# MODULE 14 : ORGANISATION ET GESTION DES DONNEES

## LEÇON 13 : APPLICATIONS AFFINES

### A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pour la kermesse organisée par les élèves de Troisième du Lycée Félix Houphouët-Boigny de KORHOGO, le comité d'organisation décide de louer du matériel de sonorisation pour une journée. Il s'adresse à deux fournisseurs.
Le premier fournisseur propose deux tarifs différents :
*Tarif 1*
Le matériel est cédé pour 5 000 F CFA l'heure avec une caution de 10 000 F CFA.
*Tarif 2*
Le matériel est cédé à un prix forfaitaire de 50 000 F CFA pour le temps de la manifestation.
Le deuxième fournisseur propose un tarif unique : 7 000 F CFA l'heure pour le temps de la manifestation.
Vu leurs moyens limités, les élèves de Troisième 4 décident de déterminer le tarif le plus avantageux selon la durée de la manifestation.

### B. CONTENU DE LA LEÇON

## I. Applications affines

### 1. Définition

Soit $a$ et $b$ deux nombres fixés.
On appelle application affine de *coefficient* $a$ et de *terme constant* $b$, la correspondance $f$ qui à chaque nombre réel $x$ associe le nombre réel $ax + b$.
On note : $f : x \longmapsto ax + b$.
$ax + b$ est l'image de $x$ par $f$ et on note $f(x) = ax + b$.
Si $f(x) = y$ on dit que : $y$ est l'image de $x$ par $f$.
Dans l'écriture $ax + b$, $a$ s'appelle le coefficient ; $b$ s'appelle le terme constant.

**Exemple**
La correspondance $f : x \longmapsto 2x + 1$ est une application affine.
• 2 est le coefficient et 1 est le terme constant.

**Exercice de fixation**
Complète les colonnes du tableau ci-dessous selon l'exemple traité à la ligne1.

| Correspondance | Application affine (oui ou non) | Coefficient | Terme constant |
|---|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| $l : x \longmapsto -3x + \frac{1}{3}$ | oui | $-3$ | $\frac{1}{3}$ |
| $m : x \longmapsto 16x - 5$ | | | |
| $n : x \longmapsto 4x^2 - 5$ | | | |
| $p : x \longmapsto -4 + \frac{1}{7}x$ | | | |
| $q : x \longmapsto \frac{1}{7x} - 10$ | | | |
| $r : x \longmapsto x\sqrt{3} + 1$ | | | |

**Corrigé**

| Correspondance | Application affine (oui ou non) | Coefficient | Terme constant |
|---|---|---|---|
| $l : x \longmapsto -3x + \frac{1}{3}$ | oui | $-3$ | $\frac{1}{3}$ |
| $m : x \longmapsto 16x - 5$ | oui | $16$ | $-5$ |
| $n : x \longmapsto 4x^2 - 5$ | non | | |
| $p : x \longmapsto -4 + \frac{1}{7}x$ | oui | $\frac{1}{7}$ | $-4$ |
| $q : x \longmapsto \frac{1}{7x} - 10$ | non | | |
| $r : x \longmapsto x\sqrt{3} + 1$ | oui | $\sqrt{3}$ | $1$ |

## 2. Calcul de l'image d'un nombre par une application affine

**Méthode**

Soit $f$ une application affine telle que pour tout nombre réel $x$, $f(x) = ax + b$.
Pour calculer l'image d'un nombre réel $t$, on remplace $x$ par $t$ dans l'expression de $f(x)$.
On écrit : $f(t) = at + b$ et on calcule $at + b$.

**Exercice de fixation**

Calcule l'image de 2 et l'image de $-1$ par l'application affine $f : x \longmapsto -5x + 7$.

**Corrigé**

$f(2) = -5 \times 2 + 7$
$f(2) = -10 + 7$
$f(2) = -3$
L'image de 2 par $f$ est $(-3)$.

$f(-1) = -5 \times (-1) + 7$
$f(-1) = 5 + 7$
$f(-1) = 12$
L'image de $-1$ par $f$ est 12.

## 3. Détermination du nombre $x$ tel que $f(x) = y$, étant donné un nombre réel $y$ et une application affine $f$

**Méthode**

Soit $y$ un nombre réel donné et $f$ une application affine telle que pour tout réel $x$, $f(x) = ax + b$.
Pour déterminer le nombre réel $x$ tel que $(x) = y$, on résout l'équation $ax + b = y$.

**Exercice de fixation**
On donne l'application affine $g : x \longmapsto 5x - 7$.
Détermine le nombre réel $x$ tel que $g(x) = 8$

**Corrigé**

On résout l'équation $5x - 7 = 8$

$$\begin{aligned} 5x - 7 = 8 \ \textit{équivaut à} \ & 5x = 8 + 7 \\ \textit{équivaut à} \ & 5x = 15 \\ \textit{équivaut à} \ & x = \frac{15}{5} \\ \textit{équivaut à} \ & x = 3. \end{aligned}$$

Le nombre cherché est 3.

**Remarque**
On peut vérifier ce résultat.
En effet $g(3) = 5 \times 3 - 7 = 15 - 7 = 8$.

## 4. Détermination l'expression d'une application affine $f$ définie par deux nombres réels et leurs images

**Exemple**
Soit $f$ une application affine telle que : $f(2) = -3$ et $f(4) = 1$.
Détermine l'expression de $f(x)$ pour tout nombre réel $x$.

**Corrigé**
Cela revient à déterminer les nombres réels $a$ et $b$ tels que $f(x) = ax + b$.
On sait que :
$f(2) = -3$. Donc : $2a + b = -3 \ (i)$
$f(4) = 1$. Donc : $4a + b = 1 \ (ii)$
On obtient le système de deux équations à deux inconnues suivant :

$$\begin{cases} 2a + b = -3 \ (i) \\ 4a + b = 1 \ (ii) \end{cases}$$

Nous allons résoudre ce système par substitution.
L'égalité $(i)$ : $2a + b = -3$ $\textit{équivaut à}$ $b = -2a - 3 \ (iii)$
Ainsi en remplaçant $b$ par $(-2a - 3)$ dans l'égalité $(ii)$ on a :

$$4a + (-2a - 3) = 1$$

$$\begin{aligned} 4a + (-2a - 3) = 1 \ \textit{équivaut à} \ & 2a - 3 = 1 \\ \textit{équivaut à} \ & 2a = 4 \\ \textit{équivaut à} \ & a = 2 \end{aligned}$$

On a donc $a = 2$.
On obtient $b$ en remplaçant $a$ par sa valeur dans l'égalité $(iii)$ :

$b = -2a - 3$
$b = -2 \times 2 - 3$
$b = -7$
Donc : $f(x) = 2x - 7$.

## 5. Représentation graphique d'une application affine

### a) Propriété

Le plan étant rapporté à un repère $(O, I, J)$, l'application affine $f$ définie pour tout réel $x$ par : $f(x) = ax + b$, a pour représentation graphique la droite $(D)$ d'équation : $y = ax + b$.

Si $\mathrm{M}(x; y)$ appartient à la droite $(D)$, alors $x$ et $y$ vérifient l'égalité $y = ax + b$.

<u>Remarque</u>

- Le coefficient $a$ est le coefficient directeur de la droite $(D)$.
- La constante b est l'ordonnée à l'origine de $f$ (l'image de 0 par $f$).

**Exercice de fixation**

Relie chaque application affine de la colonne 1 à la droite qui la représente dans la colonne 2.

| Colonne 1 | | Colonne 2 |
|---|---|---|
| $f$ est l'application affine définie par : $f(x) = 3x - 2$ | × × | La droite d'équation : $y = -4x$ |
| $g$ est l'application affine définie par : $g(x) = -4x$ | × × | La droite d'équation : $y = 8$ |
| $h$ est l'application affine définie par : $h(x) = -5x + 9$ | × × | La droite d'équation : $y = 3x - 2$ |
| $k$ est l'application affine définie par : $k(x) = 8$ | × × | La droite d'équation : $y = -5x + 9$ |

**Corrigé**

| Colonne 1 | | Colonne 2 |
|---|---|---|
| $f$ est l'application affine définie par : $f(x) = 3x - 2$ | × × | La droite d'équation : $y = -4x$ |
| $g$ est l'application affine définie par : $g(x) = -4x$ | × × | La droite d'équation : $y = 8$ |
| $h$ est l'application affine définie par : $h(x) = -5x + 9$ | × × | La droite d'équation : $y = 3x - 2$ |
| $k$ est l'application affine définie par : $k(x) = 8$ | × × | La droite d'équation : $y = -5x + 9$ |

### b) Représentation graphique d'une application affine connaissant son expression

**Méthode**

Le plan étant rapporté à un repère $(O, I, J)$.
Pour tracer la droite $(D)$ , représentation graphique de l'application affine $f$ :
• on choisit deux nombres et on calcule leurs images. Chaque nombre et son image sont les coordonnées d'un point de la droite $(D)$;
• on obtient ainsi deux points de $(D)$ que l'on place dans le repère $(O, I, J)$ ;
• on trace la droite qui passe par ces deux points qui est la droite $(D)$.

**Exercice de fixation**

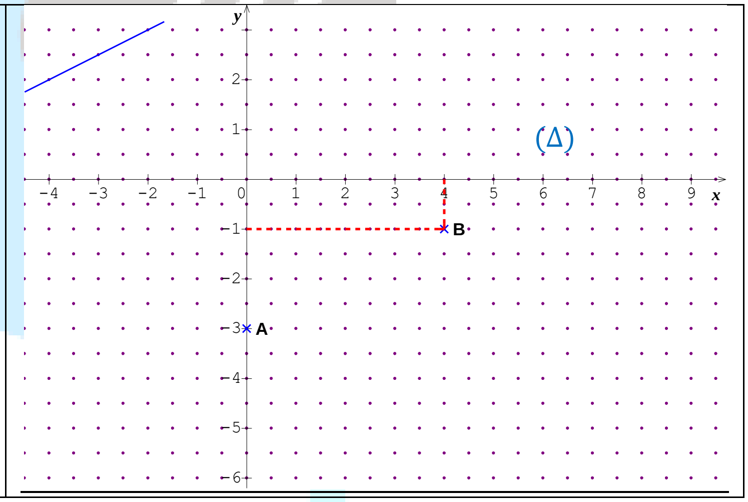
Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), trace la droite (Δ), représentation graphique de l'application affine $f$ définie par : $f(x) = 0{,}5x - 3$.

**Corrigé**

$f(x) = 0{,}5x - 3$
Je choisis deux nombres, par exemple : 0 et 4.
Je calcule les images de 0 et 4 par $f$.
On résume les résultats dans le tableau suivant.

| $x$ | 0 | 4 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $-3$ | $-1$ |
| Point | $A(0\,;-3)$ | $B(4;-1)$ |

La représentation graphique de $f$ est la droite (Δ) passant par les points $A$ et $B$.

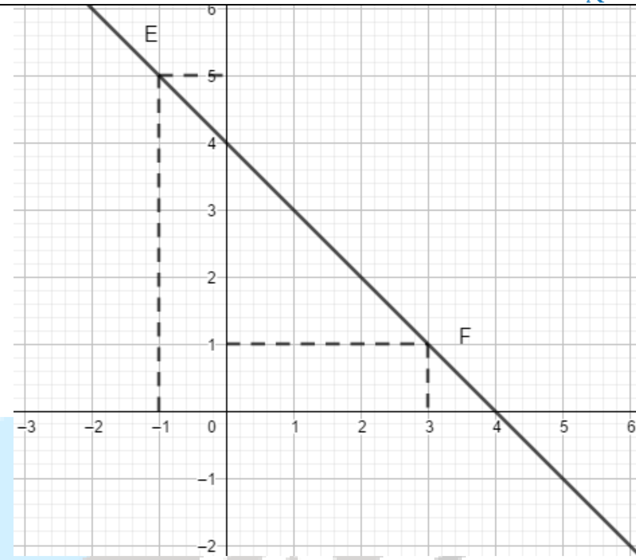



### c) Représentation graphique d'une application affine connaissant deux nombres réels et leurs images

**Exercice de fixation**

On donne l'application affine $g$ telle que $g(-1) = 5$ et $g(3) = 1$.
Représente graphiquement $g$ dans le plan muni d'un repère $(O, I, J)$.

**Corrigé**

| | |
|---|---|
| La représentation graphique de $g$ est la droite qui passe par le point E$(-1; 5)$, car $g(-1) = 5$ et par le point F$(3; 1)$ , car $g(3) = 1$.<br>Il suffit donc de marquer les points E et F dans le repère et de tracer la droite (EF). |  |

## 6) Utilisation de la représentation graphique d'une application affine.

### a) Détermination graphique de l'image d'un nombre par une application affine

**Méthode**

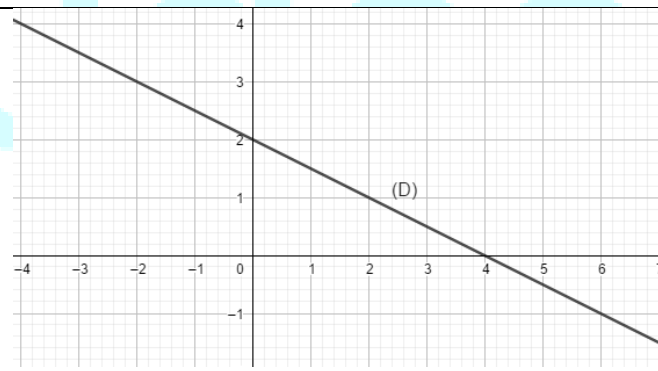
Pour déterminer l'image d'un réel $m$ à partir de la représentation graphique $(D)$ d'une application affine $f$ dans un repère :

• on trace d'abord la droite $(\Delta)$ d'équation : $x = m$ ;

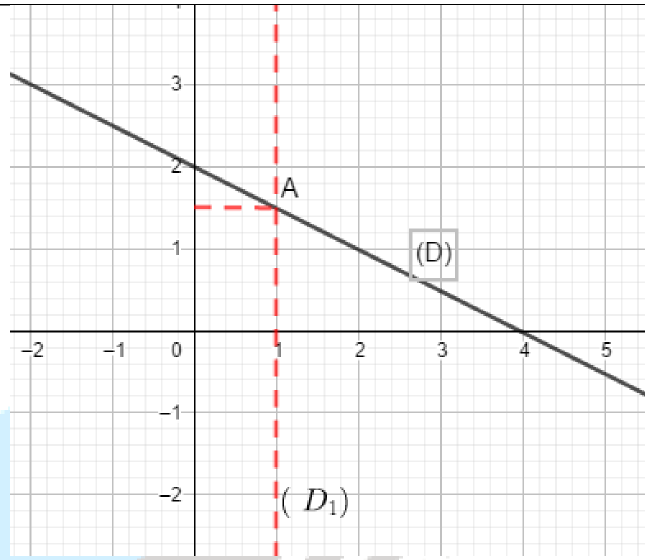
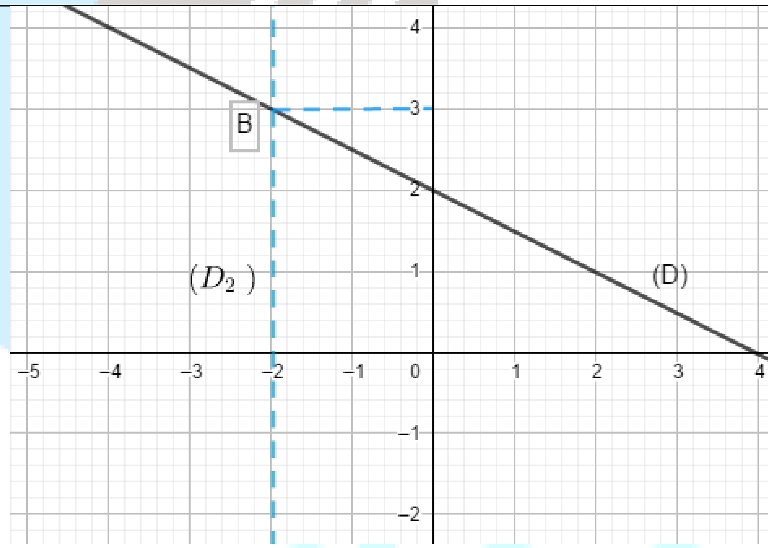
• la droite $(\Delta)$ coupe la droite $(D)$ en un point A d'abscisse $m$;

• l'ordonnée $n$ de A est l'image de $m$ par $f$.

**Exercice de fixation**

| | |
|---|---|
| Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) ci-contre, la droite $(D)$ est la représentation graphique d'une application affine $g$.<br>1. Détermine graphiquement l'image de 1 par $g$.<br>2. Détermine graphiquement l'image de (-2) par $g$. |  |

**Corrigé**

| | |
|---|---|
| 1. Déterminons graphiquement l'image de 1 par $g$<br>• On trace la droite $(D_1)$ d'équation $x = 1$ (en rouge).<br>• $(D_1)$coupe $(D)$ en A.<br>• L'ordonnée de A est 1,5.<br>• Donc, graphiquement, l'image de 1 par $g$ est 1,5. |  |
| 2. Cherchons l'image de $(-2)$ par $g$<br>• On trace la droite $(D_2)$ d'équation $x = -2$ (en bleu).<br>• $(D_2)$ coupe $(D)$ en B.<br>• L'ordonnée de B est 3.<br>• Donc, graphiquement, l'image de $(-2)$ par $g$ est 3. |  |

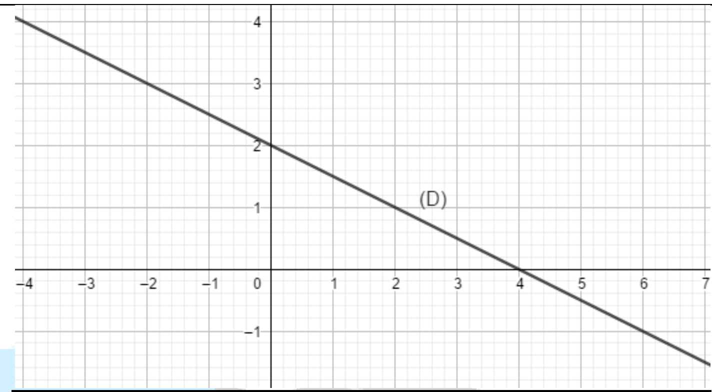
**b) Détermination graphique du nombre réel $m$ tel que $f(m) = n$, $f$ étant une application affine**

**Méthode**

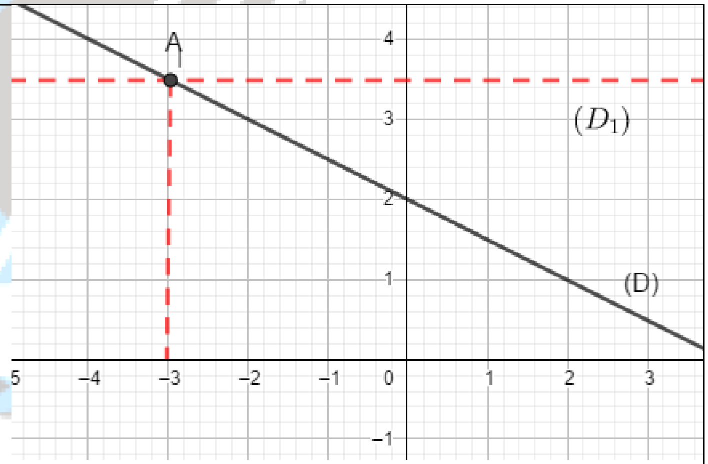
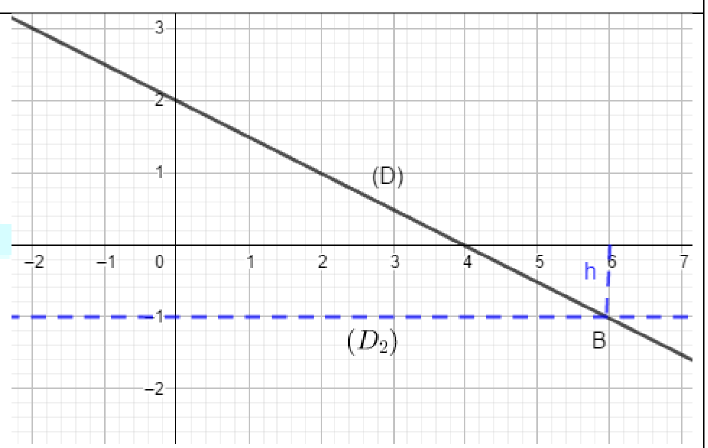
Etant donné un nombre réel $n$, pour déterminer graphiquement le nombre réel $m$ tel que $f(m) = n$ à partir de la représentation graphique $(D)$ d'une application affine $f$ :

• on trace d'abord la droite $(\Delta)$ d'équation $y = n$ ;
• la droite $(\Delta)$ coupe la droite $(D)$ en un point A d'ordonnée $n$ ;
• l'abscisse du point A est le nombre $m$ cherché.

**Exercice de fixation**

| | |
|---|---|
| Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) ci-contre, la droite $(D)$ est la représentation graphique d'une application affine $f$.<br>1. Détermine graphiquement le nombre réel $m$ tel que : $f(m) = 3{,}5$.<br>2. Détermine graphiquement le nombre réel $t$ tel que : $f(t) = -1$. |  |

## Corrigé

| | |
|---|---|
| 1. Déterminons graphiquement le réel $m$ tel que : $f$(m)=3,5.<br>• On trace la droite $(D_1)$ d'équation $y = 3{,}5$<br>• La droite $(D_1)$ coupe la droite $(D)$ en A.<br>• L'abscisse de A est $-3$.<br>• Donc, graphiquement, $f(-3) = 3{,}5$. |  |
| 2. Déterminons graphiquement le nombre réel $t$ tel que $f(t) = -1$.<br><br>• On trace la droite $(D_2)$ d'équation $y = -1$<br>• $(D_2)$ coupe la droite $(D)$ en B.<br>• L'abscisse de B est 6.<br>• Donc : $f(6) = -1$.<br>• Par conséquent $t = 6$. |  |

c) **Détermination de l'expression d'une application affine connaissant une équation de sa représentation graphique**

**Méthode**
Une droite (D) d'équation : $px + qy + r = 0$ est la représentation graphique d'une application affine.
Pour connaître l'expression de cette application affine, il suffit de réécrire l'équation de la droite sous la forme $y = ax + b$.

**Exercice de fixation**
Détermine l'expression de l'application affine dont la droite donnée est sa représentation graphique dans un repère.
1. La droite $(\Delta)$ d'équation : $3x + y - 5 = 0$ est la représentation graphique de $f$.
2. La droite $(D)$ d'équation : $2x - 3y - 15 = 0$ est la représentation graphique de $g$.

**Corrigé**

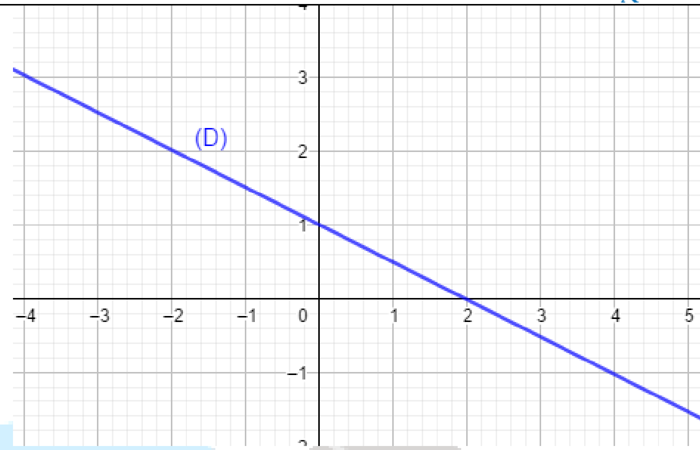
1. $(\Delta)$: $3x + y - 5 = 0$ *équivaut à* $y = -3x + 5$.
Donc $f(x) = -3x + 5$.
2. (D): $2x - 3y - 15 = 0$ *équivaut à* $-3y = -2x + 15$ (En multipliant chaque membre par $(-1)$),
$-3y = -2x + 15$ *équivaut à* $3y = 2x - 15$ (En multipliant chaque membre par $\frac{1}{3}$)
$3y = 2x - 15$ *équivaut à* $y = \frac{2}{3}x - 5$
Donc $g(x) = \frac{2}{3}x - 5$.

d) **Détermination de l'expression d'une application affine $f$ à partir de sa représentation graphique :**

**Méthode**
Pour déterminer l'expression d'une application affine $f$ à partir de sa représentation graphique dans un repère, il faut choisir deux points A et B dont on peut lire facilement les coordonnées sur le graphique.
Puis on remplace $x$ et $f(x)$ par les coordonnées des points A et B dans l'expression :
$f(x) = ax + b$, pour déterminer les nombres réels $a$ et $b$.

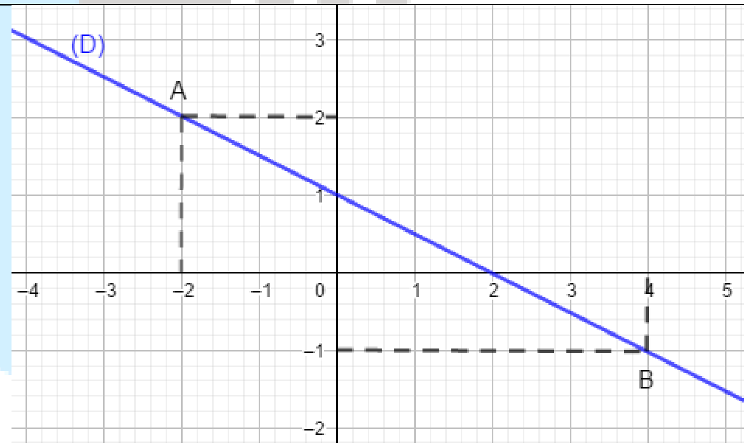
**Exercice de fixation**

Détermine l'expression de l'application affine $f$ dont la représentation graphique (D) est donnée par la figure ci-contre.




**Corrigé**

On sait que $f(x)$ est de la forme $f(x) = ax + b$.
On choisit deux points quelconques A et B sur la droite (D).
On choisit par exemple les points $A(-2; 2)$ et $B(4; -1)$.
A et B appartiennent à la représentation graphique de $f$ donc :
$f(-2) = 2$ et $f(4) = -1$
$f(-2) = 2$ *équivaut* à
$-2a + b = 2$
$f(4) = -1$ *équivaut* à
$4a + b = -1$
On résout le système d'équations :
$\begin{cases} -2a + b = 2 \\ 4a + b = -1 \end{cases}$ par combinaison




On multiplie les deux membres de la première équation par -1 et on obtient :
$\begin{cases} 2a - b = -2 \\ 4a + b = -1 \end{cases}$
En additionnant membre par membre, on a : 6a = - 3. D'où, a= $\frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$.

On multiplie cette fois-ci les deux membres de la première équation par 2 et on obtient :
$\begin{cases} -4a + 2b = 4 \\ 4a + b = -1 \end{cases}$
En additionnant membre par membre, on a 3b=3. D'où b =1

On obtient : $a = -\frac{1}{2}$ et $b = 1$.

Ainsi donc $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.

## 7. Sens de variation d'une application affine

### a) Définitions

Soit $f$ une application affine, $m$ et $n$ deux nombres réels quelconques.

• On dit que $f$ est croissante lorsque pour tous nombres réels $m$ et $n$, si $m > n$, alors $f(m) > f(n)$.

•On dit que $f$ est décroissante lorsque pour tous nombres réels $m$ et $n$, si $m > n$, alors $f(m) < f(n)$.

• On dit que $f$ est constante lorsque pour tous nombres réels $m$ et $n$, si $m > n$, alors $f(m) = f(n)$

**Exemple**

- $f$ est l'application affine telle que : $f(-5) = 3$ et $f(2) = 7$.
  On a : $-5 < 2$ et $f(-5) < f(2)$. Donc, $f$ est croissante.

- $g$ est l'application affine telle que : $g(1) = -2$ et $f(3) = -6$.
  On a : $1 < 3$ et $g(1) > g(3)$. Donc, $g$ est décroissante.

### b) Propriétés

Soit $f$ une application affine définie par : $f(x) = ax + b$.

- Si $a > 0$, alors l'application $f$ est croissante.
- Si $a < 0$, alors l'application $f$ est décroissante.
- Si $a = 0$, alors l'application $f$ est constante.

**Exercice de fixation**

Complète le tableau suivant en mettant une croix dans la case qui convient, puis justifie.

| Application affine | Décroissante | Constante | Croissante | Justification |
|---|---|---|---|---|
| $f: x \longmapsto 2x - 1$ | | | | |
| $g: x \longmapsto -5x + 3$ | | | | |
| $h: x \longmapsto 12$ | | | | |
| $i: x \longmapsto -8 + 3x$ | | | | |
| $j: x \longmapsto -\sqrt{5}$ | | | | |
| $k: x \longmapsto -(7 - 0{,}5x)$ | | | | |
| $l: x \longmapsto 10 - \frac{3}{4}x$ | | | | |
| $m: x \longmapsto -(-1 + 23x)$ | | | | |

**Corrigé**

| Application affine | Décroissante | Constante | Croissante | justification |
|---|---|---|---|---|
| $f: x \mapsto 2x - 1$ | | | x | $a = 2$ et $2 > 0$ |
| $g: x \longmapsto -5x + 3$ | $\times$ | | | $a = -5$ et $-5 < 0$ |
| $h: x \longmapsto 12$ | | x | | $a = 0$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $i: x \longmapsto -8+3x$ | | | x | $a=3$ et $3>0$ |
| $j: x \longmapsto -\sqrt{5}$ | | x | | $a=0$ |
| $k: x \longmapsto -(7-0{,}5x)$ | | | x | $a=-(-0{,}5)=0{,}5$ et $0{,}5>0$ |
| $l: x \longmapsto 10-\frac{3}{4}x$ | x | | | $a=-\frac{3}{4}$ et $-\frac{3}{4}<0$ |
| $m: x \longmapsto -(-1+23x)$ | × | | | $a=-23$ et $-23<0$ |

### c) Utilisation du sens de variation d'une application affine pour comparer les images de nombres réels

**Exercice de fixation**

On donne les applications affines $f$ ; $g$ et $h$ telle que $f$ est constante, $g$ est décroissante et $h$ est croissante. Compare :

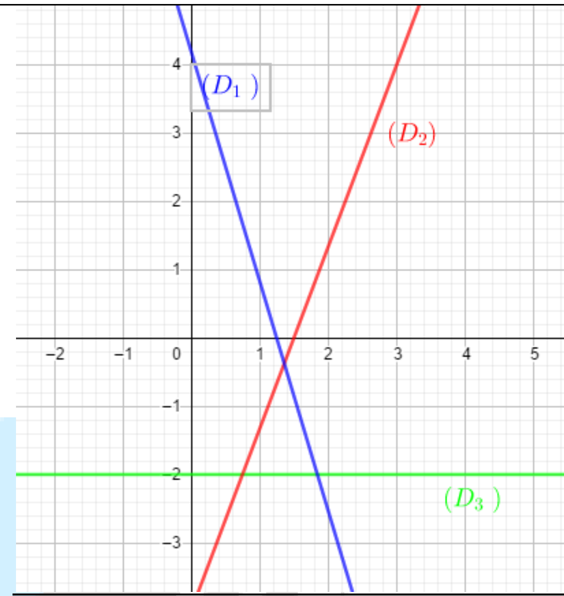
1. $f(136)$ et $f(-7)$ ;
2. $g(1{,}5)$ et $g(4{,}3)$;
3. $h(-9)$ et $h(-14)$.

**Corrigé**

1. $f$ est constante. Donc quels que soient les nombres réels $x$ et $y$, on a $f(x)=f(y)$. Par conséquent $f(136)=f(-7)$.
2. $1{,}5<4{,}3$ et comme $g$ est décroissante on a : $g(1{,}5)>g(4{,}3)$.
3. $-9>-14$ et comme $h$ est croissante on a : $h(-9)>h(-14)$.

### d) Le sens de variation d'une application affine et sa représentation graphique

• Lorsqu'une application affine est *croissante,* sa représentation graphique est une droite « montante » de la gauche vers la droite.
• Lorsqu'une application affine est *décroissante* sa représentation graphique est une droite « descendante » de la gauche vers la droite.
• Lorsqu'une application affine est *constante* sa représentation graphique est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

| | |
|---|---|
| **Exemple**<br>Soit les droites $(D_1)$, $(D_2)$ et $(D_3)$ représentées dans le repère ci-contre. |  |

• La droite $(D_1)$, en bleu, est descendante de la gauche vers la droite. Donc elle est la représentation graphique d'une application affine décroissante.
• La droite $(D_2)$, en rouge, montante de la gauche vers la droite. Donc elle est la représentation graphique d'une application affine croissante.
• La droite $(D_3)$, en vert, est parallèle à l'axe des abscisses. Donc elle est la représentation graphique d'une application affine constante.

# II. Applications linéaires

## 1. Définition

Soit $a$ un nombre.
On appelle application linéaire de coefficient $a$, toute application affine $f$ telle que $f(x) = ax$.

**Exemples**

• Les applications $f$ et $g$ telles que $f(x) = -7x$ et $g(x) = x\sqrt{2}$ sont des applications linéaires.
• L'application $h$ telle que $h(x) = -4x + 3$ n'est pas une application linéaire.

**Remarque**

Une application linéaire étant une application affine, tout ce que nous avons vu concernant les applications affines est aussi valable pour les applications linéaires.

**Exercices de fixation**
**Exercice 1**

Parmi les applications affines suivantes, écris dans ton cahier les numéros de celles qui sont des applications linéaires.

| N° | Applications affines |
|---|---|
| 1 | $f : x \longmapsto -7x+4$ |
| 2 | $g : x \longmapsto 3x$ |
| 3 | $h : x \longmapsto -11x - 10$ |
| 4 | $j : x \longmapsto 4$ |
| 5 | $k : x \longmapsto x$ |

**Corrigé**

Réponse : 2 et 5.

**Exercice 2**

On donne l'application linéaire $f$ telle que $f(x) = x\sqrt{2}$.

a) Calcule l'image par $f$ de $-2$, de $0$ puis de $\sqrt{2}$.

b) Détermine le nombre réel $m$ tel que $f(m) = 1$.

**Corrigé**

a)

| | | |
|---|---|---|
| $f(-2) = -2 \times \sqrt{2}$<br>$f(-2) = -2\sqrt{2}$ | $f(0) = 0 \times \sqrt{2}$<br>$f(0) = 0$ | $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \times \sqrt{2}$<br>$f(\sqrt{2}) = 2$ |

b) $f(m) = 1$ *équivaut à* $m\sqrt{2} = 1$

*équivaut à* $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$

*équivaut à* $m = \frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$

*équivaut à* $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Le nombre cherché $m$ est $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**Exercice 3**

On donne l'application linéaire $g$ telle que $g(-6) = 2$.

Détermine l'expression de $g(x)$.

**Corrigé**

$g(x)$ est de la forme $g(x) = ax$

$g(-6) = 2$ *équivaut à* $-6a = 2$

*équivaut à* $a = \frac{2}{-6}$

*équivaut à* $a = -\frac{1}{3}$

Donc $g(x) = -\frac{1}{3}x$.

## 2. Représentation graphique d'une application linéaire

**Propriété**

Le plan est rapporté à un repère $(O, I, J)$.

La représentation graphique d'une application linéaire $f$ est une droite qui passe par l'origine du repère c'est-à-dire le point de couple de coordonnées $(0; 0)$.

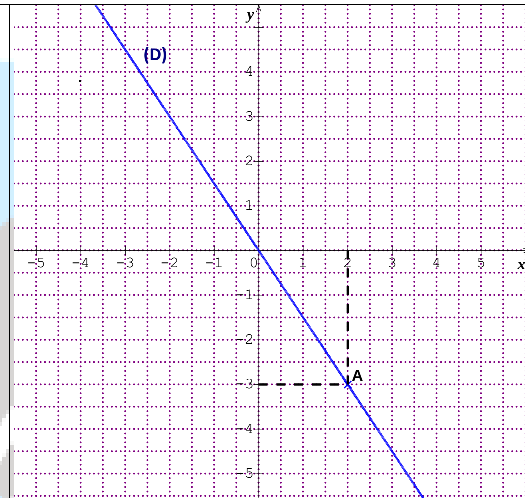
**Exercices de fixation**

**Exercice 1**

Dans le plan muni d'un repère, trace la droite $(D)$ représentation graphique de l'application linéaire $f$ telle que $f(x) = -\frac{3}{2}x$.

**Corrigé**

Choisissons deux nombres réels et cherchons leurs images par $f$.
On choisit par exemple 0 et 2. On a: $f(0) = 0$;
$f(2) = -3$
Donc $(D)$ passe aussi par le point $O(0\ ;\ 0)$ et le point $A(2; -3)$
Le point O étant déjà placé, on place le point A.
La droite (D) est la droite (OA).

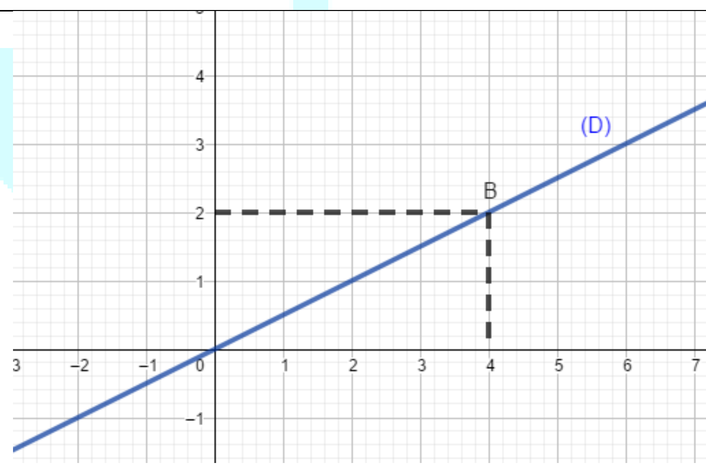



**Exercice 2**

Trace la droite $(D)$ représentation graphique de l'application linéaire $g$ telle que : $g(4) = 2$.

**Corrigé**

Comme $g(4) = 2$, alors la droite $(D)$ passe par le point $B(4; 2)$
On sait aussi que la droite (D) passe par le point de coordonnées $O(0; 0)$.




## 3. Les propriétés de linéarité

### a) Propriétés

Soit $f$ une application linéaire, $m$, $n$ et $k$ sont des nombres réels. On a:

- $f(m+n) = f(m) + f(n)$
- $f(km) = kf(m)$

**Exercice de fixation**

Soit $f$ une application linéaire telle que $f(2) = -6$ et $f(-3) = 9$
Calcule $f(-1)$, $f(5)$ et $f(9)$ sans déterminer $f(x)$.

**Corrigé**

$f$ est une application linéaire:

- Calculons $f(-1)$

On sait que :$2 + (-3) = -1$
d'où :
$f(-1) = f(2 + (-3))$ d'après la propriété de linéarité
$f(-1) = f(2) + f(-3)$ or
$f(2) = -6$ et $f(-3) = 9$
$f(-1) = -6 + 9$
$f(-1) = 3$

- Calculons $f(5)$

$5 = 2 - (-3)$ d'où :
$f(5) = f(2) - f(-3)$
$f(5) = -6 - 9$
$f(5) = -15$ .

- Calculons $f(9)$

$9 = -3 \times (-3)$ d'où
$f(9) = f(-3 \times (-3))$
d'après la propriété de linéarité
$f(9) = -3 \times f(-3)$
or $f(-3) = 9$
$f(9) = -3 \times 9$
$f(9) = -27$.

### b) Traduire une situation de proportionnalité par une application linéaire

**Exercice de fixation**

Au marché Gouro d'Adjamé, un kilogramme ($kg$) d'oranges coûte 340 FCFA.
1. Cauphy y achète 1,5 $kg$ d'oranges. Détermine le montant à payer.
2. Détermine le montant à payer si Cauphy y achète $x$ $kg$ d'oranges.

3. Etablis la correspondance qui, à chaque quantité d'oranges exprimée en $kg$, associe la somme en FCFA à payer.

### Corrigé

1. $1{,}5 \times 340 = 510F$
Cauphy payera la somme de 510 Fcfa
2. $340 \times x = 340x$
Cauphy payera $340x$ Fcfa
3. La correspondance est : $x \mapsto 340x$.
Cette correspondance est une application linéaire car elle est de la forme $ax$ où $a = 340$.

## C. SITUATION D'EVALUATION

Monsieur Sylla doit effectuer avec sa voiture un voyage à Odienné pour prendre part à la cérémonie d'ouverture d'un nouveau collège. A la fin de cette cérémonie, il doit retourner à Abidjan. Les deux villes sont distantes de 800 Km.
On sait que la quantité $\boldsymbol{q}$ (en litres) d'essence restante dans la voiture après une distance parcourue $\boldsymbol{x}$ (en kilomètres), est une application affine et qu'après 100 km du trajet la consommation d'essence est d'environ 5 $litres$.
Avant le départ d'Abidjan, Monsieur Sylla a rempli son réservoir dont la capacité est de 60 $litres$ d'essence.
Il dit à son fils élève de 3ème , qu'avant de tomber en panne sèche (le réservoir vide), le voyant lumineux devrait s'allumer lorsqu'il reste seulement 5 $litres$ d'essence dans le réservoir.
Mais ce voyant a un défaut et ne fonctionne pas.
Afin de prendre toutes les dispositions pour éviter la panne sèche, M. Koné voudrait savoir la distance à parcourir d'Odienné au lieu où le voyant lumineux devrait s'allumer.
Il ne sait pas comment procéder. Son fils veut lui apporter son aide.

1. Détermine la quantité d'essence restante après un parcours de 100 Km.
2. Démontre que la quantité $q$ d'essence restante est telle que: $q(x) = -\frac{1}{20}x + 60$.
3. a. Détermine la distance parcourue après laquelle le voyant lumineux devrait s'allumer.
   b. Déduis-en la distance à parcourir d'Odienné au lieu où le voyant devrait s'allumer.

### Corrigé

1. Après 100 km du trajet la consommation d'essence est d'environ 5 $litres$.
   Donc, la quantité d'essence restante est de : $60 - 5 = 55$ $litres$.
2. Démontrons que : $q(x) = -\frac{1}{20}x + 60$.

   $q$ étant une application affine, alors elle de la forme : $q(x) = ax + b$.

   - La quantité au départ d'Abidjan est de 60 $litres, d'$où: $q(0) = 60$.
   - D'après la question 1, on a : $q(100) = 55$

   On obtient le système d'équations : $\begin{cases} b = 60 \\ 100a + b = 55 \end{cases}$.

On en déduit que : $a = -\frac{5}{100} = -\frac{1}{20}$ .

Donc : $q(x) = -\frac{1}{20}x + 60$.

3. a) Pour que le voyant lumineux s'allume, il faut qu'on ait : $q(x) = 5$.
   On résout l'équation : $-\frac{1}{20}x + 60 = 5$.

   Après résolution, on obtient : $x = 1100$ .

   Donc, le voyant lumineux devrai s'allumer après un parcours de 1100 Km.

   b) Déterminons la distance à parcourir d'Odienné au lieu où le voyant devrait s'allumer.
   Pour atteindre Odienné, il faut parcourir 800 Km.
   Or, l'allumage du voyant se produit après un parcours de 1100 Km.

   On a : $1100 - 800 = 300$.

   Donc, le voyant lumineux devrait s'allumer lors du trajet de retour, à 300 Km d'Odienné.

# D. EXERCICES

## D-1 Exercices de fixation

**Exercice 1**

Mets une croix dans la case correspondante si la réponse est oui.

| L'application ...est une application | affine | linéaire | constante |
|---|---|---|---|
| $f: x \longmapsto 2x + 5$ | | | |
| $g: x \longmapsto 3x^2 - 7$ | | | |
| $h: x \longmapsto 4x$ | | | |
| $i: x \longmapsto -3x - 4$ | | | |
| $j: x \longmapsto -4 + 3x$ | | | |
| $k: x \longmapsto 8$ | | | |
| $l: x \longmapsto 2(x - 9)$ | | | |
| $m: x \longmapsto 2x + 5 - 2x$ | | | |
| $n: x \longmapsto 11\sqrt{x} + 1$ | | | |

**Exercice 2**

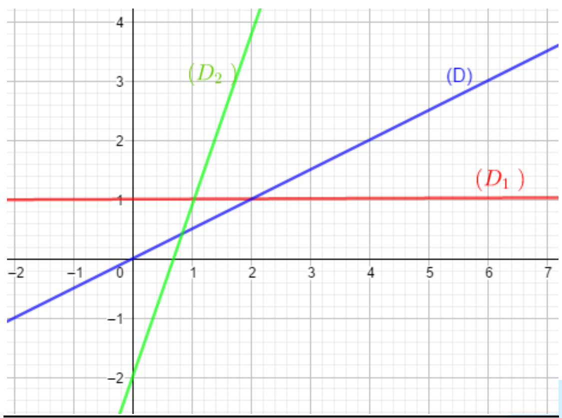
Soit $f$ une application affine telle que $(x) = \frac{2}{3}x - 4$ .

1. Calcule l'image de chacun des nombres $(-3)$, $-\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$.
2. Détermine les nombres $m$ et $n$ tel que $f(m) = 0$ et $(n) = 4$ .

**Exercice 3**

Soit la figure ci-dessous.

Parmi les droites $(D)$, $(D_1)$ et $(D_2)$, cite celle qui est la représentation graphique d'une application linéaire.

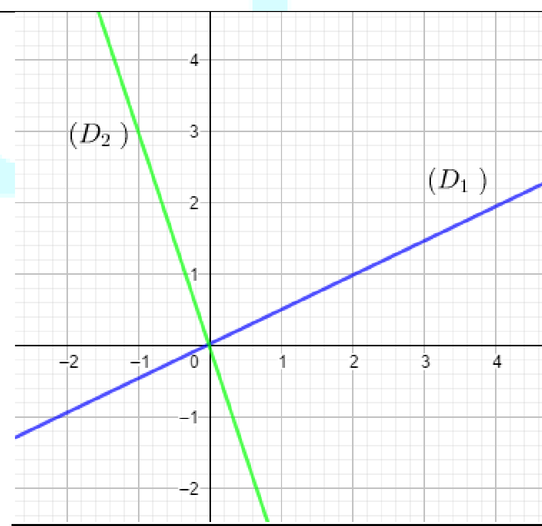



## Corrigé

La seule droite qui passe par l'origine du repère est la droite (D) en bleu. Donc (D) est la représentation graphique d'une application linéaire.

## Exercice 4

Parmi les applications linéaires $f$ et $g$ suivantes, dis celle qui est croissante et celle qui est décroissante et associe chaque droite de la figure à l'application linéaire correspondante.
$f(x) = 0{,}5x$ et $g(x) = -3x$.




## Corrigé

• $f$ est croissante car son coefficient 0,5 est positif $(0,5 > 0)$. Donc, sa représentation graphique est la droite "montante" de gauche à droite c'est-à-dire la droite $(D_1)$.
• $g$ est décroissante car son coefficient $-3$ est négatif $(-3 < 0)$. Donc, sa représentation graphique est la droite "descendante" de gauche à droite c'est-à-dire la droite $(D)$.

**Exercice 5**
Soit $f$ une application affine telle que $(x) = -3x + 4$ .
1. Calcule l'image de chacun des nombres 0, $-\frac{1}{3}$ et 1.
2. Détermine les nombres $a$ et $b$ tel que $f(a) = -5$ et $(b) = 2$ .

**Exercice 6**
Soit $h$ une application linéaire telle que $h(x) = -1{,}5x$.
1. Calcule l'image de chacun des nombres $-1{,}5$, $-2$ et 7.
2. Détermine les nombres $t$ et $q$ tel que $f(t) = 1$ et $(q) = 12$ .

**Exercice 7**
Détermine l'application affine $f$ telle que $f(-4) = 6$ et $f(6) = 1$.

**Exercice 8**
Détermine l'application affine $g$ telle que $g(3) = 5$ et $g(7) = 13$.

**Exercice 9**
Détermine l'application linéaire $h$ telle que $h(\sqrt{2}) = \sqrt{6}$ .

**Exercice 10**
Dans une boucherie, le kilogramme $(kg)$ de viande coûte 2500 Fcfa. Et pour tout achat, l'emballage est facturé à 100 Fcfa.
Madame Yao a acheté 5,5 $kg$ de viande et Madame Koné en a acheté $9kg$.
1. Calcule la somme dépensée par chacune des deux femmes.
2. Lucien a payé 7600 Fcfa. Calcule la quantité de viande qu'il a achetée.
3. Exprime la somme $S(x)$ à payer pour l'achat de $x$ kg de viande dans cette boucherie.
4. Donne la nature de la correspondance : $x \longmapsto S(x)$.

**Exercice 11**
Le réservoir d'eau d'une ferme a été troué pendant la nuit, alors qu'il contenait 81 litres d'eau. Il perd ainsi 3,6 litres d'eau toutes les trente minutes.
1. Calcule la quantité d'eau qu'il perdra au bout de45 minutes, puis au bout d'une heure et demie.
2. Calcule le temps (en heure) au bout duquel il perdra 72 litres d'eau et celui au bout duquel il sera totalement vide.
3. Exprime la quantité d'eau $y$ (exprimée en litres) perdue en fonction du temps $x$ (exprimé en minutes).
4. Donne la nature de la correspondance qui, à $x$ associe $y$.

**Exercice 12**
On donne les applications affines $f_1$ , $f_2$ , $f_3$ et $f_4$ suivantes :
$f_1(x) = 3x - 4$ ; $f_2(x) = -2x + 1$ ; $f_3(x) = -2x - 3$ et $f_4(x) = 2$.

Représente graphiquement $f_1$ , $f_2$, $f_3$ et $f_4$ dans un même repère (orthogonal avec des couleurs différentes).

**Exercice 13**

On donne les applications linéaires $g$ , $h$ et $k$ suivantes :

$g(x) = 2{,}5x$ ; $h(x) = -\frac{1}{3}x$ et $h(x) = x$.

Représente graphiquement, $h$ et $k$ dans un même repère (orthogonal avec des couleurs différentes).

**Exercice 14**

L'application affine $f$ et l'application linéaire $g$ sont telles que :

$f(-3) = -1$ ; $f(2) = 3$ et $g(3) = -2$

Représente graphiquement $g$ et $f$ dans un même repère (orthogonal avec des couleurs différentes).

**Exercice 15**

Détermine l'expression de l'application affine dont la droite donnée est sa représentation graphique.

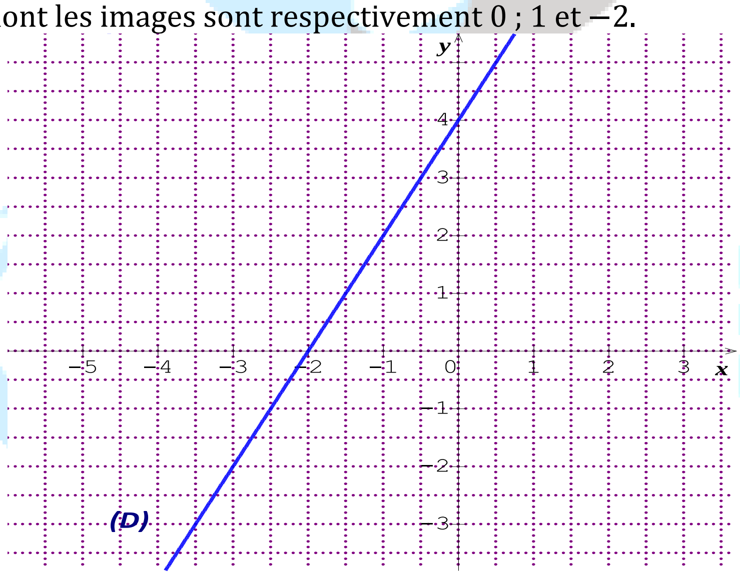
1. $(\Delta)$: $\frac{3}{2}x + 3y - 6 = 0$, représentation graphique de $f$.
2. $(D)$: $2x - 5y = 0$, représentation graphique de $g$.
3. $(d)$: $8y - 6 = 0$, représentation graphique de $h$.
4. $(\delta)$: $5x + 4y - 10 = 0$, représentation graphique de $k$.

**Exercice 16**

La droite $(D)$ représentée ci-dessous est la représentation graphique d'une application affine $g$.

Détermine graphiquement :

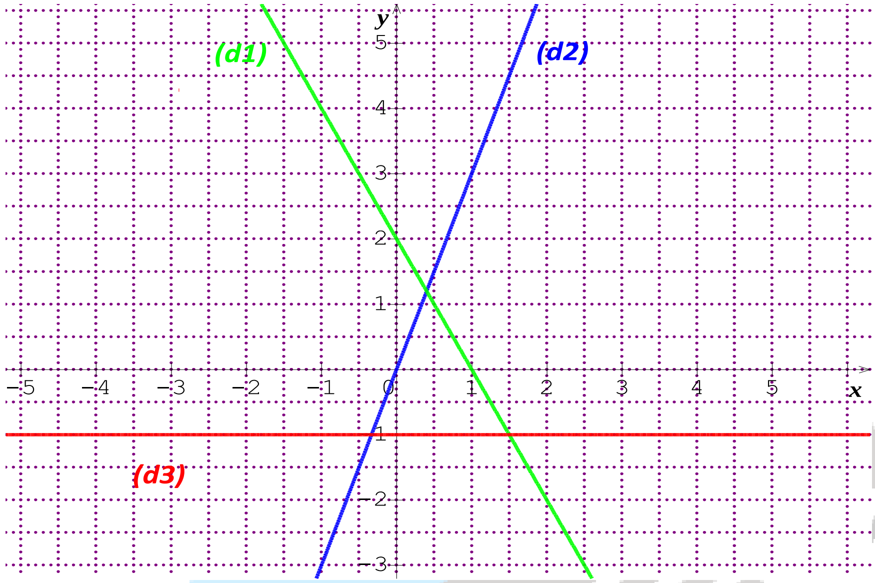
1. Les images par g de 0 ; $-1$ et $(-1{,}5)$.
2. Les nombres réels dont les images sont respectivement 0 ; 1 et $-2$.




**Exercice 17**

Sur la figure ci-dessous, la droite $(d1)$ est la représentation graphique d'une application $j$ ; $(d2)$ est celle d'une application $l$ et $(d3)$ celle d'une application $k$.

1. Donne la nature de chaque application.
2. Détermine l'expression de chaque application.




**Exercice 18**

Soit $h$ une application linéaire telle que $h(-4) = -3$ et $h\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}$.

Sans déterminer l'expression de $h$, calcule $h(1)$ ; $h(4)$ ; $h\left(-\frac{11}{3}\right)$ et $h\left(\frac{13}{3}\right)$.

**Exercice 19**

Mets une croix dans la case correspondante si la réponse est oui et donne ta justification dans la colonne "*justification*"

| L'application affine est | croissante | décroissante | constante | Justification |
|---|---|---|---|---|
| $f: x \longmapsto 2x + 5$ | | | | |
| $g: x \longmapsto -5 - 2x$ | | | | |
| $h: x \longmapsto 4x$ | | | | |
| $i: x \longmapsto -3x - 4$ | | | | |
| $j: x \longmapsto -4 + 7x$ | | | | |
| $k: x \longmapsto 8$ | | | | |
| $l: x \longmapsto -\pi x$ | | | | |
| $m: x \longmapsto -5$ | | | | |

**Exercice 20**

L'application affine $f$ et l'application linéaire $g$ sont telles que :
$f(-3) = 1$ ; $f(2) = 3$ et $g(5) = -3$
Sans déterminer leurs expressions, justifie que $f$ est croissante et que $g$ est décroissante.

**Exercice 21**

On donne les applications affines $f$ ; $g$ et $h$ telles que $f$ est croissante, $g$ est constante et $h$ est décroissante. Compare :

1. $f(-2)$ et $f(-7)$.
2. $g(\frac{17}{4})$ et $g(\sqrt{3})$.
3. $h(-9)$ et $h(16)$.

## D-2 Exercices de renforcement

**Exercice 22**

Deux amis Teloka et Bita s'abonnent pour la  première fois à une bibliothèque. Ce même jour Teloka paye 1600 Fcfa pour son abonnement et la location de 3 livres. Quant à Bita, il paye 2200 Fcfa pour son abonnement et la location de 5 livres.

Détermine le coût de l'abonnement et celui de la location d'un livre dans cette bibliothèque.

**Exercice 23**

Dans un magasin, les cartouches d'encre pour imprimante sont vendues à 15000 Fcfa l'unité. Sur internet, ces mêmes cartouches d'encre sont vendues à 10000 Fcfa l'unité plus un forfait de 15000 Fcfa pour les frais de livraison quel que soit le nombre de cartouches achetées.

Soit $\boldsymbol{x}$ le nombre de cartouches achetées.

1. Exprime en fonction de $\boldsymbol{x}$ :
   a) le prix $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{x})$ à payer en magasin.
   b) le prix $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})$ à payer sur internet.
2. Calcule le prix de 6 cartouches dans chaque cas et dis le tarif le plus avantageux.
3. Cauphy dispose de 80000Fcfa. Détermine le tarif le plus avantageux pour lui.
4. A partir de combien de cartouches le prix sur internet est le plus avantageux.
5. Représente graphiquement $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{x})$ et $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})$ dans un même repère, sur du papier millimétré avec deux couleurs différentes et retrouve graphiquement les résultats précédents (tu laisseras les traits permettant la lecture graphique).

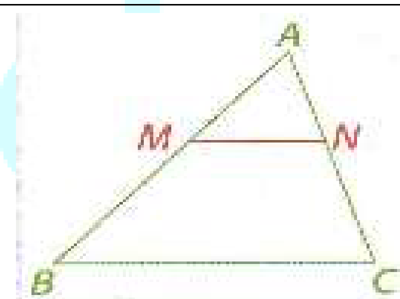
   Echelle : en ordonnée 1 $\boldsymbol{cm}$ pour 5000 Fcfa.

## D-3 Exercices d'approfondissement

**Exercice 24**

On considère la figure ci-dessous où ABC est un triangle et la droite (MN) est parallèle à la droite (BC).

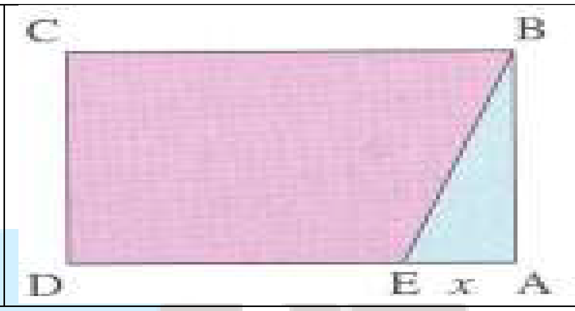
On a AB= 5 $\boldsymbol{cm}$   AC= 4 $\boldsymbol{cm}$  BC= 6 $\boldsymbol{cm}$  et  AM= $\boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{cm}$ ($\boldsymbol{x}$ désignant un nombre réel tel que $\mathbf{0} < \boldsymbol{x} < \mathbf{5}$)




1. Calcule le périmètre  $\boldsymbol{a}$ du triangle ABC.
2. Justifie que AN $= \frac{4}{5}\boldsymbol{x}$   et que  MN $= \frac{6}{5}\boldsymbol{x}$.
3. Justifie que l'application qui, à $\boldsymbol{x}$ associe le périmètre $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ du triangle AMN, est une application linéaire.
4. Justifie que l'application qui, à $\boldsymbol{x}$ associe le périmètre $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x})$ du trapèze  MNCB, est une application affine.

5. Représente graphiquement $\boldsymbol{p(x)}$ et $\boldsymbol{s(x)}$ dans le plan muni d'un repère orthogonal avec deux couleurs différentes.

**Exercice 25**

| | |
|---|---|
| L'unité est le $\boldsymbol{cm}$ (centimètre)<br>Dans le rectangle ABCD ci-contre on a : AB= 3, AD= 4 et E est un point de [AD] tel que AE= $\boldsymbol{x}$. |   |

1. a) Justifie que l'aire $\boldsymbol{t(x)}$ du triangle ABE est $\boldsymbol{t(x) = 1,5x}$.
   b) Justifie que l'aire $\boldsymbol{q(x)}$ du quadrilatère BCDE est $\boldsymbol{q(x) = -1,5x + 12}$.
   c) précise la nature des applications $\boldsymbol{s: x \longmapsto s(x)}$ et $\boldsymbol{q: x \longmapsto q(x)}$.
2. Calcule l'aire du triangle ABE et l'aire du quadrilatère BCDE pour :
   a) $\boldsymbol{x = 1}$.
   b) $\boldsymbol{x = 3}$.
3. a) Détermine la valeur de $\boldsymbol{x}$ pour laquelle le triangle ABE et le quadrilatère BCDE ont la même aire.
   b) Justifie que dans ce cas les points E et D sont confondus.
4. Représente graphiquement $\boldsymbol{t(x)}$ et $\boldsymbol{q(x)}$ dans un même repère, sur du papier millimétré, avec deux couleurs différentes et retrouve graphiquement le résultat de la question 3.a)- (Tu laisseras les traits permettant la lecture graphique).