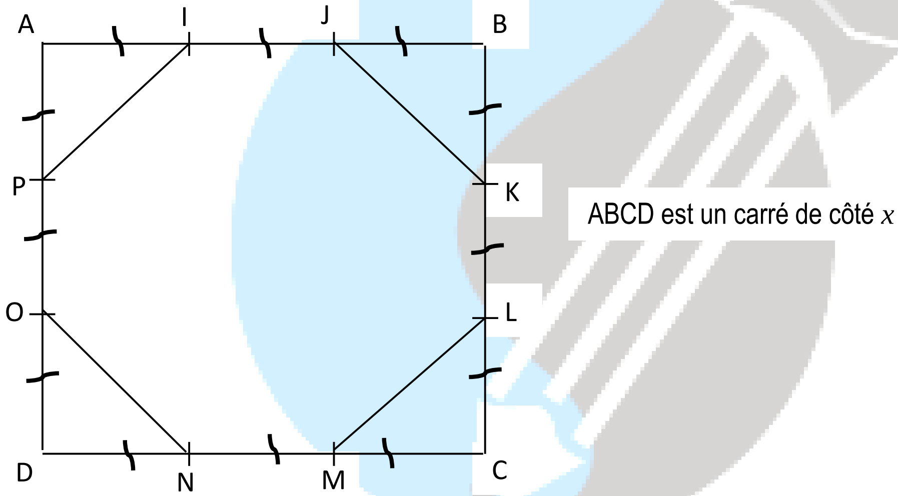
MODULE : RELATIONS ET OPERATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES REELS

CHAPITRE : CALCUL LITTERAL

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Le Lycée Alain Gauze de DALOA veut organiser une kermesse sur un terrain de forme carrée. Les principaux sponsors de la fête ont choisi chacun de bâtir leur stand dans un coin du terrain. Le Proviseur du Lycée souhaite que le reste du terrain ait la forme d'un octogone et qu'il soit réservé aux jeux. L'entrepreneur chargé d'aménager le terrain propose la maquette ci-dessous.



Intéressés par le projet, les élèves de la troisième décident de calculer le périmètre et l'aire du terrain réservé aux jeux.

B. CONTENU DE LA LEÇON

I. Quotient

Egalité de deux quotients

Propriété

a, b, c et d sont des nombres tels que b $\neq$ 0 et d $\neq$ 0.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $ad = bc$

Exercice d'application

a désigne un nombre différent de zéro. Détermine la valeur de a lorsque $\frac{a}{3} = \frac{2}{5}$

Corrigé

$\frac{a}{3} = \frac{2}{5}$ équivaut à $5 \times a = 3 \times 2$.

équivaut à $5a = 6$.

équivaut à $a = \frac{6}{5} = 1{,}2$

$\frac{a}{3} = \frac{2}{5}$, donc : $a = 1{,}2$.

II. Calcul littéral

1. Puissance à exposant entier relatif

a. Notation

a est un nombre rationnel différent de 0, n est un nombre entier naturel différent de 0.
L'inverse de a^n est noté a^{-n}. On a :

$$\boxed{\frac{1}{a^n} = a^{-n}} \qquad \boxed{a^{-n} \times a^n = 1}$$

Exemple

$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$.

b. Propriétés

a et b sont des nombres rationnels différents de 0 ; m et n sont des nombres entiers relatifs.

$a^n \times b^n = (a \times b)^n$; $a^n \times a^m = a^{n+m}$; $(a^m)^n = a^{m\times n}$; $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Exercice d'application

Recopie et complète les pointillés.

$6^5 \times 6^2 = 6^{\dots}$; $(-7)^3 \times (-7)^{-5} = (-7)^{\dots}$; $(8^{-2})^3 = 8^{\dots}$; $3^3 \times 8^3 = (\dots\times\dots)^{\dots} = \dots^{\dots}$; $\frac{9^8}{9^5} = \dots^{\dots}$

Corrigé

$6^5 \times 6^2 = 6^7$; $(-7)^3 \times (-7)^{-5} = (-7)^{-2}$; $(8^{-2})^3 = 8^{-6}$; $3^3 \times 8^3 = (3 \times 8)^3 = 24^3$; $\frac{9^8}{9^5} = 9^3$.

2. Développements et réductions

a) Règle de suppression de parenthèses

a , b et c sont des nombres ; on a :

$a + (b - c) = a + b - c$
$a - (b + c) = a - b - c$
$a - (b - c) = a - b + c$

b) Règles de priorité

La multiplication est prioritaire sur l'addition et sur la soustraction.
L'élévation à une puissance est prioritaire sur la multiplication.

c) Développement d'un produit

Propriétés
$a, b, x,$ et y sont des nombres rationnels. On a :
$a(x+y) = ax + ay$
$a(x-y) = ax - ay$
$(a+b)(x+y) = ax + ay + b + by$

d) Egalités remarquables

a et b sont des nombres rationnels. On a :

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Exercice d'application
En utilisant les égalités remarquables ci-dessus, complète les pointillés:
1) $(1+x)^2 = \cdots + \cdots + \ldots.^{\cdots}$
2) $(3x+4)(3x-4) \quad = \ldots..^{\cdots} - \ldots.^{\cdots}$
3) $(x-4)^2 = \ldots..^{\cdots} - \cdots + \ldots.^{\cdots}$

Corrigé
1) $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$.
2) $(3x-4)(3x+4) = (3x)^2 - 4^2$.
3) $(x-4)^2 = x^2 - 8x + 4^2$.

3. Factorisation

a) Mettre en évidence un facteur commun

Exemple

$3x(2x+1) - 17(2x+1) = (2x+1)(3x-17)$.

b) Utiliser des égalités remarquables

Exemple

$9a^2 + 24a + 16 = (3a)^2 + 2\times 3a \times 4 + 4^2 = (3a+4)^2$.

c) Utiliser plusieurs techniques

Exemple

$9a^2 + 24a + 16 - a(3a+4) = (3a)^2 + 2\times 3a \times 4 + 4^2 - a(3a+4)$

$= (3a+4)^2 - a(3a+4)$
$= (3a+4)[(3a+4) - a]$
$= (3a+4)(3a+4-a)$
$= (3a+4)(3a-a+4)$

$9a^2 + 24a + 16 - a(3a+4) \ = (3a+4)(2a+4) = 2(3a+4)(a+2).$

4. Produit nul, nombres de même carré

a) Produit nul

Propriétés

Un produit est égal à zéro lorsque l'un au moins de ses facteurs est égal à zéro.
Un produit est différent de zéro lorsque tous ses facteurs sont différents de zéro.
a et b sont des nombres rationnels.

- $a \times b = 0$ équivaut à $a = 0 \ ou \ b = 0$.
- $a \times b \neq 0$ équivaut à $a \neq 0 \ et \ b \neq 0.$

Exercice d'application

a est un nombre rationnel.
Détermine a tel que : $(a-2)(a+3) = 0.$

Corrigé

$(a-2)(a+3) = 0$ équivaut à $a - 2 = 0$ ou $a + 3 = 0.$
équivaut à $a = 2$ ou $a = -3.$

b) Nombres de même carré

Propriété

a et b sont des nombres rationnels.
$a^2 = b^2$ équivaut à $a = b$ ou $a = -b.$

Exercice d'application

x est un nombre rationnel.
Détermine x tel que : $x^2 = 49.$

$x^2 = 49$ équivaut à $x^2 = 7^2$.
$x^2 = 49$ équivaut à $x = 7$ ou $x = -7.$

Remarque

a et b sont des nombres rationnels positifs.
$a^2 = b^2$ équivaut à $a = b.$

III. Expressions littérales

1. Polynômes

a. Monôme

Présentation

On considère l'expression littérale : $\mathbf{5x^2}$**.**
C'est un *monôme* en x.
5 est le *coefficient* du monôme.
2 est le *degré* du monôme.

b. Polynôme

Présentation

On considère l'expression littérale : $22x^9 + 76x^6 - 5$.

C'est un polynôme en x et 9 est le degré du polynôme.

Exercices d'application

Exercice 1

Complète le tableau suivant.

Monôme	Coefficient	Degré
$7x^2$		
x^5		
$-\frac{2}{3}x^4$		
$-x$		

Exercice 2

Complète le tableau suivant.

Polynôme	Degré
$6x^2 - 3x^7 + 4$	
$4x^5 - x + 2$	
$-x^4 + x^3 + 2x^8$	

Exercice 3

Développe, réduis puis ordonne selon les puissances décroissantes de x, l'expression littérale suivante :
$(2x^3 - 1)(3x + 2) - x(5x^2 - 7)$

Corrigé

Exercice 1

Monôme	Coefficient	Degré
$7x^2$	7	2
x^5	1	5
$-\frac{2}{3}x^4$	$-\frac{2}{3}$	4
$-x$	-1	1

Exercice 2

Polynôme	Degré
$6x^2 - 3x^7 + 4$	7
$4x^5 - x + 2$	5
$-x^4 + x^3 + 2x^8$	8

Exercice 3

$$(2x^3 - 1)(3x + 2) - x(5x^2 - 7) = (2x^3) \times (3x) + (2x^3) \times 2 - 1 \times (3x) - 1 \times 2 - x \times (5x^2) - x \times (-7)$$

$= 6x^4 + 4x^3 - 3x - 2 - 5x^3 + 7x$

$= 6x^4 + 4x^3 - 5x^3 - 3x + 7x - 2$

$(2x^3 - 1)(3x + 2) - x(5x^2 - 7) = 6x^4 - x^3 + 4x - 2.$

2. Fractions rationnelles

a) Présentation

On considère l'expression littérale : $\frac{x^2+5x}{2x^2-1}$.

C'est une ***fraction rationnelle .***

$x^2 + 5x$ est son ***numérateur.***

$2x^2 - 1$ est son ***dénominateur.***

b) Valeurs pour lesquelles une fraction rationnelle existe

Propriété

Soit $\frac{A}{B}$ une fraction rationnelle.

$\frac{A}{B}$ existe si et seulement si $B \neq 0$.

Exercice d'application

Soit la fraction rationnelle K telle que $K = \frac{x+6}{5x+2}$.

Détermine les valeurs de x pour lesquelles K existe.

Corrigé

K existe si et seulement si : $5x + 2 \neq 0$.

Résolvons : l'équation $5x + 2 = 0$.

$5x + 2 = 0$ équivaut à $= \frac{-2}{5}$.

Donc, K existe si et seulement si : $x \neq -\frac{2}{5}$.

c) Simplifier une fraction rationnelle

Méthode

Pour simplifier une fraction rationnelle

On peut procèder comme suit :

- on factorise le numérateur et le dénominateur ;
- on détermine la condition d'existence d'une valeur numérique de la fraction rationnelle ;
- on simplifie la fraction rationnelle pour chacun des facteurs communs figurant au numérateur et au dénominateur ;
- on écrit la fraction rationnelle simplifiée, précédée de la condition d'existence d'une valeur numérique de la fraction rationnelle.

Exercice d'application

On donne la fraction rationnelle F suivante : $F = \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x-1)}$.

Simplifie F pour $x \neq -3$ et $x \neq 1$.

Corrigé

On simplifie par $(x+3)$ le facteur commun figurant au numérateur et au dénominateur.

$$F = \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x-1)}$$

Pour $x \neq -3$ et $x \neq 1$; $F = \frac{x-3}{x-1}$.

C. SITUATION PROBLEME

Pendant les grandes vacances, un groupe d'élèves de $3^{ème}$ d'un lycée décide de vendre au grand marché de la ville des objets fabriqués par une coopérative de femmes.
Cette coopérative envisage de vendre un article à 2000 F.
Le coût de fabrication journalier de x objets est donné par la formule : $C = 2090x - x^2$, où $x > 0$.
Soucieuse et très prudente, la présidente de la coopérative souhaite connaitre le nombre d'articles pour lequel les dépenses et la recette s'équilibrent.
Ne sachant pas comment s'y prendre, elle te sollicite.

1) Exprime en fonction de x, la recette R de x objets vendus.
2) Sachant que le bénéfice est $B = R - C$, démontre que : $B = x(x - 90)$.
3) Déduis-en le nombre d'articles pour lequel les dépenses et la recette s'équilibrent.

Corrigé

1) Chaque objet est vendu à 2000 F donc la recette R de x objets vendus est :
   R = $2000x$.
2) $B = R - C$
   $= 2000x - 2090x + x^2$
   $= -90x + x^2$
   $= x(-90 + x)$
   $= x(x - 90)$.
3) Les dépenses et la recette s'équilibrent, équivaut à $B = 0$.
   Alors, $B = 0$ équivaut à $x = 0$ ou $x - 90 = 0$
   $x = 0$ ou $x = 90$;
   d'où le nombre d'articles pour lequel les dépenses et la recette s'équilibrent est 90.

D. EXERCICES

D-1 Exercices d'application

Exercice 1

a désigne un nombre différent de zéro.
Détermine la valeur de a lorsque $\frac{7}{a} = \frac{2}{5}$.

Exercice 2

a et b sont des nombres rationnels différents de 0.

Ecris plus simplement : $a^{-4} \times b^{-4}$; $a^{-6} \times a^{2}$; $(a^{-2})^{-3}$ et $\frac{a^{-3}}{a}$.

Corrigé

$a^{-4} \times b^{-4} = (\mathrm{a} \times \mathrm{b})^{-4}$; $a^{-6} \times a^{2} = \mathrm{a}^{-4}$; $(a^{-2})^{-3} = a^{6}$; $\frac{a^{-3}}{a} = a^{-4}$.

Exercice 3

Développe et réduis les expressions littérales suivantes :

a) $5x(x+3) - 4x(x-2)$; b) $(2x-5)(3x+1)$; c) $(x+7)^2$.

Corrigé

a) $5x(x+3) - 4x(x-2) = 5x^2 + 15x - 4x^2 + 8x$
$5x(x+3) - 4x(x-2) = x^2 + 23x$.

b) $(2x-5)(3x+1) = 6x^2 - 13x - 5$.

c) $(x+7)^2 = x^2 + 14x + 49$.

Exercice 4

Détermine les valeurs de x pour lesquelles : $(x+2)(3x-4) = 0$.

Corrigé

$x = \frac{4}{3}$ ou $x = -2$.

Exercice 5

Détermine les valeurs de x pour lesquelles : $x^2 = 25$.

Corrigé

$x = 5$ ou $x = -5$.

Exercice 6

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

a) $9x^5 - 48x^2 + 36x - 4$ est un polynôme : $\boxed{}$

b) $\frac{23}{x^4} + 7x^3 - 1$ est un polynôme : $\boxed{}$

Corrigé

a) $9x^5 - 48x^2 + 36x - 4$ est un polynôme : $\boxed{\text{Vrai}}$

b) $\frac{23}{x^4} + 7x^3 - 1$ est un polynôme : $\boxed{\text{Faux}}$

Exercice 7

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes.

a) $7x^3 - 15x^2 + 1$ est une fraction rationnelle.

b) $\frac{x^2 - 9}{x+3}$ est une fraction rationnelle.

Corrigé

a) $7x^3 - 15x^2 + 1$ est une fraction rationnelle : Faux.

b) $\frac{x^2-9}{x+3}$ est une fraction rationnelle : Vrai.

Exercice 8

On considère la fraction rationnelle B telle que : $B = \frac{x^3+5x^2}{x^2-x}$

Détermine les valeurs pour lesquelles B existe

Corrigé

B existe pour $x^2 - x \neq 0$.

Résolvons l'équation $x^2 - x = 0$.

$x(x-1) = 0$ équivaut à $x = 0$ ou $x = 1$.

Donc B existe pour$x \neq 0$ et $x \neq 0$.

Exercice 9

On donne la fraction rationnelle F telle que : $F = \frac{x^2-9}{(x+3)(x-1)}$.

Détermine les valeurs de x pour lesquelles F existe.

Corrigé

F existe pour $(x+3)(x-1) \neq 0$.

Résolvons l'équation $(x+3)(x-1) = 0$.

$(x+3)(x-1) = 0$ équivaut à $x = -3$ ou $x = 1$.

Donc F existe pour $x \neq -3$ et $x \neq 1$.

Exercice 10

On donne la fraction rationnelle F telle que : $F = \frac{x^2-9}{(x+3)(x-1)}$.

Simplifie F pour $x \neq -3$ et $x \neq 1$.

Corrigé

Pour $x \neq -3$ *et* $x \neq 1$, $F = \frac{x^2-9}{(x+3)(x-1)}$

$$= \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x-1)}.$$

$$F = \frac{x-3}{x-1)}.$$

D-2 Exercices de renforcement

Exercice 11

Q est un polynôme tel que $Q = (3x+4)^2 - (x+4)(5x+8) + 4x$.

1. a) Justifie que : $Q = 4x^2 - 16$.
   b) Déduis-en la factorisation de Q.
2. Résous l'équation $4(x-2)(x+2) = 0$

Exercice 12

On considère la fraction rationnelle P , telle que $P = \frac{4x^2-4x+1}{(x+1)(2x-1)}$.

1. Trouve les valeurs de x pour lesquelles P existe.
2. a) Montre que : $4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$.
   b) Simplifie P pour $x \neq -1$ et $x \neq \frac{1}{2}$.
3. Calcule la valeur numérique de P pour $x = -2$.

Exercice 13

On donne les expressions littérales A et B suivantes :

$A = (x+1)^2 - 9 \quad ; \quad B = \frac{x-2}{(x+1)^2-9}$.

1. Justifie que : $A = (x-2)(x+4)$.
2. a) Détermine les valeurs de x pour lesquelles B existe.
   b) Simplifie B pour $x \neq 2$ et $x \neq 4$.

Exercice 14

On donne la fraction rationnelle F telle que : $F = \frac{(x-3)^2+(x-3)(2x+1)}{(x-5)(3x-2)}$.

1. Justifie que : $(x-3)^2 + (x-3)(2x+1) = (x-3)(3x-2)$.
2. a) Détermine les valeurs de x pour lesquelles F existe.
   b) Justifie que pour $x \neq 5$ et $x \neq \frac{2}{3}$, $F = \frac{x-3}{x-5}$.
3. Calcule la valeur numérique de F pour $x = -3$.

Exercice 15

On donne les expressions littérales R et T suivantes :

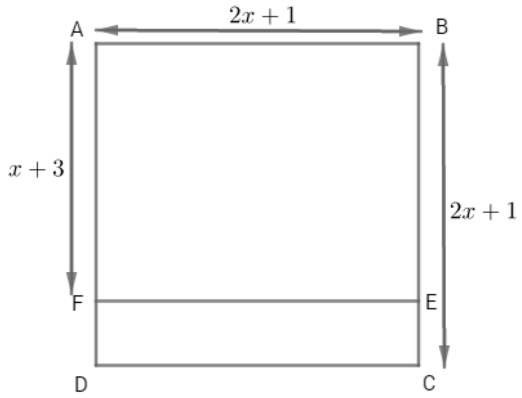
$R = (2x+3)^2 - 1 \quad ; \quad S = 4x^2 + 4x - 8$.

1. a) Vérifie que : $S = 4(x-1)(x+2)$.
   b) Justifie que : $R = 4(x+1)(x+2)$.
2. On considère la fraction rationnelle $= \frac{R}{S}$.
   a) Détermine les valeurs de x pour lesquelles T existe.
   b) Simplifie T, pour $x \neq 1$ et $x \neq -2$.
   c) Calcule la valeur numérique de T pour $x = \frac{1}{2}$.

D-3 Exercices d'approfondissement

Exercice 16

Sur la figure dessinée ci-dessous, $ABCD$ est un carré et $ABEF$ est un rectangle.
On a $AB = BC = 2x + 1$ et $AF = x + 3$, où x désigne un nombre supérieur à deux.
L'unité de longueur est le centimètre.



1. Exprime la longueur FD en fonction de x.
2. Déduis-en que l'aire de $FECD$ est égale à $(2x+1)(x-2)$.
3. Exprime en fonction de x les aires du carré $ABCD$ et du rectangle $ABEF$.
4. Déduis-en que l'aire du rectangle $FECD$ est : $(2x+1)^2-(2x+1)(x+3)$.
5. Justifie que :$(2x+1)^2-(2x+1)(x+3)=(2x+1)(x-2)$.

Corrigé

1. $FD = BC - AF$
   $= (2x+1)-(x+3) = 2x+1-x-3 = x-2$
   $FD = x-2$.
2. Aire $(FECD)$ = CD x FD
   $= (2x+1)(x-3)$.
3. Aire $(ABCD)$ = $AB\times AB$ = $(2x+1)(2x+1)$ = $(2x+1)^2$.
   Aire $(ABEF)$ = $AB\times AF$ = $(2x+1)(x+3)$.

4. Aire $(FECD)$ = Aire $(ABCD)$ − Aire $(ABEF)$
   = $(2x+1)^2-(2x+1)(x+3)$.

5. 1ère méthode :

D'après la question 2. l'aire de FECD est $(2x+1)(x-2)$.
D'après la question 4. L'aire de FECD est $(2x+1)^2-(2x+1)(x+3)$.
Donc, $(2x+1)^2-(2x+1)(x+3)=(2x+1)(x-2)$.

2ème méthode :

On a : $(2x+1)^2-(2x+1)(x+3)=(2x+1)(2x+1)-(2x+1)(x+3)$.
$(2x+1)^2-(2x+1)(x+3)=(2x+1)[(2x+1)-(x+3)]$.
$(2x+1)^2-(2x+1)(x+3)=(2x+1)(x-2)$.

Retrouvez plus de contenus sur www.xetudes.com