équation du type $ex = f$.
- Toute équation du type $= f$, où $e \neq 0$ a une solution unique qui est : $\frac{f}{e}$.

Exercice d'application
On considère l'équation (E) : $6x - 3 = 2x - 2$.
a) Justifie que l'équation (E) est équivalente à (E') : $4x = 1$.
b) Résous l'équation : $4x = 1$

Corrigé
a) $6x - 3 = 2x - 2$ équivaut à $6x - 2x = -2 + 3$.
$6x - 3 = 2x - 2$ équivaut à $4x = 1$.
b) $4x = 1$ d'après la propriété précédente, on a : $x = \frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}$ est la solution de l'équation (E).

3) Equations du type $(ax + b)(cx + d) = 0$.

Propriété
a et b étant des nombres réels ; $ab = 0$ équivaut à $a = 0$ ou $b = 0$

Exercice d'application

Résous dans $\mathbb{R}$, l' équation : (E): $(3x + 4)(-x - 7) = 0$.

Corrigé
$(3x + 4)(-x - 7) = 0$ équivaut à :$(3x + 4) = 0$ ou $(-x - 7) = 0$.
$(3x + 4)(-x - 7) = 0$ équivaut à $x = \frac{-4}{3}$ ou $x = -7$.
Les solutions de l'équation (E) sont $-\frac{4}{3}$ et -7.

4) Equations du type : $x^2 = a$

Propriété

Si a>0, l'équation $x^2 = a$ est équivalente à $x^2 - a = 0$, c'est-à-dire $(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$.
Donc, l'équation : $\boldsymbol{x^2 = a}$ admet deux solutions qui sont : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Exercice d'application

Résous l'équation $(E): x^2 = 25$

Corrigé

$x^2 = 25$ équivaut à $x^2 - 25 = 0$
$x^2 = 25$ équivaut à $x^2 - (5)^2 = 0$
$x^2 = 25$ équivaut à $(x + 5)(x - 5) = 0$
$x^2 = 25$ équivaut à $x + 5 = 0$ *ou* $x - 5 = 0$
$x^2 = 25$ équivaut à $x = -5$ *ou* $x = 5$.
Les solutions de l'équation (E) sont -5 et 5.

Remarque

Si a < 0, alors l'équation : $\boldsymbol{x^2 = a}$ n'a pas de solution dans IR.
Si a = 0, alors l'équation : $\boldsymbol{x^2 = a}$ admet 0 comme seule solution.

II. INEQUATIONS DU 1er DEGRE DANS $\mathbb{R}$

1) Inéquations du type : $\boldsymbol{ax + b} > 0$

Propriété

- Toute inéquation du type : $ax + b > 0$, où $a \neq 0$, peut se ramener à une inéquation du type : $x > u$ ou $x < v$.
- Toute inéquation du type : $ax + b \geq 0$, où $a \neq 0$, peut se ramener à une inéquation du type : $x \geq u$ ou $x \leq v$.
- Les solutions de cette inéquation peuvent être représentées sur une droite graduée ou données sous forme d'intervalle.

Exercice d'application

On considère les inéquations suivantes :
$(I_1): 2x - 6 > 0$ et $(I_2): -3x - 6 \geq 0$
1. a) Justifie que (I_1) est équivalente à l'inéquation (I'_1) : $x > 3$
   b) Justifie que (I_2) est equivalente à l'inéquation (I'_2) : $x \leq -2$.
2. Résous chacune des inéquations (I_1) et (I_2).

Corrigé

1.a) $2x - 6 > 0$ équivaut à $2x > 6$.
$2x - 6 > 0$ équivaut à $x > 3$.
b) $-3x - 6 \geq 0$ équivaut à $-3x \geq 6$
$-3x - 6 \geq 0$ équivaut à $x \leq -2$
2. (I_1) équivaut à $x > 3$
L'ensemble des solutions de (I_1) est : $]3; \rightarrow[$.
(I_2) équivaut à $x \leq -2$
L'ensemble des solutions de (I_2) est :$]\leftarrow; -2]$.

2) Inéquations du type : $ax + b < cx + d$

Propriété

Toute inéquation du type $ax + b < cx + d$ peut se ramener à une équation du type $ex < f$.

Exercice d'application

On considère l'inéquation (I) : $8x + 5 < 3x + 10$

1. Justifie que (I) est équivalente à (I') : $5x < 5$.
2. Résous l'inéquation (I').

Corrigé

1. $8x + 5 < 3x + 10$ équivaut à $8x - 3x < 10-5$.
   $8x + 5 < 3x + 10$ équivaut à $5x < 5$.
2. $5x - 5 < 0$ équivaut à $5x < 5$.
   $5x - 5 < 0$ équivaut à $x < 1$.
   L'ensemble des solutions de (I') est : $]\longleftarrow ; 1[$.

3) Système d'inéquations dans $\mathbb{R}$.

Le système : $\begin{cases} ax + b \geq 0 \\ cx + d < 0 \end{cases}$ est un système d'inéquations à une inconnue x.

On peut aussi rencontrer dans les systèmes d'inéquations les symboles : $>$ ou $\leq$.

Résoudre un système d'inéquations d'une inconnue, revient à trouver l'ensemble des solutions communes aux deux inéquations du système.

Méthode de résolution

Pour résoudre un système de deux inéquations du 1[er] degré dans $\mathbb{R}$,on peut procéder comme suit :

- on résout séparément chacune des inéquations ;
- on détermine l'intersection des deux solutions trouvées et on écrit l'ensemble des solutions du système.

Exercice d'application

Résous le système d'inéquations :

$$\begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ 4x + 5 \geq 0 \end{cases}$$

Corrigé

Résolvons le système : $\begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ 4x + 5 \geq 0 \end{cases}$.

- $2x - 3 < 0$ équivaut à $2x < 3$
  $2x - 3 < 0$ équivaut à $x < \frac{3}{2}$

L'ensemble S_1 des solutions est : $S_1 = \left]\leftarrow ; \frac{3}{2}\right[$.

- $4x + 5 \geq 0$ équivaut à $4x \geq -5$
  $4x + 5 \geq 0$ équivaut à $x \geq -\frac{5}{4}$

L'ensemble S_2 des solutions est : $S_2 = \left[-\frac{5}{4}\,;\rightarrow\right[$.

L'ensemble S des solutions du système est : $S = S_1 \cap S_2$.

Donc $S = \left[\frac{-5}{4}\,;\,\frac{3}{2}\right[$.

III. PROBLEME CONDUISANT A UNE EQUATION OU UNE INEQUATION DU 1ER DEGRE DANS ℝ

Méthode de résolution

Pour résoudre un problème conduisant à une équation ou une inéquation du premier degré dans ℝ, on procède comme suit :

- on nomme l'inconnue ;
- on met le problème en équation ou en inéquation ;
- on résout l'équation ou l'inéquation ;
- on conclut en interprétant le résultat trouvé.

Exercice d'application

Un club de location de CD vidéo fait deux propositions pour la location de ses films :
Première proposition : un abonnement de 1500 F et 200 F pour chaque cassette louée.
Deuxième proposition : pas d'abonnement et chaque cassette est louée à 320 F.
A partir de quel nombre de cassettes louées la première proposition est-elle avantageuse que la deuxième ?

Corrigé

- On désigne par x le nombre de CD à louer.
- Traduisons les expressions suivantes en mathématique :

Le coût de la location dans la première proposition est :$1500 + 200x$.
Le coût de la location dans la deuxième proposition est : $320x$.

La première proposition est avantageuse que la deuxième lorsque :
$1500 + 200x < 320x$.

- Résolvons l'inéquation : $1500 + 200x < 320x$.

$200x - 320x < -1500$
$-120x < -1500$
$-x < -12{,}5$
$x > 12{,}5$

- Interprétons le résultat.
  La résolution de l'inéquation donne : $x > 12{,}5$.
  A partir de 13 cassettes louées, il est plus avantageux de choisir la première proposition.

C. SITUATION PROBLEME

Pour la fête de la promotion 3ème d'un collège, le comité d'organisation ne sachant pas la somme à faire cotiser par chaque élève, sollicite des propositions.

Le Président du comité d'organisation affirme que : « si 250 élèves cotisent et que la coopérative donne 55 000 F, la somme totale peut excéder 130 000F ».
Le Trésorier dit : « si 205 élèves cotisent et qu'on retient 12 000F pour la sonorisation, cette somme ne dépasse pas 90 500F ».
Pour ne pas désavouer les deux responsables, il est question de trouver des solutions qui satisfassent tous les deux.

1. Traduis chacune des propositions sous forme d'inéquations.
2. Résous dans ℝ, le système suivant : $\begin{cases} 5x + 1100 > 2600 \\ 41x - 2400 < 18\,100 \end{cases}$.
3. Trouve le montant des cotisations qui satisfait le Président et Trésorier.

Corrigé

1. Soit x la somme que doit cotiser chaque élève.

   « si 250 élèves cotisent et que la coopérative donne 55 000 F, la somme totale peut excéder 130 000F » se traduit par : $250\,x + 55000 > 130000$.

   « si 205 élèves cotisent et qu'on retient 12 000F pour la sonorisation, cette somme ne dépasse pas 90 500F » se traduit par : $205\,x - 12000 < 90500$.

2. Résolvons le système : $\begin{cases} 5x + 1100 > 2600 \\ 41x - 2400 < 18\,100 \end{cases}$.

   $5x + 1100 > 2600$ équivaut à $x > 300$.
   $41x - 2400 < 18100$ équivaut à $x < 500$.
   L'ensemble des solutions du système]300 ; 500[.

3. A partir de la question 1) , on obtient le système : $\begin{cases} 250x + 55000 > 130000 \\ 205x - 12000 < 90500 \end{cases}$.

   Ce système est équivalent au système : $\begin{cases} 5x + 1100 > 2600 \\ 41x - 2400 < 18\,100 \end{cases}$.
   L'ensemble des solutions du système est l'intervalle]300 ; 500[.

   Le montant des cotisations qui satisfait le Président et le Trésorier doit être compris entre 300 F et 500 F.

D. EXERCICES

D-1 Exercices d'application

Exercice1

Associe chaque équation à ses solutions

Equations	Solutions
$(2x+3)(1-4x)=0$ •	• $-\frac{1}{4}$ et $-\frac{3}{2}$
$(4x-1)(-2x+3)=0$•	• $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{2}$
$(3-2x)(-1-4x)=0$•	• 0 et 2
$(4x+1)(2x+3)=0$ •	• $-\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{2}$
$-3x(4-2x)=0$ •	• $\frac{1}{4}$ et $-\frac{3}{2}$

Corrigé

Equations	Solutions
$(2x+3)(1-4x)=0$ •	• $-\frac{1}{4}$ et $-\frac{3}{2}$
$(4x-1)(-2x+3)=0$•	• $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{2}$
$(3-2x)(-1-4x)=0$•	• 0 et 2
$(4x+1)(2x+3)=0$ •	• $-\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{2}$
$-3x(4-2x)=0$ •	• $\frac{1}{4}$ et $-\frac{3}{2}$

Exercice 2

Pour chaque affirmation trois réponses sont proposées et une seule est juste. Entoure la réponse correcte.

	Affirmation	Proposition a	Proposition b	Proposition c
1	La solution de $6x - 2 = 4$ est	2	- 1	1
2	La solution de l'équation 7x – 13 = 15	4	3	5
3	La solution et l'ensemble de solution de L'équation $3(x - 1) + 2 = 1 + 3x$ est :	1	$\mathbb{R}$	Pas de solution
4	La solution et l'ensemble de solution de L'équation : $5x - 11 = 5(x - 3) + 4$ est :	3	$\mathbb{R}$	Pas de solution

Corrigé

	Affirmation	Proposition a	Proposition b	Proposition c
1	La solution de $6x - 2 = 4$ est :	2	- 1	1
2	La solution de l'équation 7x – 13 = 15	4	3	5
3	La solution et l'ensemble de solution de L'équation $3(x - 1) + 2 = 1 + 3x$ est :	1	$\mathbb{R}$	Pas de solution
4	La solution et l'ensemble de solution de L'équation : $5x - 11 = 5(x - 3) + 4$ est :	3	$\mathbb{R}$	Pas de solution

D-2 Exercices de renforcement

Exercice 3

On donne l'inéquation (I) $x + 5 \leq 4(x + 1) + 7$

1. Explique pourquoi chacun des nombres suivants est ou n'est pas une solution de l'inéquation (I) : -5 ; -3 ; 0 ; 3.
2. Résous l'inéquation (I).
3. Représente l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) sur une droite graduée.

Corrigé

1. En remplaçant x par – 5 dans l'inéquation (I), l'inégalité n'est pas vérifiée, donc – 5 n'est pas solution de (I).
   -3 ne vérifie pas (I) donc -3 n'est pas solution de (I).
   0 vérifie (I) donc 0 est solution de (I).
   7 vérifie (I) donc 7 est solution de (I).

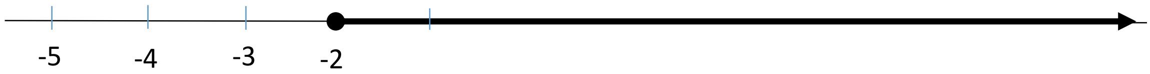
2. Résolvons (I).
   $x + 5 \leq 4(x + 1) + 7$ équivaut à $x + 5 \leq 4x + 4 + 7$

équivaut à $3x \geq -6$

équivaut à $x \geq -2$

L'ensemble des solutions de (I) est l'intervalle [-2 ; + ∞ [

3. Représentation graphique de l'ensemble des solutions de l'inéquation (I).



Exercice4

1. Résous chacune des équations suivantes :

a) (3 – 4*x*) - (2*x*- 1) = 0 ;

b) (3 – 4*x*) (2*x*- 1) = 0.

2. Résous l'inéquation : $3 - 4x > 2x - 1$.

Représente l'ensemble des solutions sur une droite graduée.

Corrigé

1. Résolvons les équations :

a) $(3 - 4x) - (2x - 1) = 0$ équivaut à $3 - 4x - 2x + 1 = 0$

équivaut à - 6x + 4 = 0

équivaut à $x = \frac{2}{3}$.

Donc, la solution de l'équation est : $\frac{2}{3}$

b) (3 – 4*x*) (2*x*- 1) = 0 équivaut à $3 - 4x = 0$ *ou* $2x - 1 = 0$

équivaut à $x = \frac{3}{4}$ *ou* $x = \frac{1}{2}$

Donc, les solutions de l'équation sont : $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{2}$.

2) Résolvons l'inéquation : $3 - 4x > 2x - 1$

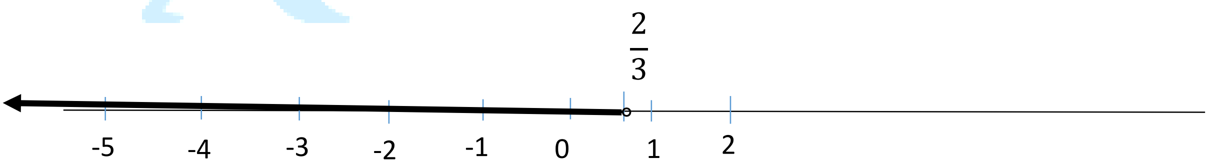
L'inéquation est équivalente à : $2x + 4x < 3 + 1$

$6x < 4$

$x < \frac{2}{3}$

Donc, l'ensemble des solutions est l'intervalle]- ∞ ; $\frac{2}{3}$ [

Représentation de l'ensemble des solutions sur une droite graduée



D-3 Exercices d'approfondissement

Exercice 5

On considère l'expression A suivante :

$A = (x - 2)^2 + (x - 2)(3x + 1)$

1. Développe et réduis A.
2. Factorise A.
3. Résous l'équation : (x – 2) (4x – 1) = 0.

4. Calcule A pour $x = -\frac{1}{2}$

Corrigé

1. Développons $A = (x-2)^2 + (x-2)(3x+1)$
$A = x^2 - 4x + 4 + 3x^2 + x - 6x - 2$
$A = 4x^2 - 9x + 2$
2. Factorisons $A = (x-2)^2 + (x-2)(3x+1)$
$A = (x-2)(x-2+3x+1)$
$A = (x-2)(4x-1)$.
3. Résolvons $(x-2)(4x-1) = 0.$
L'équation est équivalente à $x - 2 = 0$ ou $4x - 1 = 0.$
Soit $x = 2$ ou $x = \frac{1}{4}$.
Donc les solutions de l'équation sont : 2 et $\frac{1}{4}$.
4. Calculons A pour $x = -\frac{1}{2}$.
Pour $x = -\frac{1}{2}$, $A = (-\frac{1}{2} - 2)(4 \times (-\frac{1}{2}) - 1)$.
$A = (-\frac{5}{2}) \times (-3)$
$A = \frac{15}{2}$.

Retrouvez plus de contenus sur www.xetudes.com