

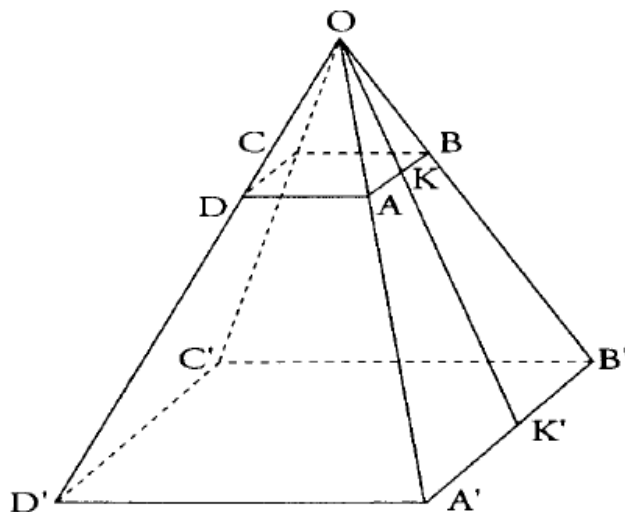
BURKINA FASO

MATHEMATIQUES 3^{ÈME}

COLLECTION

« LA SOLUTION »

- ❖ Cours détaillés par chapitre.
- ❖ Exercices et problèmes par chapitre dont plus de la moitié est corrigée
- ❖ Un recueil de sujets de devoir surveillés sur table
- ❖ Des travaux dirigés corrigés.



$$\sqrt{(ax+b)^2} = |ax+b|$$

Prix : 2 300 F CFA

REPRODUCTION INTERDITE

Septembre 2023

OUEDRAOGO HAROUNA
(Professeur certifié de Maths/PC)

MATHEMATIQUES

3^{ème}

COLLECTION

« LA SOLUTION »

AUTEUR : OUEDRAOGO HAROUNA

(Professeur certifié de Maths/PC)

- La rédaction
- La mise en page
- La conception graphique

1^{ère} Edition : Septembre 2023



NOTE DE L'AUTEUR

La Collection « **SOLUTION Maths** » troisième est destinée aux élèves, aux enseignants et à tous ceux qui sont dans le besoin. Ainsi, il respecte bien le programme de mathématiques troisième défini par les instructions officielles au Burkina Faso.

Cet ouvrage contient :

- Un cours détaillé par chapitre avec des exercices d'application ;
- Des exercices et problèmes très variés dont plus de la moitié est corrigée ;
- Un recueil de sujets de devoirs surveillés sur table
- Des travaux dirigés et corrigés.

En écrivant ces lignes, nous avons souhaité mettre à la disposition des élèves et des professeurs, un outil de travail très pratique, agréable et attrayant qui permettra aux élèves de la classe de 3^{ème} de dérouler eux-mêmes les outils de la leçon qui leur sont nécessaires à la résolution des exercices et aux professeurs d'exercer au mieux « leur métier d'enseignant »

La perfection étant utopique, nous avons l'intime conviction et le ferme espoir que les éventuelles erreurs que pourrait contenir ce manuel rencontreront l'indulgente compréhension des utilisateurs. Toutefois, nous recevons avec amour toutes éventuelles suggestions ou critiques constructives via l'une des adresses suivantes :

Whatsapp : **73 51 91 11 ou 75 42 86 34**

Boite mail : **harounao925@gmail.com**.

MISE EN GARDE

- Il est interdit de partager ce document dans un groupe whatsapp
- **Pas de modification**: vous n'avez pas le droit de modifier, de transformer ou d'adapter ce document.
- **Pas de vente** : Vous n'avez pas le droit de vendre ce document.

REMERCIEMENTS

OUEDRAOGO Laurent, Professeur certifié de Mathématiques et Sciences Physiques

OUEDRAOGO Moumouni, Professeur certifié de Mathématiques et Sciences Physiques

SAWADOOGO Moussa, Professeur certifié de Mathématiques et Sciences de la Vie et de Terre.

YELNOGO Bénéwendé Alban Gildas, Professeur certifié de Mathématiques et Sciences Physiques

Nous remercions également tous ceux qui ont encouragé et favorisé la parution de ce document.

SOMMAIRE

Contenus	Pages
Chapitre 1 : Nombres réels	5
Chapitre 2 : Vecteurs du plan	14
Chapitre 3 : Repère cartésien	20
Chapitre 4 : Racine carrée d'un réel positif	28
Chapitre 5 : Equations et inéquations du 1 ^{er} degré dans $\mathbb{R}$	35
Chapitre 6 : Rapport de projection	42
Chapitre 7 : Monômes et polynômes	47
Chapitre 8 : Théorème de Pythagore et sa réciproque	54
Chapitre 9 : Fonctions rationnelles	61
Chapitre 10 : Théorèmes de Thales et sa réciproque	67
Chapitre 11 : Repère orthonormé – distance de deux points	74
Chapitre 12 : Angles inscrits	82
Chapitre 13 : Equations de droites	89
Chapitre 14 : Relations trigonométriques dans un triangle rectangle	100
Chapitre 15 : Systèmes d'équations – Systèmes d'inéquations du 1 ^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	106
Chapitre 16 : Positions relatives d'une droite et d'un cercle	116
Chapitre 17 : Applications linéaires – Applications affines	122
Chapitre 18 : Statistiques	134
Chapitre 19 : Isométries du plan	143
Chapitre 20 : Section de solides	149
Recueil des sujets de devoirs	156
Travaux dirigés (TD)	167
Corrigés des travaux dirigés (TD)	173

Chapitre 1 : Nombres réels

I°) Rappels sur les ensembles de nombres

Les nombres que nous étudions jusqu'à présent sont regroupés en deux grands groupes :

- Les nombres rationnels ;
- Les nombres irrationnels.

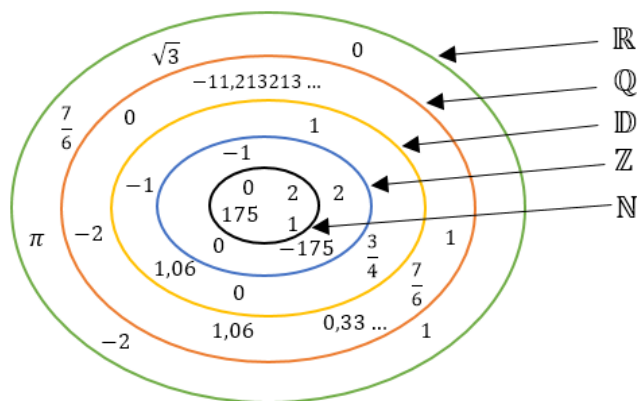
Les nombres rationnels sont des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'une suite décimale illimitée périodique (**SDIP**). Cet ensemble de nombre noté $\mathbb{Q}$ contient les sous-ensembles suivants :

- ✓ $\mathbb{N}$: Ensemble des entiers naturels ;
- ✓ $\mathbb{Z}$: Ensemble des entiers relatifs ;
- ✓ $\mathbb{D}$: Ensemble des décimaux relatifs.

Les nombres irrationnels sont des nombres qui ne correspondent pas à des suites décimales illimitées périodiques. Ils ne peuvent pas être écrits sous la forme d'une fraction.

EXEMPLE : Le nombre π (π) qui est souvent arrondi à 3,14

Rétiens : L'ensemble des nombres représentés par des suites décimales illimitées périodiques ou non s'appelle l'ensemble des nombres réels. Cet ensemble se note $\mathbb{R}$.



NB : Le nombre $\sqrt{3} \approx 1,732050807568$ sera vu très prochainement (Chapitre 4)

Par synthèse, on peut écrire que : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

II°) Intervalles de $\mathbb{R}$

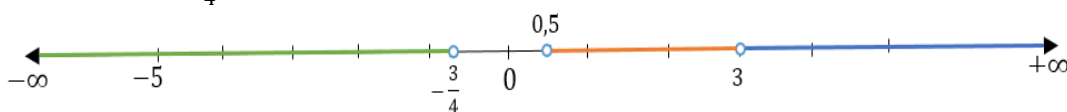
1) Activité

Trace une droite graduée (unité 1 cm) et place sur cette droite les nombres suivants : -5 ; $-\frac{3}{4}$; 0 ; $0,5$; 3 .

- a) Colorie en rouge la partie de la droite où se situent les nombres compris strictement entre $0,5$ et 3 .
- b) Colorie en vert la partie de la droite où se situent les nombres strictement inférieurs à $-\frac{3}{4}$.
- c) Colorie en bleu la partie de la droite où se situent les nombres strictement supérieurs à 3 .

Correction

Traçons une droite graduée (unité 1 cm) et plaçons sur cette droite les nombres suivants : -5 ; $-\frac{3}{4}$; 0 ; $0,5$; 3 .



- Les nombres réels compris strictement entre $0,5$ et 3 forment un intervalle noté $]0,5 ; 3[$ qui se lit « intervalle $0,5 ; 3$ » ;

- Les nombres réels strictement inférieurs à $-\frac{3}{4}$ forment un intervalle noté $]-\infty ; -\frac{3}{4}[$ qui se lit « *intervalle moins infini ; moins $\frac{3}{4}$* » ;
- Les nombres réels strictement supérieurs à 3 forment un intervalle noté $]3 ; +\infty[$ qui se lit « *intervalle 3 ; plus infini* ».

REMARQUE : Tout nombre réel peut être représenté sur une droite graduée et tout point de la droite graduée représente un nombre réel.

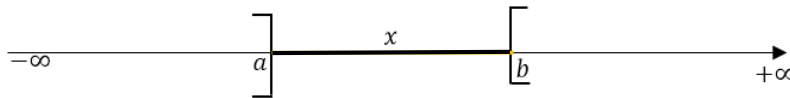
2) Définitions et représentations

Etant donné deux nombres réels a et b ,

a) Intervalle ouvert

L'ensemble des nombres réels x tel que $a < x < b$ est un intervalle ouvert d'origine a et d'extrémité b . Il est noté $]a ; b[$

Représentation :



$a < x < b \Leftrightarrow x \in]a ; b[$; Les extrémités a et b n'appartiennent pas à l'intervalle

b) Intervalle fermé

L'ensemble des nombres réels x tel que $a \leq x \leq b$ est un intervalle fermé d'origine a et d'extrémité b . Il est noté $[a ; b]$.

Représentation :



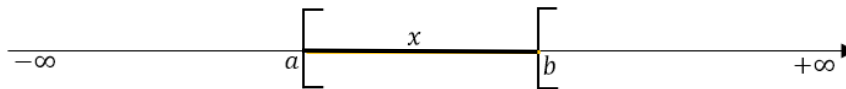
Les extrémités a et b appartiennent à l'intervalle

$a \leq x \leq b \Leftrightarrow x \in [a ; b]$.

c) Intervalle semi-ouvert ou semi-fermé

➤ L'ensemble des nombres réels x tels que $a \leq x < b$ est un intervalle fermé à gauche et ouvert à droite. On le note $[a ; b[$

Représentation :

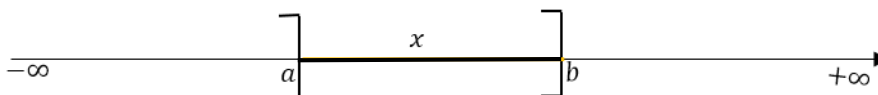


Le réel a appartient à l'intervalle tandis que le réel b n'appartient pas à l'intervalle.

$a \leq x < b \Leftrightarrow x \in [a ; b[$

➤ L'ensemble des nombres réels x tels que $a < x \leq b$ est un intervalle ouvert à gauche et fermé à droite. On le note $]a ; b]$

Représentation



Le réel a n'appartient pas à l'intervalle tandis que le réel b appartient à l'intervalle.

$a < x \leq b \Leftrightarrow x \in]a ; b]$

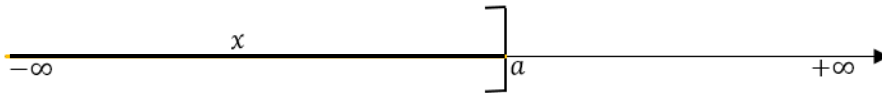
d) Intervalles illimités

➤ L'ensemble des nombres réels x tels que $x < a$ (où $x \leq a$) est un intervalle illimité à gauche.

✓ $x < a \Leftrightarrow x \in]-\infty ; a[$

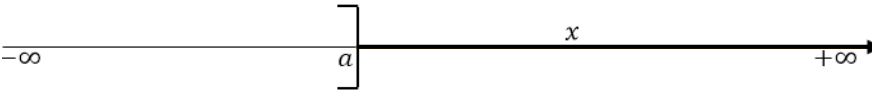


✓ $x \leq a \Leftrightarrow x \in]-\infty ; a]$

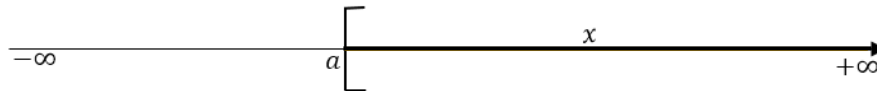


➤ L'ensemble des nombres réels x tels que $x > a$ (où $x \geq a$) est un intervalle illimité à droite.

✓ $x > a \Leftrightarrow x \in]a ; +\infty[$



✓ $x \geq a \Leftrightarrow x \in [a ; +\infty[$



❖ Autres intervalles connus

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$: C'est l'ensemble des nombres réels privé de zéro ;

$\mathbb{R}^+ = [0 ; +\infty[$: C'est l'ensemble des nombres réels positifs ;

$\mathbb{R}^- =]-\infty ; 0]$: C'est l'ensemble des nombres réels négatifs.

EXERCICE D'APPLICATION

1) Complète le tableau ci-dessous :

Intervalles	Inégalités	Représentations
$x \in [2 ; 5[$		
	$x \leq -3$	
$x \in]\frac{5}{3} ; +\infty[$		

2) Complète par le symbole $\in$ ou $\notin$ qui convient :

$\frac{2}{3} \dots]-1 ; 1[$; $-5 \dots]-\infty ; -2]$; $\frac{6}{5} \dots [-3 ; \frac{2}{3}[$; $1,4 \dots]1,4 ; +\infty]$

Correction

1) Complétons le tableau ci-dessous :

Intervalles	Inégalité	Représentation
$x \in [2 ; 5[$	$2 \leq x < 5$	
$x \in]-\infty ; 3]$	$x \leq 3$	
$x \in [-7 ; 0]$	$-7 \leq x \leq 0$	
$x \in]\frac{5}{3} ; +\infty[$	$x > \frac{5}{3}$	

2) Complétons par le symbole $\in$ ou $\notin$ qui convient :

$\frac{2}{3} \in]-1 ; 1[$; $-5 \in]-\infty ; -2]$; $\frac{6}{5} \notin [-3 ; \frac{2}{3}[$; $1,4 \notin]1,4 ; +\infty]$

III°) Encadrement

1) Encadrement d'une somme

Propriété : Etant donné les réels $a ; a' ; b ; b' ; x$ et x' , si $a < x < b$ et $a' < x' < b'$ alors $a + a' < x + x' < b + b'$ est l'encadrement de la somme des réels x et x' .

$$\begin{array}{r} \text{Disposition pratique : } a < x < b \\ + \quad a' < x' < b' \\ \hline = a + a' < x + x' < b + b' \end{array}$$

2) Encadrement d'un produit

Propriété : Etant donné les réels positifs $a ; a' ; b ; b' ; x$ et x' , si $a < x < b$ et $a' < x' < b'$ alors $a \times a' < x \times x' < b \times b'$ est l'encadrement du produit des nombres réels x et x' .

$$\begin{array}{r} \text{Disposition pratique : } a < x < b \\ \times \quad a' < x' < b' \\ \hline = aa' < xx' < bb' \end{array}$$

EXERCICE D'APPLICATION

On dispose les renseignements suivants sur une parcelle rectangulaire :

$$15 < l < 22 \text{ et } 28 < L < 45.$$

- Trouve un encadrement du demi-périmètre de cette parcelle ;
- Donne un encadrement de l'aire de cette parcelle.

Correction

On dispose les renseignements suivants sur une parcelle rectangulaire :

$$15 < l < 22 \text{ et } 28 < L < 45.$$

- Trouvons un encadrement du demi-périmètre de cette parcelle

$$\text{On sait que } P = 2(L + l) \text{ donc demi - périmètre} = \frac{P}{2} = L + l$$

$$\text{On a alors : } 28 + 15 < L + l < 45 + 22 \text{ d'où } 43 < \frac{P}{2} < 67$$

- Donnons un encadrement de l'aire de c.

$$\text{On sait que } A = L \times l$$

$$\text{On aura alors : } 28 \times 15 < L \times l < 45 \times 22 \Leftrightarrow 420 < A < 990$$

3) Encadrement de l'opposé

Rétiens : Etant donné des nombres réels a, b et x , si $a < x < b$ alors

$$(-1) \times a > (-1) \times x > (-1) \times b \Leftrightarrow -a > -x > -b \text{ est un encadrement de } -x.$$

4) Encadrement d'une différence

Soient les nombres réels $a ; a' ; b ; b' ; x$ et x' tels que $a < x < b$ et $a' < x' < b'$.

Trouvons l'encadrement de $x - x'$.

$$\text{On sait que } x - x' = x + (-x')$$

- Cherchons d'abord l'encadrement de $-x'$.

$$a' < x' < b' \Leftrightarrow -a' > -x' > -b' \text{ donc } -b' < -x' < -a'$$

- L'encadrement de $x - x'$ est :

$$a < x < b \text{ et } -b' < -x' < -a' \Leftrightarrow a + (-b') < x + (-x') < b + (-a').$$

Ce qui résulte finalement que $a - b' < x - x' < b - a'$ est l'encadrement de $x - x'$.

EXERCICE D'APPLICATION

Trouve l'encadrement de $x - y$ dans chacun des cas suivants :

$$\text{a) } -3 < x < -1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} < y < 5 ;$$

$$\text{b) } 7,2 < x < 9 \quad \text{et} \quad -2 < y < 0$$

Correction

Trouvons l'encadrement de $x - y$ dans chacun des cas suivants :

a) $-3 < x < -1$ et $\frac{1}{2} < y < 5$

$$\frac{1}{2} < y < 5 \Leftrightarrow -5 < -y < -\frac{1}{2}.$$

$$\text{On aura donc } -3 + (-5) < x + (-y) < -1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow -8 < x - y < -\frac{3}{2}$$

b) $7,2 < x < 9$ et $-2 < y < 0$

$$-2 < y < 0 \Leftrightarrow 0 < -y < 2$$

$$\text{On aura : } 7,2 + 0 < x + (-y) < 9 + 2 \quad \text{d'où } 7,2 < x - y < 11$$

IV°) Valeur absolue-distance de deux réels.

1) Valeur absolue

a) Activité

1°) Complète le tableau ci-dessous où $|x|$ désigne la valeur absolue du nombre décimal « a »

a	-6	-3,9	0	2	9,72
$-a$	6	3,9	0	-2	-9,72
$ a $	6	3,9	0	2	9,72

2°) Compare $|a|$ et a puis $|a|$ et $-a$ suivant le signe de a .

Correction

1°) voir tableau ci-dessus ;

2°) Comparons

$$\text{Suivant le signe de } a, \text{ on a : } \begin{cases} |a| = a \text{ lorsque } a \text{ est positif} \\ |a| = 0 \text{ lorsque } a = 0 \\ |a| = -a \text{ lorsque } a \text{ est négatif} \end{cases}$$

Définition : On appelle valeur absolue d'un nombre réel x , le réel noté $|a|$ et définie par :

$$\begin{cases} \text{Si } x \geq 0 \text{ alors } |a| = a \\ \text{Si } x \leq 0 \text{ alors } |a| = -a \end{cases}$$

b) Conséquences

Pour tout nombre réel x , on a :

- $|a| \geq 0$ (La valeur absolue d'un nombre est toujours positive) ;
- Si $a = 0$ alors $|a| = 0$;
- $|a| = 0$ alors $a = 0$.

2) Distance de deux réels

❖ Activité

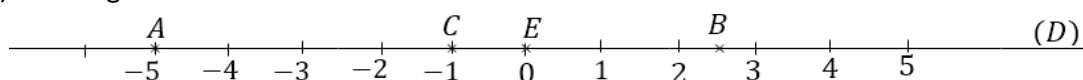
a) Trace une droite (D) graduée et place sur cette droite les points suivants :

A(-5); B(2,5) ; C(-1) et E(0)

b) Calcule les distances AB , AC et BE

Correction

1) Voir figure.



2) Calculons les distances.

$$AB = |x_B - x_A| = |2,5 - (-5)| = |2,5 + 5| = |7,5| = 7,5$$

$$AC = |x_C - x_A| = |-1 - (-5)| = |-1 + 5| = |4| = 4$$

$$BE = |x_E - x_B| = |0 - 2,5| = |-2,5| = 2,5$$

Définition : Soient a et b deux réels. On note A et B les points d'abscisses respectives a et b sur une droite graduée. On appelle distance des réels a et b le réel $|b - a|$ et on note $d(a, b) = |b - a| = AB$.

Conséquence de la définition : Pour tous nombres réels a et b , On a :

- $d(a, b) \geq 0$;
- $d(a, b) = 0$ signifie que $a = b$;
- $a = b$ signifie que $d(a, b) = 0$;
- $d(a, b) = d(b, a)$.

1) Ecriture d'une expression sans les symboles de la valeur absolue

Soit à écrire l'expression $|ax + b|$ sans les symboles de la valeur absolue.

Principe

Pour écrire l'expression $|ax + b|$ sans les symboles de la valeur absolue, deux cas se présentent :

1^{er} cas : Pour $a > 0$

$$|ax + b| = \begin{cases} ax + b & \text{si } ax + b \geq 0 \text{ c'est à dire si } x \geq -\frac{b}{a} \\ -(ax + b) & \text{si } ax + b \leq 0 \text{ c'est à dire si } x \leq -\frac{b}{a} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ ax + b $	$-(ax + b) = -ax - b$	$\emptyset$	$ax + b$

Réponse : $|ax + b| = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \in \left[-\frac{b}{a}; +\infty\right[\\ -ax - b & \text{si } x \in]-\infty; -\frac{b}{a}] \end{cases}$

2^{ème} cas : Pour $a < 0$

$$|ax + b| = \begin{cases} ax + b & \text{si } ax + b \geq 0 \text{ c'est à dire si } x \leq -\frac{b}{a} \text{ car } a < 0 \\ -ax - b & \text{si } ax + b \leq 0 \text{ c'est à dire si } x \geq -\frac{b}{a} \text{ car } a < 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ ax + b $	$ax + b$	$\emptyset$	$-(ax + b) = -ax - b$

Réponse : $|ax + b| = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \in]-\infty; -\frac{b}{a}] \\ -ax - b & \text{si } x \in \left[-\frac{b}{a}; +\infty\right[\end{cases}$

EXERCICE D'APPLICATIPON

Ecris les expressions suivantes sans les symboles de la valeur absolue

$$A = |3x - 2|$$

$$B = |2x + 1| + |-x + 4|$$

$$C = |3 + 2x| - 2|x - 1|$$

Correction

Ecrivons les expressions suivantes sans les symboles de la valeur absolue

$$A = |3x - 2| = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } 3x - 2 \geq 0 \\ -(3x - 2) & \text{si } 3x - 2 \leq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } 3x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3} \\ -3x + 2 & \text{si } 3x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$A = \begin{cases} 3x - 2 \text{ si } x \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right] \\ -3x + 2 \text{ si } x \in \left[-\infty; \frac{2}{3}\right] \end{cases}$$

Ecrivons $B = |2x + 1| + |-x + 4|$ sans les symboles de la valeur absolue

$$\text{On a : } |2x + 1| = \begin{cases} 2x + 1 \text{ si } 2x + 1 \geq 0 & \Leftrightarrow 2x \geq -1 \\ -(2x + 1) \text{ si } 2x + 1 \leq 0 & \Leftrightarrow 2x \leq -1 \end{cases}$$

$$|2x + 1| = \begin{cases} 2x + 1 \text{ si } x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x - 1 \text{ si } x \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$|-x + 4| = \begin{cases} -x + 4 \text{ si } -x + 4 \geq 0 & \Leftrightarrow -x \geq -4 \\ x - 4 \text{ si } -x + 4 \leq 0 & \Leftrightarrow -x \leq -4 \end{cases}$$

$$|-x + 4| = \begin{cases} -x + 4 \text{ si } x \leq 4 \\ x - 4 \text{ si } x \geq 4 \end{cases}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	4	$+\infty$
$ 2x + 1 $	$-2x - 1$	0	$2x + 1$	$2x + 1$
$ -x + 4 $	$-x + 4$		0	$x - 4$
$ 2x - 1 + -x + 4 $	$-3x + 3$		$x + 5$	$3x - 3$

$$\text{On obtient } B = \begin{cases} -3x + 3 \text{ si } x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right] \\ x + 5 \text{ si } x \in \left[-\frac{1}{2}; 4\right] \\ 3x - 3 \text{ si } x \in [4; +\infty[\end{cases}$$

EXERCICES

EXERCICE 1*

1°) Complète par le symbole $\in$; $\notin$; ou $\subset$ qui convient.

- a) $4 \dots [-2; 2]$ b) $\frac{-3}{2} \dots [-3; -1,2]$
c) $] -\infty; 2] \dots] -\infty; +\infty[$ d) $\mathbb{Q} \dots \mathbb{R}$.

2°) Ecris sous forme d'intervalles ou réunion d'intervalles les ensembles suivants :

- a) L'ensemble des réels x tel que $x < 1$
b) L'ensemble des réels x tel que $x \leq -2$ ou $x > 0$.
c) L'ensemble des réels y tel que $-\frac{3}{4} \leq y < 0$
d) L'ensemble des réels y tel que $-7,4 < y \leq 3$
e) $\mathbb{R}^-$
f) $\mathbb{R}^+$
g) $\mathbb{R}^*$

EXERCICE 2*

Représente sur une droite graduée l'ensemble des réels x dans chacun des cas suivants :

- 1) $x \geq 5$
2) $x < 0$;
3) $x \leq 7$ et $5 < x$;
4) $2 \leq x < 5$
5) $x \geq -3$ ou $x \leq -5$;
6) $x > 1$ ou $x \leq -4$.

EXERCICE 3*

On donne $A = [-2; 4[$ et $B =]2; 5[$

- 1) Sur une droite graduée, représente A et B .
2) Détermine $A \cup B$ et $A \cap B$.

EXERCICE 4

Représente sur une droite graduée et écris plus simplement :

$$\begin{aligned} &]-\infty; 1[\cup]-8; +\infty[; \quad]-8; 1] \cup]1; 5[\\ & [5; 12[\cup [8; 12]; \quad [-3; +\infty[\cap]-5; 2] \\ & [1; 2] \cap [1; 1,5[; \quad]-1; 3] \cap [0; 7] \end{aligned}$$

EXERCICE 5*

- 1) Trouve l'encadrement de x dans chacun des cas suivants :

- a) $7 < 3x - 1 < 8$
b) $-4 < 7 - 2x < -3$
c) $2,5 < \frac{5x-1}{3} < 3$

- 2) Un nombre réel y vérifie $-\frac{1}{4} \leq y \leq \frac{3}{5}$.

Ecris les encadrements pour $y + 5$;
 $y - \frac{1}{4}$; $-4y + 2$ et $-y + \frac{2}{5}$.

EXERCICE 6*

Ecris sans le symbole de la valeur absolue les expressions suivantes :

$$A = |2x + 7|;$$

$$B = |x + 1| + |2x + 7|;$$

$$C = |4x + 8| + |-2x - 6|;$$

$$D = |3x + 2| - |-9 - 3x| \text{ (Corrigé).}$$

EXERCICE 7

1) On donne $E = |2x - 5| - |-x + 2|$

a) Ecris E sans les symboles de la valeur absolue ;

b) Calcule E pour $x = \frac{1}{2}$.

2) On donne $d(x; -2) = 1$, Trouve l'ensemble des réels x .

EXERCICE 8

1°) Soit (D) une droite graduée et A(-5) un point de (D).

Calcule l'abscisse du ou des points, de (D), situés à une distance 3 de A. Vérifie les calculs par une figure.

2°) Soient M(-2) et N(-8) deux points de (D).

Calcule MB et NB sachant que B a pour abscisse -1.

EXERCICE 9*

Le rayon r d'un cercle, mesuré au millimètre près, est donné par l'encadrement :

$$3,8 < r < 3,9$$

Donne un encadrement du périmètre P du cercle et de la mesure de l'aire A du disque engendré par ce cercle

EXERCICE 10

Une citerne contient entre 200 L et 240 L d'eau potable. La consommation d'une personne est comprise entre 4 L et 5L par jour. Donne un encadrement du nombre de jours x pendant lesquels l'approvisionnement en eau sera assurée par cette citerne pour une famille de 5 personnes.

CORRIGES

EXERCICE 1

1°) Complétons par le symbole $\in$; $\notin$; ou $\subset$ qui convient.

b) $4 \notin [-2; 2]$ b) $\frac{-3}{2} \in [-3; -1,2]$

c) $]-\infty; 2] \subset]-\infty; +\infty[$ d) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

2°) Ecrivons sous forme d'intervalles ou réunion d'intervalles les ensembles suivants :

h) $x \in]-\infty; 1[$

i) $x \in]-\infty; -2] \cup]0; +\infty[$.

j) $y \in \left[-\frac{3}{4}; 0\right]$

k) $y \in]-7,4; 3]$

l) $\mathbb{R}^- =]-\infty; 0]$

m) $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$

n) $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

EXERCICE 2

Représentons sur une droite graduée l'ensemble des réels x dans chacun des cas suivants :

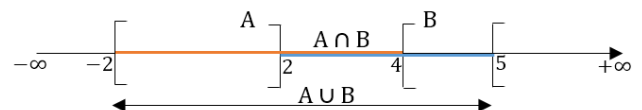
Inégalités	Représentations
1) $x \geq 5$	
2) $x < 0$	
3) $x \leq 7$ et $5 > x$	

4) $2 \leq x < 5$	
5) $x \geq -3$ ou $x \leq -5$	
6) $x > 1$ ou $x \leq -4$	

EXERCICE 3

On donne $A = [-2; 4[$ et $B =]2; 5]$

1) Sur une droite graduée, représentons A et B.



2) Déterminons $A \cup B$ et $A \cap B$.

$$A \cup B = [-2; 5[;$$

$$A \cap B =]2; 4[.$$

EXERCICE 5

1) Trouvons l'encadrement de x dans chacun des cas suivants :

a) $7 < 3x - 1 < 8 \Leftrightarrow 7 + 1 < 3x < 8 + 1$

$$\Leftrightarrow 8 < 3x < 9 \Leftrightarrow \frac{8}{3} < x < 3.$$

b) $-4 < 7 - 2x < -3$

$$\Leftrightarrow -4 - 7 < -2x < -3 - 7$$

$$\Leftrightarrow -11 < -2x < -10$$

$$\Leftrightarrow \frac{-11}{-2} > x > \frac{-10}{-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{11}{2} > x > 5 \Leftrightarrow 5 < x < 5,5$$

c) $2,5 \leq \frac{5x-1}{3} < 3$

$$\Leftrightarrow 2,5 \times 3 \leq 5x - 1 < 3 \times 3$$

$$\Leftrightarrow 7,5 \leq 5x - 1 < 9$$

$$\Leftrightarrow 8,5 \leq 5x < 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{8,5}{5} \leq x < \frac{10}{5} \Leftrightarrow 1,7 \leq x < 2$$

2) Un nombre réel y vérifie $-\frac{1}{4} \leq y \leq \frac{3}{5}$.

Ecrivons les encadrements pour $y + 5$;

$$y - \frac{1}{4} ; -4y + 2 \text{ et } -y + \frac{2}{5}.$$

$$\text{➤ } -\frac{1}{4} \leq y \leq \frac{3}{5} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} + 5 \leq y + 5 \leq \frac{3}{5} + 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{19}{4} \leq y + 5 \leq \frac{28}{4} \Leftrightarrow 4,75 \leq y + 5 \leq 7$$

$$\text{➤ } -\frac{1}{4} \leq y \leq \frac{3}{5} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \leq y - \frac{1}{4} \leq \frac{3}{5} - \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq y - \frac{1}{4} \leq \frac{7}{20}$$

$$\text{➤ } -\frac{1}{4} \leq y \leq \frac{3}{5} \Leftrightarrow -\frac{3}{5} \leq -y \leq \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \geq -y \geq -\frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow 4 \times \left(\frac{1}{4}\right) \geq -4y \geq 4 \times \left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq -4y \geq -\frac{12}{5}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{12}{5} \leq -4y \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{12}{5} + 2 \leq -4y + 2 \leq 1 + 2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{5} \leq -4y + 2 \leq 3$$

$$\text{➤ } -\frac{1}{4} \leq y \leq \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \geq -y \geq -\frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{5} + \frac{2}{5} \leq -y + \frac{2}{5} \leq \frac{1}{4} + \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{5} \leq -y + \frac{2}{5} \leq \frac{13}{20}$$

EXERCICE 6

Ecrivons sans le symbole de la valeur absolue les expressions suivantes :

$$D = |3x + 2| - |-9 - 3x|.$$

On a :

$$|3x + 2| = \begin{cases} 3x + 2 \text{ si } 3x + 2 \geq 0 \\ -(3x + 2) \text{ si } 3x + 2 \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3x + 2 \text{ si } \Leftrightarrow 3x \geq -2 \\ -(3x + 2) \text{ si } \Leftrightarrow 3x \leq -2 \end{cases}$$

$$|3x + 2| = \begin{cases} 3x + 2 \text{ si } x \geq -\frac{2}{3} \\ -3x - 2 \text{ si } x \leq -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$|-9 - 3x| = \begin{cases} -9 - 3x \text{ si } -9 - 3x \geq 0 \\ -(-9 - 3x) \text{ si } -9 - 3x \leq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -9 - 3x \text{ si } \Leftrightarrow -3x \geq 9 \\ -(-9 - 3x) \text{ si } \Leftrightarrow -3x \leq 9 \end{cases}$$

$$|-9 - 3x| = \begin{cases} -9 - 3x \text{ si } x \leq -3 \\ 9 + 3x \text{ si } x \geq -3 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-3	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
$ 3x + 2 $	$-3x - 2$	$-3x - 2$	0	$3x + 2$
$ -9 - 3x $	$-9 - 3x$	0	$9 + 3x$	$9 + 3x$
D	$-6x - 11$		7	$6x + 11$

$$D = \begin{cases} -6x - 11 \text{ si } x \in]-\infty ; -3] \\ 7 \text{ si } x \in [-3 ; -\frac{2}{3}] \\ 6x + 11 \text{ si } x \in [-\frac{2}{3} ; +\infty[\end{cases}$$

EXERCICE 9

L'encadrement du périmètre:

On sait que le périmètre P d'un cercle est :

$$P = 2\pi r$$

$$3,8 < r < 3,9 \text{ et } 3,14 < \pi < 3,15$$

$$2 \times 3,8 < 2r < 2 \times 3,9$$

$$\Leftrightarrow 7,6 < 2r < 7,8$$

$$\Leftrightarrow 3,14 \times 7,6 < 2\pi r < 3,15 \times 7,8 \text{ Donc :}$$

$$23,864 < p < 24,570.$$

L'encadrement de l'aire $\mathcal{A}$

$$\text{On a : } \mathcal{A} = \pi r^2$$

$$(3,8)^2 < r^2 < (3,9)^2$$

$$14,44 < r^2 < 15,21$$

$$3,14 \times 14,44 < \pi r^2 < 3,15 \times 15,21$$

$$\text{Donc } 45,3416 < \mathcal{A} < 47,9115$$

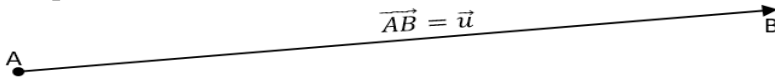
Chapitre 2 : Vecteurs du plan

I°) Rappels sur les vecteurs

1) Définition et notation d'un vecteur

Soit (A, B) un bipoint ou couple de points.

L'ensemble des bipoints équipollents aux bipoints (A, B) s'appelle un vecteur. Chaque bipoint est un représentant de ce vecteur.



On note $\overrightarrow{AB}$ et on lit « vecteur AB ».

Si le bipoint (A, B) représente le vecteur $\vec{u}$ alors on écrit $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

Un vecteur est défini par :

- Sa direction
- Son sens
- Sa longueur ou sa norme

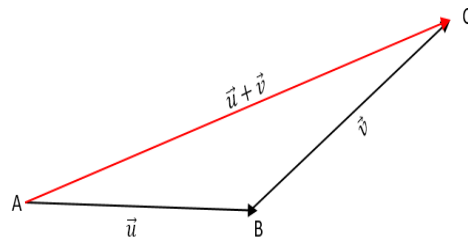
REMARQUE : Deux bipoints (A, B) et (A', B') sont équipollents signifie que le quadrilatère $ABB'A'$ est un Parallélogramme.

2) Addition vectorielle

❖ Construction de la somme de deux vecteurs.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Construisons un représentant du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ tels que

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \text{ et } \vec{v} = \overrightarrow{BC}$$

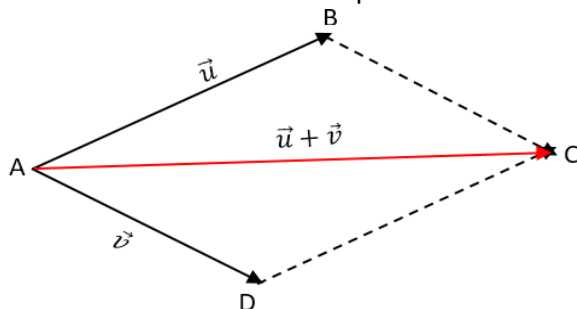


L'origine du bipoint (B, C) correspond à l'extrémité du bipoint (A, B) . $\overrightarrow{AC}$ est donc un représentant du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$: Cette égalité est appelée « **Relation de Chasles** ».

❖ Autre technique de construction

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.



Les deux bipoints (A, B) et (A, C) ont une même origine A.

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \text{ car } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AC} \text{ (Relation de Chasles)} \end{aligned}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est un représentant de $\vec{u} + \vec{v}$; [AC] étant la diagonale issue de A du parallélogramme ABCD.

REMARQUE : Les vecteurs de types $\overrightarrow{AA}$; $\overrightarrow{MM}$; $\overrightarrow{PP}$ représentent le vecteur nul ($\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{MM} = \overrightarrow{PP} = \vec{0}$)
 Tout vecteur du plan admet un opposé et la somme de deux vecteurs opposés est égale au vecteur nul.

3) Propriétés de l'addition vectorielle

Soient $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$: L'addition vectorielle est commutative ;
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$: L'addition vectorielle est associative ;
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$: Le vecteur nul est l'élément neutre de l'addition vectorielle.

II°) Multiplication d'un vecteur par un réel

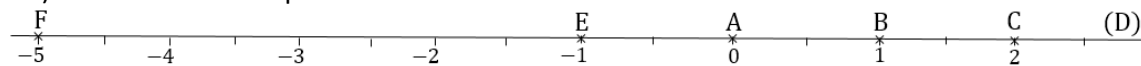
1) Activité

Soient A et B deux points d'une droite graduée (D) tel que $AB = 2$ (unité 1 cm)

- a) Construis les points C et E tels que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB}$
- b) Trouve les abscisses des points C et E dans le repère (A ; B)
- c) Place le point F d'abscisse -5 dans le repère (A ; B) et exprime $\overrightarrow{AF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

Solution

- a) Construisons les points C et E.



- b) Donnons l'abscisse des points C et E dans le repère (A ; B)

On a : C(2) et E(-1).

- c) Plaçons le point F d'abscisse -5 dans le repère (A ; B) et exprimons $\overrightarrow{AF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

On a : F(-5) ; A(0) et B(+1) donc $\overrightarrow{AF} = -5\overrightarrow{AB}$.

2) Définition

Soient A et B deux points distincts du plan et k un réel quelconque.

$k \cdot \overrightarrow{AB}$ désigne le vecteur $\overrightarrow{AC}$ ou C est le point d'abscisse k dans le repère (A ; B).

De façon générale, si $\vec{u}$ est un vecteur et k un réel quelconque, alors il existe un vecteur $\vec{v}$ défini par $\vec{v} = k\vec{u}$: on dit que le vecteur $\vec{v}$ est le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k.

REMARQUES : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tel que $\vec{v} = k\vec{u}$:

- ✓ Quelques soit le réel k, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction ;
- ✓ Si $k > 0$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont le même sens ;
- ✓ Si $k < 0$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens opposés.

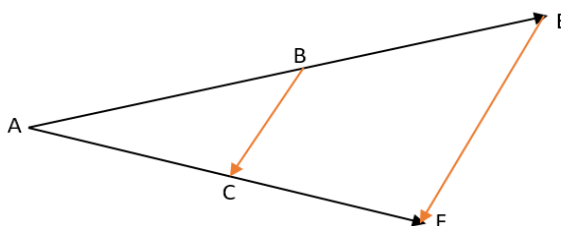
EXERCICE D'APPLICATION

A, B et C sont trois points non alignés du plan.

- 1) Construis les points E et F tels que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{BC}$;
- 2) Montre que $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AC}$.

Solution

- 1) Construisons les points E et F tels que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{BC}$;



- 2) Montrons que $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AC}$

On a : $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF}$ d'après donc la Relation de Chasles

$$\begin{aligned} &= 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} \\ &= 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \\ \overrightarrow{AF} &= 2\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

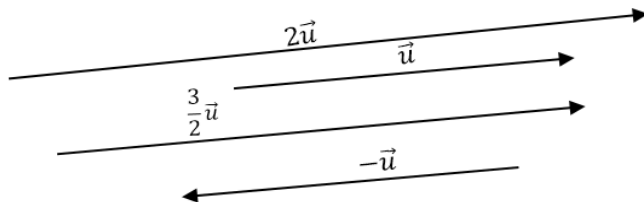
III°) Vecteurs colinéaires

1) Activité.

- Trace un vecteur $\vec{u}$ non nul du plan puis construis les vecteurs $2\vec{u}$, $\frac{3}{2}\vec{u}$ et $-\vec{u}$.
- Que peux-tu dire des directions de ces vecteurs ?

Solution

- Traçons un vecteur $\vec{u}$ non nul du plan puis construisons les vecteurs $2\vec{u}$, $\frac{3}{2}\vec{u}$ et $-\vec{u}$.



- On peut dire que tous ces vecteurs ont la même direction (ils sont tous portés par des droites parallèles) : On dit que ces vecteurs sont colinéaires.

2) Définition

Etant donné deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

REMARQUE : Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.

3) Caractérisation de l'alignement de trois points

Propriétés : Soient A, B et C trois points du plan.

P_1 : Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires alors les points A, B et C sont alignés ;

P_2 (Réciproque) : Si les points A, B et C sont alignés alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

❖ Démonstration de P_1

Hypothèses : A, B et C trois points du plan tel que $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AC}$

D'après la définition de la colinéarité, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$. Ainsi, « C » est le point d'abscisse k dans le repère $(A; B)$ donc $C \in (AB)$.

Comme $C \in (AB)$ alors les points A, B et C sont alignés.

4) Caractérisation du parallélisme de deux droites

Propriétés : Soient A, B, E et F quatre points du plan.

P_1 : Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires non nuls alors les droites (AB) et (EF) sont parallèles.

P_2 (Réciproque) : Si les droites (AB) et (EF) sont parallèles alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires et non nuls.

REMARQUE : A, B et C étant trois points du plan tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$; c'est-à-dire que $C \in (AB)$ alors les droites (AB) et (AC) sont confondues donc elles sont parallèles.

EXERCICE D'APPLICATION

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul ($\vec{u} \neq \vec{0}$). On considère les points A, B et C tels que $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC} = 6\vec{u}$. Les points A, B et C sont-ils alignés ?

Solution

$\vec{u}$ un vecteur non nul ($\vec{u} \neq \vec{0}$) et les points A, B et C sont tels que $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC} = 6\vec{u}$.

Vérifions si A, B et C sont alignés.

On a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\vec{u} + 6\vec{u}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = 8\vec{u} \text{ car } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \text{ (Relation de Chasles)}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = 4 \times 2\vec{u} \text{ or } 2\vec{u} = \overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$

Comme il existe un réel $k = \frac{1}{4}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ alors les points A, B et C sont alignés.

EXERCICES

EXERCICE 1*

Pour chaque proposition du tableau ci-dessous, trois réponses sont proposées dont une est correcte.

Ecris sur ta feuille de copie le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Propositions	Réponses		
		A	B	C
1	L'égalité $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont	Opposés	Egaux	Ni opposés ; ni égaux.
2	La somme vectorielle $\overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{MB})$ est égale au vecteur	$\overrightarrow{BM}$	$\overrightarrow{AM}$	$\overrightarrow{AB}$
3	O est milieu du segment [MN] équivaut à :	$\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{NO}$	$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO}$	$\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{ON}$
4	Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires signifie que :	$(AB) // (CD)$	$(AB) \perp (CD)$	(AB) est sécante à (CD)

EXERCICE 2

A et B sont deux points d'une droite graduée

d'abscisses $x_A = -2$ et $x_B = 2$.

G est le point tel que $5\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

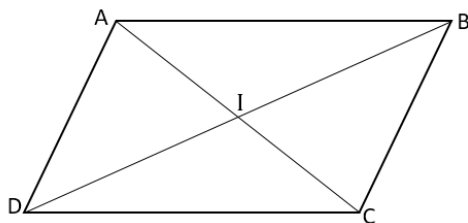
Exprime $\overrightarrow{GA}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

EXERCICE 3*

Soit le parallélogramme ci-dessous. I est le point

milieu et intersection des diagonales

[AC] et [BD]



1) Complète les égalités des vecteurs ci-dessous :

$$\overrightarrow{AB} = \dots \overrightarrow{CD} ; \quad \overrightarrow{BD} = \dots \overrightarrow{IB} ;$$

$$\overrightarrow{AD} \dots \overrightarrow{CB} ; \quad \overrightarrow{AC} = \dots \overrightarrow{IC} ; \quad \overrightarrow{AI} = \dots \overrightarrow{AC}$$

2) Simplifie les sommes ci-dessous d'après le parallélogramme ABCD

$$a) \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} = ? ; \quad b) \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{BI} = ? ;$$

$$c) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = ?$$

EXERCICE 4*

On donne trois points distincts A, B et C du plan.

1°) Construis les points B' et C' tels que

$$\overrightarrow{BB'} = 2 \cdot \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CC'} = 2 \cdot \overrightarrow{AC}.$$

2°) Démonstre que $\overrightarrow{B'C'} = 3 \cdot \overrightarrow{BC}$

EXERCICE 5

1) On considère un parallélogramme ABCD.

Montre que :

$$a) \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 2 \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$b) \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}.$$

2) Soient quatre points A, B, C et D du plan et un vecteur u tels que :

$$\vec{u} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AD} + 4\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}$$

Montre que $\vec{u} = k\overrightarrow{AB}$ que tu détermineras la valeur du réel k .

EXERCICE 6

OAB est un triangle quelconque tels que

OB = 6cm, OA = 5cm et AB = 4cm.

1) Fais une figure.

2) Construis les points M et N tels que

$$\overrightarrow{OM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{ON} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OB}.$$

- 3) Trouve un réel k tel que $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{AB}$.
 4) Donne en justifiant la position relative des droites (MN) et (AB).

EXERCICE 7

Marque trois points distincts A, B et C.

- a) construis le point D tel que
 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$
 b) Que représente le point D pour le segment [BC] ? Justifie ta réponse.
 c) Construis E tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$
 d) Que représente E pour le triangle ABC ? Justifie ta réponse

EXERCICE 8*

EFG est un triangle.

- a) Construis le point P tel que
 $\overrightarrow{EP} = 3\overrightarrow{EF} + (-2)\overrightarrow{EG}$.
 b) Exprime le vecteur $\overrightarrow{FP}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$.
 c) Démontre que les points F, P et G sont alignés.

EXERCICE 9*

I°) F, I, L sont trois points du plan tels que

$$\overrightarrow{FI} = \frac{-4}{3} \overrightarrow{IL}$$

- 1) Que peux-tu dire des vecteurs $\overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{IL}$?
 2) que peux-tu dire des points F ; I ; et L ?
 3) Trouve les réels h et k tels que

$$\overrightarrow{IL} = h.\overrightarrow{IF} ; \overrightarrow{FL} = k.\overrightarrow{LI}.$$

II°) Soit une droite (D) graduée à l'aide d'un repère (O ; I). On donne les points A et B d'abscisse respective 2 et 4. Détermine l'abscisse x du point M tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{7}{2}\overrightarrow{AB}$.

EXERCICE 10

On considère trois points non alignés A ; B ; C

- 1) Marque les points P et Q tels que
 $\overrightarrow{CP} = -2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;
 2) Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires ;
 3) Démontre que les points Q ; C et P sont alignés ;
 4) Soit un point n'appartenant à aucune des droites (AB) et (CP).

Marque le point J tel que $\overrightarrow{IJ} = 3\overrightarrow{QC}$ puis démontre que les droites (IJ) et (AB) sont parallèles.

CORRIGES

EXERCICE 1

Pour chaque proposition du tableau ci-dessous, trois réponses sont proposées dont une est correcte. Ecrivons sur la feuille de copie le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

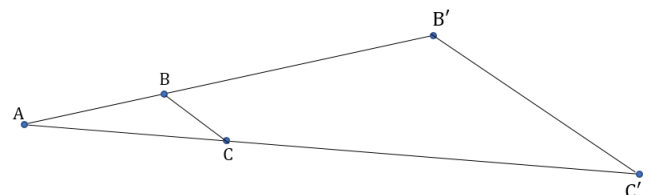
1 - A 2 - B ; 3 - C ; 4 - A

EXERCICE 3

- 1) Complétons les égalités des vecteurs ci-dessous :
 $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BD} = -2.\overrightarrow{IB}$; $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{CB}$;
 $\overrightarrow{AC} = 2.\overrightarrow{IC}$; $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
 2) Simplifions les sommes ci-dessous d'après le parallélogramme ABCD
 a) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AC}$;
 b) $\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{DI} + (-\overrightarrow{DI})$ car $\overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{DI}$
 $= \overrightarrow{DI} - \overrightarrow{DI}$
 $\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$
 c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

EXERCICE 4

- 1) Voir figure



- 2) Démontrons que $\overrightarrow{B'C'} = 3.\overrightarrow{BC}$
 $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{AC'}$ d'après la relation de Chasles (R.C)

$$\begin{aligned} &= (\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'}) \\ &= \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'} \\ &= -\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'} \\ &= -2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC} \\ &= -3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \\ &= 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AC} \\ &= 3(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \end{aligned}$$

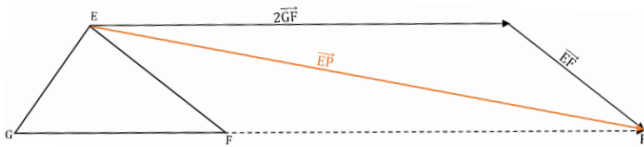
$$\overrightarrow{B'C'} = 3\overrightarrow{BC}$$

EXERCICE 8

EFG est un triangle.

- a) Construisons le point P tel que
 $\overrightarrow{EP} = 3\overrightarrow{EF} + (-2)\overrightarrow{EG}$.

$$\begin{aligned}\vec{EP} &= 3\vec{EF} + (-2)\vec{EG} \\ &= 3\vec{EF} + 2\vec{GE} \\ &= 3\vec{EF} + 2(\vec{GF} + \vec{FE}) \\ &= 3\vec{EF} - 2\vec{EF} + 2\vec{GF} \\ \vec{EP} &= \vec{EF} + 2\vec{GF}\end{aligned}$$



- b) Exprimons le vecteur $\vec{FP}$ en fonction des vecteurs $\vec{EF}$ et $\vec{EG}$.

$$\begin{aligned}\text{On a : } \vec{EP} &= \vec{EF} + 2\vec{GF} \\ \Leftrightarrow \vec{EF} + \vec{FP} &= \vec{EF} + 2\vec{GF} \quad \text{d'après R.C} \\ \Leftrightarrow \vec{FP} &= \vec{EF} - \vec{EF} + 2\vec{GF} \\ \vec{FP} &= 2\vec{GF} \quad (1) \\ &= 2(\vec{GE} + \vec{EF}) \\ &= 2\vec{GE} + 2\vec{EF} \\ \vec{FP} &= 2\vec{EF} - 2\vec{EG}\end{aligned}$$

- c) Démontrons que les points F, P et G sont alignés.

D'après la question b) à la ligne (1), on a :

$$\begin{aligned}\vec{FP} &= 2\vec{GF} \\ \vec{FP} &= 2\vec{GF} \Leftrightarrow \vec{FP} = -2\vec{FG}\end{aligned}$$

Comme il existe un réel $k = -2$ Tel que

$\vec{FP} = k\vec{FG}$ alors les vecteurs $\vec{FP}$ et $\vec{FG}$ sont colinéaires. Par conséquent, les points F, P et G sont alignés.

EXERCICE 9

- I°) F, I, L sont trois points du plan tels que

$$\vec{FI} = -\frac{4}{3}\vec{IL}$$

- 1) On peut dire que les vecteurs $\vec{FI}$ et $\vec{IL}$ sont colinéaires car il existe un nombre réel $k = -\frac{4}{3}$ tel

$$\text{que } \vec{FI} = -\frac{4}{3}\vec{IL}$$

- 2) On peut dire que les points F ; I et L sont alignés car les vecteurs $\vec{FI}$ et $\vec{IL}$ sont colinéaires.

- 3) Trouvons les réels h et k tels que $\vec{IL} = h.\vec{IF}$; $\vec{FL} = k.\vec{LI}$.

$$\begin{aligned}\text{➤ Trouvons h tel que } \vec{IL} &= h.\vec{IF} \\ \vec{FI} &= -\frac{4}{3}\vec{IL} \Leftrightarrow \vec{IL} = -\frac{3}{4}\vec{FI} \\ &\Leftrightarrow \vec{IL} = -\frac{3}{4}(-\vec{IF}) \\ &\Leftrightarrow \vec{IL} = \frac{3}{4}\vec{IF} \text{ donc } h = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{➤ Trouvons k tel que } \vec{FL} &= k.\vec{LI} \\ \vec{FI} &= -\frac{4}{3}\vec{IL} \Leftrightarrow (\vec{FL} + \vec{LI}) = -\frac{4}{3}\vec{IL} \\ \text{d'après la relation de Chasles.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \vec{FL} &= -\frac{4}{3}\vec{IL} - \vec{LI} \\ \Leftrightarrow \vec{FL} &= \frac{4}{3}\vec{LI} - \vec{LI} \\ \Leftrightarrow \vec{FL} &= \frac{4\vec{LI} - 3\vec{LI}}{3} \\ \Leftrightarrow \vec{FL} &= \frac{1}{3}\vec{LI} \text{ donc } k = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

II°) Soit une droite (D) graduée à l'aide d'un

repère (O ; I). On donne les points A et B d'abscisse respective 2 et 4. Déterminons l'abscisse x du point M tel que $\vec{AM} = \frac{7}{2}\vec{AB}$.

Dans le repère (O ; I), on a :

$$\begin{aligned}\vec{OA} &= 2\vec{OI} \text{ et } \vec{OB} = 4\vec{OI} \\ \vec{AM} &= \frac{7}{2}\vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AO} + \vec{OM} = \frac{7}{2}(\vec{AO} + \vec{OB}) \text{ d'après la relation de Chasles.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \vec{OM} &= \frac{7}{2}\vec{AO} + \frac{7}{2}\vec{OB} - \vec{AO} \\ \Leftrightarrow \vec{OM} &= \vec{OA} - \frac{7}{2}\vec{OA} + \frac{7}{2}\vec{OB} \text{ car } \vec{AO} = -\vec{OA} \\ &= 2\vec{OI} - \frac{7}{2}(2\vec{OI}) + \frac{7}{2}(4\vec{OI}) \\ &= 2\vec{OI} - 7\vec{OI} + 14\vec{OI} \\ \vec{OM} &= 9\vec{OI}\end{aligned}$$

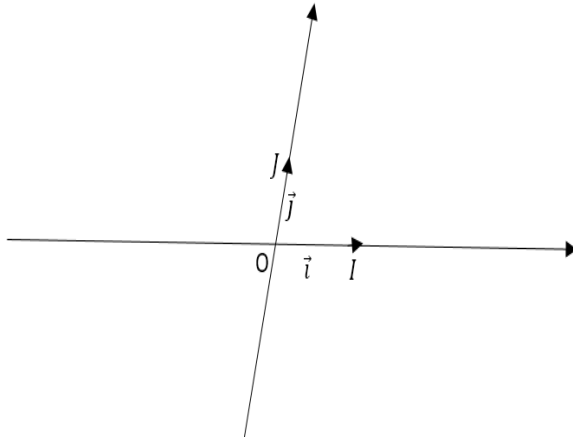
On en déduit alors que $x = 9$.

Chapitre 3 : Repère cartésien.

I°) Notion du repère cartésien

Soit O un point du plan, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont deux vecteurs non nuls et de directions différentes.

Construisons les points I et J tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$



Les points O, I et J étant quelconques non alignés du plan ; $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires, on dit que le triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère cartésien du plan.

REMARQUES :

- On dit que le repère est normé si $OI = OJ = 1$;
- On dit que le repère est orthonormé si $OI = OJ = 1$ et que les axes sont perpendiculaires.

II°) Coordonnées d'un vecteur

1) Coordonnées d'un vecteur d'origine O

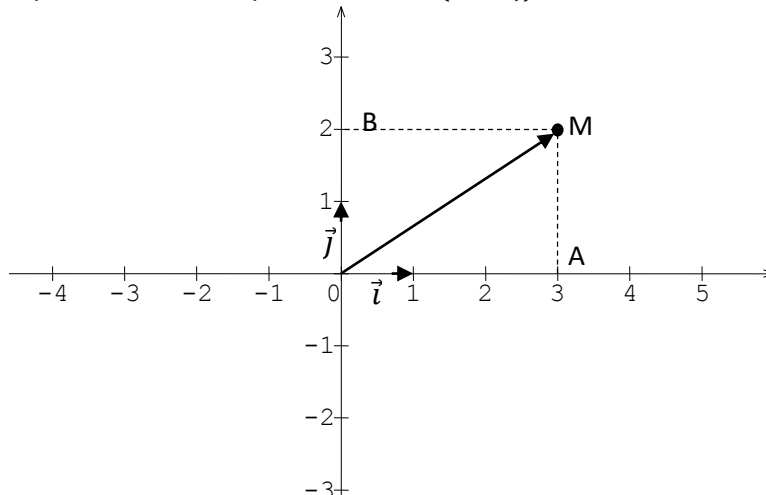
a) Activité

Dans le plan muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$,

- 1) Place le point M de coordonnées $(3 ; 2)$
- 2) Soit A le projeté de M sur $(O, \vec{i})$ parallèlement à $(O, \vec{j})$ et B son projeté sur $(O, \vec{j})$ parallèlement à $(O, \vec{i})$
 - a) Exprime les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$;
 - b) Exprime le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$;
 - c) Ecris $\overrightarrow{OM}$ sous la forme $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ avec x et y deux réels que tu détermineras.

Solution

- 1) Plaçons le point M dans le repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessous ;



- 2) Construisons les points A et B

- a) Exprimons les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$;
 On a $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 0\vec{j} = 3\vec{i}$
 $\overrightarrow{OB} = 0\vec{i} + 2\vec{j} = 2\vec{j}$
- b) Exprimons le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$;
 On sait que OAMB est un parallélogramme donc $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$;
- c) Ecrivons $\overrightarrow{OM}$ sous la forme $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ avec x et y deux réels que nous déterminerons.
 D'après la question b) on a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ or $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i}$ et $\overrightarrow{OB} = 2\vec{j}$ donc $\overrightarrow{OM} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.
 On obtient $\overrightarrow{OM} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ avec $x = 3$ et $y = 2$

b) Définition

Le plan étant muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$; soit le point M de coordonnées $(x; y)$.

On a $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ou $(x; y)$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$; on note alors $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

L'écriture $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ signifie que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

REMARQUE : Si O et M sont confondus alors $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM} = \overrightarrow{OO} = \vec{0}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

EXERCICE D'APPLICATION

Dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on donne les points A, B et C tels que :

$$\overrightarrow{OA} = -2\vec{i}; \overrightarrow{OB} = \vec{i} - \vec{j} \text{ et } \overrightarrow{OC} = \frac{\pi}{2}\vec{j}.$$

Précise les coordonnées des points A, B et C dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Correction

Précisons les coordonnées des points A, B et C dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$$\overrightarrow{OA} = -2\vec{i} = -2\vec{i} + 0\vec{j} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ Donc } \mathbf{A}(-2; 0);$$

$$\overrightarrow{OB} = \vec{i} - \vec{j} \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ Donc } \mathbf{B}(1; -1);$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\pi}{2}\vec{j} = 0\vec{i} + \frac{\pi}{2}\vec{j} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \text{ Donc } \mathbf{C}(0; \frac{\pi}{2}).$$

2.) Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$

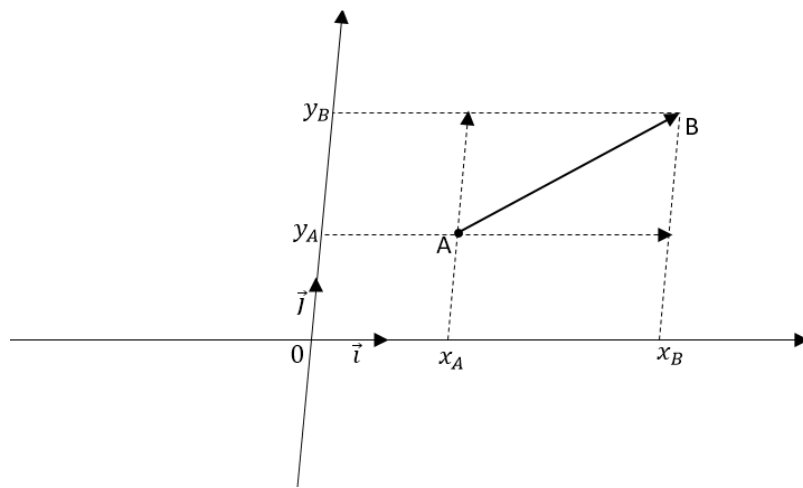
a) Activité

Dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on donne les points A et B de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$.

- 1) Exprime les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$;
- 2) Exprime à l'aide de la relation de Chasles le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$;
- 3) Détermine les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$; puis donne les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Correction

Construisons le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et plaçons les points A et B.



1) Exprimons les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$

$$\text{On a : } \overrightarrow{OA} = x_A \vec{i} + y_A \vec{j} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OB} = x_B \vec{i} + y_B \vec{j}.$$

2) Exprimons à l'aide de la relation de Chasles le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$;

$$\text{D'après la relation de Chasles, on a : } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \text{ or } \overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA}$$

$$= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

3) Déterminons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$

$$\text{D'après 2°), On a : } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$= (x_B \vec{i} + y_B \vec{j}) - (x_A \vec{i} + y_A \vec{j}) \text{ car } \begin{cases} \overrightarrow{OA} = x_A \vec{i} + y_A \vec{j} \\ \overrightarrow{OB} = x_B \vec{i} + y_B \vec{j} \end{cases}$$

$$= x_B \vec{i} - x_A \vec{i} + y_B \vec{j} - y_A \vec{j}$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j}$$

En déduisons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$;

$$\text{On a : } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

Rétiens : Pour tous points A et B de coordonnées respectives $(x_A ; y_A)$ et $(x_B ; y_B)$ dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a : $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j}$ qui signifie que $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

b) Condition d'égalité de deux vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que $\vec{u} = x \vec{i} + y \vec{j}$ et $\vec{v} = x' \vec{i} + y' \vec{j}$.

De l'unicité du couple de coordonnées, il faut que :

- Si $\vec{u} = \vec{v}$ alors $x = x'$ et $y = y'$
- Si $x = x'$ et $y = y'$ alors $\vec{u} = \vec{v}$.

EXERCICE D'APPLICATION

Dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne le point A de coordonnées $(2 ; -1)$ et le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Calcule les coordonnées $(x ; y)$ du point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

Correction

On donne A(2 ; -1) et $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Calculons les coordonnées du point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

Soit B(x ; y)

$$\text{On a } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x - 2 \\ y + 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x - 2 \\ y + 1 \end{pmatrix} = \vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = -3 \\ y + 1 = 2 \end{cases} \text{ et } \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 + 2 = -1 \\ y = 2 - 1 = 1 \end{cases} \text{ Donc } \mathbf{B(-1 ; 1)}$$

III°) Coordonnées et opérations sur les vecteurs.**1) Coordonnées de la somme de deux vecteurs**

Dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$.

Déterminons les coordonnées du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \vec{u} + \vec{v} &= (x\vec{i} + y\vec{j}) + (x'\vec{i} + y'\vec{j}) \\ &= x\vec{i} + y\vec{j} + x'\vec{i} + y'\vec{j} \\ &= x\vec{i} + x'\vec{i} + y\vec{j} + y'\vec{j} \\ \vec{u} + \vec{v} &= (x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j} \end{aligned}$$

Il résulte alors que le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$;

On en déduit alors que le vecteur $\vec{u} - \vec{v}$ aura pour coordonnées $\begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \end{pmatrix}$.

Rétiens : Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

✓ Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$

✓ Le vecteur $\vec{u} - \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \end{pmatrix}$.

2) Coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre réel

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Soit k un nombre réel.

On a : $k\vec{u} = k(x\vec{i} + y\vec{j})$

$$k\vec{u} = kx\vec{i} + ky\vec{j} \text{ donc } k\vec{u} \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$

Rétiens : Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ avec k un réel quelconque.

IV°) Condition de colinéarité de deux vecteurs**1) Activité**

Dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Donnons la condition pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$

$$\vec{v} = k\vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx \Leftrightarrow k = \frac{x'}{x} \\ y' = ky \Leftrightarrow k = \frac{y'}{y} \end{cases} ;$$

$$\begin{aligned} k = k &\Leftrightarrow \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} \Leftrightarrow x'y = xy' \\ &\Leftrightarrow xy' = x'y \\ &\Leftrightarrow xy' - x'y = 0 \end{aligned}$$

En définitive, les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si $xy' - x'y = 0$

2) Propriétés

Etant donné deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$,

✓ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $xy' - x'y = 0$;

✓ Réciproquement, si $xy' - x'y = 0$ alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

EXERCICES

EXERCICE 1*

Pour chacune des affirmations suivantes, dis si elle est vraie ou Fausse sans justification. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, A et B deux points du plan.

1	Si $\overrightarrow{AB} = x \cdot \overrightarrow{OI} + y \cdot \overrightarrow{OJ}$ alors $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
2	$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires équivaut à : $xy' - x'y = 0$
3	Les points A(3 ; -3) ; B(-2 ; -1) et C(-7 ; 7) sont alignés.
4	Si A(-1 ; 3) et B(2 ; -1/2) alors $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -7/2 \end{pmatrix}$

EXERCICE 2*

Dans un repère cartésien, on donne les points A(-1 ; 2) ; B(3 ; 5) ; C(-7/2 ; -3/2) et D(1/2 ; 3/2).
1°) Démontre que ABDC est un parallélogramme.
2°) Détermine les coordonnées du point I milieu de [AD].

EXERCICE 3*

Dans un repère cartésien (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) ; on donne les points A(2 ; -3) ; B(-1 ; -1) et C(1/5 ; -9/5).
Démontre que les points A, B et C sont alignés.

EXERCICE 4*

Soit (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère cartésien du plan. Place les points A(2 ; 3) ; B(-4 ; 2) et C(0 ; 5).

- 1) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$;
- 2) Exprime les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{OC}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$;
- 3) Calcule les coordonnées des points M et N, les milieux respectifs des segments [AB] et [AC] ;
- 4) D est un point du repère tel que ABCD est parallélogramme. Calcule les coordonnées de D.

EXERCICE 5*

On considère dans un plan muni d'un repère cartésien (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), les points suivants : A(-1 ; 3) ; B(7 ; -6) ; C(x, y) et D(-3 ; -4).

- 1) Détermine les réels x et y pour que $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$
- 2) Détermine les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

EXERCICE 6*

Dans le plan muni d'un repère cartésien (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), on donne: A(2 ; 1) ; B(-3 ; 2) et C(-1 ; -3) Fais la figure que tu complèteras au fur et à mesure.

- 1) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
- 2) Détermine les coordonnées du point D pour que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.
- 3) Soit S_A la symétrie de centre A et $t_{\overrightarrow{AB}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

On pose : K = S_A (C) et L = $t_{\overrightarrow{AB}}$ (K).

Calcule les coordonnées de K et L puis les place dans le repère(O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

- 4) Soit G le point de l'axe des abscisses tel que K, G et D soient alignés. Détermine les coordonnées de G

EXERCICE 7*

Dans le plan muni d'un repère(O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) on considère les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} a+6 \\ 4 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 1-m \\ 2 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{OA} = 4\vec{j} ; \overrightarrow{OC} = \vec{i} + \vec{j} ;$$

$$\overrightarrow{CD} = 3\vec{i} + (2+b)\vec{j} ; (a, b \text{ et } m \text{ sont des réels})$$

- 1) calcule les réels a et b pour que ABCD soit un parallélogramme.
- 2) Calcule le réel m pour que les points A, B et E soient alignés.
- 3) Soit le point F, translaté de A par la translation du vecteur $\overrightarrow{CD}$. Calcule les coordonnées de F.
- 4) Précise les coordonnées des points A, B, C, D et E.

EXERCICE 8

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$). On donne les points

A(3 ; -2) ; B(4 ; 1) et C(-2 ; 2)

- 1) Place ces points A ; B et C dans le repère ;
- 2) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$;
- 3) Détermine les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme. Place le point D
- 4) Détermine les coordonnées du point E image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$. Place E ;
- 5) Détermine les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BE}$;
Démontre que les points A ; B et E sont alignés

EXERCICE 9

Dans le plan muni d'un repère cartésien (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$), place les points

A(2 ; 1) ; B(-3 ; 2) et C(-1 ; -3) (tu complèteras la figure au fur et à mesure)

- 1) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$;
- 2) Calcule les coordonnées de D pour que ABCD soit un parallélogramme et calcule les coordonnées de son centre I ;
- 3) Calcule en utilisant une égalité vectorielle :
 - a) Les coordonnées du point E symétrie de A par rapport à O ;
 - b) Les coordonnées du point F image de D dans la translation du vecteur $\overrightarrow{CA}$;
- 4) a) montre que A ; B ; et F sont alignés
 b) montre que (CD) et (BF) sont parallèles
 c) les vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont-ils colinéaires ? justifie ta réponse.

EXERCICE 10

Dans le muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, on donne les points A, B et C tels que :

$$\overrightarrow{OA} = \vec{i} - \vec{j} ; \overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + 2\vec{j} \text{ et } \overrightarrow{OC} = 7\vec{i}.$$

- 1) Place les points A, B, et C dans le repère (tu complèteras la figure au fur et à mesure) ;
- 2) Détermine les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme ;
- 3) Soit M le milieu de [BD], calcule les coordonnées de M ;
- 4) Soit $E\left(\frac{1}{2} ; y\right)$; détermine y pour que les points B, C et E soient alignés ;
- 5) F est l'image de D dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$. Calcule les coordonnées de F

CORRIGES

EXERCICE 1

Répondons par vrai ou faux :

1-VRAI ; 2-VRAI ; 3-FAUX ; 4-FAUX

EXERCICE 2

Dans un repère cartésien, on donne les points $A(-1 ; 2)$; $B(3 ; 5)$; $C\left(-\frac{7}{2} ; -\frac{3}{2}\right)$ et $D\left(\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right)$

1°) Démontrons que ABDC est un parallélogramme.

On a : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3+1 \\ 5-2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et

$$\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Comme $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ alors le quadrilatère ABDC est un parallélogramme.

2°) Déterminons les coordonnées du point I milieu de [AD].

$$I \text{ milieu de } [AD] \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_D}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_D}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{-1 + \frac{1}{2}}{2} \\ y_I = \frac{2 + \frac{3}{2}}{2} \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} x_I = -\frac{1}{4} \\ y_I = \frac{7}{4} \end{cases}$$

$$\text{D'où } I\left(-\frac{1}{4} ; \frac{7}{4}\right)$$

EXERCICE 3

Dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$; on donne les points $A(2 ; -3)$; $B(-1 ; -1)$ et $C\left(\frac{1}{5} ; -\frac{9}{5}\right)$.
 Démontrons que les points A, B et C sont alignés.

On a : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1-2 \\ -1+3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} \frac{1}{5}-2 \\ -\frac{9}{5}+3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -\frac{9}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

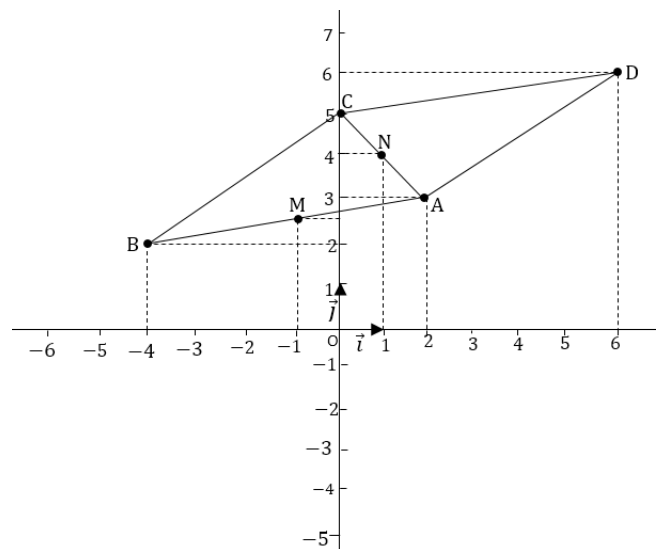
$$xy' - x'y = -3\left(\frac{6}{5}\right) - 2\left(-\frac{9}{5}\right) = -\frac{18}{5} + \frac{18}{5} = 0$$

Comme $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -\frac{9}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix}$ tel que

$-3\left(\frac{6}{5}\right) - 2\left(-\frac{9}{5}\right) = 0$ alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. On en déduit alors que les points A, B et C sont alignés.

EXERCICE 4*

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien du plan. Plaçons les points $A(2 ; 3)$; $B(-4 ; 2)$ et $C(0 ; 5)$.



- 1) Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$;
 On a : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4-2 \\ 2-3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0-2 \\ 5-3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$
- 2) Exprimons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{OC}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$;

On a $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 0+4 \\ 5-2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BC} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$
 $\overrightarrow{OC} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{OC} = 0\vec{i} + 5\vec{j} = 5\vec{j}$

- 3) Calculons les coordonnées des points M et N, les milieux respectifs des segments [AB] et [AC] ;

On a : $x_M = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$ et

$$y_M = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2} \quad \text{Donc } M \left(-1 ; \frac{5}{2} \right)$$

$$x_N = \frac{x_A+x_C}{2} = \frac{2+0}{2} = 1 \text{ et}$$

$$y_N = \frac{y_A+y_C}{2} = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \text{Donc } N(1 ; 4)$$

- 4) D est tel que ABCD est un parallélogramme. Calculons les coordonnées de D.

On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ car ABCD est un parallélogramme

Soit $D(x ; y)$

On a donc $\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} -x \\ 5-y \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} -x \\ 5-y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x = -6 \Leftrightarrow x = 6 \\ 5-y = -1 \Leftrightarrow y = 6 \end{cases}$$

Donc $D(6 ; 6)$

EXERCICE 5

On considère dans un plan muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points suivants :

A $(-1 ; 3)$; B $(7 ; -6)$; C (x, y) et D $(-3 ; -4)$.

- 1) Déterminons les réels x et y pour que

$$\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$$

On a : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 7+1 \\ -6-3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix}$ et

$$\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -3-x \\ -4-y \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -3-x \\ -4-y \end{pmatrix} = 2 \cdot \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3-x = 2 \times 8 \\ -4-y = 2 \times (-9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3-x = 16 \Leftrightarrow -x = 16+3 \Leftrightarrow x = -19 \\ -4-y = -18 \Leftrightarrow -y = -18+4 \Leftrightarrow y = 14 \end{cases}$$

$C(-19 ; 14)$.

- 2) Déterminons les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

Soit $M(x' ; y')$

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x'+1 \\ y'-3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} -3-7 \\ -4+6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x'+1 \\ y'-3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

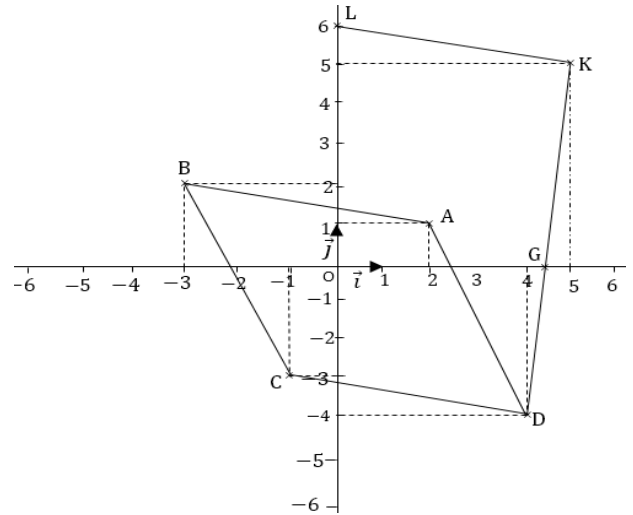
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'+1 = -\frac{1}{2} \times (-10) \\ y'-3 = -\frac{1}{2} \times 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'+1 = 5 \Leftrightarrow x' = 5-1 = 4 \\ y'-3 = -1 \Leftrightarrow y' = -1+3 = 2 \end{cases}$$

$M(4 ; 2)$

EXERCICE 6

Dans le plan muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne : A $(2 ; 1)$; B $(-3 ; 2)$ et C $(-1 ; -3)$



- 1) Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3-2 \\ 2-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1-2 \\ -3-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -1+3 \\ -3-2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

- 2) Déterminons les coordonnées du point D pour que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

Soit $(x ; y)$ les coordonnées du point D.

$$\text{On a : } \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} -1-x \\ -y-3 \end{pmatrix}$$

Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -1-x = -5 \\ -3-y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x = -5+1 \Leftrightarrow x = 4 \\ -y = 1+3 \Leftrightarrow y = -4 \end{cases} \quad \text{donc}$$

$D(4 ; -4)$

- 3) Soit S_A la symétrie de centre A et $t_{\overrightarrow{AB}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. On pose : K = $S_A(C)$ et L = $t_{\overrightarrow{AB}}(K)$. Calculons les coordonnées de K et L puis les plaçons dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$$\checkmark \quad K = S_A(C) \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AK}$$

Soit $K(x ; y)$.

$$\text{On a : } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AK} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AK} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 3 \\ y-1 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3+2 = 5 \\ y = 4+1 = 5 \end{cases} \quad \text{Donc } K(5 ; 5)$$

$$\checkmark \quad L = t_{\overrightarrow{AB}}(K) \Leftrightarrow \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AB}$$

Soit $L(x' ; y')$

$$\text{On a : } \overrightarrow{KL} \begin{pmatrix} x'-5 \\ y'-5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{KL} \begin{pmatrix} x'-5 \\ y'-5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-5 = -5 \\ y'-5 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -5+5 = 0 \\ y' = 1+5 = 6 \end{cases} \quad \text{Donc } L(0 ; 6)$$

- 4) Soit G le point de l'axe des abscisses tel que K, G et D soient alignés. Déterminons les coordonnées de G
 G étant sur l'axe des abscisses alors $y_G = 0$
 Prenons donc $G(x; 0)$
 Les points K, G et D sont alignés si les vecteurs $\overrightarrow{KG}$ et $\overrightarrow{KD}$ sont colinéaires
 On a : $\overrightarrow{KG} \begin{pmatrix} x-5 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KD} \begin{pmatrix} 4-5 \\ -4-5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{KD} \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \end{pmatrix}$
 $\overrightarrow{KG}$ colinéaires à $\overrightarrow{KD}$
 $\Leftrightarrow (x-5)(-9) - (-1)(-5) = 0$
 $\Leftrightarrow -9x + 45 - 5 = 0$
 $\Leftrightarrow x = \frac{40}{9}$
 $G(\frac{40}{9}; 0)$

EXERCICE 7

Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ on considère les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} a+6 \\ 4 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 1-m \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{OA} = 4\vec{j}; \overrightarrow{OC} = \vec{i} + \vec{j};$$

$$\overrightarrow{CD} = 3\vec{i} + (2+b)\vec{j}; (a, b \text{ et } m \text{ sont des réels})$$

- 1) Calculons les réels a et b pour que ABCD soit un parallélogramme.

ABCD est un parallélogramme si et

seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

$$\text{On a : } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} a+6 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CD} = 3\vec{i} + (2+b)\vec{j}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 3 \\ 2+b \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} -3 \\ -2-b \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} a+6 \\ 4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} -3 \\ -2-b \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+6 = -3 \Leftrightarrow a = -3-6 = -9 \\ 4 = -2-b \Leftrightarrow -b = 4+2 \Leftrightarrow b = -6 \end{cases}$$

On obtient alors $a = -9$ et $b = -6$

$$\text{Ainsi, } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

- 2) Calculons le réel m pour que les points A, B et E soient alignés.

A, B et E sont alignés si $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AE}$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ colinéaire à } \overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 1-m \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (-3) \times 2 -$$

$$4(1-m) = 0$$

$$\Leftrightarrow -6 - 4 + 4m = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m = 10 \text{ donc } m = \frac{5}{2}$$

- 3) Soit le point F , translaté de A par la translation du vecteur $\overrightarrow{CD}$. Calculons les coordonnées de F .

$$F = t_{\overrightarrow{CD}}(A) \Leftrightarrow \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CD}$$

Soit $F(x; y)$

$$\overrightarrow{OA} = 4\vec{j} \Leftrightarrow A(0; 4)$$

$$\text{On a : } \overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} x \\ y-4 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CD}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y-4 = -4 \Leftrightarrow y = 0 \end{cases} \text{ donc } F(3; 0)$$

- 4) Précisons les coordonnées de chacun des points A, B, C, D et E .

$$\overrightarrow{OA} = 4\vec{j} \Leftrightarrow A(0; 4);$$

$$\overrightarrow{OC} = \vec{i} + \vec{j} \Leftrightarrow C(1; 1)$$

Soit $B(x; y)$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x \\ y-4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{donc } B(-3; 8)$$

Soit $D(x'; y')$

$$\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x'-1 \\ y'-1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x'-1 = 3 \Leftrightarrow x' = 3+1 = 4 \\ y'-1 = -4 \Leftrightarrow y' = -4+1 = -3 \end{cases} \text{ donc } D(4; -3)$$

Soit $E(x; y)$

$$\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} x \\ y-4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y-4 = 2 \Leftrightarrow y = 6 \end{cases} \text{ donc } E(-\frac{3}{2}; 6)$$

Chapitre 4 : Racine carrée d'un réel positif

I°) Rappels et définition

1) Rappels

- Le carré d'un nombre réel a est le produit de ce nombre par lui-même. Ainsi, le carré d'un réel a se note a^2 avec $a^2 = a \times a$.
- Le carré d'un réel est toujours positif. C'est pourquoi deux nombres opposés ont le même carré.

EXEMPLE : Les nombres 9 et -9 sont opposés

On a : $9^2 = 9 \times 9 = 81$; $(-9)^2 = (-9) \times (-9) = 81$.

2) Définition

Soit x un nombre réel positif. On appelle racine carrée de x et on note $\sqrt{x}$, le réel positif dont le carré est x .

EXEMPLE : $\sqrt{81} = 9$.

REMARQUE :

- Le nombre positif n'a qu'une seule racine carrée.
- Le symbole $\sqrt{}$ s'appelle le radical
- $\sqrt{x} = a$ signifie que $a^2 = x$

3) Conséquences de la définition.

- Un nombre négatif n'admet pas racine carrée
- Pour tout réel x positif, on a :
$$\begin{cases} \sqrt{x} \geq 0 \\ (\sqrt{x})^2 = x \end{cases}$$

4) Ordre des carrés et des racines carrées

- Pour tous nombres réels x et y positifs, on a :
$$\begin{cases} \text{Si } x = y \text{ alors } x^2 = y^2 \\ \text{Si } x < y \text{ alors } x^2 < y^2 \\ \text{Si } x^2 < y^2 \text{ alors } x < y \end{cases}$$

Deux nombres positifs sont dans le même ordre que leurs carrés.

- Si $x < y$ alors $\sqrt{x} < \sqrt{y}$

Les racines carrées de deux nombres positifs sont dans le même ordre que les deux nombres.

Valeurs à retenir

Complétons le tableau ci-dessous.

a	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196
$\sqrt{a}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

$$\sqrt{0} = 0 \quad \sqrt{1} = 1 \quad \sqrt{2} \approx 1,414 \quad \sqrt{3} \approx 1,732$$

II°) Propriétés

1) Racine carrée d'un produit-Racine carrée d'un quotient

❖ Activité

a) complète le tableau ci-dessous

				(1)		(2)	(3)		(4)
a	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a} \times \sqrt{b}$	$a \times b$	$\sqrt{a \times b}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\frac{a}{b}$	$\sqrt{\frac{a}{b}}$
9	16	3	4	12	144	12	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{4}$
36	25	6	5	30	900	30	$\frac{6}{5}$	$\frac{36}{25}$	$\frac{6}{5}$
25	4	5	2	10	100	10	$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{4}$	$\frac{5}{2}$

b) Quelles égalités d'expression peut-on déduire à partir des colonnes numérotées sur le tableau ?

Correction

a) Voir tableau

b) A partir du tableau, on peut déduire que :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (\text{avec } b \neq 0)$$

PROPRIETES : Pour tous réels a et b positifs, on a :
$$\begin{cases} \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \\ \text{et} \\ \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \end{cases} \quad (\text{avec } b \neq 0)$$

ATTENTION ! : a et b étant deux réels positifs ;
$$\begin{cases} \sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b} \\ \text{et} \\ \sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b} \end{cases} \quad (\text{avec } a \geq b)$$

EXERCICE D'APPLICATION

a) Ecris sous forme d'un entier naturel

$$\sqrt{2} \times \sqrt{8} \quad ; \quad \sqrt{12} \times \sqrt{75}$$

b) Ecris sous forme de $a\sqrt{b}$

$$\sqrt{12} \quad ; \quad \sqrt{18} \quad ; \quad \sqrt{75} \times \sqrt{32}$$

c) Simplifie

$$\sqrt{\frac{4}{16}} \quad ; \quad \sqrt{\frac{5}{7}} \times \sqrt{\frac{7}{5}}$$

Correction

a) Ecrivons sous forme d'un entier naturel

$$\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4 \quad ; \quad \sqrt{12} \times \sqrt{75} = \sqrt{12 \times 75} = \sqrt{900} = 30$$

b) Ecrivons sous forme de $a\sqrt{b}$

$$\begin{aligned} \sqrt{12} &= \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \quad ; & \sqrt{75} \times \sqrt{32} &= \sqrt{25 \times 3} \times \sqrt{16 \times 2} \\ \sqrt{18} &= \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2} & &= (\sqrt{25} \times \sqrt{3}) \times (\sqrt{16} \times \sqrt{2}) \\ & & &= 5\sqrt{3} \times 4\sqrt{2} = 5 \times 4 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} \\ & & &= 20\sqrt{6} \end{aligned}$$

c) Simplifions :

$$\sqrt{\frac{4}{16}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{16}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \sqrt{\frac{5}{7}} \times \sqrt{\frac{7}{5}} = \sqrt{\frac{35}{35}} = 1$$

2) Comparaison

Pour comparer deux réels positifs comportant des radicaux, on les élève aux carrés. Les nombres comparés sont dans le même ordre que leurs carrés

EXEMPLE : Compare $3\sqrt{2}$ et $\sqrt{27}$

$$\text{On a : } (3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18 \quad ; \quad (\sqrt{27})^2 = 27$$

Comme $18 < 27$ alors $3\sqrt{2} < \sqrt{27}$

5) Racine carrée et valeur absolue

❖ Activité

a) Complète le tableau ci-dessous

x	-4	5	-1,5	0	1
$\sqrt{x^2}$	4	5	1,5	0	1
$ x $	4	5	1,5	0	1

b) Que peux-tu dire de $\sqrt{x^2}$ et $|x|$?

Solution

a) voir tableau

b) A partir du tableau, on peut dire que $\sqrt{x^2} = |x|$ **Propriété :** Pour tout nombre réel x positif, on a : $\sqrt{x^2} = |x|$ **III°) calculs sur les radicaux****1) expression conjuguée**❖ **Activité**Soit $A = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$

Calcule A et dis ce que tu remarques.

Solution

Calculons A

$$\begin{aligned} A &= (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3 \\ &= 4 - 3 \\ A &= 1 \end{aligned}$$

On remarque que $\sqrt{2}$ n'apparaît pas dans le résultat obtenu, on dit que $2 + \sqrt{3}$ a pour expression conjuguée $2 - \sqrt{3}$ ou que $2 - \sqrt{3}$ est l'expression conjuguée de $2 + \sqrt{3}$.

2) suppression des radicaux : rendre rationnel

Pour rendre rationnel le dénominateur d'un quotient comportant des radicaux, on multiplie le numérateur et le dénominateur du quotient par l'expression conjuguée du dénominateur.

Si le quotient est sous forme $\frac{a}{\sqrt{b}}$ ($b \neq 0$), on multiplie le numérateur et le dénominateur du quotient par $\sqrt{b}$

EXEMPLES : Calculons : $\frac{7}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{7(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})} ; \quad \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} &= \frac{7\sqrt{5} + 7\sqrt{2}}{5 + \sqrt{10} - \sqrt{10} - 2} \\ &= \frac{7\sqrt{5} + 7\sqrt{2}}{3} \end{aligned} \quad \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2}$$

$$\frac{7}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{5} + 7\sqrt{2}}{3} \quad \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

3) Résolution de l'équation $x^2 = k$ Soit à résoudre l'équation $x^2 = k$ (avec k un nombre réel)

Trois cas se présentent :

- 1^{er} cas : Si $k < 0$ alors l'équation n'admet pas de solution $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$
- 2^{ème} cas : Si $k = 0$ alors l'équation admet une seule solution qui est zéro. Donc $x^2 = 0 \Leftrightarrow S_{\mathbb{R}} = \{0\}$
- 3^{ème} cas : Si $k > 0$ alors l'équation admet deux solutions opposées $\sqrt{k}$ et $-\sqrt{k}$.
 $S_{\mathbb{R}} = \{\sqrt{k}; -\sqrt{k}\}$

EXEMPLE : Résous l'équation $x^2 - 8 = 0$ **Solution :** $x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 8$

$$\Leftrightarrow x = \begin{cases} x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \{-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\}$$

EXERCICE D'APPLICATION1°) Soit $A = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{7}$.a) Compare les réels $3\sqrt{2}$ et $2\sqrt{7}$ puis en déduis le signe de A

- b) Calcule A^2 puis en déduis une écriture simplifiée de $B = \sqrt{38 - 12\sqrt{10}}$
 2°) Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $x^2 - 27 = 0$; $x^2 + 1 = 0$

Solution

1°) soit $A = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$.

a) Comparons $3\sqrt{2}$ et $2\sqrt{5}$ puis en déduisons le signe de A

$$\text{On a : } (3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18 \quad \text{et} \quad (2\sqrt{5})^2 = 4 \times 5 = 20$$

Comme $18 < 20$ alors $3\sqrt{2} < 2\sqrt{5}$

Signe de A.

$$\text{On a } 3\sqrt{2} < 2\sqrt{5} \Leftrightarrow 3\sqrt{2} - 2\sqrt{5} < 0$$

$$\Leftrightarrow A < 0 \text{ d'où A est négatif.}$$

b) Calculons A^2

$$A^2 = (3\sqrt{2} - 2\sqrt{5})^2 = (3\sqrt{2} - 2\sqrt{5})(3\sqrt{2} - 2\sqrt{5})$$

$$= 18 - 12\sqrt{10} + 20$$

$$A^2 = 38 - 12\sqrt{10}$$

Donnons une écriture simplifiée de $B = \sqrt{38 - 12\sqrt{10}}$

$$\text{On a : } B = \sqrt{38 - 12\sqrt{10}} = \sqrt{A^2}$$

$$= \sqrt{(3\sqrt{2} - 2\sqrt{5})^2}$$

$$= |3\sqrt{2} - 2\sqrt{5}| = -(3\sqrt{2} - 2\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$$

$$B = 2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$$

2°) Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$x^2 - 27 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 27 \Leftrightarrow x = \begin{cases} x = \sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{27} = -\sqrt{9 \times 3} = -3\sqrt{3} \end{cases} \quad S_{\mathbb{R}} = \{-3\sqrt{3}; 3\sqrt{3}\}$$

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \text{ IMPOSSIBLE} \quad \text{donc } S_{\mathbb{R}} = \emptyset$$

EXERCICES

EXERCICE 1*

Réponds par vrai ou faux aux affirmations suivantes

- 1) $\sqrt{40} = 20$
- 2) $\sqrt{64 + 25} = 8 + 5 = 13$;
- 3) $\sqrt{19 - \sqrt{1 + \sqrt{64}}} = 4$;
- 4) Si $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{N}$ alors $(a\sqrt{b})^2 = ab$
- 5) a et b étant deux réels négatifs, si $a^2 < b^2$ alors $a > b$

EXERCICE 2*

Calcule les expressions suivantes :

$$A = \sqrt{63} - \sqrt{175}$$

$$B = (5 - \sqrt{6})(2 + 2\sqrt{6})$$

$$C = \frac{32\sqrt{90}}{6\sqrt{121}}$$

$$D = \sqrt{43 + \sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}}}}}}$$

EXERCICE 3*

1) Donne une écriture simplifiée des expressions suivantes

$$A = \sqrt{1,44} + \sqrt{0,0225} + \sqrt{0,25};$$

$$B = \frac{3}{\sqrt{4}} - \frac{1}{2}\sqrt{12} + 4\sqrt{27} - 2\sqrt{\frac{3}{16}};$$

$$C = \frac{\sqrt{50 - \sqrt{18} + \sqrt{200}}}{\sqrt{8} - \sqrt{2}}.$$

2) Calcule et donne le résultat sous la forme réduite

$$D = (4 + 5\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2} - 3)(3\sqrt{2} + 7);$$

$$E = \sqrt{(\sqrt{3} - 5)^2} - \sqrt{(\sqrt{3} + 5)^2};$$

$$F = \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

EXERCICE 4*

Soient m et n deux réels tels que

$$m = 4 - 3\sqrt{2} \text{ et } n = 2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

- Montre que le réel m est négatif ;
- Calcule m^2 et n^2
- On donne $Z = \sqrt{34 - 24\sqrt{2}}$. Ecris Z sous la forme $a + b\sqrt{2}$ avec a et b deux entiers relatifs ;
- Justifie que $m^2 + 4n^2 = 68$.

EXERCICE 5

On donne $m = 1 - 2\sqrt{3}$;

$$p = \sqrt{13 - 4\sqrt{3}} \text{ et } q = \sqrt{13 + 4\sqrt{3}}$$

- Montre que m est négatif.
- Calcule m^2 puis déduis-en que p et m sont opposés ;
- Encadre m à 10^{-2} près sachant que $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$;
- Montre que $pq = 11$.

EXERCICE 6

- Ecris les expressions suivantes sous la forme $a\sqrt{b}$ ou a et b sont des entiers relatifs

$$A = 2\sqrt{242} - 5\sqrt{162} + \sqrt{128} ;$$

$$B = \frac{5}{1-\sqrt{3}} + \frac{5}{1+\sqrt{3}}$$

- On donne $f(x) = \sqrt{(1-x)^2} - \sqrt{(4x+3)^2}$
 - Ecris $f(x)$ sans radical.
 - Ecris $f(x)$ sans symbole de la valeur absolue.

EXERCICE 7

$$1) \text{ Soit } U = 2 - \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ et } V = \frac{1}{3\sqrt{2}+4}$$

- Montre que U et V sont opposés.
 - Sachant que $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$, encadre V par deux décimaux consécutifs d'ordre 2.
- On donne les réels x, y et a tels que $x = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$ et $y = a + 3$.
 - Rendre rationnel le dénominateur de x .
 - Détermine le réel a pour que x et y soient opposés.
 - Détermine le réel a pour que x et y soient inverses l'un de l'autre.

$$3) \text{ Soit } A = \frac{\sqrt{3-1}}{\sqrt{2}} \text{ et } B = \frac{\sqrt{3+1}}{\sqrt{2}}. \text{ Calcule } A \times B.$$

Que peux-tu dire ?

EXERCICE 8*

$$\text{On donne } A = \frac{2}{3+\sqrt{5}} + \frac{2}{3-\sqrt{5}} \text{ et}$$

$$B = \frac{\sqrt{300}-\sqrt{432}+6\sqrt{108}}{\sqrt{48}-6\sqrt{12}}$$

- Montre que $A \in \mathbb{N}$ et $B \in \mathbb{D}$.
- Montre que $C = \frac{\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{\sqrt{5}-3\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}-3\sqrt{2}}{\sqrt{5}+3\sqrt{2}}$ est un nombre rationnel.
- Donne une écriture de $D = \frac{5-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+1}$ ne comportant pas de radical au dénominateur.
 - Sachant que $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$, trouve une valeur approchée par excès de D à 0,1 près.

EXERCICE 9

- Ecris simplement le nombre réel

$$A = 5\sqrt{300} - 2\sqrt{75} + 6\sqrt{3} + \sqrt{(5)^2}.$$

$$2) \text{ On donne } B = \frac{1}{9-4\sqrt{5}} \text{ et } C = \frac{1}{9+4\sqrt{5}}.$$

- Montre que B et C sont inverses l'un de l'autre ;
 - Sachant que $2,236 < \sqrt{5} < 2,237$, donne un encadrement de $9 - 4\sqrt{5}$ par deux décimaux consécutifs d'ordre 2
- Soit $D = \sqrt{(-x+3)^2}$. Exprime D sans le symbole de la valeur absolue

EXERCICE 10*

- Soit a un réel appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$, écris le plus simplement possible le réel

$$A = \sqrt{a^2 + 4\sqrt{a^2 - 2a} + 1}$$

$$2^\circ) \text{ Soit } X = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{5}.$$

- Trouve un encadrement de X à l'ordre 2 par deux décimaux consécutifs sachant que $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$ et $2,236 < \sqrt{5} < 2,237$.
- Compare $3\sqrt{2}$ et $2\sqrt{5}$ puis en déduis le signe de X .
- Calcule X^2 puis en déduis une écriture simplifiée de $Y = \sqrt{38 - 12\sqrt{10}}$

CORRIGES

EXERCICE 1

Répondons par vrai ou faux aux affirmations suivantes

1-FAUX ; 2-FAUX ; 3-VRAI ; 4-FAUX ; 5-VRAI.

EXERCICE 2

Calculons les expressions suivantes :

$$A = \sqrt{63} - \sqrt{175} = \sqrt{9 \times 7} - \sqrt{25 \times 7} = 3\sqrt{7} - 5\sqrt{7} = -2\sqrt{7}$$

$$B = (5 - \sqrt{6})(2 + 2\sqrt{6}) = 10 + 10\sqrt{6} - 2\sqrt{6} - 12$$

$$= 10 - 12 + 10\sqrt{6} - 2\sqrt{6}$$

$$B = -2 + 8\sqrt{6}$$

$$C = \frac{32\sqrt{90}}{6\sqrt{121}} = \frac{32 \times \sqrt{9 \times 10}}{6\sqrt{(11)^2}} = \frac{32 \times 3\sqrt{10}}{6 \times 11} = \frac{16}{11}\sqrt{10}$$

$$D = \sqrt{43 + \sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}}}}}} = 7$$

EXERCICE 3

3) Donnons une écriture simplifiée des expressions suivantes

$$A = \sqrt{1,44} + \sqrt{0,0225} + \sqrt{0,25} = 1,2 + 0,15 + 0,5 = 1,85$$

Autrement : $A = \sqrt{\frac{144}{100}} + \sqrt{\frac{225}{10000}} + \sqrt{\frac{25}{100}} = \frac{12}{10} +$

$$\frac{15}{100} + \frac{5}{10} = \frac{37}{20} = 1,85$$

$$B = \frac{3}{\sqrt{4}} - \frac{1}{2}\sqrt{12} + 4\sqrt{27} - 2\sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{3}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{2} +$$

$$4 \times 3\sqrt{3} - 2 \times \frac{1}{4}\sqrt{3} = \frac{3}{2} + 11\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{22\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2}$$

$$B = \frac{3}{2} + \frac{21}{2}\sqrt{3}$$

$$C = \frac{\sqrt{50} - \sqrt{18} + \sqrt{200}}{\sqrt{8} - \sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 10\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 12.$$

4) Calculons et donnons le résultat sous la forme réduite

$$D = (4 + 5\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2} - 3)(3\sqrt{2} + 7)$$

$$= (16 + 40\sqrt{2} + 50) + (12 + 14\sqrt{2} -$$

$$9\sqrt{2} - 21)$$

$$= 16 + 50 + 12 - 21 + 40\sqrt{2} + 14\sqrt{2} - 9\sqrt{2}$$

$$D = 57 + 45\sqrt{2}$$

$$E = \sqrt{(\sqrt{3} - 5)^2} - \sqrt{(\sqrt{3} + 5)^2} = |\sqrt{3} - 5| - |\sqrt{3} + 5|$$

$$= -(\sqrt{3} - 5) - (\sqrt{3} + 5) \text{ Car } \sqrt{3} - 5 < 0$$

$$= -\sqrt{3} + 5 - \sqrt{3} - 5$$

$$E = -2\sqrt{3}.$$

$$F = \frac{1+\sqrt{2}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1+\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}} = \frac{1+\sqrt{2}}{1} \times \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

EXERCICE 4

Soient m et n deux réels tels que

$$m = 4 - 3\sqrt{2} \text{ et } n = 2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

a) Montrons que le réel m est négatif

$$\text{On a : } 4^2 = 16 \text{ et } (3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18$$

Comme $16 < 18$ alors $4 < 3\sqrt{2} \Leftrightarrow 4 - 3\sqrt{2} < 0 \Leftrightarrow m < 0$ donc m est négatif.

b) Calculons m^2 et n^2

$$\text{On a : } m^2 = (4 - 3\sqrt{2})^2 = 16 - 24\sqrt{2} + 18$$

$$m^2 = 34 - 24\sqrt{2}$$

$$n^2 = \left(2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2 = 4 + 6\sqrt{2} + \frac{9}{4} \times 2$$

$$n^2 = \frac{17}{2} + 6\sqrt{2}$$

c) On donne $Z = \sqrt{34 - 24\sqrt{2}}$. Ecrivons Z sous la forme $a + b\sqrt{2}$ avec a et b deux entiers relatifs ;

$$Z = \sqrt{34 - 24\sqrt{2}} = \sqrt{m^2} = |m|$$

$$= -m \text{ car } m < 0$$

$$= -(4 - 3\sqrt{2})$$

$$Z = -4 + 3\sqrt{2}$$

d) Justifions que $m^2 + 4n^2 = 68$.

$$\text{On a : } m^2 + 4n^2 = 34 - 24\sqrt{2} + 4\left(\frac{17}{2} + 6\sqrt{2}\right) = 34 - 24\sqrt{2} + 34 + 24\sqrt{2} = 68$$

$$\text{Donc } m^2 + 4n^2 = 68$$

EXERCICE 8

$$\text{On donne } A = \frac{2}{3+\sqrt{5}} + \frac{2}{3-\sqrt{5}} \text{ et}$$

$$B = \frac{\sqrt{300} - \sqrt{432} + 6\sqrt{108}}{\sqrt{48} - 6\sqrt{12}}$$

1) Montrons que $A \in \mathbb{N}$ et $B \in \mathbb{D}$.

$$A = \frac{2}{3+\sqrt{5}} + \frac{2}{3-\sqrt{5}} = \frac{2(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} + \frac{2(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} =$$

$$\frac{6-2\sqrt{5}+6-2\sqrt{5}}{9-5} = \frac{12}{4} = 3 \in \mathbb{N}$$

$$B = \frac{\sqrt{100 \times 3} - \sqrt{144 \times 3} + 6\sqrt{36 \times 3}}{2\sqrt{12} - 6\sqrt{12}} = \frac{10\sqrt{3} - 12\sqrt{3} + 36\sqrt{3}}{-8\sqrt{3}}$$

$$= -\frac{34\sqrt{3}}{8\sqrt{3}} = -\frac{17}{4} = -4,25 \in \mathbb{D}$$

2) Montrons que $C = \frac{\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{\sqrt{5}-3\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}-3\sqrt{2}}{\sqrt{5}+3\sqrt{2}}$ est un nombre rationnel.

$$C = \frac{(\sqrt{5}+3\sqrt{2})^2 + (\sqrt{5}-3\sqrt{2})^2}{(\sqrt{5}-3\sqrt{2})(\sqrt{5}+3\sqrt{2})} =$$

$$\frac{5+6\sqrt{10}+18+5-6\sqrt{10}+18}{5-18} = -\frac{46}{13} \in \mathbb{Q} \text{ d'où } C \text{ est}$$

nombre rationnel.

3) a) Donnons une écriture de $D = \frac{5-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+1}$ ne comportant pas de radical au dénominateur.

$$D = \frac{5-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+1} = \frac{(5-\sqrt{3})(2\sqrt{3}-1)}{(2\sqrt{3}+1)(2\sqrt{3}-1)} = \frac{10\sqrt{3}-5-6+\sqrt{3}}{12-1} =$$

$$\frac{-11+11\sqrt{3}}{11} = -1 + \sqrt{3}$$

b.) Sachant que $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$, trouvons une valeur approchée par excès de D à 0,1 près.

$$1,732 < \sqrt{3} < 1,733 \Leftrightarrow -1 + 1,732 < -1 + \sqrt{3} < -1 + 1,733$$

$$\Leftrightarrow 0,732 < D < 0,733$$

A l'ordre 1, on a : $\Leftrightarrow \mathbf{0,7} < \mathbf{D} < \mathbf{0,8}$ donc **0,8** est une valeur approchée par excès de D à 0,1 près.

EXERCICE 10

1°) Soit $A = \sqrt{a^2 + 4\sqrt{a^2 - 2a + 1}}$ et $a \in [0; 1]$, écrivons le plus simplement possible le réel

$$A = \sqrt{a^2 + 4\sqrt{(a-1)^2}} = \sqrt{a^2 + 4|a-1|} =$$

$$\sqrt{a^2 + 4(1-a)} \text{ Car } a-1 < 0 \text{ puisque } a \in [0; 1]$$

$$= \sqrt{a^2 - 4a + 4}$$

$$= \sqrt{(a-2)^2}$$

$$= |a-2| = -(a-2) \text{ car } a-2 < 0$$

$$\mathbf{A = 2 - a}$$

2°) Soit $X = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$.

a) Trouvons un encadrement de X à l'ordre 2 par deux décimaux consécutifs sachant que $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$ et $2,236 < \sqrt{5} < 2,237$.

$$\text{On a : } 1,414 \times 3 < 3\sqrt{2} < 1,415 \times 3 \Leftrightarrow$$

$$4,242 < 3\sqrt{2} < 4,245$$

$$\text{Aussi, } -2 \times 2,236 > -2\sqrt{5} > -2 \times 2,237$$

$$\Leftrightarrow -4,474 < -2\sqrt{5} < -4,472$$

$$\text{Donc } 4,242 - 4,474 < 3\sqrt{2} - 2\sqrt{5} < 4,245 -$$

$$4,472 \Leftrightarrow -0,232 < X < -0,227$$

$$\text{D'où } \mathbf{-0,23} < \mathbf{X} < \mathbf{-0,22}$$

b) Comparons $3\sqrt{2}$ et $2\sqrt{5}$ puis en déduisons le signe de X.

$$(3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18 \text{ et } (2\sqrt{5})^2 = 4 \times 5 = 20$$

$$\text{Comme } 18 < 20 \text{ alors } \mathbf{3\sqrt{2} < 2\sqrt{5}}$$

Signe de X

$$\text{On a : } 3\sqrt{2} < 2\sqrt{5} \Leftrightarrow \mathbf{3\sqrt{2} - 2\sqrt{5} < 0} \text{ donc } \mathbf{X}$$

est négatif.

c) Calculons X^2 puis en déduisons une écriture simplifiée de $Y = \sqrt{38 - 12\sqrt{10}}$.

$$X^2 = (3\sqrt{2} - 2\sqrt{5})^2 = 18 - 12\sqrt{10} + 20$$

$$\mathbf{X^2 = 38 - 12\sqrt{10}}$$

Écriture simplifiée de Y

$$Y = \sqrt{38 - 12\sqrt{10}} = \sqrt{X^2} = |X| = -X \text{ Car X}$$

est négatif

$$= -(3\sqrt{2} - 2\sqrt{5})$$

$$\mathbf{Y = 2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}}$$