

STATISTIQUES

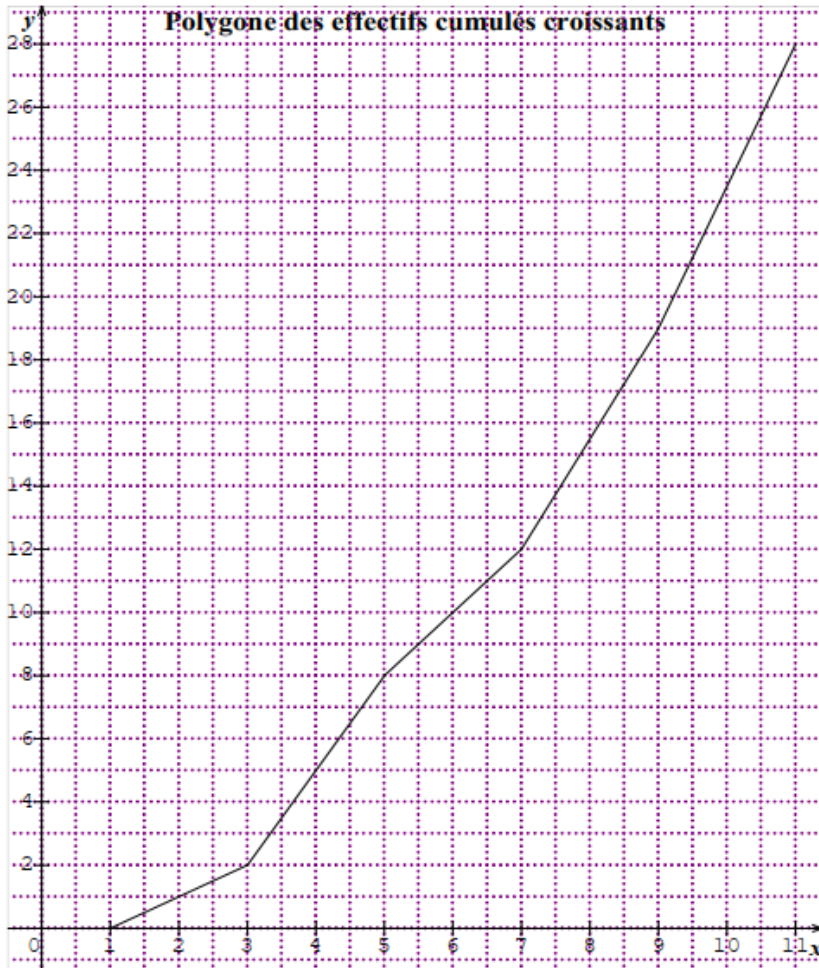
Présentation

Un professeur d'éducation physique et sportive mesure et relève la taille en mètres de chacun de ses 51 élèves d'une classe de 3^{ème}. Il obtient les résultats suivants :

1,54	1,53	1,57	1,59	1,54	1,55	1,60	1,63	1,59	1,67	1,61	1,63	1,67
1,69	1,68	1,69	1,70	1,64	1,67	1,65	1,54	1,72	1,73	1,64	1,74	1,78
1,55	1,76	1,75	1,79	1,66	1,77	1,67	1,69	1,59	1,76	1,69	1,79	1,76
1,59	1,74	1,78	1,73	1,68	1,65	1,71	1,76	1,78	1,65	1,57	1,58	

Son collègue de mathématiques, décide de former trois groupes d'étude en fonction de ces résultats sous forme d'intervalles de même amplitude dont le premier est $[1,50 ; 1,60[$. Déterminons les deux autres intervalles.

L'amplitude de $[1,50 ; 1,60[$ est : $1,60 - 1,50 = 0,1$. Donc, les deux autres intervalles sont $[1,60 ; 1,70[$ et $[1,70 ; 1,80[$.



La courbe construite s'appelle le polygone des effectifs cumulés croissants.

EXERCICE

À l'occasion d'un contrôle de fabrication, on a pesé des boîtes de conserves à la sortie d'une chaîne de remplissage et on obtenu le tableau suivant :

Masse (en g)	$[89 ; 92[$	$[92 ; 95[$	$[95 ; 98[$	$[98 ; 101[$	$[101 ; 104[$
Effectifs	10	15	20	10	10

1. Détermine la classe modale de cette série statistique.
2. Détermine la masse moyenne des boîtes de conserve.
3. Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants.
4. Détermine la classe médiane de la série ; c'est-à-dire la classe dans laquelle se situe la médiane.
5. Calcule la masse médiane.
6. Construis le diagramme circulaire des effectifs. (On prendra pour diamètre 8cm)

I. Equations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Définitions

Soient a, b et c des nombres réels tels que $(a; b) \neq (0; 0)$.

- Une équation du type $ax + by = c$ est une équation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- Tout couple $(x_0; y_0)$ vérifiant l'égalité $ax + by = c$ est solution de cette équation.
- Résoudre une équation du type $ax + by = c$, c'est trouver tous les couples solutions de cette équation.

Exemple

$3x + 5y = 2$ est une équation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

On a : $3 \times 4 + 5(-2) = 12 - 10 = 2$. Donc, le couple $(4; -2)$ est solution de cette équation.

On a : $3 \times 1 + 5 \times 0 = 3 + 0 = 3$ et $3 \neq 2$. Donc, le couple $(1; 0)$ n'est pas solution de cette équation.

Exercice de fixation

On considère l'équation à deux inconnues x et y définie par : $3x + 2y = 8$.

1. Vérifie que $(2; 1)$ est une solution de cette équation.
2. Vérifie que $(1; 2)$ n'est pas solution de cette équation.
3. Vérifie si $(0; 4)$ est solution ou non de cette équation.

II. Systèmes d'équations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

1) Définitions

Soient a, b, c, a', b' et c' des nombres réels tels que $(a; b) \neq (0; 0)$ et $(a'; b') \neq (0; 0)$.

- Un système d'équations du premier degré à deux inconnues x et y est un système de la forme :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

- Résoudre le système, revient à trouver tous les couples solutions aux deux équations.

Exercice de fixation

Identifie, parmi les systèmes suivants, ceux qui sont des systèmes de deux équations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

a) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x^2 + y = 0 \\ x + y = -1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2x - 3y + 5 = 0 \\ -3y = 0 \end{cases}$

2) Résolution d'un système d'équations

a) Résolution par substitution

Méthode

Pour résoudre un système par substitution :

- 1) On utilise l'une des équations pour exprimer une des inconnues en fonction de l'autre.
- 2) Dans l'autre équation, on remplace cette inconnue par son expression exprimée en 1) et on obtient une équation à une inconnue qu'on résout.
- 3) Dans l'équation obtenue au 1), on remplace l'inconnue par la valeur trouvée et on trouve la deuxième inconnue.
- 4) On donne la solution du système.

Exemple

Pour résoudre par substitution le système : $\begin{cases} x - 3y = 5 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$

Exercice de fixation

Résous par la méthode substitution le système suivant : $\begin{cases} x + y = 35 \\ 8x + 7y = 260 \end{cases}$

b) Résolution par combinaison

Méthode

Pour résoudre un système par combinaison :

- 1) On choisit l'inconnue que l'on veut éliminer, par exemple x .
- 2) On multiplie les deux membres de l'une des équations (ou les deux équations, si nécessaire) par des coefficients de sorte que la variable x ait des coefficients opposés.
- 3) On additionne membre à membre les deux nouvelles équations obtenues en 2) et on obtient une nouvelle équation du premier degré à une inconnue y .
- 4) On résout l'équation en 3), et on trouve la valeur de y .
- 5) On élimine la deuxième inconnue en suivant les étapes énoncées précédemment.
- 6) On donne la solution du système.

Exemple

Pour résoudre par combinaison le système suivant :
$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x - 2y = -7 \end{cases}$$

Exercice de fixation:

Résous par combinaison le système suivant :
$$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 4x + 7y = 1 \end{cases}$$

c) Résolution graphique

Méthode

Pour résoudre graphiquement un système de deux équations
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

on trace les deux droites (D) et (D') d'équations respectives : $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ dans un même repère.

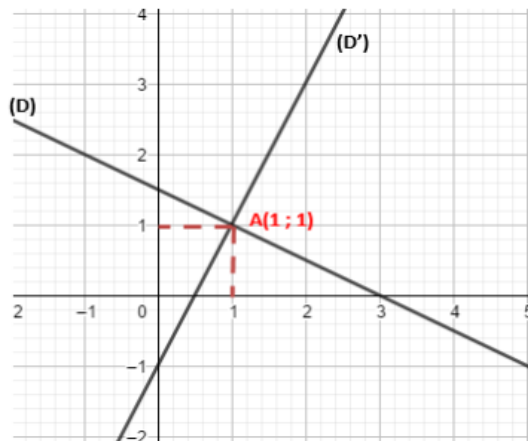
Trois cas de figure se présentent :

- Si les deux droites sont sécantes en un point, alors le couple de coordonnées de ce point est la solution du système.
- Si les deux droites sont parallèles disjointes, alors le système n'a pas de solution.
- Si les deux droites sont confondues, alors le système admet une infinité de solutions.
Les solutions sont les couples de coordonnées de n'importe quel point de (D) ou (D').

Exemple 1

Pour résoudre graphiquement le système :
$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$
,

on trace les droites (D) et (D') d'équations respectives $x + 2y = 3$ et $2x - y = 1$.



(D) et (D') se coupent au point A de coordonnées (1 ; 1).

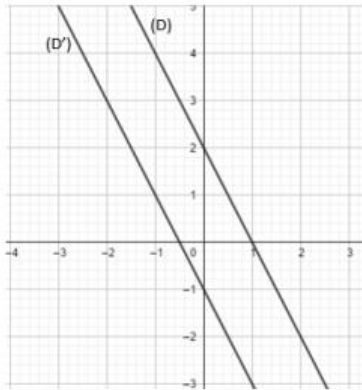
Donc le couple (1 ; 1) est la solution du système.

Exemple 2

Pour résoudre graphiquement le système : $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$

on trace les droites (D) et (D') d'équations respectives :

$2x + y = 2$ et $2x + y = -1$



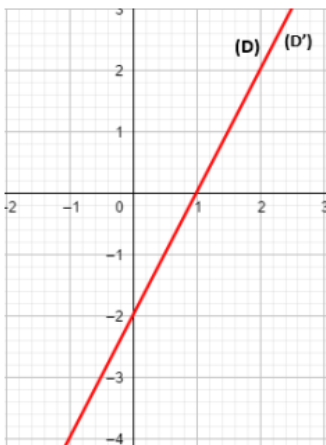
Les droites (D) et (D') sont parallèles (disjointes).

Donc le système n'a pas de solution.

Exemple 3

Pour résoudre graphiquement le système : $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 4x - 2y = 4 \end{cases}$

on trace les droites (D) et (D') d'équations respectives : $2x - y = 2$ et $4x - 2y = 4$.



(D) et (D') sont confondues.

Donc le système admet une infinité de solutions. Les solutions sont les couples de coordonnées de n'importe quel point de (D) ou (D').

III. Inéquations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

1) Définitions

Soient a, b et c des nombres réels tels que $(a; b) \neq (0; 0)$.

• On appelle inéquation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ toute inéquation d'un des types : $ax + by + c > 0$; $ax + by + c < 0$; $ax + by + c \geq 0$ ou $ax + by + c \leq 0$.

• Un couple $(x_0; y_0)$ de nombres réels est solution d'une des inéquations, signifie que x_0 et y_0 vérifient cette inéquation.

Exemple

$x - y + 3 < 0$ est une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

• Pour $x = 1$ et $y = 5$, on a : $1 - 5 + 3 = -1$.

$-1 < 0$ est vrai, donc le couple $(1; 5)$ est solution de l'inéquation.

• Pour $x = 0$ et $y = 0$, on a $0 - 0 + 3 = 3$. $3 < 0$ est faux. Donc $(0; 0)$ n'est pas solution de l'inéquation.

Exercice de fixation

Pour chaque ligne du tableau, une seule affirmation est vraie.

Recopie le numéro de la ligne et la lettre qui correspond à l'affirmation vraie.

N°	Affirmations	Réponses		
		A	B	C
1	Une solution de l'équation suivante : $x - y + 5 = 0$ est	(2 ; 3)	(3 ; 2)	(-2 ; 3)
2	Une solution de l'inéquation suivante : $x + y - 1 < 0$ est	(0 ; 0)	(1 ; 1)	(2 ; 2)
3	Une solution de l'inéquation suivante : $x - y + 2 > 0$ est	(-2 ; 1)	(2 ; -1)	(-5 ; -2)

2) Propriété

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) , on considère la droite (D) d'équation :

$$ax + by + c = 0.$$

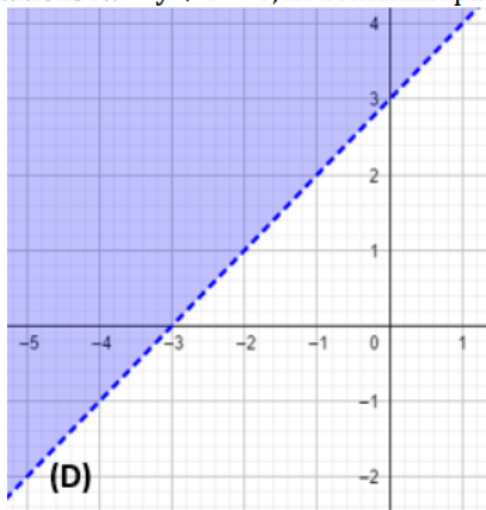
(D) partage le plan en deux demi-plans :

- L'un de ces demi-plans contient tous les points dont les coordonnées vérifient $ax + by + c > 0$ ou $ax + by + c \geq 0$
- L'autre demi-plan contient tous les points dont les coordonnées vérifient $ax + by + c < 0$ ou $ax + by + c \leq 0$

L'ensemble des solutions d'une inéquation est donc l'ensemble des couples de coordonnées des points d'un demi-plan.

Exemple

L'ensemble des solutions de l'inéquation : $x - y + 3 < 0$ est le demi-plan, de bord la droite (D) d'équation : $x - y + 3 = 0$, ne contenant pas le point $O(0 ; 0)$.



IV. Système d'inéquations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

1) Définitions

- On appelle système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ un système constitué de plusieurs inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- Résoudre un tel système, c'est trouver tous les couples de nombres qui vérifient toutes les inéquations (en même temps).

Exemple

$\begin{cases} x - y + 3 < 0 \\ x + y - 2 > 0 \end{cases}$ est un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2) Résolution graphique

Méthode

Pour résoudre graphiquement un système de deux inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

- 1) On trace, dans un même repère, la droite associée à chaque inéquation ;
- 2) On colorie (ou hachure) les demi-plans qui correspondent aux solutions de chaque inéquation ;
L'ensemble des solutions du système est l'intersection des deux demi-plans coloriés (ou hachurés).

Exemple

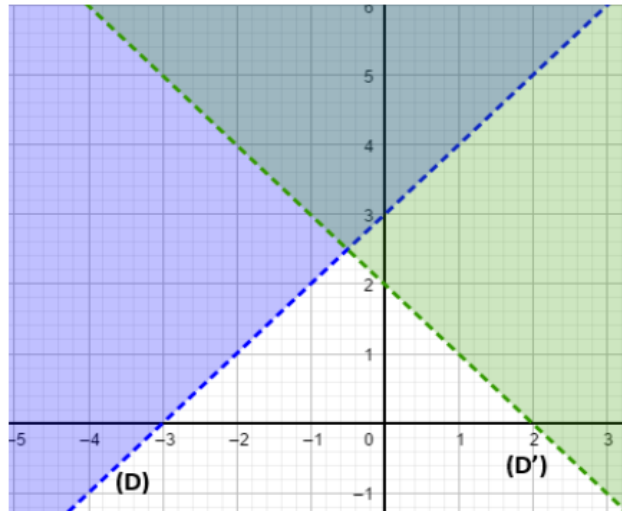
Pour résoudre graphiquement le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} x - y + 3 < 0 \\ x + y - 2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 3 < 0 \\ x + y - 2 > 0 \end{cases}$$

1. On trace, dans un même repère, (D) et (D') d'équations respectives :

$$x - y + 3 = 0 \text{ et } x + y - 2 = 0.$$



2. On hachure les demi-plans qui correspondent aux solutions de chaque inéquation.
L'ensemble de solutions est la partie hachurée deux fois (en bleu et en rouge).

V. Problème conduisant à une équation, une inéquation, un système d'équations ou un système d'inéquations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Méthode de résolution

Pour résoudre un problème conduisant à une équation, une inéquation, un système d'équations ou un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on peut procéder comme suit :

- 1) Choisir les inconnues ;
- 2) Mettre le problème en équations ou en inéquations [traduire les données de l'énoncé en langage mathématique par une (ou des) équation(s) ou inéquation(s)] ;
- 3) Résoudre l'équation, l'inéquation ou le système en utilisant une méthode appropriée ;
- 4) S'assurer que la (ou les) solution(s) trouvée(s) vérifie(nt) bien l'équation, l'inéquation ou le système ;
- 5) Conclure en interprétant le résultat trouvé.

Exemple

Un organisateur propose les tarifs suivants à un spectacle :

- 1 000 f pour les adultes
- 500 f pour les enfants.

A la fin du spectacle il fait une recette totale de 120 000 f pour 205 tickets vendus.

Déterminons le nombre d'adultes et celui d'enfants ayant assisté au spectacle.

LEÇON 13 : APPLICATIONS AFFINES

I. Applications affines

1. Définition

Soit a et b deux nombres fixés.

On appelle application affine de *coefficient* a et de *terme constant* b , la correspondance f qui à chaque nombre réel x associe le nombre réel $ax + b$.

On note : $f : x \mapsto ax + b$.

$ax + b$ est l'image de x par f et on note $f(x) = ax + b$.

Si $f(x) = y$ on dit que : y est l'image de x par f .

Dans l'écriture $ax + b$, a s'appelle le coefficient ; b s'appelle le terme constant.

Exemple

La correspondance $f : x \mapsto 2x + 1$ est une application affine.

- 2 est le coefficient et 1 est le terme constant.

Exercice de fixation

Complète les colonnes du tableau ci-dessous selon l'exemple traité à la ligne 1.

Correspondance	Application affine (oui ou non)	Coefficient	Terme constant
$l : x \mapsto -3x + \frac{1}{3}$	oui	-3	$\frac{1}{3}$
$m : x \mapsto 16x - 5$			
$n : x \mapsto 4x^2 - 5$			
$p : x \mapsto -4 + \frac{1}{7}x$			
$q : x \mapsto \frac{1}{7x} - 10$			
$r : x \mapsto x\sqrt{3} + 1$			

2. Calcul de l'image d'un nombre par une application affine

Méthode

Soit f une application affine telle que pour tout nombre réel x , $f(x) = ax + b$.

Pour calculer l'image d'un nombre réel t , on remplace x par t dans l'expression de $f(x)$.

On écrit : $f(t) = at + b$ et on calcule $at + b$.

Exercice de fixation

Calcule l'image de 2 et l'image de -1 par l'application affine $f : x \mapsto -5x + 7$.

3. Détermination du nombre x tel que $f(x) = y$, étant donné un nombre réel y et une application affine f

Méthode

Soit y un nombre réel donné et f une application affine telle que pour tout réel x , $f(x) = ax + b$.

Pour déterminer le nombre réel x tel que $f(x) = y$, on résout l'équation $ax + b = y$.

Exercice de fixation

On donne l'application affine $g : x \mapsto 5x - 7$.

Détermine le nombre réel x tel que $g(x) = 8$

4. Détermination l'expression d'une application affine f définie par deux nombres réels et leurs images

Exemple

Soit f une application affine telle que : $f(2) = -3$ et $f(4) = 1$.

Détermine l'expression de $f(x)$ pour tout nombre réel x .

5. Représentation graphique d'une application affine

a) Propriété

Le plan étant rapporté à un repère (O, I, J) , l'application affine f définie pour tout réel x par : $f(x) = ax + b$, a pour représentation graphique la droite (D) d'équation : $y = ax + b$.

Si $M(x; y)$ appartient à la droite (D) , alors x et y vérifient l'égalité $y = ax + b$.

Remarque

- Le coefficient a est le coefficient directeur de la droite (D) .
- La constante b est l'ordonnée à l'origine de f (l'image de 0 par f).

Exercice de fixation

Relie chaque application affine de la colonne 1 à la droite qui la représente dans la colonne 2.

Colonne 1		Colonne 2
f est l'application affine définie par : $f(x) = 3x - 2$	×	×
g est l'application affine définie par : $g(x) = -4x$	×	×
h est l'application affine définie par : $h(x) = -5x + 9$	×	×
k est l'application affine définie par : $k(x) = 8$	×	×
		La droite d'équation : $y = -4x$
		La droite d'équation : $y = 8$
		La droite d'équation : $y = 3x - 2$
		La droite d'équation : $y = -5x + 9$

b) Représentation graphique d'une application affine connaissant son expression

Méthode

Le plan étant rapporté à un repère (O, I, J) .

Pour tracer la droite (D) , représentation graphique de l'application affine f :

- on choisit deux nombres et on calcule leurs images. Chaque nombre et son image sont les coordonnées d'un point de la droite (D) ;
- on obtient ainsi deux points de (D) que l'on place dans le repère (O, I, J) ;
- on trace la droite qui passe par ces deux points qui est la droite (D) .

Exercice de fixation

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) , trace la droite (Δ) , représentation graphique de l'application affine f définie par : $f(x) = 0,5x - 3$.

c) Représentation graphique d'une application affine connaissant deux nombres réels et leurs images

Exercice de fixation

On donne l'application affine g telle que $g(-1) = 5$ et $g(3) = 1$.

Représente graphiquement g dans le plan muni d'un repère (O, I, J) .

6) Utilisation de la représentation graphique d'une application affine.

a) Détermination graphique de l'image d'un nombre par une application affine

Méthode

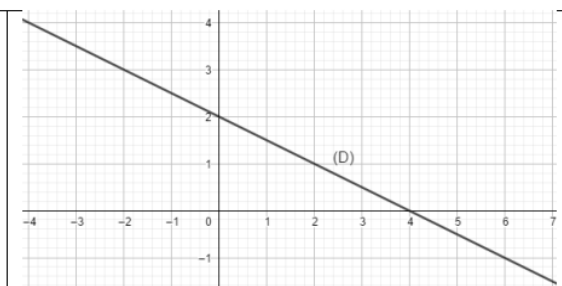
Pour déterminer l'image d'un réel m à partir de la représentation graphique (D) d'une application affine f dans un repère :

- on trace d'abord la droite (Δ) d'équation : $x = m$;
- la droite (Δ) coupe la droite (D) en un point A d'abscisse m ;
- l'ordonnée n de A est l'image de m par f .

Exercice de fixation

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) ci-contre, la droite (D) est la représentation graphique d'une application affine g .

1. Détermine graphiquement l'image de 1 par g .
2. Détermine graphiquement l'image de (-2) par g .



b) Détermination graphique du nombre réel m tel que $f(m) = n$, f étant une application affine

Méthode

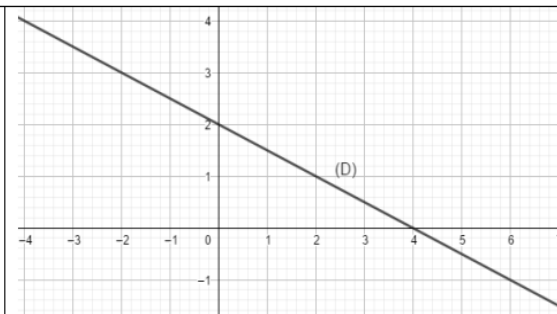
Etant donné un nombre réel n , pour déterminer graphiquement le nombre réel m tel que $f(m) = n$ à partir de la représentation graphique (D) d'une application affine f :

- on trace d'abord la droite (Δ) d'équation $y = n$;
- la droite (Δ) coupe la droite (D) en un point A d'ordonnée n ;
- l'abscisse du point A est le nombre m cherché.

Exercice de fixation

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) ci-contre, la droite (D) est la représentation graphique d'une application affine f .

1. Détermine graphiquement le nombre réel m tel que : $f(m) = 3,5$.
2. Détermine graphiquement le nombre réel t tel que : $f(t) = -1$.



c) Détermination de l'expression d'une application affine connaissant une équation de sa représentation graphique

Méthode

Une droite (D) d'équation : $px + qy + r = 0$ est la représentation graphique d'une application affine.

Pour connaître l'expression de cette application affine, il suffit de réécrire l'équation de la droite sous la forme $y = ax + b$.

Exercice de fixation

Détermine l'expression de l'application affine dont la droite donnée est sa représentation graphique dans un repère.

1. La droite (Δ) d'équation : $3x + y - 5 = 0$ est la représentation graphique de f .
2. La droite (D) d'équation : $2x - 3y - 15 = 0$ est la représentation graphique de g .

d) Détermination de l'expression d'une application affine f à partir de sa représentation graphique :

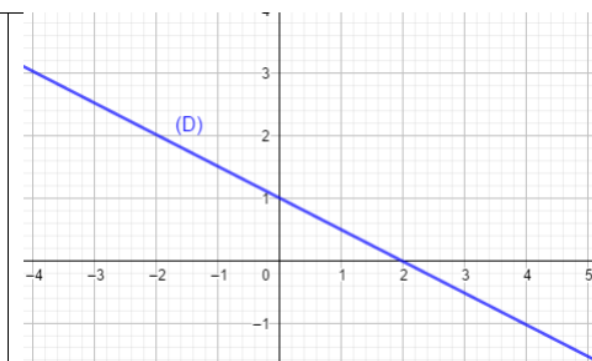
Méthode

Pour déterminer l'expression d'une application affine f à partir de sa représentation graphique dans un repère, il faut choisir deux points A et B dont on peut lire facilement les coordonnées sur le graphique.

Puis on remplace x et $f(x)$ par les coordonnées des points A et B dans l'expression : $f(x) = ax + b$, pour déterminer les nombres réels a et b .

Exercice de fixation

Détermine l'expression de l'application affine f dont la représentation graphique (D) est donnée par la figure ci-contre.



7. Sens de variation d'une application affine

a) Définitions

Soit f une application affine, m et n deux nombres réels quelconques.

- On dit que f est croissante lorsque pour tous nombres réels m et n , si $m > n$, alors $f(m) > f(n)$.
- On dit que f est décroissante lorsque pour tous nombres réels m et n , si $m > n$, alors $f(m) < f(n)$.
- On dit que f est constante lorsque pour tous nombres réels m et n , si $m > n$, alors $f(m) = f(n)$.

Exemple

- f est l'application affine telle que : $f(-5) = 3$ et $f(2) = 7$.
On a : $-5 < 2$ et $f(-5) < f(2)$. Donc, f est croissante.
- g est l'application affine telle que : $g(1) = -2$ et $g(3) = -6$.
On a : $1 < 3$ et $g(1) > g(3)$. Donc, g est décroissante.

b) Propriétés

Soit f une application affine définie par : $f(x) = ax + b$.

- Si $a > 0$, alors l'application f est croissante.
- Si $a < 0$, alors l'application f est décroissante.
- Si $a = 0$, alors l'application f est constante.

Exercice de fixation

Complète le tableau suivant en mettant une croix dans la case qui convient, puis justifie.

Application affine	Décroissante	Constante	Croissante	Justification
$f: x \mapsto 2x - 1$				
$g: x \mapsto -5x + 3$				
$h: x \mapsto 12$				
$i: x \mapsto -8 + 3x$				
$j: x \mapsto -\sqrt{5}$				
$k: x \mapsto -(7 - 0,5x)$				
$l: x \mapsto 10 - \frac{3}{4}x$				
$m: x \mapsto -(-1 + 23x)$				

c) Utilisation du sens de variation d'une application affine pour comparer les images de nombres réels

Exercice de fixation

On donne les applications affines f ; g et h telle que f est constante, g est décroissante et h est croissante. Compare :

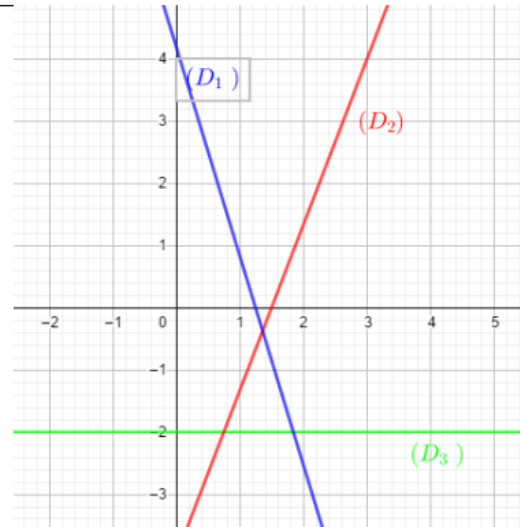
1. $f(136)$ et $f(-7)$;
2. $g(1,5)$ et $g(4,3)$;
3. $h(-9)$ et $h(-14)$.

d) Le sens de variation d'une application affine et sa représentation graphique

- Lorsqu'une application affine est *croissante*, sa représentation graphique est une droite « montante » de la gauche vers la droite.
- Lorsqu'une application affine est *décroissante* sa représentation graphique est une droite « descendante » de la gauche vers la droite.
- Lorsqu'une application affine est *constante* sa représentation graphique est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Exemple

Soit les droites (D_1) , (D_2) et (D_3) représentées dans le repère ci-contre.



- La droite (D_1) , en bleu, est descendante de la gauche vers la droite. Donc elle est la représentation graphique d'une application affine décroissante.
- La droite (D_2) , en rouge, montante de la gauche vers la droite. Donc elle est la représentation graphique d'une application affine croissante.
- La droite (D_3) , en vert, est parallèle à l'axe des abscisses. Donc elle est la représentation graphique d'une application affine constante.

II. Applications linéaires

1. Définition

Soit a un nombre.

On appelle application linéaire de coefficient a , toute application affine f telle que $f(x) = ax$.

Exemples

- Les applications f et g telles que $f(x) = -7x$ et $g(x) = x\sqrt{2}$ sont des applications linéaires.
- L'application h telle que $h(x) = -4x + 3$ n'est pas une application linéaire.

Remarque

Une application linéaire étant une application affine, tout ce que nous avons vu concernant les applications affines est aussi valable pour les applications linéaires.

Exercices de fixation

Exercice 1

Parmi les applications affines suivantes, écris dans ton cahier les numéros de celles qui sont des applications linéaires.

N°	Applications affines
1	$f : x \mapsto -7x + 4$
2	$g : x \mapsto 3x$
3	$h : x \mapsto -11x - 10$
4	$j : x \mapsto 4$
5	$k : x \mapsto x$

Exercice 2

On donne l'application linéaire f telle que $f(x) = x\sqrt{2}$.

- Calcule l'image par f de -2 , de 0 puis de $\sqrt{2}$.
- Détermine le nombre réel m tel que $f(m) = 1$.

Exercice 3

On donne l'application linéaire g telle que $g(-6) = 2$.
Détermine l'expression de $g(x)$.

2. Représentation graphique d'une application linéaire

Propriété

Le plan est rapporté à un repère (O, I, J) .

La représentation graphique d'une application linéaire f est une droite qui passe par l'origine du repère c'est-à-dire le point de couple de coordonnées $(0; 0)$.

Exercices de fixation

Exercice 1

Dans le plan muni d'un repère, trace la droite (D) représentation graphique de l'application linéaire f telle que $f(x) = -\frac{3}{2}x$.

3. Les propriétés de linéarité

a) Propriétés

Soit f une application linéaire, m, n et k sont des nombres réels. On a :

- $f(m + n) = f(m) + f(n)$
- $f(km) = kf(m)$

Exercice de fixation

Soit f une application linéaire telle que $f(2) = -6$ et $f(-3) = 9$
Calcule $f(-1)$, $f(5)$ et $f(9)$ sans déterminer $f(x)$.

b) Traduire une situation de proportionnalité par une application linéaire

Exercice de fixation

Au marché Gouro d'Adjamé, un kilogramme (kg) d'oranges coûte 340 FCFA.

- Cauphy y achète $1,5 kg$ d'oranges. Détermine le montant à payer.
- Détermine le montant à payer si Cauphy y achète $x kg$ d'oranges.
- Etablis la correspondance qui, à chaque quantité d'oranges exprimée en kg , associe la somme en FCFA à payer.

LEÇON 14 : PYRAMIDES ET CÔNES

I. Pyramides

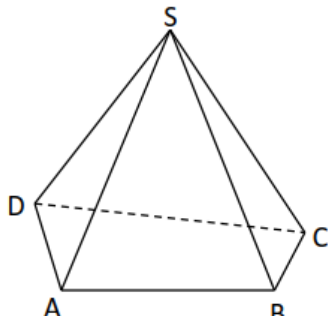
1. Présentation

Une pyramide est un solide qui a :




- un **sommet** appelé aussi le sommet principal ;
- une **base** en forme de polygone (une figure plane qui a plusieurs côtés et qui est formée d'une ligne brisée fermée) ;
- des **faces latérales** triangulaires ayant un même sommet appelé « sommet principal » ;
- le sommet principal du solide est relié aux sommets de sa base par des segments appelés arêtes de la pyramide.



Exemple

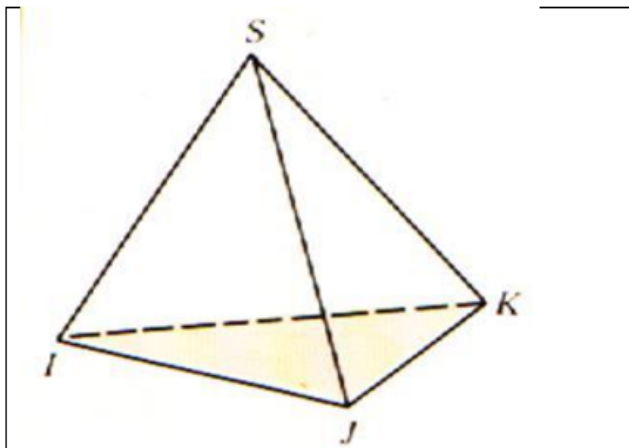
<p>Le solide SABCD représenté ci-contre est une pyramide.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Le point S est le sommet de la pyramide. • Le quadrilatère ABCD est la base de la pyramide. • Les triangles SAB, SBC, SDC et SDA sont les faces latérales de la pyramide. • Les segments [SA], [SB], [SC], [SD], [AB], [BC], [CD] et [DA] sont les arêtes de la pyramide. 	
---	--

Exemples de pyramides particulières

Nom	Tétraèdre	Pyramide carrée	Pyramide pentagonale
Solide			
Base	Triangle équilatéral	Carré	Pentagone régulier

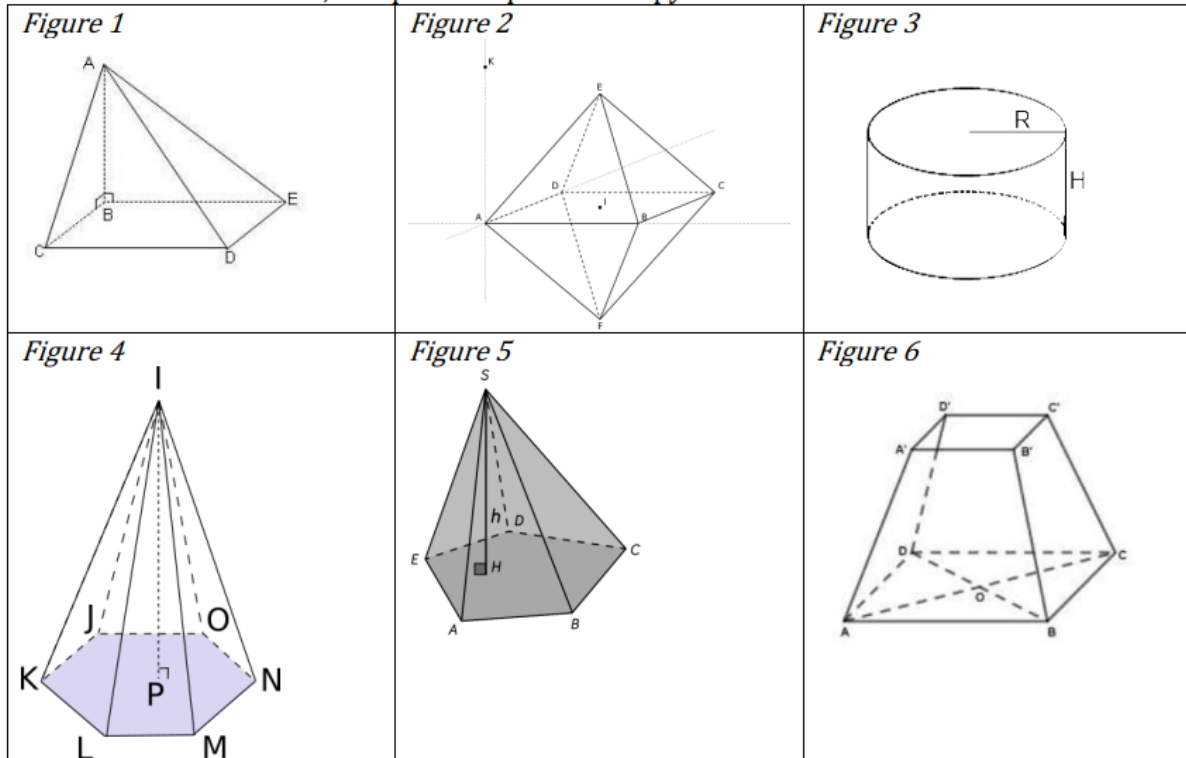
Remarques

- Une pyramide a autant de faces latérales que sa base a de côtés.
- Dans une pyramide à base triangulaire, chaque face latérale peut être considérée comme base de cette pyramide et chaque sommet peut être considéré comme le sommet de cette pyramide.



Exercice de fixation

Parmi les solides suivants, indique ceux qui sont des pyramides



2. Hauteur d'une pyramide

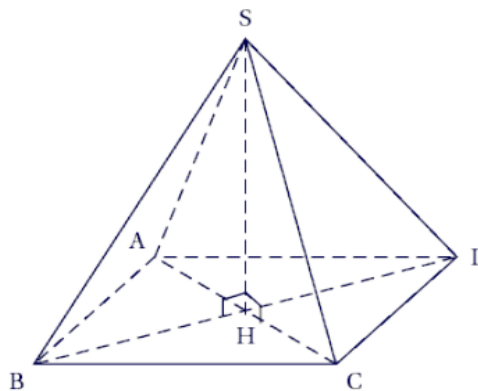
Définition

• On appelle hauteur d'une pyramide, la droite qui passe par le sommet de cette pyramide et qui est perpendiculaire au plan de sa base.

Exemple

Dans la pyramide SABCD ci-contre, le support du segment [SH] est perpendiculaire au plan de la base ABCD.

Donc le segment [SH] est la hauteur de cette pyramide.



3. Apothème d'une pyramide

Définition

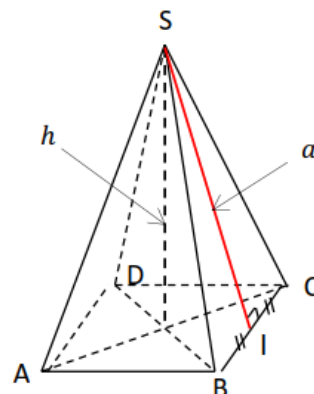
Un apothème d'une pyramide est la hauteur d'une face latérale issue du sommet de la pyramide.

Exemple

Dans la pyramide SABCD ci-contre, le segment [SI] est un apothème.

Remarque

Un apothème est aussi une longueur de la hauteur d'une face latérale issue du sommet de la pyramide.



4. Pyramide régulière

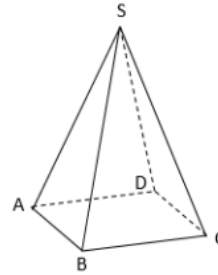
a) Définition

Une pyramide est dite **régulière** lorsque :

- Sa base est un **polygone régulier** (polygone inscrit dans un cercle et dont tous les côtés ont la même longueur). Par exemple, la base peut être un triangle équilatéral, un carré, ...
- Ses faces latérales sont des triangles **isocèles** superposables.

Exemple

Sur la figure ci-contre, SABCD est une pyramide régulière car sa base ABCD est un carré et les triangles SAB ; SBC ; SCD et SDA sont isocèles.



b) Propriétés

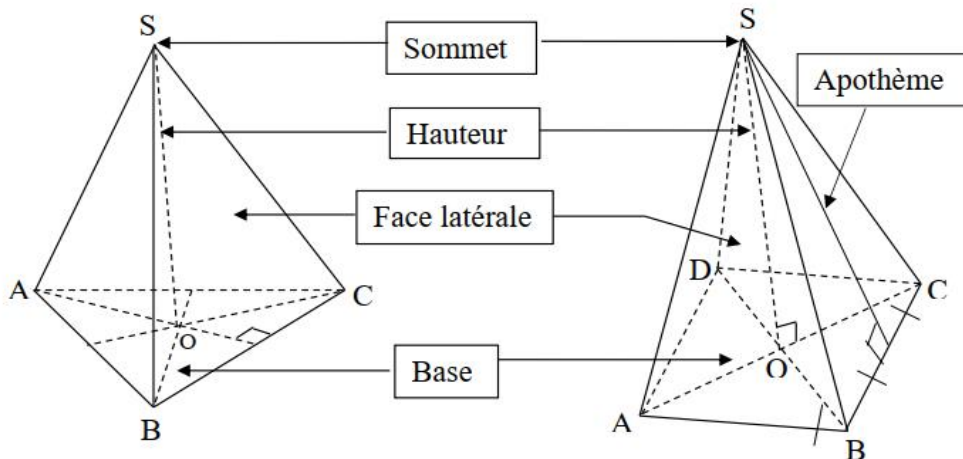
- Si une pyramide est régulière, alors sa hauteur passe par le sommet de la pyramide et le centre du cercle circonscrit à sa base.
- L'apothème d'une pyramide régulière est la hauteur d'une face latérale.

Remarques :

- Dans le cas de la pyramide à base carrée, le centre de la base correspond à l'intersection des diagonales.
- Pour une base en forme de triangle équilatéral, cela correspond à l'intersection des médianes.

c) Exemples des pyramides régulières

Les figures ci-dessous représentent deux pyramides régulières



SABC est une pyramide régulière de base : le triangle équilatéral ABC.

SABCD est une pyramide régulière de base : le carré ABCD.

Exercices de fixation

Exercice 1

Parmi les figures ci-dessus, indique celles qui représentent des pyramides régulières.

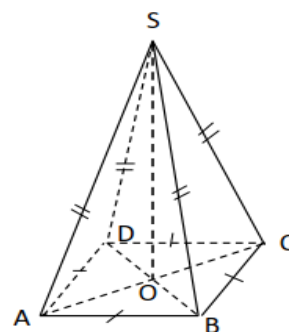
<p>Figure 1</p>	<p>Figure 2</p>	<p>SA=SB=SC=SD</p> <p>Figure 3</p>
------------------------	------------------------	---

Exercice 2

La figure SABCD ci-contre est une pyramide régulière de base carrée.

Fais correspondre chaque désignation de la colonne 1 à la désignation correspondante de la colonne 2.

Colonne 1	Colonne 2
S	• Face latérale
SAB	• Hauteur
ABCD	• Sommet
(SO)	• Base



5. Aire latérale et volume d'une pyramide régulière

Propriétés

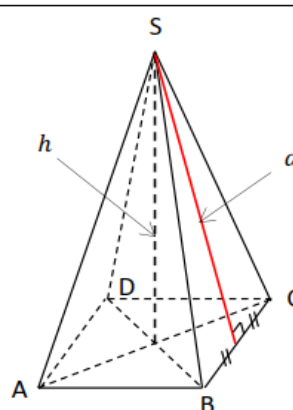
SABCD est une pyramide régulière de base un polygone régulier ABCD.

Aire latérale (\mathcal{A})

$\mathcal{A} = \frac{P \times a}{2}$, où P est le périmètre de la base et a l'apothème (hauteur d'une face latérale).

Volume de la pyramide (V)

$V = \frac{B \times h}{3}$, où B est l'aire de la base et h la hauteur de la pyramide.



Remarque :

L'aire totale \mathcal{A}_T d'une pyramide fermée à la base est égale à la somme de l'aire latérale \mathcal{A} et de l'aire de la base B de cette pyramide. Soit $\mathcal{A}_T = \mathcal{A} + B$.

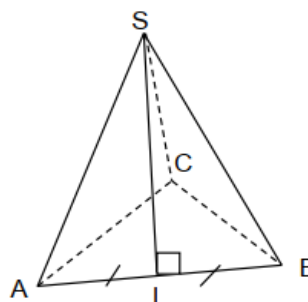
Exercices de fixation

Exercice 1

Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur, SABC est une pyramide régulière de sommet principal S et de base le triangle équilatéral ABC. I est le milieu du segment [BC].

On donne : $SB=9$ cm, $AB=6$ cm et $SI = 6\sqrt{2}$ cm.

- 1) Que représente [SI] pour la pyramide ?
- 2) Calcule l'aire latérale de la pyramide SABC.



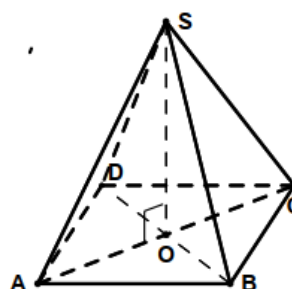
Exercice 2

L'unité de longueur est le centimètre.

SABCD est une pyramide régulière de sommet S et de base le carré ABCD de centre O.

On donne : $SO = 12$ et $AB = 6$.

Calcule le volume V de la pyramide SABCD.



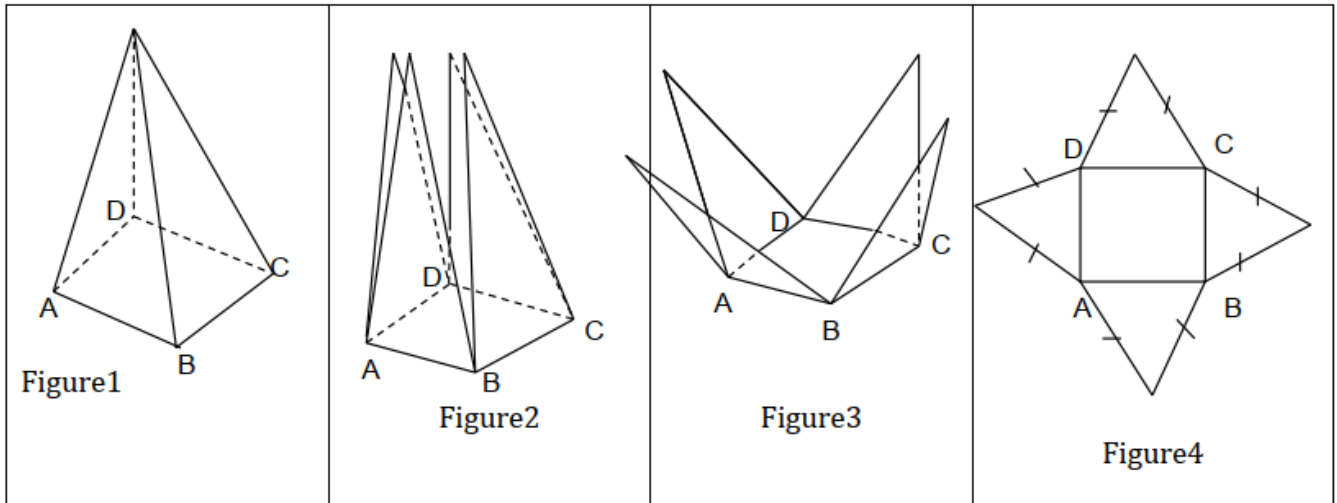
6. Patron d'une pyramide régulière

Définition

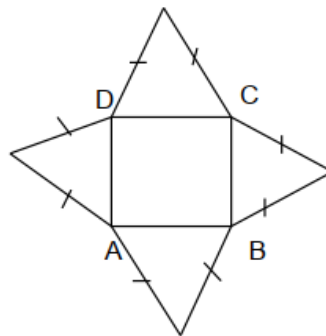
Un **patron** d'une pyramide est une surface plane, qui, par pliage, doit permettre de retrouver la pyramide.

Exemple

Les figures ci-dessous sont les étapes de dépaillage d'une pyramide régulière à base carrée pour obtenir un patron.

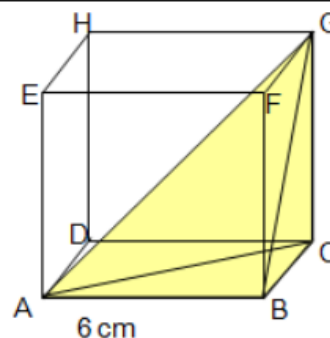


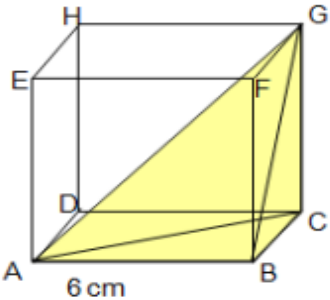
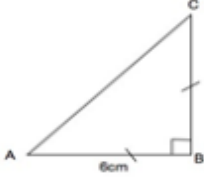
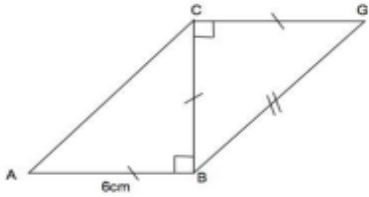
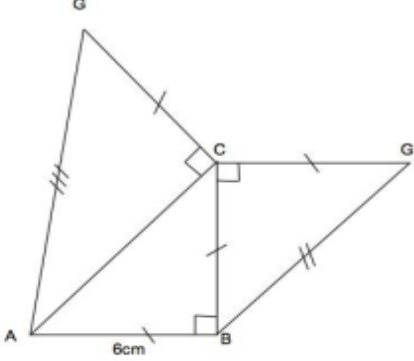
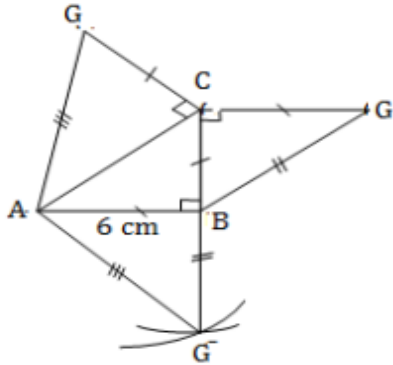
La figure 4 est un patron de la pyramide régulière à base carrée.



Exemple de construction d'un patron de pyramide

Construis le patron de la pyramide GABC inscrite dans le cube ABCDEFGH



	<p>Etape 1 On commence par tracer par exemple la base de la pyramide qui est le triangle ABC rectangle et isocèle en B tel que $AB=BC=6\text{ cm}$.</p> 	<p>Etape 2 On trace ensuite la face de droite qui est le triangle BCG rectangle et isocèle en C tel que $CG=6\text{ cm}$</p> 
<p>Etape 3 On trace ensuite la face arrière qui est le triangle ACG rectangle en C tel que $CG=6\text{ cm}$</p> 	<p>Etape 4 On finit en traçant la face de devant qui le triangle ABG. Pour cela, on reporte au compas les longueurs AG et BG déjà construites sur les autres triangles.</p> 	

II. CÔNE DE RÉVOLUTION

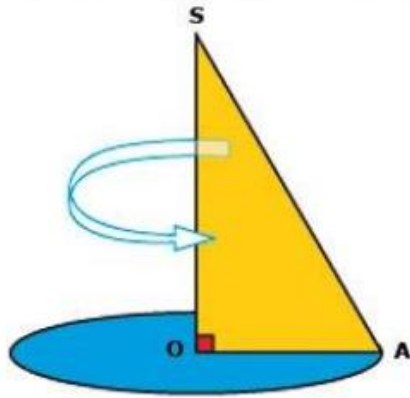
Quelques images de cônes de révolution



Les parties supérieures de ces châteaux d'eau ont la forme d'un cône de révolution.

1. Présentation

Considérons un triangle SOA rectangle en O.



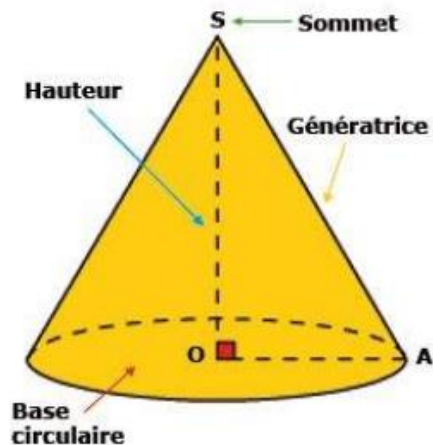
Faisons tourner le triangle SOA rectangle en O autour de la hauteur (SO).
On génère un **cône**. L'hypoténuse d'un tel triangle est appelé **génératrice** du cône.

Le solide représenté ci-contre est un cône de révolution dont le sommet est S, la base est le disque (D) de centre O et de rayon [OA].

- La droite (SO) est l'axe de révolution du cône.
- Le support du segment [SO] est la hauteur du cône.
- Le segment [SA] est une génératrice de ce cône.

Remarque

L'apothème du cône est confondu à sa génératrice.



2. Hauteur d'un cône de révolution

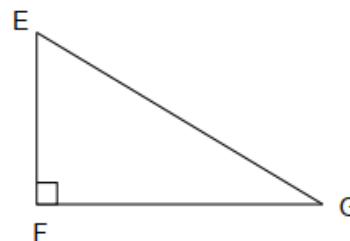
Définition :

On appelle hauteur d'un cône, la droite qui passe par son sommet et qui est perpendiculaire au plan de sa base.

La distance du sommet au centre O du disque de base s'appelle aussi la hauteur du cône.

Exercice de fixation

On donne la figure codée ci-contre.
Complète chacune des phrases suivantes à l'aide de l'une des expressions suivantes :
une génératrice ; la rotation ; le rayon de la base ; la hauteur.



- 1) Un cône de révolution est engendré par du triangle EFG autour de la droite (FE).
- 2) Le segment [FG] est du cône.
- 3) Le segment [EG] est du cône.
- 4) La distance FE est du cône.

3. Patron d'un cône de révolution

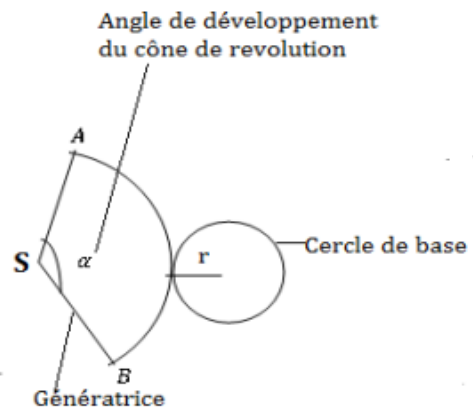
Définition

Définition

Le patron d'un cône de révolution est composé d'un disque qui est la base du cône et d'un secteur angulaire, qui est la face latérale.

L'angle du secteur angulaire α du patron est l'angle de développement du cône.

$\alpha = 360^\circ \times \frac{r}{g}$, où r est le rayon du disque et g est la génératrice du cône.
 α est en degré.



Remarque

- La longueur de l'arc \widehat{AB} est égale au périmètre du cercle de base.
- Le patron d'un cône est obtenu en traçant le cercle de base et la surface latérale. Pour cela, il faut connaître la génératrice g , le rayon du disque r et l'angle de développement α .

Exercices de fixation

Exercice 1

Un secteur angulaire de mesure 130° et de rayon 3cm est la surface latérale d'un cône de révolution. On donne $\pi = 3,14$.

Calcule le périmètre de base P de ce cône.

4. Formules de l'aire latérale et du volume d'un cône de révolution.

• Aire latérale (\mathcal{A})

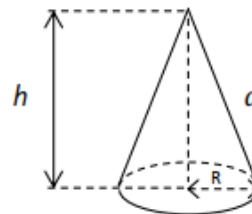
$$\mathcal{A} = \frac{P \times a}{2}$$

Où P désigne le périmètre de la base et a la génératrice ou l'apothème.

• Volume d'un cône de révolution

$$V = \frac{B \times h}{3}$$

Où B est l'aire de la base et h la hauteur du cône.



Remarque :

L'aire totale \mathcal{A}_T du cône est égale à la somme de l'aire latérale \mathcal{A} et de l'aire B du disque de base. Soit $\mathcal{A}_T = \mathcal{A} + B$.

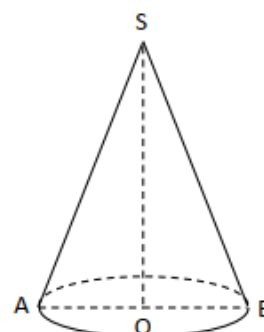
Exercice de fixation

L'unité de longueur est le centimètre.

La figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur, représente un cône de révolution de sommet S , de hauteur SO et de base, le disque de diamètre AB .

On donne : $AB = 10$, $SO = 12$ et $SA = 13$.

- 1) Calcule l'aire latérale de ce cône.
- 2) Calcule le volume de ce cône.

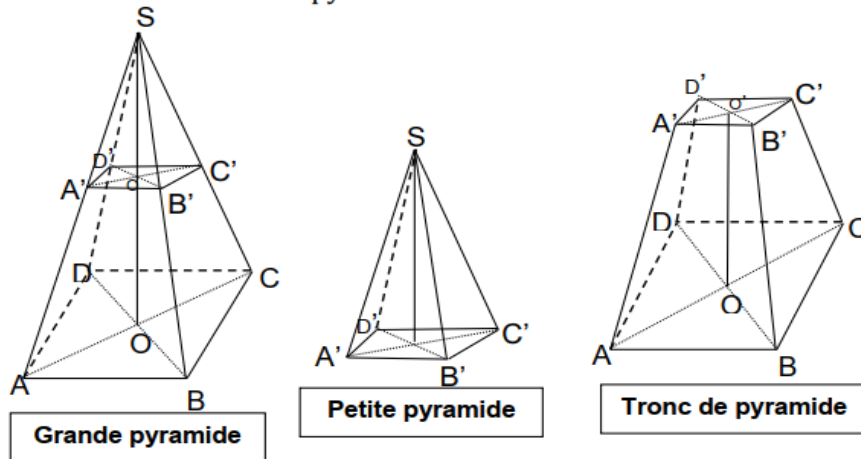


III. Sections planes

1. Section d'une pyramide régulière par un plan parallèle au plan de la base

a) Présentation –vocabulaire

- Sur la figure ci-dessous SABCD est une pyramide régulière à base carrée. A' est un point du segment [SA]. Le plan (P) passant par A' et parallèle au plan (ABC) de la base coupe (SB) en B', (SC) en C' et (SD) en D'.
- L'intersection de cette pyramide et du plan (P) est un carré. C'est la section de la pyramide SABCD par le plan (P). On obtient alors une petite pyramide SA'B'C'D' et un tronc de pyramide ABCDA'B'C'D'.



b) Propriété

La section d'une pyramide par un plan parallèle à la base est un polygone de même nature que cette base. Les supports des côtés de ces deux polygones sont parallèles deux à deux.

c) Propriété de réduction

Lorsqu'on coupe une pyramide régulière par un plan parallèle au plan de sa base, on obtient une réduction de cette pyramide.

Si l'échelle de réduction est égale au nombre k alors :

$$\bullet \frac{\text{La longueur d'un segment de la pyramide réduite}}{\text{La longueur d'un segment correspondant de la pyramide}} = k.$$

$$\bullet \frac{\text{Aire de la pyramide réduite}}{\text{Aire de la pyramide}} = k^2.$$

$$\bullet \frac{\text{Volume de la pyramide réduite}}{\text{Volume de la pyramide}} = k^3.$$

Exercices de fixation

Exercice 1

Recopie et complète les phrases ci-dessous avec les groupes de mots suivants :
les volumes, les longueurs, les aires.

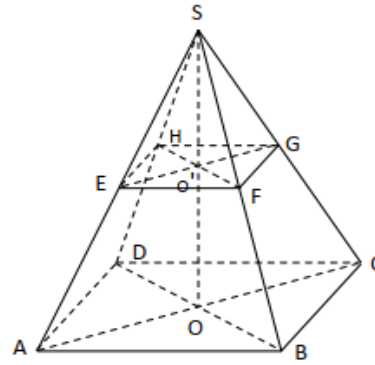
Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k

- sont multipliées par k
- sont multipliées par k^2
- sont multipliés par k^3

Exercice 2

L'unité de longueur est le centimètre.
 Sur la figure ci-contre, $SABCD$ est une pyramide régulière de base, le carré $ABCD$, de sommet S et de hauteur SO . On donne : $AB = 6\sqrt{2}$ et $SO = 8$.

- 1) Justifie que le volume de la pyramide est 192 cm^3
- 2) On réalise une section parallèle au plan de la base au point E telle que $SE = \frac{3}{4}SA$.
 - a) Justifie que $EF = \frac{9}{2}\sqrt{2}$.
 - b) Calcule l'aire du carré $EFGH$.
 - c) Calcule le volume du petit cône $SEFGH$.

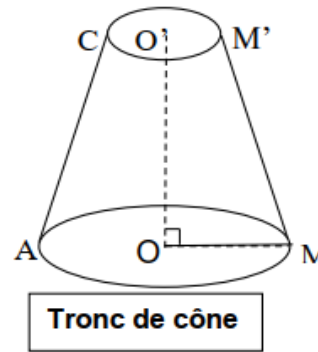
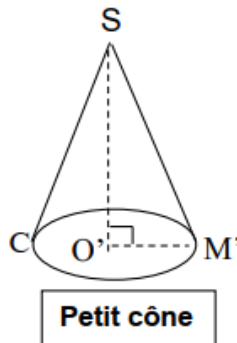
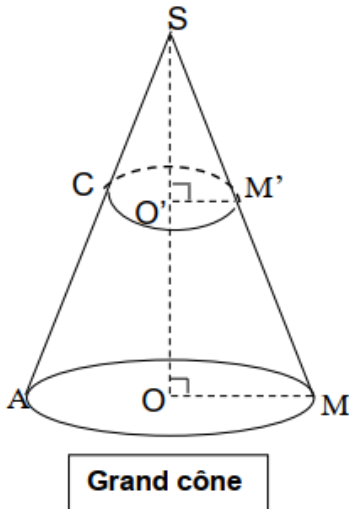


2. Section d'un cône de révolution par un plan parallèle au plan de la base

a) Présentation -vocabulaire

On considère un cône de révolution de sommet S , de base le disque de centre O et de diamètre $[AB]$.

- C est un point de la génératrice $[SA]$. Le plan (P) passant par C et parallèle au plan de la base du cône coupe la génératrice $[SM]$ en M' .
- L'intersection du cône et du plan (P) est un disque. C'est la section du cône par le plan (P) .
 On obtient un petit cône de sommet S , de base le disque de centre O' et un tronc de cône.



b) Propriété

La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base est un disque.

c) Propriété de réduction

Lorsqu'on coupe un cône de révolution par un plan parallèle au plan de sa base, on obtient une réduction de ce cône.

Si l'échelle de réduction est égale au nombre k alors :

$$\bullet \frac{\text{La longueur d'un segment du cône réduit}}{\text{La longueur d'un segment correspondant du cône}} = k$$

$$\bullet \frac{\text{Aire du cône réduit}}{\text{Aire du cône}} = k^2$$

$$\bullet \frac{\text{Volume du cône réduit}}{\text{Volume du cône}} = k^3$$

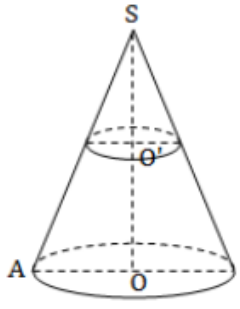
Exercices de fixation

Exercice 1

Réponds par Vrai ou par Faux à chacune des affirmations suivantes :

Affirmations	Réponses
La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base est un rectangle.	
Si on réduit un cône de révolution en multipliant les longueurs par $\frac{2}{3}$ alors son volume est multiplié par $\left(\frac{2}{3}\right)^3$.	
La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base est un disque.	

Exercice 2

<p>On considère un cône de révolution de sommet S et de base, le disque de centre O. On donne : $OA = 3 \text{ cm}$; $SO = 10 \text{ cm}$</p> <p>1) Justifie que le volume V du cône est $30\pi \text{ cm}^3$</p> <p>2) On coupe le cône par un plan parallèle au plan de la base. Ce plan passe par le point O' du segment $[SO]$ tel que : $SO' = \frac{2}{3}SO$</p> <p>Calcule le volume V' du petit cône.</p>	
---	--

3) Tronc d'une pyramide ou d'un cône de révolution

Propriété.

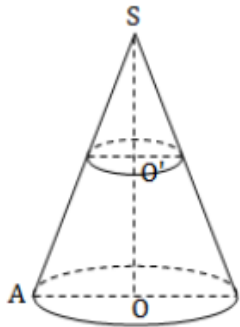
Si A_G désigne l'aire latérale de la grande pyramide (ou du grand cône) et A_P désigne l'aire latérale de la pyramide réduite (ou du cône réduit).

L'aire A_T du tronc est : $A_T = A_G - A_P$.

Si V_G désigne le volume de la grande pyramide (ou du grand cône) et V_P désigne le volume de la pyramide réduite (ou du cône réduit).

Le volume V_T du tronc est : $V_T = V_G - V_P$.

Exercice de fixation

<p>On considère les résultats de l'exercice précédent :</p> <p>Le volume du grand cône est : $V_G = 30\pi \text{ cm}^3$ et le volume du petit cône $V_P = \frac{80\pi}{9} \text{ cm}^3$.</p> <p>Calcule le volume V_T du tronc de ce cône.</p>	
---	--