

## Chapitre1 : Les nombres Réels

### I) Rappels sur les ensembles

Les différents ensembles sont :

-  $\mathbb{N}$  est l'ensemble des entiers Naturels

$$\mathbb{N} = \{ 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; \dots \}$$

-  $\mathbb{Z}$  est l'ensemble des entiers relatifs  $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^-$

$$\mathbb{Z} = \{ +6 ; -12 ; \dots \}$$

-  $\mathbb{D}$  est l'ensemble des décimaux relatifs  $\mathbb{D} = \mathbb{D}^+ \cup \mathbb{D}^-$

$$\mathbb{D} = \{ +4,5 ; -7,23 ; \dots \}$$

-  $\mathbb{Q}$  est l'ensemble des nombres Rationnels

$$\text{Ex : } \frac{1}{2} ; \frac{1}{3} ; \frac{9}{10} ; \frac{-4}{9}$$

-  $\mathbb{R}$  est l'ensemble des nombres réels

$$\text{Ex : } \frac{1}{3} ; \frac{1}{7} ; \frac{1}{13} ; 0 ; -1 ; 5 ; \pi$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

### II) Intervalles de $\mathbb{R}$

#### 1) Activité

Tracer une droite graduée (D) (unité 1Cm)

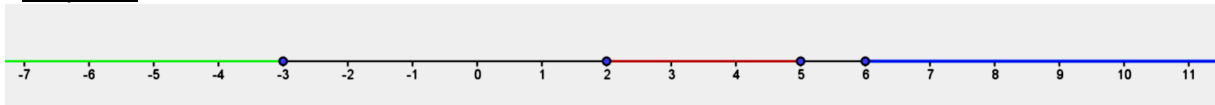
a) Placer les nombres suivants sur (D): -3 ; 2 ; 5 ; 6

b) Colorier en rouge la partie de la droite où se situent les nombres strictement compris entre 2 et 5

c) Colorier en vert la partie de la droite où se situent les nombres strictement inférieurs à -3

d) Colorier en bleu la partie de la droite où se situent les nombres strictement supérieurs à 6

#### Réponse



- Les nombres réels compris entre 2 et 5 forment un intervalle noté  $]2 ; 5[$  qui se lit "intervalle 2 à 5"

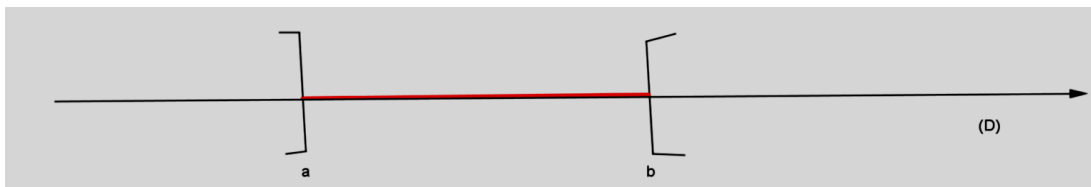
- les nombres inférieurs à -3 forment un intervalle noté  $]-\infty ; -3[$  qui se lit "moins infini à -3"

- les nombres strictements supérieurs à 6 forment un intervalle noté  $]6 ; +\infty [$  qui se lit "6 à plus infini"

#### 2) Types d'intervalles

##### a) Intervalles Ouverts

Pour deux nombres réels a et b, l'ensemble des nombres réels x tel que  $a < x < b$  est un intervalle ouvert d'origine a et d'extrémité b. On note  $]a ; b[$

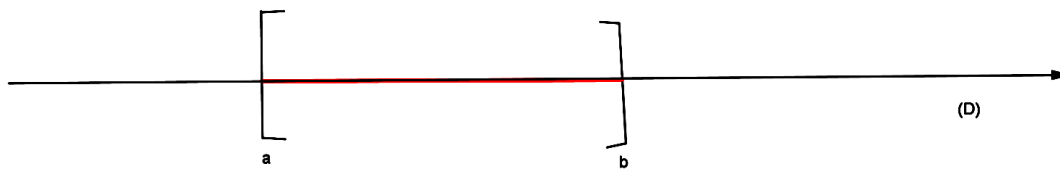


a et b n'appartiennent pas à l'intervalle  $]a ; b[$

##### b) Intervalles fermés

Pour deux nombres réels a et b, l'ensemble des nombres réels x tel que  $a \leq x \leq b$  est un intervalle fermé d'origine a et d'extrémité b. On note  $[a ; b]$

Sa représentation est :

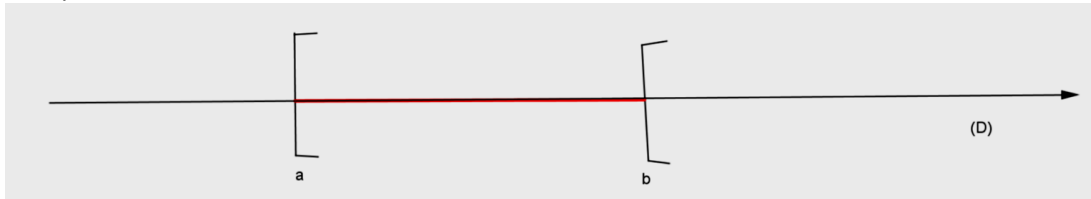


, a et b appartiennent à l'intervalle  $[a; b]$

c) Intervalle semi fermé (semi-ouvert)

Pour deux nombres réels a et b, l'ensemble des nombres réels x tel que  $a \leq x < b$  est un intervalle semi-fermé d'origine a et d'extrémité b. On note  $[a; b[$

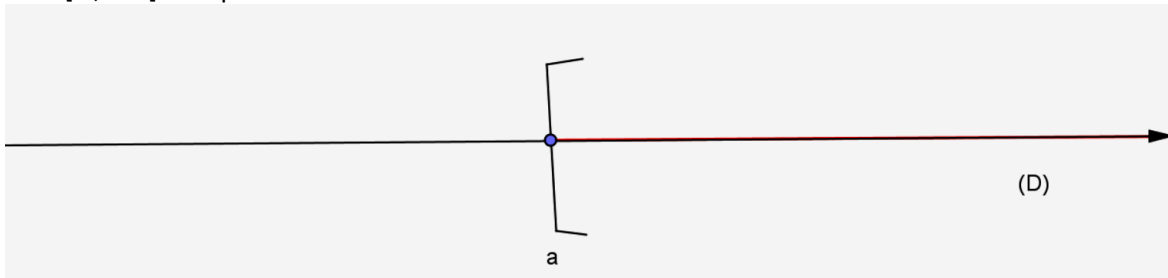
Sa représentation est :



, a appartient à l'intervalle  $[a; b[$  mais b ne l'appartient pas

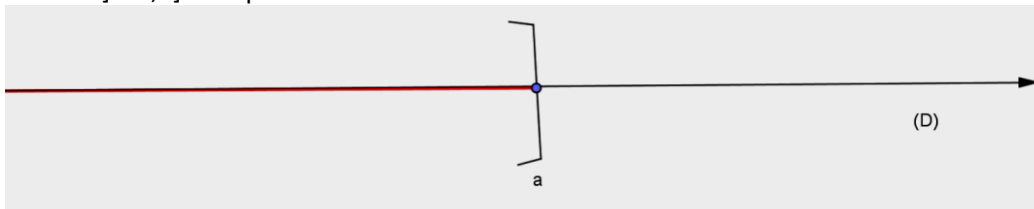
d) Intervalle illimité

, a étant un réel, l'ensemble des réels x tel que  $x \geq a$  est un intervalle illimité à droite contenant a. on note  $[a; +\infty[$  sa représentation est :



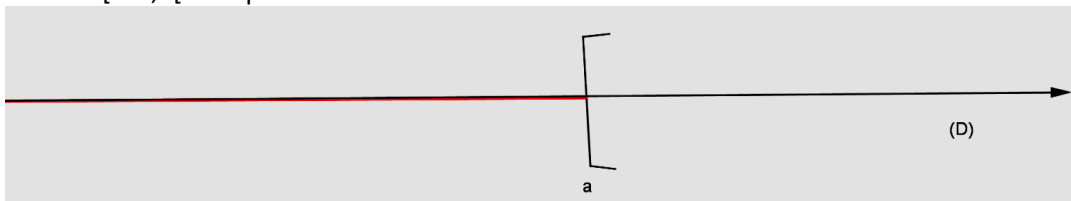
l'ensemble des réels x tel que  $x \leq a$  est un intervalle illimité à gauche contenant a.

on note  $]-\infty; a]$  sa représentation est :



l'ensemble des réels x tel que  $x < a$  est un intervalle illimité à gauche contenant a.

on note  $]-\infty; a[$  sa représentation est :



### Exercice d'application

1) Ecrire sous forme d'intervalles, chacun des ensembles de nombres défini ci-dessous

a)  $-3 \leq x \leq \frac{9}{2}$  ; b)  $17 \leq x$  ; c)  $x \geq -5,3$  ; d)  $-6 < x < \frac{13}{2}$  e)  $-4 < x \leq 11$  f)  $x < -2$

2) Traduire à l'aide d'une égalité l'appartenance de x a chacun des intervalles ci-dessous

a)  $x \in [0; +\infty[$  ; b)  $x \in [-45; \frac{24}{3}[$  ; c)  $x \in ]-\infty; 3[$  ; d)  $x \in [3; 15]$

3) Donner la représentation graphique des intervalles suivants:

a)  $x \in [1; +\infty[$  ; b)  $x \in ]-\infty ; -1[$  ; c)  $x \in ]1; 4[$   
 NB : Hachurer la partie non concernée par l'intervalle

### III) Encadrement

1) Encadrement d'une somme

a) Propriété

Etant donné les réels  $a ; a' ; b ; b' ; x$  et  $x'$

Si  $a < x < b$  et  $a' < x' < b'$  alors l'encadrement de  $x+x'$  est  $a+a' < x+x' < b+b'$

Remarque : Pour tout réel  $m$ , si  $a < x < b$  alors  $a+m < x+m < b+m$

b) Exemple

1) On donne  $-2 < x < 9$  et  $3 < x' < 5$  ; trouver l'encadrement de  $x+x'$

2) On a :  $3,14 < \pi < 3,15$  trouver un encadrement de  $\pi+1$  ;  $\pi-3$

2) Encadrement d'un produit

a) Propriété

Etant donné les réels  $a ; a' ; b ; b' ; x$  et  $x'$

Si  $a < x < b$  et  $a' < x' < b'$  alors l'encadrement de  $xx'$  est  $aa' < xx' < bb'$

Remarque : Pour tout réel  $m$  positif si  $a < x < b$  alors  $am < xm < bm$

b) Exemple

on donne  $3 < x < 4$  et  $9 < y < 14$  ; trouver l'encadrement de  $xy$

3) Encadrement de l'opposé

Soit  $a < x < b$ . Encadrons l'opposé de  $x$  qui est  $-x$

$$a < x < b \Leftrightarrow (-1) \cdot a > (-1) \cdot x > (-1) \cdot b \Leftrightarrow -a > -x > -b \Leftrightarrow -b < -x < -a$$

Exemple: soit  $4 < y < 7$  donner un encadrement de  $-y$

4) Encadrement d'une différence

Etant donné les réels  $a ; b ; c ; d ; x$  et  $y$

Si  $a < x < b$  et  $c < y < d$ , pour trouver l'encadrement de  $x-y$  il faut :

- Savoir que  $x-y = x+(-y)$
- Encadrer d'abord  $-y$  puis ensuite  $x+(-y)$

$c < y < d$

$-d < -y < -c$

$$a < x < b \text{ alors } a-d < x-y < b-c$$

Exemple : soient  $1,5 < x < 3$  ;  $0,4 < y < 0,8$  encadrer  $x-y$

IV) Valeur absolue – Distance

1) Valeur absolue d'un nombre réel

a) Activité

Compléter le tableau suivant

,a	4	-5	7,4	-11,2	0
,a	-4	5	-7,4	11,2	0
a	3	5	7,4	11,2	0

b) Définition

On appelle valeur absolue d'un nombre réel  $x$  le réel  $|x|$  définie par :

$$* |x| = x \text{ si } x \geq 0$$

$$* |x| = -x \text{ si } x \leq 0$$

Conséquences : Pour tout réel  $x$  on a :

$$|x| \geq 0$$

$$|x| = 0 \text{ si } x = 0$$

$$x = 0 \text{ si } |x| = 0$$

2) Ecriture d'une expression sans le symbole de valeur absolue

Pour écrire  $|ax+b|$  sans le symbole de valeur absolue il faut suivre le principe suivant :

$$|ax+b| = ax+b \text{ si } ax+b \geq 0 \text{ c'est-à-dire si } x \geq \frac{-b}{a} \text{ ou si } x \in \left[ \frac{-b}{a}; +\infty[$$

$|ax+b| = -(ax+b) = -ax-b$  si  $ax+b \leq 0$  c'est-à-dire si  $x \leq \frac{-b}{a}$  ou si  $x \in ]-\infty; \frac{-b}{a}]$

On établit ensuite le tableau comme celui-ci-dessous :

X	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ ax+b $	$-ax-b$	○	$ax+b$

On donne en fin les réponses

Pour  $x \in ]-\infty; \frac{-b}{a}]$  ;  $|ax+b| = -ax-b$

Pour  $x \in [\frac{-b}{a}; +\infty[$  ;  $|ax+b| = ax+b$

Exemple1 : Ecrire sans le symbole de valeur absolue :  $|2x+5|$  ;  $|-5x+1|$

Exemple2 : Ecrire sans le symbole de valeur absolue

$A = |2x-1| + |-x+4|$  ;  $B = |-1+x| + |5-2x|$

On procède comme ci-dessus en étudiant intervalle par intervalle et on aboutit au tableau suivant :

X	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	4	$+\infty$
$ 2x-1 $	$-2x+1$	○	$2x-1$	$2x-1$
$ -x+4 $	$-x+4$	$-x+4$	○	$x-4$
$ 2x-1  +  -x+4 $	$-3x+5$	$x+3$		$3x-5$

Pour  $x \in ]-\infty; \frac{1}{2}]$   $A = -3x+5$

Pour  $x \in [\frac{1}{2}; 4]$   $A = x+3$

Pour  $x \in [4; +\infty[$   $A = 3x-5$

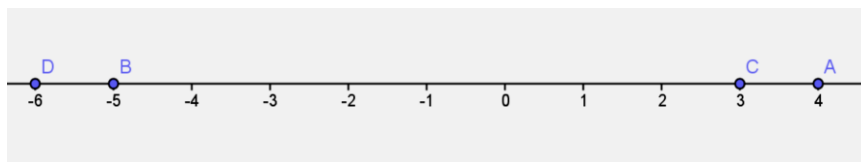
3) Distance entre deux réels

a) Activité

Soit (D) une droite graduée ; placer sur les points A ; B ; C et D tels

$A(+4)$  ;  $B(-5)$  ;  $C(+3)$  et  $D(-6)$ .

Calculer les distances AB ; BC ; CD



Calculons :

$$AB = |x_B - x_A| = |-5 - 4| = |-9| = 9$$

$$BC = |x_C - x_B| = |3 - (-5)| = |8| = 8$$

$$CD = |x_D - x_C| = |-6 - 3| = |-9| = 9$$

b) Définition

Soit a et b deux réels. On note A et B les points d'abscisses respectives a et b sur une droite graduée.

On appelle distance des réels a et b le réel  $|a-b|$  ; on le note  $d(a ; b)$ . on a :

$$d(a ; b) = |b - a| = AB$$

Remarque

\*si  $a = b$  alors  $d(a ; b) = 0$

\*si  $d(a ; b) = 0$  alors  $a = b$

\* $d(a ; b) \geq 0$

\* $d(a ; b) = d(b ; a)$

## Chapitre 2 : Multiplication d'un vecteur par un réel

### I) Produit d'un vecteur par un réel

#### 1) Activité

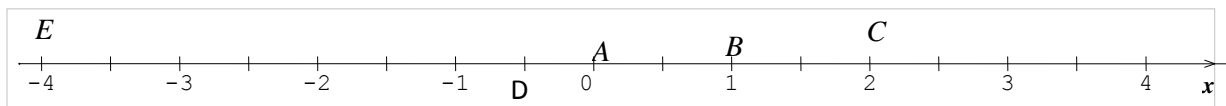
A et B sont deux points de la droite graduée tel que  $AB = 2\text{cm}$  ( unité 1 cm)

a) Construire les points C et D tel que  $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

b) Donner l'abscisse de chacun des points C et D dans le repère (A ; B)

c) Place le point E d'abscisse -4 dans le repère (A ; B) et donner  $\overrightarrow{AE}$  en fonction de  $\overrightarrow{AB}$

Réponse



b) L'abscisse de C est 2

L'abscisse de D est  $-\frac{1}{2}$

c)  $\overrightarrow{AE} = -4\overrightarrow{AB}$

#### 2) Définition

A et B étant deux points distincts du plan ; k étant un réel quelconque .  $k\overrightarrow{AB}$  désigne un vecteur  $\overrightarrow{AC}$  où C est le point d'abscisse k dans le repère (A ; B) .

Soit  $\vec{u}$  un vecteur du plan de représentant (A ; B)

Si  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$  alors  $k\overrightarrow{AB} = k\vec{u}$

Le vecteur  $k\vec{u}$  est appelé produit du vecteur  $\vec{u}$  par un réel k

#### REMARQUE

- Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ont même direction
- Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ont même sens si  $k > 0$
- Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont de sens contraire si  $k < 0$
- $\overrightarrow{AC} = |k| \cdot \overrightarrow{AB}$
- Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  peut change d'origine

#### 3) Propriétés

Pour tous réels x et y et pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$

$$. x(\vec{u} + \vec{v}) = x\vec{u} + x\vec{v}$$

$$. x\vec{u} + y\vec{u} = (x+y) \cdot \vec{u}$$

$$. x(y\vec{u}) = (xy) \vec{u}$$

#### Exercice d'application

Placer A ; B ; C trois points du plan non alignés. Soit M le point du plan tel que :

$$\overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + 3(\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CA})$$

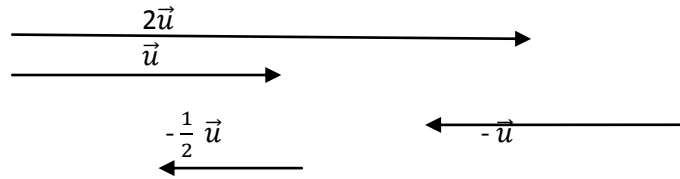
Réduire l'expression du vecteur  $\overrightarrow{AM}$  puis placer M.

### II) Caractérisation d'un alignement de trois points

#### 1) Vecteurs colinéaires

##### a) Activité

Tracer un vecteur  $\vec{u}$  puis construire  $2\vec{u}$  ;  $-\vec{u}$  ;  $-\frac{1}{2}\vec{u}$  . Comparer les directions de chacun de ces vecteurs.



On remarque que les vecteurs ont tous la même direction. On dit qu'ils sont colinéaires

b) Définition

Etant donné deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non nuls ; s'il existe un réel  $k$  tel que  $\vec{v} = k\vec{u}$  ; on dit que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires

Remarque : Le vecteur nul ( $\vec{0}$ ) est colinéaire à tout vecteur

2) Caractérisation d'un alignement de trois points

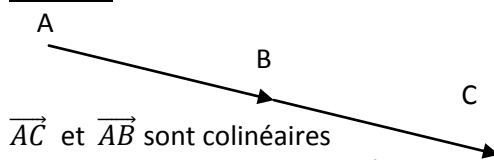
a) Activité

Placer deux points A et B dans le plan ; construire le vecteur  $\vec{AC}$  tel que  $\vec{AC} = 2\vec{AB}$

1) Que peut-on dire des vecteurs  $\vec{AC}$  et  $\vec{AB}$  ?

2) Que peut-on dire des points A ; B ; C ?

Réponse



$\vec{AC}$  et  $\vec{AB}$  sont colinéaires

Les points A ; B et C sont alignés

b) Propriété

Soient trois points A ; B et C

Si  $\vec{AC}$  et  $\vec{AB}$  sont colinéaires alors A ; B et C sont alignés

Si les points A ; B et C sont alignés alors les vecteurs  $\vec{AC}$  et  $\vec{AB}$  sont colinéaires.

III) caractérisation du parallélisme de deux droites

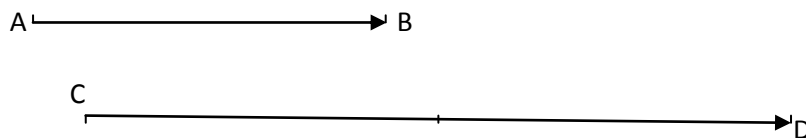
1) activité

Placer trois points A ; B et C non alignés puis construire le vecteur  $\vec{CD}$  tel que  $\vec{CD} = 2\vec{AB}$

a) Que peut-on dire de  $\vec{CD}$  et  $\vec{AB}$  ?

b) Que peut-on dire de (CD) et (AB) ?

Réponse



$\vec{CD}$  et  $\vec{AB}$  sont colinéaires

(CD) et (AB) sont parallèles

2) Propriété

- Si  $\vec{CD}$  et  $\vec{AB}$  sont deux vecteurs colinéaires et non nuls alors les droites (CD) et (AB) sont parallèles

- Si les droites (CD) et (AB) sont parallèles alors  $\vec{CD}$  et  $\vec{AB}$  sont deux vecteurs colinéaires et non nuls

Remarque :

- Si deux vecteurs non nuls sont colinéaires alors ils ont même direction

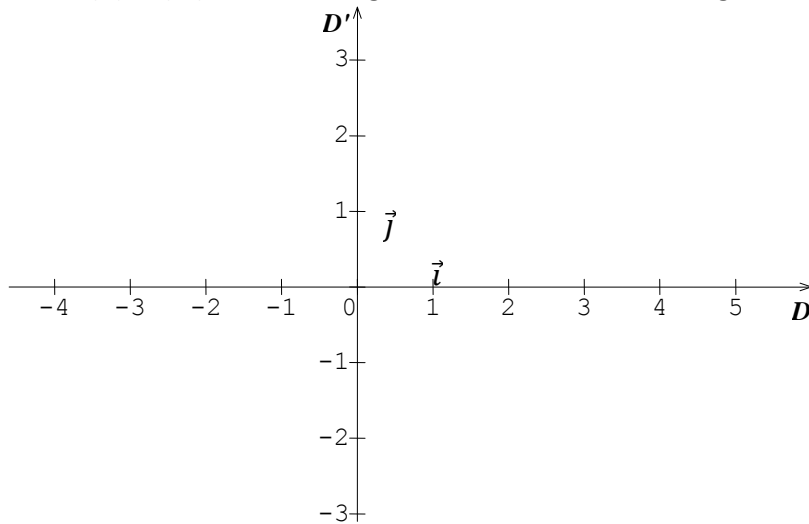
- Si Si deux vecteurs non nuls ont même direction alors ils sont colinéaires

## Chapitre 3 : Coordonnées d'un vecteur

### I) Coordonnées d'un vecteur du plan

#### 1) Repère du plan

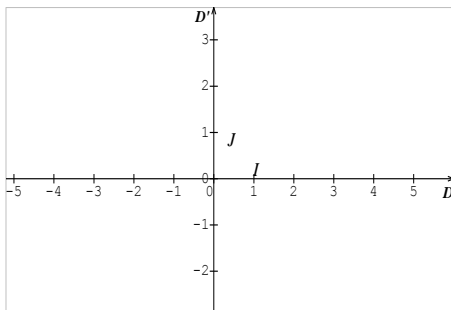
Soient (D) et (D') deux droites graduées sécantes en leur origine O



$(O ; \vec{i} ; \vec{j})$  définit un repère cartésien du plan

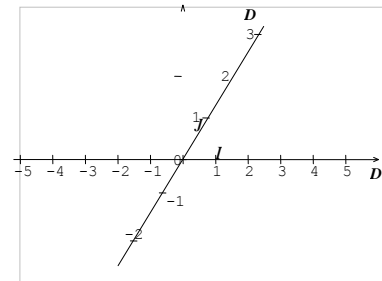
#### Remarque :

- On dit que le repère est normé si  $OI = OJ = 1$
- On dit que le repère est orthonormé si  $OI = OJ = 1$  et que les axes sont orthogonaux



$OI = OJ$  et  $(OI) \perp (OJ)$

Repère orthonormé



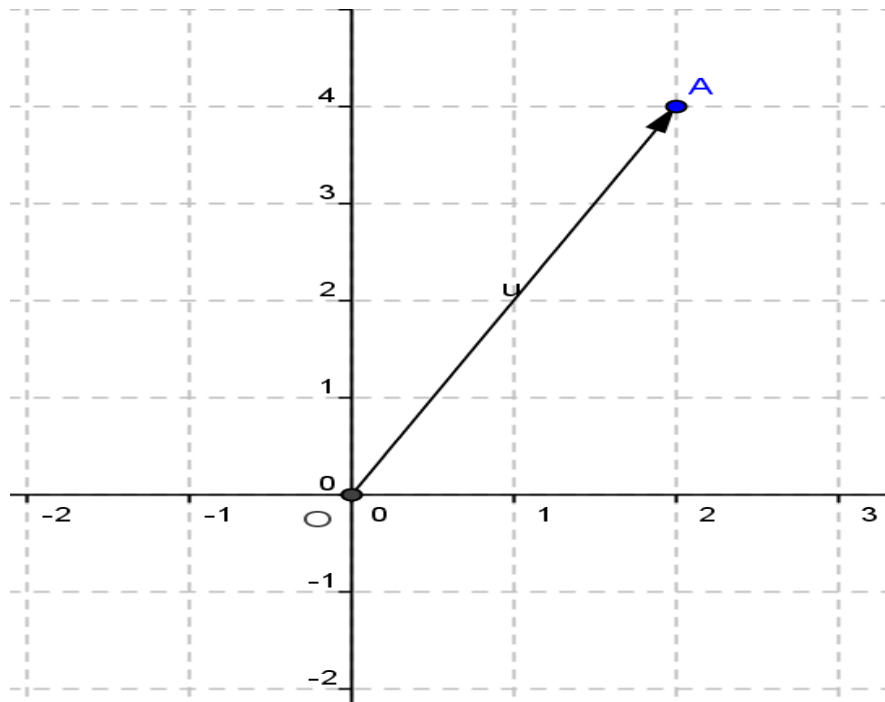
$OI = OJ$

Repère normé

#### 2) Coordonnées d'un vecteur d'origine O

##### a) Activité

Dans un Repère orthonormé, placer le point  $A(2 ; 3)$ . Donner le vecteur  $\vec{OA}$  en fonction de  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$



$\vec{OA} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$  on dit que 2 et 3 sont les coordonnées de  $\vec{OA}$

b) Définition

Le plan étant muni d'un repère cartésien  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  soit M le point de coordonnées  $(x; y)$ .

On a alors  $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$  et on dit que x et y sont les coordonnées de  $\vec{OM}$  dans le repère cartésien  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . on note  $\vec{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

b) Propriété

$\vec{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  Signifie que  $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Remarque : Si O et M sont confondus alors  $\vec{OM} = \vec{MM} = \vec{OO} = \vec{0}$  de coordonnées  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

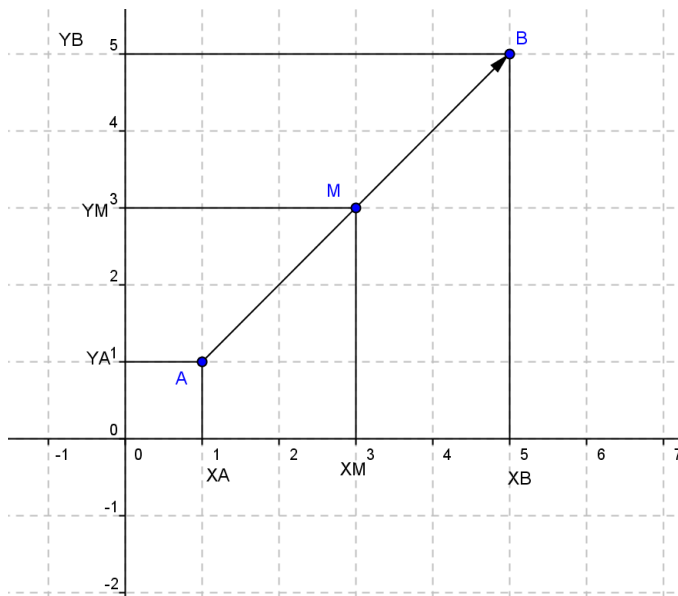
2) Coordonnées du vecteur  $\vec{AB}$

a) Activité

Le plan est muni d'un repère cartésien  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . Soient les points A et B de coordonnées respectives  $(x_A; y_A)$  et  $(x_B; y_B)$ .

- 1) Exprimer  $\vec{OA}$  et  $\vec{OB}$  en fonction de  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$
- 2) Exprimer  $\vec{AB}$  en fonction  $\vec{OA}$  et  $\vec{OB}$  à l'aide de la relation de Chasles
- 3) Ecrire  $\vec{AB}$  en fonction de  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  et donner les coordonnées de  $\vec{AB}$  dans le repère

Réponse



1)  $\vec{OA} = x_A \vec{i} + y_A \vec{j}$  et  $\vec{OB} = x_B \vec{i} + y_B \vec{j}$

2)  $\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB}$   
 $= -\vec{OA} + \vec{OB}$   
 $= -(x_A \vec{i} + y_A \vec{j}) + (x_B \vec{i} + y_B \vec{j})$   
 $= -x_A \vec{i} - y_A \vec{j} + x_B \vec{i} + y_B \vec{j}$   
 $= x_B \vec{i} - x_A \vec{i} + y_B \vec{j} - y_A \vec{j}$   
 $\vec{AB} = (x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j}$

$\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

b) Propriété

Pour deux points  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$ .

on a  $\vec{AB} = (x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j}$  on note  $\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

### Exercice d'application

Le plan est rapporté à un repère cartésien  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  on a  $A(3; 1)$ ;  $B(-4; \frac{1}{2})$ ;  $C(0; 5)$

Calculer les coordonnées des vecteurs  $\vec{AB}$ ;  $\vec{AC}$  et  $\vec{BC}$

3) Condition d'égalité de deux vecteurs

a) Activité

Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$  deux vecteurs du plan. Que peut-on dire de ces deux vecteurs ?

On remarque  $\vec{u} = \vec{v}$

b) Propriété

Soient les vecteurs tels que  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  et  $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$

-si  $\vec{u} = \vec{v}$  alors  $x = x'$  et  $y = y'$

-si  $x = x'$  et  $y = y'$  alors  $\vec{u} = \vec{v}$

Exercice d'application

On donne  $A(-3; 1)$ ;  $B(0; 2)$ ;  $C(1; 1)$ . Déterminer les coordonnées de D tel que

$\vec{AB} = \vec{DC}$

## II) Coordonnées et opérations sur les vecteurs

1) Coordonnées de la somme de deux vecteurs

a) activité

on donne  $\vec{u} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$  et  $\vec{v} = -3\vec{i} + 5\vec{j}$ . trouver les coordonnées de  $\vec{u} + \vec{v}$ .

$\vec{u} + \vec{v} = (2\vec{i} + 4\vec{j}) + (-3\vec{i} + 5\vec{j})$

$= 2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{i} + 5\vec{j}$

$$\vec{u} + \vec{v} = -\vec{i} + 9\vec{j}$$

Les coordonnées de  $\vec{u} + \vec{v}$   $\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix}$

Cas général

Soient les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  tels que  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  et  $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ .

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= x\vec{i} + y\vec{j} + x'\vec{i} + y'\vec{j} \\ &= (x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j} \end{aligned}$$

b) Règle

Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ . Le vecteur  $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$

3) Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel

a) Activité

On donne  $\vec{u} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ ; donner les coordonnées du vecteur  $2\vec{u}$ ;  $-3\vec{u}$ ;  $\frac{1}{3}\vec{u}$

$$2\vec{u} = 2(2\vec{i} + 4\vec{j}) = 4\vec{i} + 8\vec{j}; \quad \vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$-3\vec{u} = -3(2\vec{i} + 4\vec{j}) = -6\vec{i} - 12\vec{j}; \quad -3\vec{u} \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}\vec{u} = \frac{1}{3}(2\vec{i} + 4\vec{j}) = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{4}{3}\vec{j}$$

➤ Cas général

Le plan est rapporté à un repère cartésien  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . Soit  $\vec{u}$  un vecteur tel que  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  et soit  $k$  un réel.  $k\vec{u} = k(x\vec{i} + y\vec{j})$

$$= kx\vec{i} + ky\vec{j}$$

Alors si on a  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ; le vecteur  $k\vec{u}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

### III) Condition de colinéarité de deux vecteurs

1) Propriété

Etant donné  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires alors  $xy' - yx' = 0$

Si  $xy' - yx' = 0$  alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires

➤ Remarque

- Soit, dans le plan muni d'un repère orthogonal, les points  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$ .

Le milieu  $I$  du segment  $[AB]$  a pour coordonnées  $(x_I; y_I)$  où :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

- Soit, dans le plan muni d'un repère orthogonal, les points  $A'(x_{A'}; y_{A'})$  symétrique de  $A(x_A; y_A)$  par rapport à  $I(x_I; y_I)$ .

Dans ce cas le point  $I$  est milieu du segment  $[AA']$ . On note  $A' = S_I(A)$

$$x_I = \frac{x_A + x_{A'}}{2}; \quad x_{A'} = 2x_I - x_A$$

$$y_I = \frac{y_A + y_{A'}}{2}; \quad y_{A'} = 2y_I - y_A$$

-  $M'$  est l'image de  $M$  par la translation du vecteur  $\vec{u}$  se note  $M' = t_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

$M(x_M; y_M)$ ;  $M'(x_{M'}; y_{M'})$ ;  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{MM'} \begin{pmatrix} x_{M'} - x_M \\ y_{M'} - y_M \end{pmatrix} = \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$x_{M'} - x_M = x \quad \text{et} \quad y_{M'} - y_M = y$$

$$x_{M'} = x + x_M \quad y_{M'} = y + y_M$$

Exercice d'application

Dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  on donne :  $A(-4; 0)$   $B(2; 3)$  ;  $C(5; -1)$

1) Soit  $I$  milieu de  $[AB]$ . Calculer les coordonnées de  $I$

2) Soit  $H$  le symétrique de  $B$  par rapport à  $C$ . calculer les coordonnées de  $H$ .

3) Soit  $P$  l'image de  $A$  par la translation de vecteur  $\overrightarrow{BC}$ . Calculer les coordonnées de  $P$

1) Définition de la racine carrée d'un réel positif

1) Activité

Activité 1

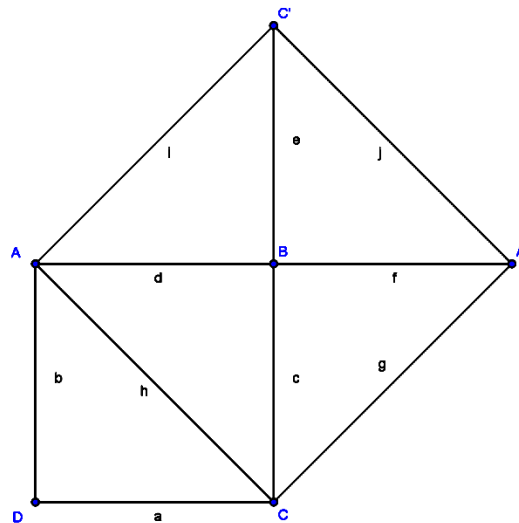
Dessiner un carré ABCD de côté 1dm et construire les symétriques des points A et C par rapport à B.

1) Calculer l'aire du quadrilatère ACA'C' en utilisant l'aire du triangle ABC.

2) Exprimer l'aire de ACA'C' en fonction de AC

3) Que peut-on dire de AC ?

Réponse



$$1) S_{ACA'C'} = S_{ABC} \times 4$$

$$= \frac{AB \times BC}{2} \times 4 = \frac{1 \times 1}{2} \times 4 = 2$$

$$2) S_{ACA'C'} = AC \times AC = AC^2$$

3) On peut dire que  $AC^2 = 2$

La mesure du segment [AC] est le nombre dont le carré est 2. Ce nombre est appelé racine carrée de 2. On le note  $\sqrt{2}$

Activité 2

Compléter le tableau suivant :

A	-9	-4	0	3	5
$a^2$	81	16	0	9	25

A	25	49	-2	0	4
$\sqrt{a}$	5	7	-	0	2

Remarque : un nombre négatif n'a pas de racine carrée.

x et y étant positifs,

- Si  $x = y$  alors  $x^2 = y^2$
- Si  $x < y$  alors  $x^2 < y^2$
- Si  $x^2 < y^2$  alors  $x < y$
- Un nombre positif n'a qu'une seule racine carrée
- Les nombres positifs sont dans le même ordre que leurs carrés

2) Définition

Pour tout réel a positif ; on appelle racine carrée de a , le réel dont le carré est égal à a . on le note  $\sqrt{a}$  et on lit « racine carrée de a »

$$\sqrt{0} = 0 ; \sqrt{1} = 1$$

Pour tout réel x positif :  $\sqrt{x} \geq 0$

$$(\sqrt{x})^2 = x$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

## II) Propriétés

### 1) Racine carrée d'un produit

#### a) Activité

Compléter le tableau suivant et comparer  $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$  et  $\sqrt{a \times b}$

A	B	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a} \times \sqrt{b}$	axb	$\sqrt{a \times b}$
9	16	3	4	12	144	12
25	4	5	2	10	100	10

On remarque que :  $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

#### b) Propriété

Pour tout réel positif a et b ; on a :

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$$

### 2) Racine carrée d'un quotient

#### a) Activité

Compléter le tableau suivant et comparer  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$  et  $\sqrt{\frac{a}{b}}$

A	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\frac{a}{b}$	$\sqrt{\frac{a}{b}}$
25	36	5	6	$\frac{5}{6}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{6}$
16	9	4	3	$\frac{4}{3}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{4}{3}$

On remarque que  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

#### b) Propriété

Pour tous réels positifs a et b : si  $b \neq 0$  on a  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

### 3) Racine carrée d'une somme

#### a) Activité

Compléter le tableau suivant et comparer  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  et  $\sqrt{a + b}$

A	b	$\sqrt{a}$	$\sqrt{b}$	$\sqrt{a} + \sqrt{b}$	a+b	$\sqrt{a + b}$
9	16	3	4	7	25	5
25	4	5	2	7	29	$\sqrt{29}$

On remarque que :  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a + b}$

#### b) Propriété

Pour tous réels positifs a et b ; on a :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a + b}$$

### 3) Comparaison

#### a) Activité

Comparer  $\sqrt{14}$  et  $\sqrt{19}$  en utilisant la propriété « pour tous x et y Si  $x^2 < y^2$  alors  $x < y$  »

Réponse

$$(\sqrt{14})^2 = 14 \text{ et } (\sqrt{19})^2 = 19 \text{ car } (\sqrt{x})^2 = x$$

$$14 < 19 \Leftrightarrow (\sqrt{14})^2 < (\sqrt{19})^2 \text{ donc } \sqrt{14} < \sqrt{19}$$

b) Propriété

x et y étant des réels positifs si  $x < y$  alors  $\sqrt{x} < \sqrt{y}$

Les racines carrées de deux nombres positifs sont dans le même ordre que les deux nombres.

5) Racine carrée et valeur absolue

a) Activité

Compléter le tableau suivant . Que remarque t-on ?

X	-4	-1,5	0	5	1
$\sqrt{x^2}$	4	1,5	0	5	1
x	4	1,5	0	5	1

On remarque que  $\sqrt{x^2} = |x|$

b) Propriété

Pour tout réel x ;  $\sqrt{x^2} = |x|$

6) Ecriture sous la forme  $a\sqrt{b}$

Ecrivons  $\sqrt{75}$  et  $\sqrt{20}$  sous la forme  $a\sqrt{b}$

$$75 = 3 \times 5^2 \Leftrightarrow \sqrt{3 \times 5^2} = \sqrt{3} \times \sqrt{5^2} = 5\sqrt{3}$$

$$20 = 2^2 \times 5 = \sqrt{2^2 \times 5} = 2\sqrt{5}$$

### III) Calcul sur les radicaux

1) Expression conjuguée

Exemple

$$\text{Calculer } B = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$$

$$B = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$$

$$= 2^2 - (\sqrt{3})^2$$

$$= 4 - 3$$

$$B = 1$$

Le résultat est un réel sans radical ; on dit que  $2 + \sqrt{3}$  est l'expression conjuguée de  $2 - \sqrt{3}$  ou  $2 - \sqrt{3}$  est l'expression conjuguée de  $2 + \sqrt{3}$

2) Résolution d'équation de type  $x^2 = k$

a) Activité

Trouver des nombres réels dont le carré est égal à 5

Réponse

$$x^2 = 5$$

$$x^2 - 5 = 0$$

$$x^2 - (\sqrt{5})^2 = 0$$

$$(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0$$

$$x - \sqrt{5} = 0 \text{ ou } x + \sqrt{5} = 0$$

$$x = \sqrt{5} \text{ ou } x = -\sqrt{5}$$

$$S = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$$

b) Conclusion

Résoudre  $x^2 = k$  ; k étant un réel

- Si  $k > 0$  alors  $x^2 = k$  admet deux solutions  $-\sqrt{k}$  et  $\sqrt{k}$
- Si  $k < 0$  alors  $x^2 = k$  n'a pas de solution
- Si  $k = 0$  alors  $x^2 = k$  a une seule solution qui est 0

I) Equation du premier degré à une inconnue

1) Rappel

Une équation est une égalité où se trouve une inconnue.

Résoudre une équation c'est trouver la /les valeur(s) des/l'inconnue pour que l'égalité se vérifie

2) Equation de type  $ax+b=cx+d$

Exemple

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $3x+1=x-4$  et  $\frac{x}{3}-5 = -2x + \frac{3}{2}$

On trouve respectivement  $S_R = \left\{ -\frac{5}{2} \right\}$  et  $S_R = \left\{ \frac{39}{14} \right\}$

Exercice d'application

Résoudre dans  $\mathbb{R}$ ,  $\frac{x}{4} - \frac{3}{2} = \frac{-x+1}{6}$  et  $17x + 10 = -7x - 9$

3) Equation de types  $(ax+b)(cx+d)=0$

Rappel si  $ab=0$  alors  $a=0$  ou  $b=0$

Exemple : Résoudre dans  $\mathbb{R}$

$$(3x+6)(x-3)=0$$

$$(3x+6)(x-3)=0 \Leftrightarrow (3x+6)=0 \text{ ou } (x-3)=0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 3$$

$$S_R = \{-2; 3\}$$

4) Equation de type  $\frac{ax+b}{cx+d} = e$

Exemple : résoudre dans  $\mathbb{R}$

$$\frac{3x-1}{2x-5} = 5$$

On trouve  $S_R = \left\{ \frac{24}{7} \right\}$

Exercice d'application

Résoudre dans  $\mathbb{R}$ ;  $\frac{7x-1}{2x-3} = \frac{5}{3}$

II) Inéquation du 1<sup>er</sup> degré à une inconnue

1) Rappels

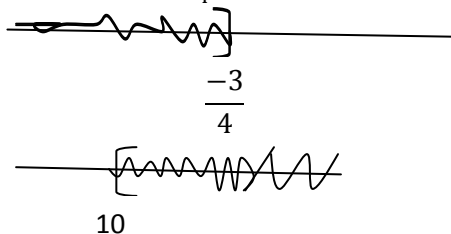
Une inéquation est une inégalité où se trouve une inconnue

Résoudre une inéquation c'est donner l'ensemble de toutes les inconnues pour que l'inégalité se vérifie.

2) L'inéquation de type  $ax+b < cx+d$

Exemple : résoudre :  $3x-7 < 11x-1$  et  $2x-1 < x+9$

On trouve respectivement  $S_R = ]-\frac{3}{4}; +\infty[$  et  $S_R = ]-\infty; 10[$



NB : L'ensemble solution est la partie non hachurée de la droite.

Exercice d'application

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $\frac{3x+1}{8} - \frac{2x+3}{4} < \frac{x+5}{2}$

3) Inéquation de type  $(ax+b)(cx+d) < 0$

➤ Cas général

On étudie les signe de chaque facteur dans  $\mathbb{R}$  et on consigne les résultats obtenus dans un tableau

Exemple : Résoudre dans  $\mathbb{R}$   $(2x + 5)(3x + 6) < 0$

Cherchons d'abord les valeurs de  $x$  pour lesquelles  $(2x + 5)(3x + 6) = 0$

On trouve  $x = -\frac{5}{2}$  ou  $x = -3$

Tableau de signes

X	$-\infty$	-3	$-\frac{5}{2}$	$+\infty$
2x + 5	-		○	+
3x + 6	-	○		+
(2x + 5)(3x + 6)	+	○	○	+

$$S_R = ]-3; -\frac{5}{2}[$$

Exercice d'application

Résoudre dans  $\mathbb{R}$

a)  $(x-1)(-x-2) \leq 0$    b)  $(-3x+7)(4x-5) \geq 0$

III) Equations avec valeurs absolues

1) Equations de types  $|ax+b| = C$  (c positif)

$$|ax+b| = C \Leftrightarrow ax+b = C \text{ ou } ax+b = -C$$

Exemple : résoudre  $|3x-5| = 1$

$$3x-5=1 \Leftrightarrow 3x=1+5 \Leftrightarrow 3x=6 \Leftrightarrow x=2$$

$$3x-5=-1 \Leftrightarrow 3x=-1+5 \Leftrightarrow 3x=4 \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$$

$$S_R = \left\{ \frac{4}{3}; 2 \right\}$$

2) Equations de types  $|ax+b| = cx+d$

Exemple : Soit à résoudre  $|x-5| = 7x+1$

Ecrivons  $|x-5|$  sans le symbole de valeur absolue.

Posons  $x-5=0 \Leftrightarrow x=5$

X	$-\infty$	5	$+\infty$
$ x-5 $	-x+5	○	x-5

Sur  $] -\infty; 5 [$  ;  $|x-5| = -x+5 \Leftrightarrow -x+5 = 7x+1 \Leftrightarrow 7x+x = 5-1 \Leftrightarrow 8x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Sur  $] 5; +\infty [$  ;  $|x-5| = x-5 \Leftrightarrow x-5 = 7x+1 \Leftrightarrow 7x-x = -5-1 \Leftrightarrow 6x = -6 \Leftrightarrow x = -1$

$$S_R = \left\{ -1; \frac{1}{2} \right\}$$

3) Equations de types  $|ax+b| = |cx+d|$

Exemple : Soit à résoudre  $|5x+2| = |x-1|$

$$\Leftrightarrow |5x+2| - |x-1| = 0$$

On écrit  $|5x+2| - |x-1|$  sans le symbole de la valeur absolue

X	$-\infty$	$-\frac{2}{5}$	1	$+\infty$
$ 5x+2 $	$-5x-2$	$5x+2$		$5x+2$
$ x-1 $	$-x+1$	$-x+1$		$x-1$
$ 5x+2 - x-1 $	$-4x-3$	$6x+1$		$4x+3$

Sur  $]-\infty; -\frac{2}{5}]$   $|5x+2|-|x-1|=0 \leftrightarrow -4x-3=0 \leftrightarrow -4x=3 \leftrightarrow x=-\frac{3}{4}$   $S_1 = \{-\frac{3}{4}\}$

Sur  $[-\frac{2}{5}; 1]$   $|5x+2|-|x-1|=0 \leftrightarrow 6x+1=0 \leftrightarrow 6x=-1 \leftrightarrow x=-\frac{1}{6}$   $S_2 = \{-\frac{1}{6}\}$

Sur  $]1; +\infty[$   $|5x+2|-|x-1|=0 \leftrightarrow 4x+3=0 \leftrightarrow 4x=-3 \leftrightarrow x=-\frac{3}{4}$   $S_3 = \{-\frac{3}{4}\}$

$S_R = \{-\frac{3}{4}; -\frac{1}{6}\}$

Chapitre6 : Rapport de projection

1) Définition du rapport de projection

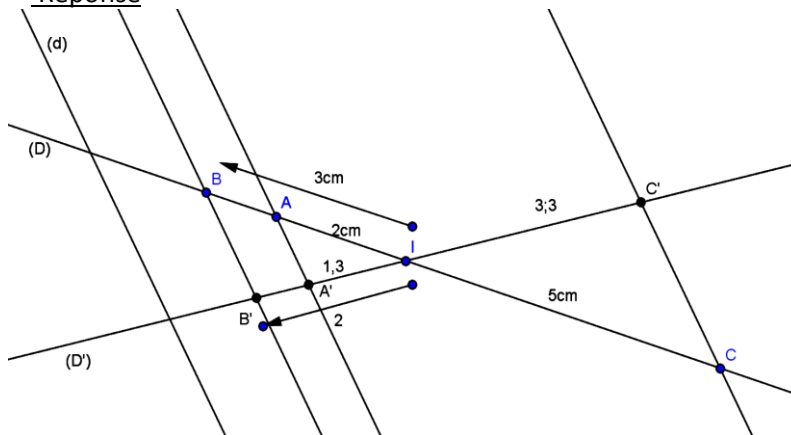
1) Activité

Trace deux droites (D) et (D') sécantes en I et une droite (d) qui n'est ni parallèle à (D) ni parallèle à (D').

Choisir les points A ; B ; C sur (D) tel que IA= 2cm ; IB=3cm ; IC=5cm et construire les points A' ; B' et C' les projetés respectifs de A ; B ; C sur (D') //(d).

Calculer :  $\frac{IA'}{IA}$  ;  $\frac{IB'}{IB}$  ;  $\frac{IC'}{IC}$  et les comparer.

Réponse



$\frac{IA'}{IA} = \frac{1,3}{2} = 0,65$  ;  $\frac{IB'}{IB} = \frac{2}{3} = 0,66$  ;  $\frac{IC'}{IC} = \frac{3,3}{5} = 0,66$  on remarque que :  $\frac{IA'}{IA} = \frac{IB'}{IB} = \frac{IC'}{IC} = 0,66$

2) Définition

Soit p la projection de (D) sur (D') parallèlement à (d). A ; B ; M sont des points sur (D). On note

$A'=p(A)$  ;  $B'=p(B)$  ;  $C'=p(C)$  et  $\frac{IA'}{IA} = \frac{IB'}{IB} = \frac{IC'}{IC} = k$ .

Le réel k est appelé le rapport de projection de (D) sur (D') parallèlement à (d).

Exercice d'application

Soit ABC un triangle tel que AB=8cm ; BC= 6cm ; AC=4cm

1) Faire une figure et calculer le rapport de projection de (AB) sur (AC) parallèlement à (BC).

2) Calculer le rapport de projection de (AB) sur (BC) parallèlement (AC)

II) Rapport de projection orthogonale

1) Définition du rapport de projection orthogonale

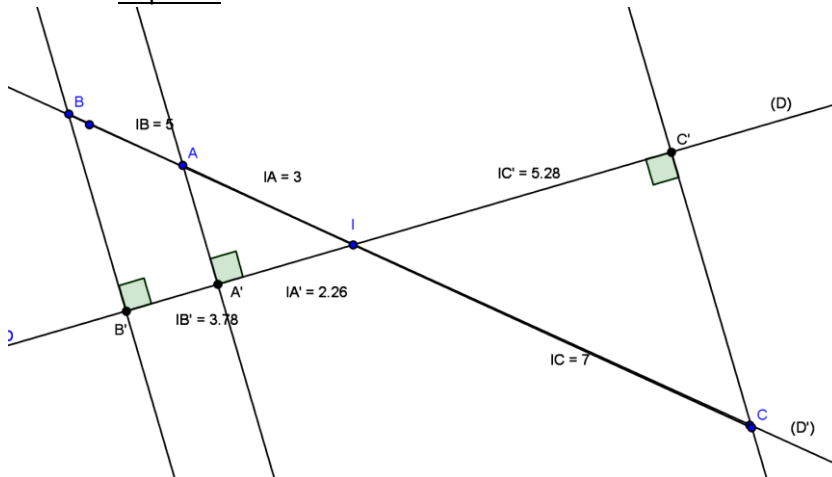
a) Activité

Trace deux droites (D) et (D') sécantes en I

Choisir les points A ; B ; C sur (D) tel que IA = 3cm ; IB = 5cm ; IC = 7cm et construire les points A' ; B' et C' les projetés orthogonaux respectifs de A ; B ; C sur (D')

Calculer :  $\frac{IA'}{IA}$  ;  $\frac{IB'}{IB}$  ;  $\frac{IC'}{IC}$  et les comparer.

Réponse



$$\frac{IA'}{IA} = \frac{2,26}{3} = 0,75 \quad \frac{IB'}{IB} = \frac{3,78}{5} = 0,75 \quad ; \quad \frac{IC'}{IC} = \frac{5,28}{7} = 0,75 \quad \text{On remarque que : } \frac{IA'}{IA} = \frac{IB'}{IB} = \frac{IC'}{IC} = 0,75$$

b) Définition

Soit p le projeté orthogonal de (D) sur (D') . A ; B ; C sont des points sur (D).

On note A'=p(A) ; B'=p(B) ; C'=p(C) et  $\frac{IA'}{IA} = \frac{IB'}{IB} = \frac{IC'}{IC} = k$ .

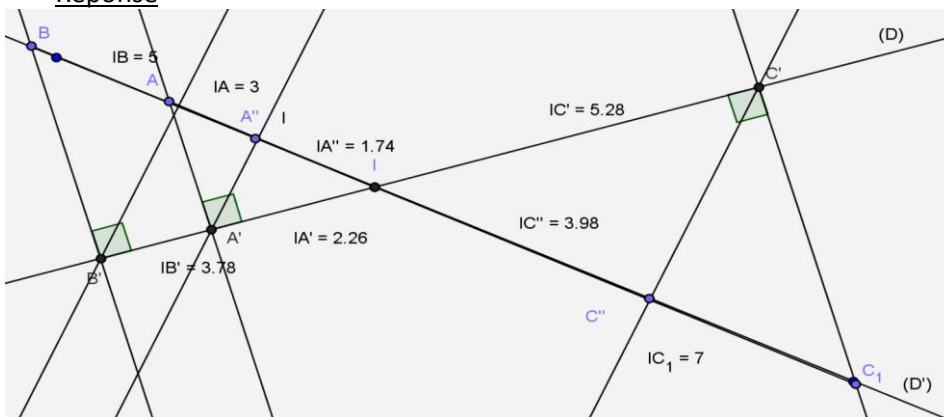
Le réel k est appelé le rapport de projection orthogonale de (D) sur (D')

2) Propriété du rapport de projection orthogonale

a) Activité

Dans l'activité précédente calculer k le rapport de projection orthogonale de (D) sur (D') et k' le rapport de projection orthogonale de (D') sur (D). Comparer k et k' ?

Réponse



$$k = \frac{IA'}{IA} = \frac{2,26}{3} = 0,75 = \frac{IB'}{IB} = \frac{3,78}{5} = 0,75 = \frac{IC'}{IC} = \frac{5,28}{7} = 0,75$$

$$k' = \frac{IA''}{IA'} = \frac{1,74}{2,26} = 0,75 = \frac{IB''}{IB'} = \frac{3}{3,78} = 0,75 = \frac{IC''}{IC'} = \frac{3,98}{5,28} = 0,75$$

On a  $k=k'$

b) Propriété

(D) et (D') étant deux droites sécantes du plan, le rapport de projection orthogonale de (D) sur (D') est égal au rapport de projection orthogonale de (D') sur (D)

Chapitre 7 : Monômes et polynômes

### I) Rappels

#### 1) Application Monômes

On appelle application monômes toutes applications définie par :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = ax^n$$

a est le coefficient

x est la variable

n est le degré du monôme

Exemple :

$g(x) = 4x^2$  est un monôme : 4 est le coefficient; x est la variable ; 2 est le degré

#### 2) Application polynômes

On appelle polynôme une somme de monômes définie par :

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + k$$

Le degré d'un polynôme est le degré le plus grand des monômes du polynôme

Exemple :  $h(x) = 3x^4 + 7x^3 + 2x^2 + x + 9$  ; 4 est le degré du polynôme

### II) Opération sur les polynômes

#### 1) Rappels

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

#### 2) Développement d'un polynôme

Développer un polynôme c'est transformer une expression du polynôme en une somme de monômes.

Exemple

#### 1) Développer puis réduire les polynômes suivants

$$A(x) = 3x(5x^2 + 2x - 2) + (x+4)(3x+7) ; B(x) = (3x+5)(6x-4)$$

#### 2) Développer en utilisant les identités remarquables

$$F(x) = (3x+5)^2 + (x+7)(x-7)$$

$$G(x) = (2x-1)^2 - (4x+1)(4x-1)$$

#### 3) Factorisation d'un polynôme

##### a) Recherche de facteurs communs

Exemple: Factoriser les polynômes suivants :

$$A(x) = (2x-3)(x+1) - (x+9)(2x-3)$$

$$B(x) = (2x-5)(1+x) - 2(7x-1)(2x-5) + 2x-5$$

##### b) Recherche de facteurs communs cachés

Exemple : factoriser

$$F(x) = (2x+4)(x-1) + (3x+7)(x+2)$$

$$G(x) = (2x+1)(3-x) + (1+x)(-1-2x) + 2x^2 + x$$

##### c) Utilisation des produit remarquables

Exemples : Factoriser

$$H(x) = 25x^2 - 30x + 9$$

$$J(x) = (x+5)^2 - (7x-3)^2$$

$$I(x) = 49x^2 + 14x + 1$$

d) Utilisation de factorisation partielles

$$k(x) = 4x^4 - 16x^3 + 16x^2$$

$$l(x) = 7x - 7y + 2ax - 2ay$$

Exercice d'application

Factoriser les polynômes suivants

$$F(x) = (x+3)(x+5) - 3(x+5)$$

$$G(x) = (3x-1)(x-2) + (3x-1)(2x+5) + (3x-1)(x-4)$$

$$H(x) = x^2 - x + \frac{1}{4} + (-x + \frac{1}{2})(2x+5)$$

$$K(x) = (2x+1)^2 - (3x+2)^2$$

4) Addition et multiplication d'applications polynômes

a) Addition

$$\text{Soient } f(x) = x^2 + 10x + 25 \text{ et } g(x) = 2x^3 + x^2 + 5x + 1$$

Calculer le polynôme  $k(x) = f(x) + g(x)$

$$\text{Réponse } k(x) = 2x^3 + 2x^2 + 15x + 26$$

La somme de deux applications polynômes est une application polynôme

b) Multiplication

soient  $f(x) = x^2 + 2x + 1$  et  $g(x) = (3x+1)$ . Calculer  $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$\text{Réponse } h(x) = 3x^3 + 7x^2 + 5x + 1$$

Conclusion : Le produit de deux applications polynômes est une application polynôme

## Chapitre 8 : Théorème de Pythagore

I) Relations métriques dans un triangle rectangle

1) Activité

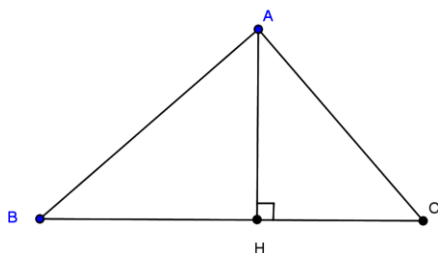
Construire un triangle ABC rectangle en A. construire l'hauteur [AH]

1) Ecrire le rapport de projection orthogonale de la droite (BA) sur (BC)

2) Ecrire le rapport de projection orthogonale de la droite (BC) sur (BA)

3) Etablir une égalité entre les deux rapports de projection orthogonaux

Réponse



Soit p le projeté orthogonal de (BA) sur (BC) et k son rapport ; on a : P(B)=B ; P(A)= H alors  $k = \frac{BH}{BA}$

Soit P' le projeté orthogonal de (BC) sur (BA) et k' son rapport ; on a : P(B)=B ; P(C)= A alors  $k' = \frac{BA}{BC}$

$$\text{Comme } k=k' \text{ on a } \frac{BH}{BA} = \frac{BA}{BC} \iff BA^2 = BH \times BC$$

2) Première relation métrique dans le triangle rectangle

➤ THEOREME

Etant donné un triangle ABC de hauteur [AH] , si ABC est rectangle en A alors

$$BA^2 = BH \times BC$$

Remarque : En utilisant le même triangle et en exprimant le rapport de projection de (CA) sur (CB) , de (CB) sur (CA) et sachant les rapports k et k' sont égaux on aura :  $k = \frac{CH}{CA}$  et  $k' = \frac{CA}{CB}$

$$\frac{CH}{CA} = \frac{CA}{CB}$$

$$CA^2 = CH \times CB$$

Exercice d'application

Soit ABC un triangle en A de hauteur [AH] tel que BC=8 et BH=2

Calculer BA et CA

II) Théorème de Pythagore et sa réciproque

1) Théorème de Pythagore

a) Activité

Soit ABC un triangle rectangle en A de hauteur [AH]. A l'aide des relations métriques dans le triangle rectangle  $BA^2 = BH \times BC$  et  $CA^2 = CH \times CB$  exprimer BC en fonction de CA et BA

Réponse :

$$BA^2 = BH \times BC$$

$$CA^2 = CH \times CB$$

En additionnant membre à membre on a  $BA^2 + CA^2 = BH \times BC + CH \times CB$

$$BA^2 + CA^2 = BC(BH + CH)$$

$$BA^2 + CA^2 = BC \times BC$$

$$BA^2 + CA^2 = BC^2$$

b) Théorème de Pythagore

Dans un triangle le carré de l'hypoténuse est égale à la somme des carrés des côtes perpendiculaires.

Alors si ABC est un triangle rectangle en A on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Exercice d'application

ABC est un triangle rectangle en A . Trouver la mesure du troisième côté dans les cas suivants :

a) AC=5cm ; BA=3cm

b) AB=4cm ; BC= 6cm

2) Réciproque du théorème de Pythagore

Si dans un triangle on a  $BC^2 = AB^2 + AC^2$  alors ABC est un triangle rectangle en A

Exercice d'application

Soit un triangle ABC ; donner la nature de ce triangle dans les cas suivants :

a) AB=5cm ; AC= 12cm ; BC=13cm

b) AB=7cm ; AC=12cm ; BC=  $\sqrt{95}$

III) Autres relations métriques dans le triangle rectangle

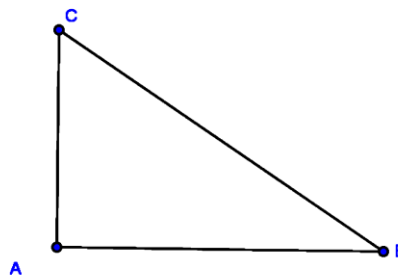
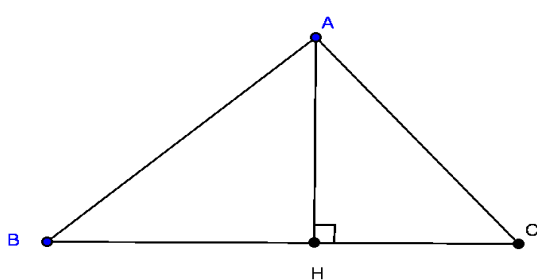
1) Activité 1

Soit ABC un triangle rectangle en A et [AH] son hauteur.

a) Calculer la surface du triangle dans les deux représentations 1 et 2

b) Quelle relation peut –on déduire des deux calculs

Reponse



a)  $S_1 = \frac{BC \times AH}{2}$        $S_2 = \frac{AC \times AB}{2}$

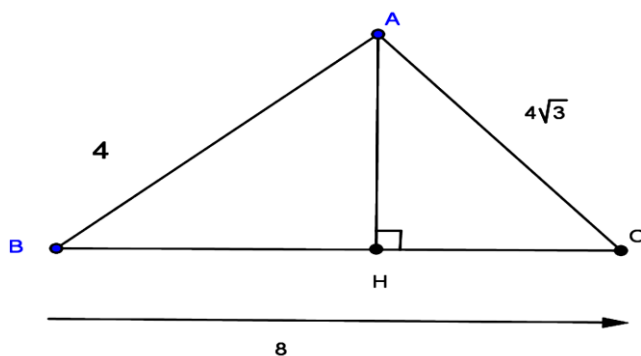
b)  $S_1 = S_2 \Leftrightarrow \frac{BC \times AH}{2} = \frac{AC \times AB}{2} \Leftrightarrow (BC \times AH) = (AC \times AB) \Leftrightarrow \boxed{BC \times AH = AC \times AB}$

2) Activité 2

Soit ABC un triangle rectangle en A de hauteur [AH] tel que  $AB = 4$  ;  $AC = 4\sqrt{3}$  et  $BC = 8$

- Calculer AH en utilisant la relation  $BC \times AH = AC \times AB$
- Calculer HB et HC en considérant les triangles BHA et AHC
- Calculer et comparer  $AH^2$  et  $HB \times HC$

Réponse



a) Calculons AH

$$BC \times AH = AC \times AB ; AH = \frac{AC \times AB}{BC} ; AH = \frac{4\sqrt{3} \times 4}{8} ; AH = 2\sqrt{3}$$

b) Calculons HB et HC

Considérons le triangle rectangle BHA

$$AH^2 + HB^2 = AB^2 ; HB^2 = AB^2 - AH^2 ; HB^2 = 4^2 - (2\sqrt{3})^2 ; HB^2 = 16 - 12 ; HB^2 = 4 ; HB = \sqrt{4} ; HB = 2$$

Considérons le triangle rectangle CHA

$$AH^2 + HC^2 = AC^2 ; HC^2 = AC^2 - AH^2 ; HC^2 = (4\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2 ; HC^2 = 48 - 12 ; HC^2 = 36 ; HC = \sqrt{36} ; HC = 6$$

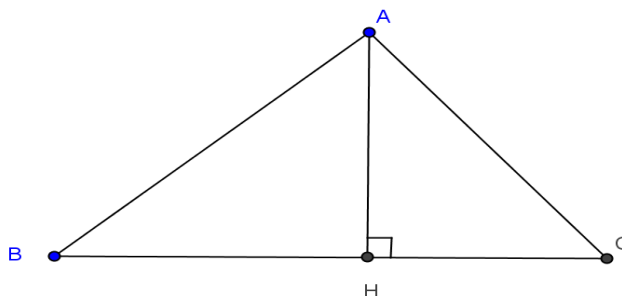
3) calculons

$$AH^2 = (2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$$

$$HB \times HC = 2 \times 6 = 12$$

Alors

$$\boxed{AH^2 = HB \times HC}$$



3) Relatons Métriques

➤ Théorème :

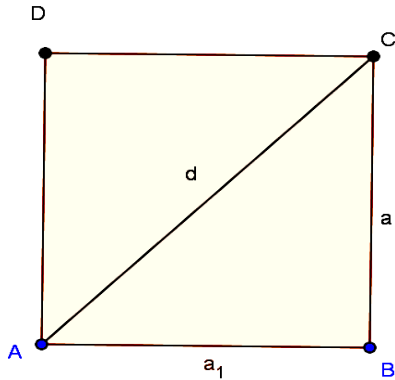
Etant donné un triangle ABC de hauteur [AH], si ABC est rectangle en A alors :

$AC \times AB = BC \times AH$
$AH^2 = HB \times HC$

IV) Application du théorème de Pythagore

1) Carré

ABCD est un carré de côté a . Déterminer la mesure de la diagonale d.

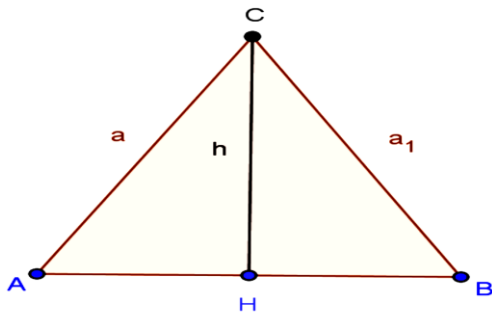


Considérons le triangle ABC rectangle en B

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \quad ; \quad d^2 = a^2 + a^2 \quad ; \quad d^2 = 2 a^2 \quad ; \quad d = \sqrt{2a^2} \quad ; \quad d = a\sqrt{2}$$

2) Triangle équilatéral

ABC est un triangle équilatéral de côté a . Déterminer la mesure de la hauteur h



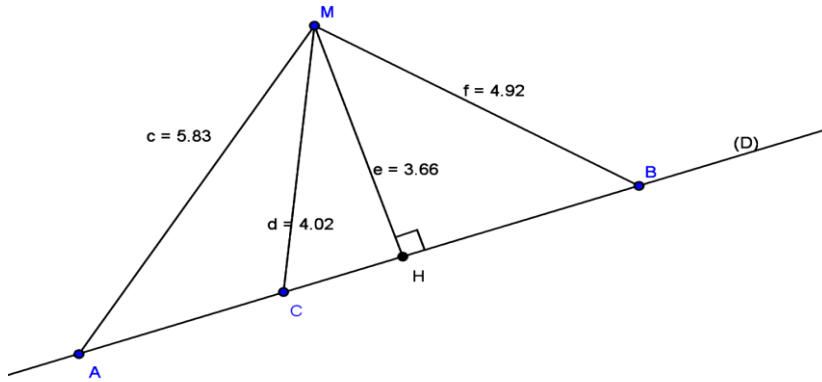
Considérons le triangle ACH

$$AC^2 = AH^2 + CH^2 \quad ; \quad a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 \quad ; \quad h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \quad ; \quad h^2 = \frac{3a^2}{4} \quad ; \quad h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} \quad ; \quad h = a \frac{\sqrt{3}}{2}$$

4) Distance d'un point à une droite

a) Activité

Soit une droite (D) et M un point n'appartenant pas à (D) ; H est le projeté orthogonal de M sur (D). Placer les points A ; B et C sur (D) et déterminer la plus petite distance de M à (D)



La distance MH est la plus courte distance de M à (D)

b) Définition

La distance d'un point M à une droite (D) est la plus courte des distances du point à la droite (D)

C) Propriété

La distance d'un point M à une droite (D) est la distance de ce point à son projeté orthogonal H sur (D).

Chapitre 9 : Fonctions rationnelles

I) Activité

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \frac{2x+5}{x-3}$$

Compléter le tableau suivant :

X	-1	0	$\sqrt{3}$	3	4
f(x)	$\frac{-3}{4}$	$\frac{-5}{3}$	$\frac{-21 - 11\sqrt{3}}{6}$		13

L'image de -1 par f est  $\frac{-3}{4}$

3 n'a pas d'image par f.

4 est l'antécédent par f de 13

La fonction  $f(x) = \frac{2x+5}{x-3}$  n'existe que si  $x \neq 3$

II) Définition

Soit f et g deux applications polynômes

La fonction h définie par  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  est appelée une fonction rationnelle

Une fonction rationnelle est donc le quotient de deux applications polynômes.

Exemples :  $k(x) = \frac{7x+1}{x+4}$  ;  $q(x) = \frac{4x^2+4x+1}{2x+1}$

III) Ensemble de définition d'une fonction rationnelle

L'ensemble de définition ou domaine de définition d'une fonction rationnelle est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  dans lequel la fonction existe ou la fonction a un sens .

Exemple : Soit  $f(x) = \frac{5x+3}{3x+7}$

f(x) existe si le dénominateur  $3x+7 \neq 0$  signifie  $x \neq \frac{-7}{3}$

On note ensemble de définition de f :  $D_f$ .

$D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{-7}{3} \right\}$  qui se lit  $\mathbb{R}$  privé de  $\frac{-7}{3}$

Exercice d'application

Trouver l'ensemble de définition des fonctions suivantes

$$G(x) = \frac{3x+1}{(2x+5)(x-2)} ; H(x) = \frac{(x+5)(4x+9)}{16-4x^2} ; K(x) = \frac{3x^2+2x+2}{4x^2-8x+4}$$

IV) Simplification de l'expression d'une fonction rationnelle

Soit  $f(x) = \frac{(x+1)(2x-3)}{(4-x)(x+1)}$

$f(x)$  existe si et seulement si  $(4-x)(x+1) \neq 0$   
 $\Leftrightarrow 4-x \neq 0$  et  $x+1 \neq 0$   
 $\Leftrightarrow x \neq 4$  et  $x \neq -1$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1 ; 4\}$$

Sur  $D_f$  on a  $f(x) = \frac{(x+1)(2x-3)}{(4-x)(x+1)} = \frac{2x-3}{4-x}$

On dit qu'on a simplifié  $f$  sur  $D_f$ .

V) Images et antécédents

Soit  $f(x) = \frac{x+4}{2x+5}$  ;  $g(x) = \frac{3x+2}{2x+1}$

- 1) Calculer les images par  $f$  des réels -1 et 3
- 2) Calculer l'antécédent par  $g$  du réel 0 et 1

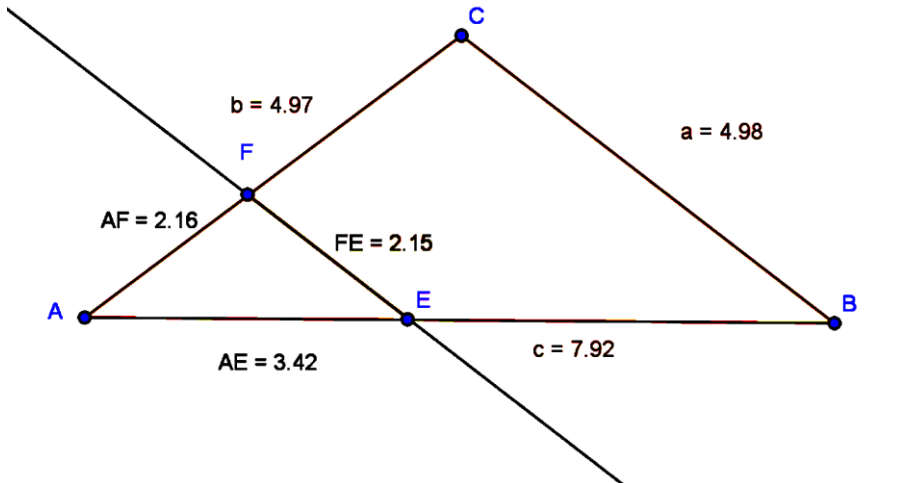
Chapitre 10 : Théorème de Thalès

I) Théorème de Thalès relatif aux triangles

1) Activité

- a) Construire un triangle ABC tel que AB=8cm AC=7cm et BC= 6cm
- b) Placer le point E sur (AB) tel que AE=3cm et tracer la parallèle à (BC) passant par E, elle coupe (AC) en F.
- c) Mesurer les distances AF ; EF et calculer les rapports  $\frac{AE}{AB}$  ;  $\frac{AF}{AC}$  ;  $\frac{EF}{BC}$  et les comparer

Réponse



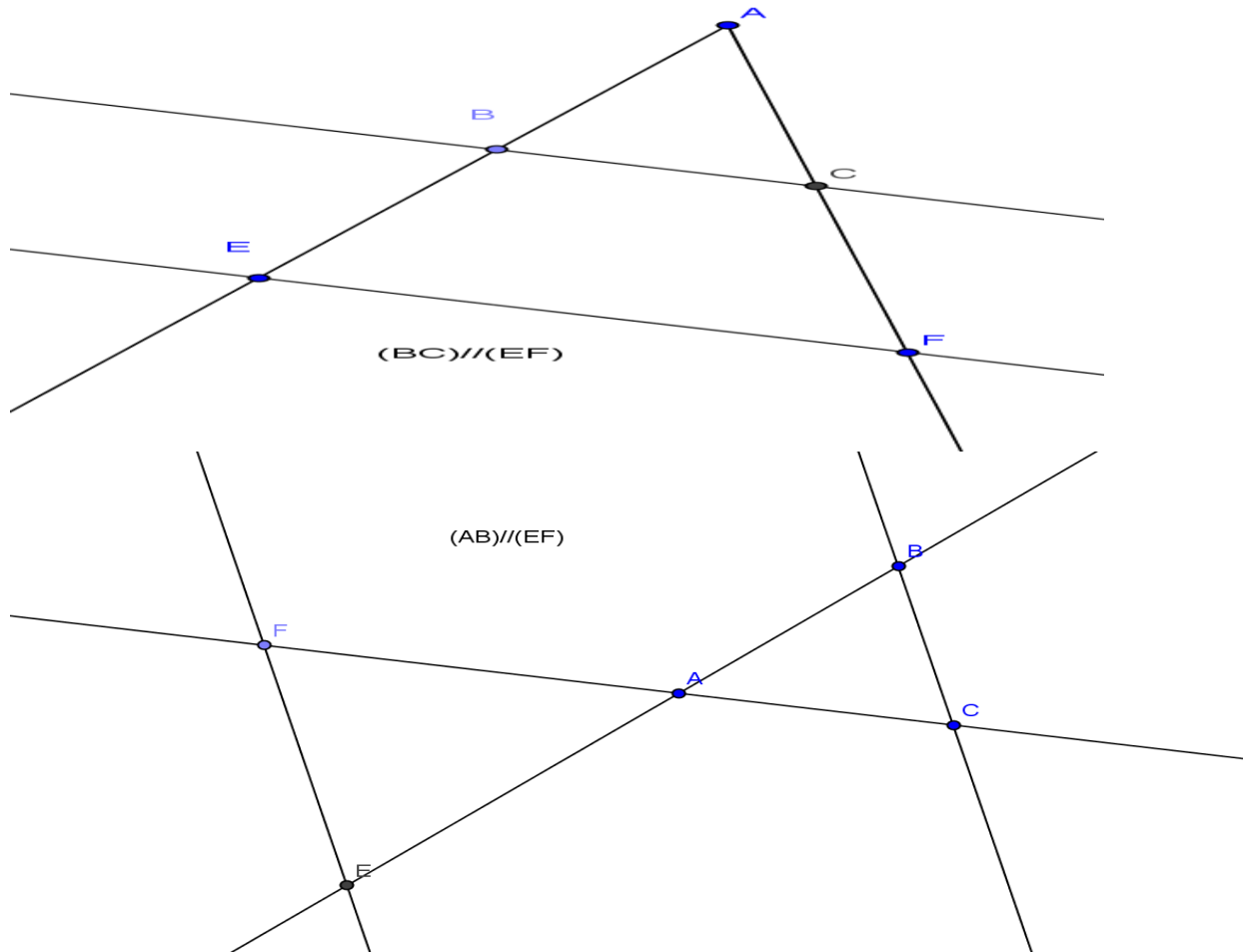
3) Calculer  $\frac{AE}{AB} = \frac{3,42}{7,92} = 0,43$  ;  $\frac{AF}{AC} = \frac{2,16}{4,97} = 0,43$  ;  $\frac{EF}{BC} = \frac{2,15}{4,98} = 0,43$

On remarque que  $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$ . On dit que les triangles AEF et ABC forment une configuration de Thalès.

## 2) Définition

On dit que deux triangles forment une configuration de Thalès s'ils sont déterminés par deux droites sécantes coupées par deux droites parallèles

Exemple



ABC et AEF forment une Configuration de Thalès

ABC et AEF forment une Configuration de Thalès

## 3) Théorème de Thalès

Si les triangles ABC et AEF forment une configuration de Thalès alors  $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$

### Exercice d'application

ABC est un triangle quelconque ; M est un point situé sur le segment [AB] et N est un point situé sur [AC] tel que  $(MN) \parallel (BC)$

On a :  $AB = 7\text{cm}$  ;  $AC = 6\text{cm}$  ;  $BC = 5\text{cm}$  et  $AM = 2\text{cm}$

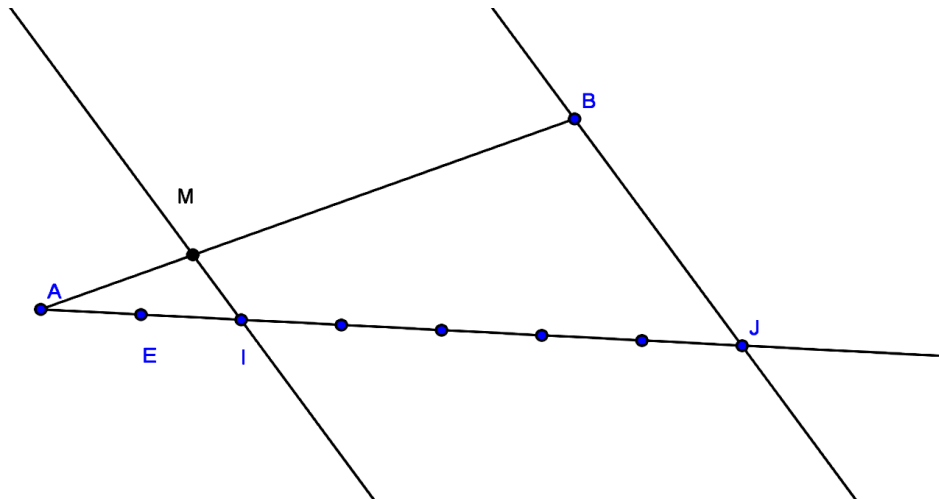
Calculer les distances AN et MN

## 4) Application du Théorème de Thalès

a) Partage d'un segment dans un rapport donné

Soit [AB] un segment, placer un point M sur le segment tel que  $AM = \frac{2}{7}AB$ .

Réponse



-Traçons le segment [AB]

-Traçons une demi droite [Ax) qui ne passe pas par B

-Avec un compas construisons sur [Ax) les points E ; I ; J tel que AE=1 ; AI=2 et AJ=7

-Traçons (BJ) et par I on mène la parallèle à (BJ) elle coupe (AB) en M.

D'après le théorème de Thalès appliqué aux triangles ABJ et AMI on a :  $\frac{AM}{AB} = \frac{AI}{AJ} = \frac{2}{7}$  alors  $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{7}$

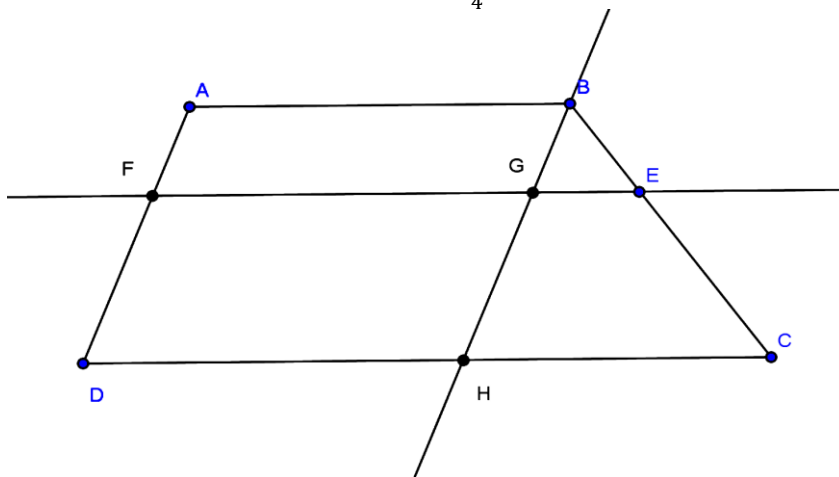
$AM = \frac{2}{7}AB$ . On dit qu'on a partagé le segment [AB] dans le rapport  $\frac{2}{7}$

Exercice d'application

Soit un segment [EF] de longueur 8cm. Sans utiliser la règle graduée construire le point M sur la demi droite [EF) tel que  $EM = \frac{4}{3}EF$ .

b) Cas de trapèze

Soit ABCD un trapèze. E est le point du segment [BC] tel que  $BE = \frac{1}{4}BC$ . La parallèle à [DC] passant par E coupe (AD) en F. Démontrer que  $AF = \frac{1}{4}AD$



Réponse

Traçons la parallèle à (AD) passant par B elle coupe (EF) en G et (DC) en H

Les triangles BGE et BHC forment une configuration de Thalès alors  $\frac{BG}{BH} = \frac{BE}{BC} = \frac{GE}{HC}$

ABGF est un parallélogramme donc AF=BG

ABHD est un parallélogramme donc AD=BH

$$\frac{BG}{BH} = \frac{BE}{BC} ; \frac{AF}{AD} = \frac{BE}{BC} ; \frac{AF}{AD} = \frac{\frac{1}{4}BC}{BC} \quad \frac{AF}{AD} = \frac{1}{4} ; \text{ ainsi } AF = \frac{1}{4}AD$$

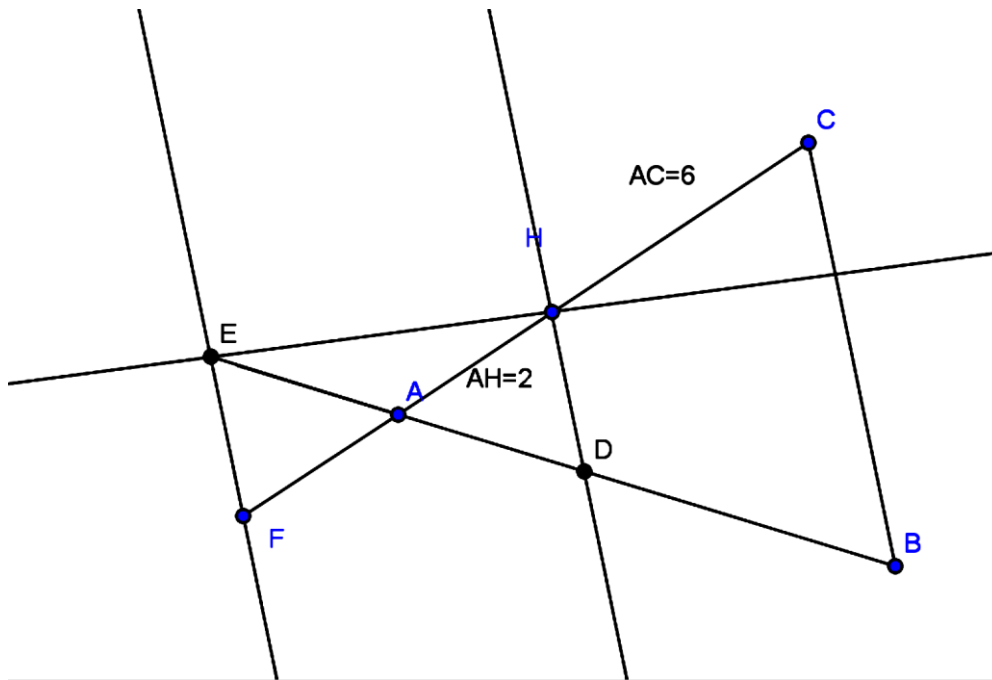
II) Réciproque du Théorème de Thalès

1) Activité

Soit un segment  $[AC]$  de 6 cm .Prendre un point H sur  $[AC]$  tel que  $AH = 2\text{cm}$  . Soit B un point n'appartenant pas à  $(AC)$ . Placer le point G sur le segment  $[AB]$  tel que  $AG = \frac{1}{3}AB$

a) E est le symétrique de G par rapport à A ; comparer les rapports  $\frac{AE}{AB}$  et  $\frac{AH}{AC}$  ; les triangles AEH et ABC forment –ils une configuration de Thalès ?

b) Soit F le symétrique de H par rapport à A. Comparer les rapports  $\frac{AE}{AB}$  et  $\frac{AF}{AC}$  . Les triangles AEF et ABC forment –ils une configuration de Thalès ? Pourquoi ?



E symétrique de G par rapport à A alors  $EA = AG$

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AG}{AB} = \frac{\frac{1}{3}AB}{AB} = \frac{1}{3}$$

$\frac{AH}{AC} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$  alors  $\frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AC}$  . Les triangles AEH et ABC ne forment pas une configuration de Thalès car  $(EH)$  et  $(BC)$  ne sont pas parallèles.

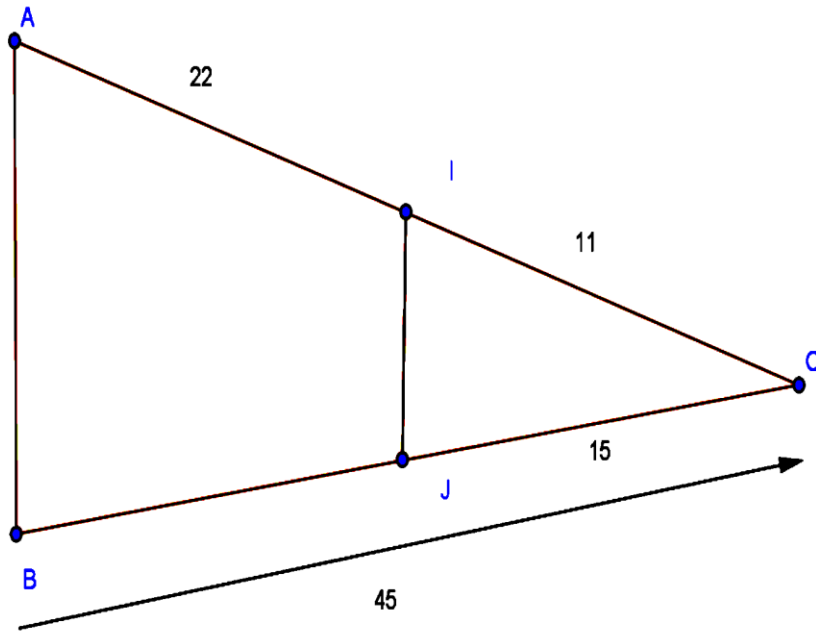
2)  $AF = AH$  ;  $\frac{AE}{AB} = \frac{1}{3}$  ;  $\frac{AF}{AC} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$  donc  $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$  . Les triangles AEF et ABC forment une configuration de Thalès car ils sont déterminés par deux droites  $(EF)$  et  $(BC)$  parallèles coupées par deux droites sécantes.

2) Réciproque du théorème de Thalès

Soit  $ABC$  un triangle, E est un point de  $(AB)$  si  $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$  et si A, B et E sont dans le même ordre que A, C et F alors les droites  $(BC)$  et  $(EF)$  sont parallèles.

Exercice d'application

$(AB)$  et  $(IJ)$  sont – elles parallèles ? Justifier



Chapitre11 : Repère orthonormé-distance

I) Repère orthonormé

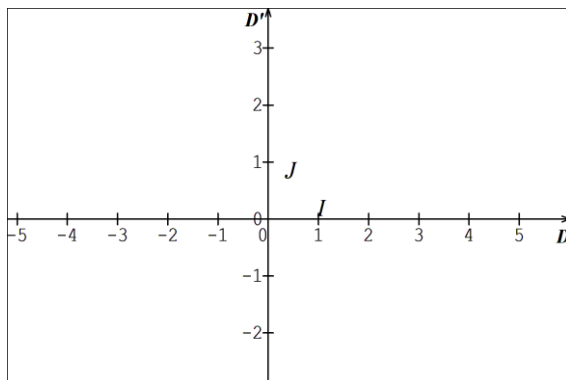
1) Définition

Soit  $(O ; I ; J)$  un repère du plan.

On dit que le repère  $(O ; I ; J)$  est un repère orthonormé (ou orthogonal) si les deux droites sont perpendiculaires.

L'unité est la même sur chacun des deux axes ;  $OI = OJ$  ;  $i = OI$  et  $j = OJ$

2) Représentation



$OI = OJ$  et  $(OI) \perp (OJ)$   
Repère orthonormé

II) Distance de deux points

Activité

a)  $(O ; I ; J)$  est un repère orthonormé d'unité (1cm) placer les points  $A(2 ; 4)$  ;  $B(6 ; 2)$  et  $C(2 ; 2)$ .

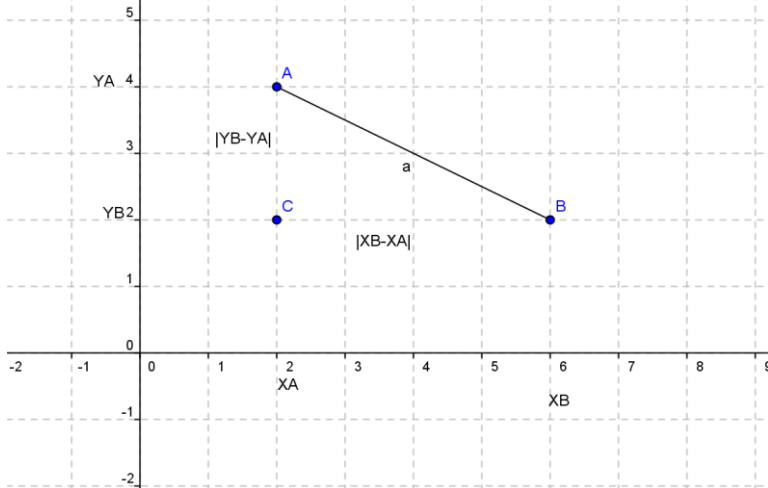
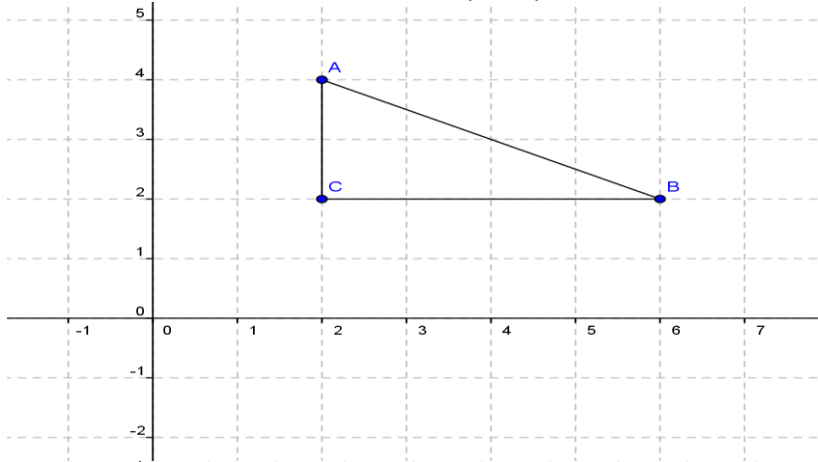
En considérant le triangle ABC et en appliquant le théorème de Pythagore, calculer AB et trouver la valeur exacte de AB.

b) Dans un repère (O ; i ; j) orthonormé placer A(x<sub>A</sub> ; y<sub>A</sub>) ; B(x<sub>B</sub> ; y<sub>B</sub>) ; C(x<sub>C</sub> ; y<sub>C</sub>)

Exprimer BC<sup>2</sup> en fonction de x<sub>A</sub> et x<sub>B</sub>

Exprimer AC<sup>2</sup> en fonction de y<sub>A</sub> et y<sub>B</sub>. Calculer AB<sup>2</sup>

En déduire AB en fonction de x<sub>A</sub> et x<sub>B</sub> ; y<sub>A</sub> et y<sub>B</sub>



$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AC = |4 - 2| = 2$$

$$BC = |6 - 2| = 4$$

$$AB^2 = 2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$$

$$AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

## 2) Définition

La distance des points A(x<sub>A</sub> ; y<sub>A</sub>) et B(x<sub>B</sub> ; y<sub>B</sub>) du plan muni d'un repère orthonormé est :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

### Exercice d'application

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; i ; j).

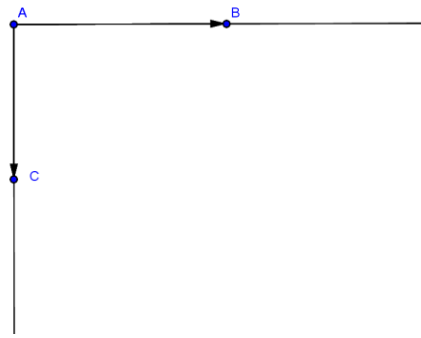
a) Placer les points A(-1 ; 3) ; B(-2 ; 1) ; C(3 ; 1)

b) Démontrer que le triangle ABC est rectangle et préciser en quel point.

## III) Orthogonalité de deux vecteurs

### 1) Représentation

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls tels que :  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  et (AB) ⊥ (AC)



## 2) Définition

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux signifie que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

3) Caractérisation de l'orthogonalité de deux vecteurs non nuls.

➤ Théorème :

Dans un repère orthonormé  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  étant deux vecteurs non nuls.

si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux alors  $xx' + yy' = 0$  et réciproquement.

Si  $xx' + yy' = 0$  alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux.

### Conséquence du théorème

Dans un repère orthonormé  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  étant deux vecteurs non nuls.

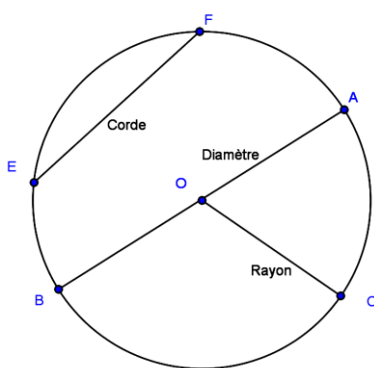
Si  $xx' + yy' \neq 0$  alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas orthogonaux.

## Chapitre 12: Angles inscrits

### 1) Angle inscrit et Angle au centre associé

#### 1) Rappel

Soit le cercle de centre O



- Une Corde est le segment liant deux points du cercle.

Exemple : [EF]

- Un diamètre est une corde passant par le centre du cercle.

Exemple : [AB]

- Un rayon est tout segment liant le centre et un point du cercle.

Exemple : [OC]

- L'arc de cercle est la portion du cercle comprise entre deux points du cercle. Exemple :  $\widehat{EF}$

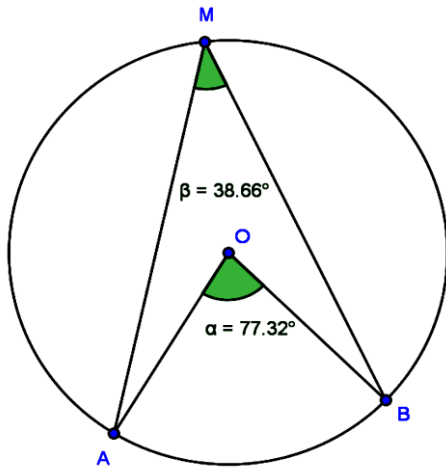
#### 2) Activité

Tracer un cercle (C) de centre O. Soit A et B deux points distincts de (C). Placer un point M sur le cercle distinct de A et de B et mesurer  $\widehat{AMB}$  et  $\widehat{AOB}$  dans les cas suivants :

a)  $\widehat{AMB}$  est un angle aigu

b)  $\widehat{AMB}$  est un obtus

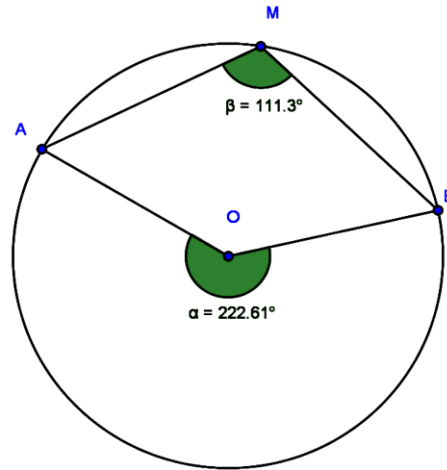
#### Remarque



$$\widehat{AMB} = 38,66^\circ$$

$$\widehat{AOB} = 77,32^\circ$$

On remarque que dans tous les deux cas  $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$



$$\widehat{AMB} = 111,3^\circ$$

$$\widehat{AOB} = 222,61^\circ$$

### 3) Définition

L'angle  $\widehat{AMB}$  est appelé angle **INSCRIT** dans le cercle (C). On dit qu'il intercepte l'arc  $\widehat{AB}$ .

L'angle  $\widehat{AOB}$  est un angle **AU CENTRE ASSOCIE** car il intercepte le même arc que l'angle  $\widehat{AMB}$  et son sommet O est le centre du cercle.

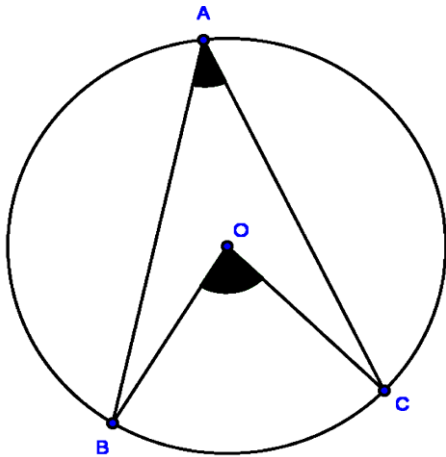
### 4) Théorème de l'angle inscrit

Soit un cercle de centre O. Si A ; B ; M sont trois points distincts de ce cercle , alors  $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$

Exercice d'application

On donne le triangle ABC et son cercle circonscrit de centre O.  $\widehat{ABC} = 50^\circ$   $\widehat{BCA} = 70^\circ$  .

Calculer  $\widehat{BOC}$



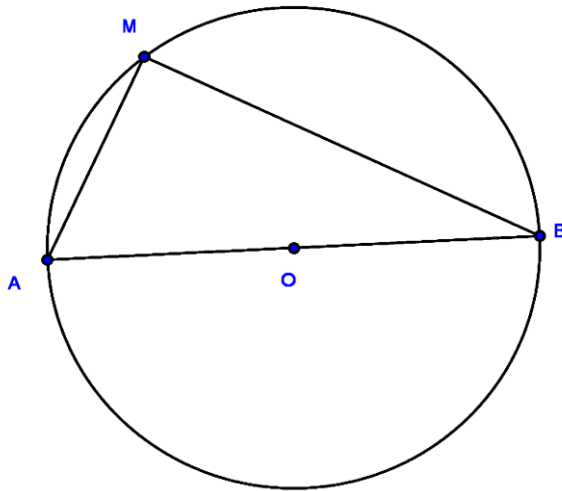
### 4) Application : Triangle inscrit dans un demi – cercle

#### a) Activité

Soit un cercle de centre O. [AB] de diamètre et M un point du cercle .

Démontrer que AMB est un triangle rectangle

Réponse



$\widehat{AMB}$  est un angle inscrit interceptant l'arc  $AB$  et  $\widehat{AOB}$  est un angle au centre associé interceptant le même arc  $AB$ , on a  $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$ ;  $\widehat{AMB} = \frac{\widehat{AOB}}{2}$ ;  $\widehat{AMB} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$   
 Alors le triangle  $AMB$  est rectangle en  $M$ .

b) Propriété

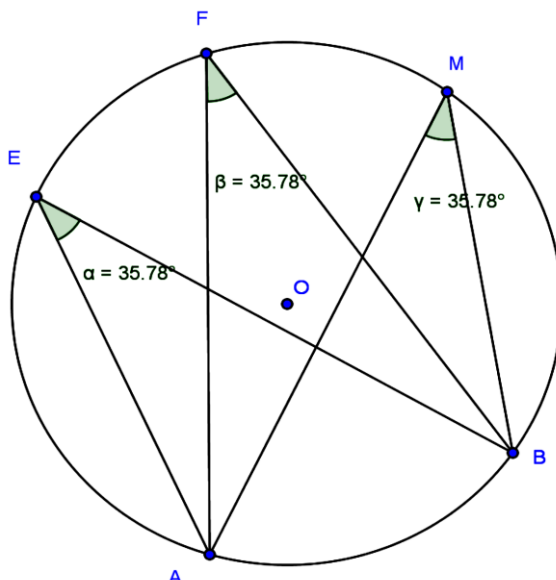
Si un triangle  $AMB$  est inscrit dans un demi-cercle de diamètre  $[AB]$  alors  $AMB$  est un triangle rectangle.

## II) Angles inscrits interceptant le même arc

1) activité

Tracer un cercle de centre  $O$ , placer deux points distinct  $A$  et  $B$  sur ce cercle. Placer les points  $E$ ;  $F$  et  $M$  sur le grand arc  $AB$  et mesurer les angles  $\widehat{AEB}$ ;  $\widehat{AFB}$ ;  $\widehat{AMB}$ . Que remarque t-on ?

Réponse



$\widehat{AEB} = 35,78^\circ$ ;  $\widehat{AFB} = 35,78^\circ$ ;  $\widehat{AMB} = 35,78^\circ$ . On remarque que  $\widehat{AEB}$ ;  $\widehat{AFB}$ ;  $\widehat{AMB}$  sont des angles inscrits interceptant le même arc et qu'ils sont égaux

2) Propriété

Si deux angles inscrits interceptent le même arc alors ils sont égaux.

I) Equation de droites

1) Vecteurs directeurs d'une droite

Soit A un point quelconque du plan et soit  $\vec{u}$  un vecteur non nul.

Construire les points B ; C ; F et G tel que :

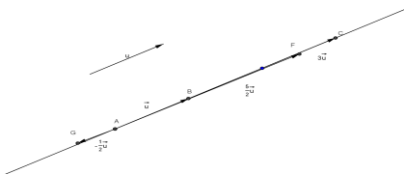
$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} ; \overrightarrow{AC} = 3\vec{u} ; \overrightarrow{AF} = \frac{5}{2}\vec{u} ; \overrightarrow{AG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

a) Que peut-on dire des points A ; B ; C ; F ; G ? justifier.

b) Soit M un point quelconque pour lequel il existe un réel k tel que :  $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$ .

Que peut-on dire des points A ; B ; M ? justifier

Figure



On remarque que les points A ; B ; C ; F et G sont sur la même droite (D).

-Si M est un point tel que  $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$  alors A ; B et M sont alignés.  $\overrightarrow{AM}$  et  $\overrightarrow{AB}$  sont donc colinéaires et  $\overrightarrow{AM}$  et  $\vec{u}$  sont aussi colinéaires.

Si M est un point de (D) alors il existe un réel k tel que  $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$  ; on dit que  $\vec{u}$  est un vecteur directeur de (D)

2) Définition

Etant donné deux points A et B d'une droite (D), on appelle vecteur directeur tout vecteur  $\vec{u}$  non nul colinéaire à  $\overrightarrow{AB}$ .

3) Conséquence

Etant donné un point A et un vecteur non nul  $\vec{u}$ , il existe une et une seule droite passant par A et ayant pour vecteur directeur le vecteur  $\vec{u}$

Figure

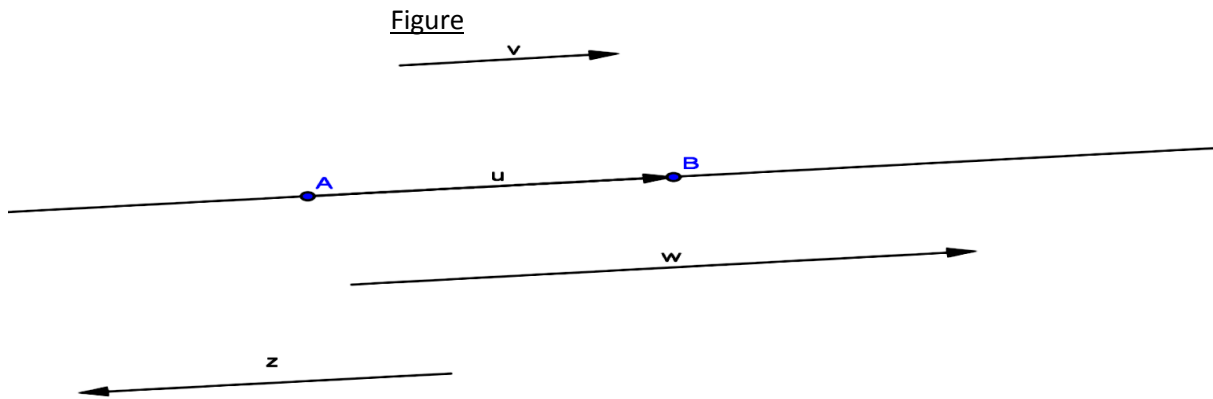


A et B étant deux points distincts d'une seule droite (D). le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est un vecteur directeur pour la droite (D).



➤ Remarque :

Si  $\vec{u}$  est un vecteur directeur de la droite (D) tout vecteur non nul qui est colinéaire à  $\vec{u}$  est aussi un vecteur pour la droite (D).

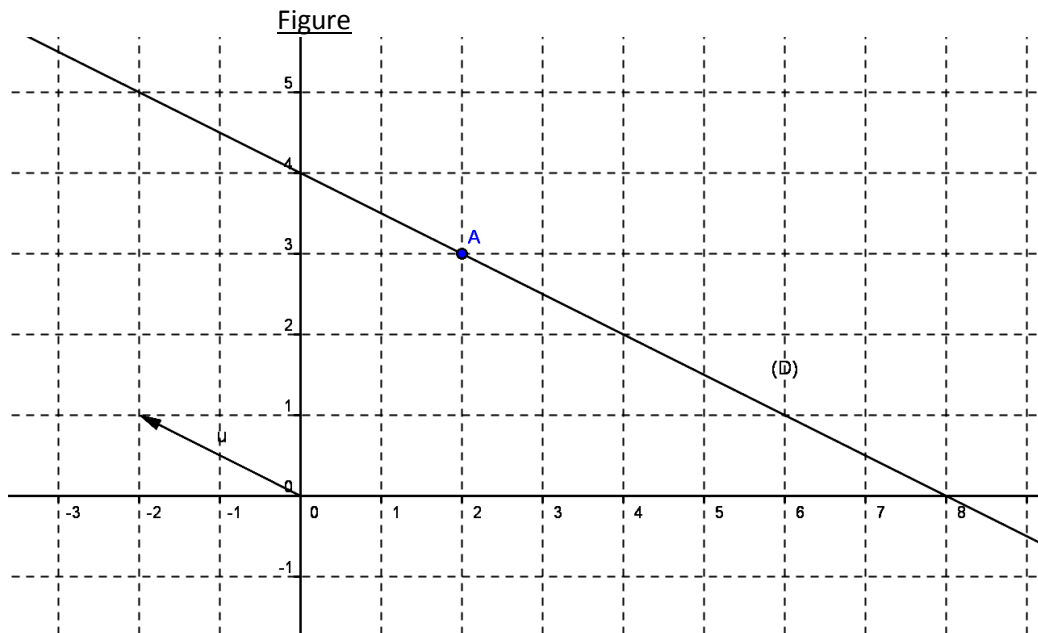


#### 4) Equation cartésienne d'une droite

##### a) Activité

Dans un repère orthonormé du plan, soit (D) la droite passant par le point A(2 ; 3) de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et M(x ; y) un point de la droite (D).

Trouvons une équation de la droite (D).



$M(x ; y) \in (D)$  et  $M(x ; y) \cdot \vec{AM}$  colinéaire à  $\vec{u}$  si  $xy' - x'y = 0$

$$\vec{AM} \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 3 \end{pmatrix} \text{ col } \vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(x-2) - (-2)(y-3) = 0$$

$$x + 2y - 8 = 0$$

On dit que  $x + 2y - 8 = 0$  est une équation de la droite (D) et  $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$  est son vecteur directeur .

Si les coordonnées d'un point vérifie l'équation  $x + 2y - 8 = 0$  alors ce point appartient à la droite (D).

##### b) Propriété

Le plan étant muni d'un repère (o ; i ; j) a et b deux réels non nuls ; c un réel quelconque.

L'ensemble des points M dont les coordonnées x et y vérifie  $ax+by+c=0$  est appelée équation de la droite (D) dans le  $(o ; i ; j)$ .

Le vecteur  $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de la droite (D).

Si  $b \neq 0$  on a :  $ax + by + c = 0$

$$by = -ax - c$$

$$y = \frac{-ax - c}{b} = -\frac{ax}{b} - \frac{c}{b}$$

.Si on pose  $m = -\frac{a}{b}$  et  $p = -\frac{c}{b}$

on a :  $y = mx + p$

### Propriété 2

Si (D) a pour équation  $y = mx + p$  alors  $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de (D) et m est appelé le coefficient directeur de (D)

Si le repère est orthonormé alors m est appelé pente de la droite.

P est l'ordonnée du point d'abscisse 0 ; p est l'ordonnée à l'origine.

### Exercice d'application

Le plan est muni d'un repère  $(o ; i ; j)$ .

a) Soit  $(\Delta)$  la droite d'équation  $-2x + 3y - 5 = 0$ . Les points  $A(0 ; 0)$  ;  $B(1 ; 1)$  ;  $C(-2 ; 4)$  ;  $E(4 ; 10)$  ;  $H(3 ; 6)$  ;  $I(-2 ; -5)$  appartiennent-ils à la droite  $(\Delta)$ ?

b) Déterminer une équation de la droite (D) passant par le point  $A(2 ; 3)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) On a les points  $E(1 ; 3)$  et  $F(-3 ; 1)$ . Trouver une équation de la (EF).

d) Déterminer le vecteur directeur des droites suivantes ;

(D) :  $3x + 5y - 1 = 0$  ; (d) :  $x + 4y + 5 = 0$  ;  $(\Delta)$  :  $y = 3x - 7$

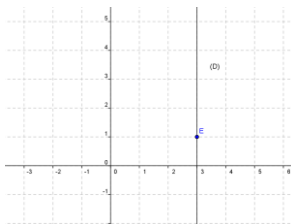
e) Construire les droites  $(D_1)$  :  $y = 2x - 3$  et  $(D_2)$  :  $x + y - 3 = 0$

### 5) Cas particuliers

a) Droites parallèles à l'axe des ordonnées

Construire une droite (D) passant par le point  $E(3 ; 1)$  et parallèle à l'axe des ordonnées. Que remarque-t-on ?

Figure



On remarque que tous les points situés sur (D) ont pour abscisses 3 ; on dit  $x=3$  est une équation de la droite (D)

b) Conclusion

Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme  $x=a$  ou « a » est l'abscisse d'un point de cette droite.

## II) Droites parallèles-droites perpendiculaires

### 1) Droites parallèles

#### a) Rappels

Si deux droites sont parallèles alors leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Si deux droites ont leurs vecteurs directeurs colinéaires alors elles sont parallèles.

#### b) Activité

Dans un repère  $(o ; i ; j)$  du plan :

1-Tracer les droites  $(\Delta)$  ;  $(\Delta')$  d'équations respectives :  $(\Delta) : y=-2x$  ;  $(\Delta') : y=-2x+2$ . Que constate-t-on de  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  ?

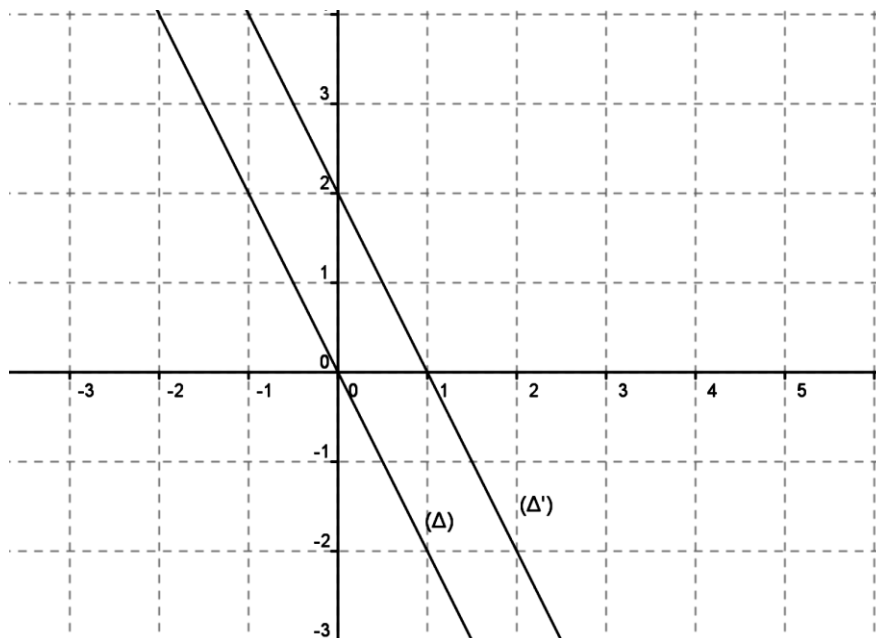
2-Donner les coordonnées des vecteurs directeurs de  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$ . Que remarque-t-on ?

**$(\Delta) : Y = -2x$**

	x	Y
<b>A</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>B</b>	<b>1</b>	<b>-2</b>

**$(\Delta') : Y = -2x + 2$**

	x	y
<b>E</b>	<b>0</b>	<b>2</b>
<b>F</b>	<b>1</b>	<b>0</b>



1-) On remarque que  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  sont parallèles

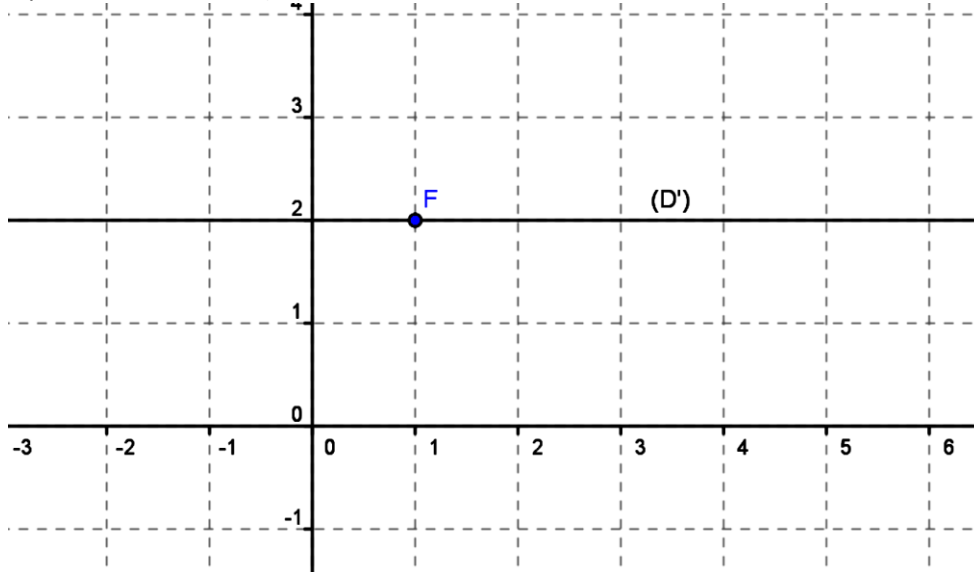
2-)  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{u}' \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) Droites parallèles à l'axe des abscisses

Construire une droite (D') passant par F(1 ; 2) et parallèle à l'axe des abscisses. Que remarque-t-on ?

Réponse

On remarque que tous les points situés sur la droite (D') ont pour ordonnée 2 ; on dit que  $y=2$  est une équation de la droite (D')



Conclusion

Toute droite parallèle à l'axe des abscisses a une équation de la forme  $y=b$  ou « b » est l'ordonnée d'un point de cette droite.

NB : La pente de droite d'équation  $y=b$  est nulle

d) Droites passant par l'origine du repère

\_ Toute droite passant par l'origine du repère et distincte de l'axe des ordonnées a une équation de la forme  $y=ax$ .  $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de cette droite.

\_ Toute droite d'équation  $y=ax$  passe par l'origine du repère.

2) Droites perpendiculaires

a) Activité

Soit  $(\Delta)$  une droite d'équation :  $y=3x$

1- Donner un vecteur directeur  $\vec{u}$  de  $(\Delta)$

2- Déterminer un vecteur  $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ y' \end{pmatrix}$  non nul orthogonal à  $\vec{u}$

3- Trouver une équation de droite de  $(\Delta')$  perpendiculaire à  $(\Delta)$  qui a pour vecteur directeur  $\vec{v}$  et qui passe par A (1 ; 1)

4-Calculer le produit des pentes de  $(\Delta)$  et de  $(\Delta')$ .

Réponse

1)  $(\Delta)$  a pour vecteur directeur  $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

2) Déterminons un vecteur  $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ y' \end{pmatrix}$

$$\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ y' \end{pmatrix} \perp \vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} ; 2 \times 1 + y' \times 3 = 0 ; 3y' = -2 ; y' = \frac{-2}{3} ; \vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$$

3) L'équation de  $(\Delta')$   $y = \frac{-1}{3}x + \frac{4}{3}$

4) Calculons le produit des pentes :  $3 \times \left(\frac{-1}{3}\right) = -1$

b) Propriété

\_ Dans un repère orthonormé si le produit des pentes de deux droites est -1 alors ces droites sont perpendiculaires.

\_ Dans un repère orthonormé si deux droites, non parallèles aux axes, sont perpendiculaires alors le produit de leurs pentes est -1.

Chapitre 14 : Relations trigonométriques dans un triangle rectangle

1) Définitions

1) Cosinus d'un angle aigu

a) Activité

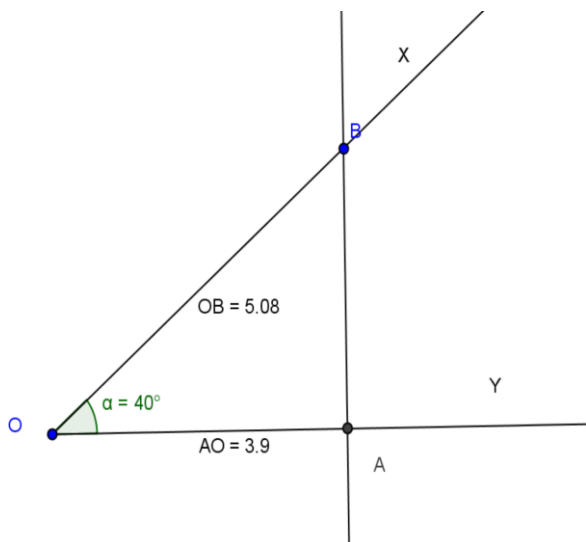
1) Soit deux demi-droites  $[Ox)$  et  $[Oy)$  ; placer un point B sur  $[Ox)$  et construire son projeté orthogonal A sur  $[Oy)$

a)  $\widehat{XOY} = 40^\circ$

b)  $\widehat{XOY} = 60^\circ$

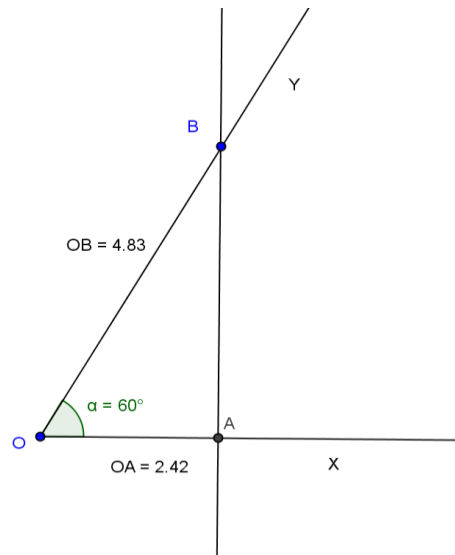
2) Mesurer OA et OB dans chaque cas et calculer le rapport de projection orthogonal de (OB) sur (OA)

$$k = \frac{OA}{OB}$$



OB=5,08 ; OA= 3,9

$$k = \frac{OA}{OB} = k = \frac{3,9}{5,08} = 0,8$$



OB=4,83 ; OA= 2,42

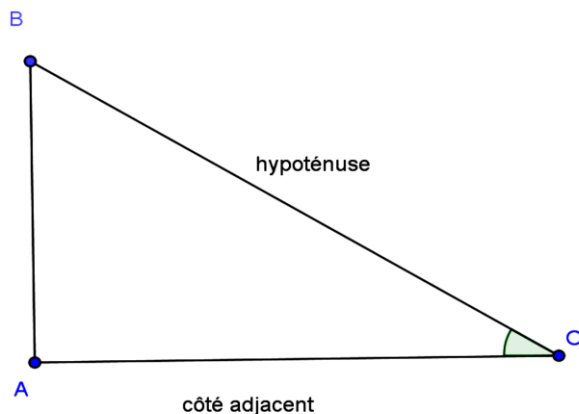
$$k = \frac{OA}{OB} = k = \frac{2,42}{4,83} = 0,5$$

On remarque que le rapport  $k = \frac{OA}{OB}$  dépend de l'angle  $\widehat{AOB}$ . Ce rapport est appelé cosinus de l'angle  $\widehat{AOB}$

b) Définition

ABO est un triangle rectangle en A. On appelle cosinus de l'angle  $\widehat{AOB}$  le réel  $\frac{OA}{OB}$

On note  $\cos \widehat{AOB} = \frac{OA}{OB}$



[OA] est appelé le côté adjacent de l'angle  $\widehat{AOB}$

$$\text{Alors } \cos \widehat{AOB} = \frac{\text{Côté adjacent}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{OA}{OB}$$

Remarque

-Si  $\widehat{AOB} = 0^\circ$  alors  $OA = OB$  donc  $\cos 0^\circ = 1$

-Si  $\widehat{AOB} = 90^\circ$  alors  $OA = 0$  donc  $\cos 90^\circ = 0$

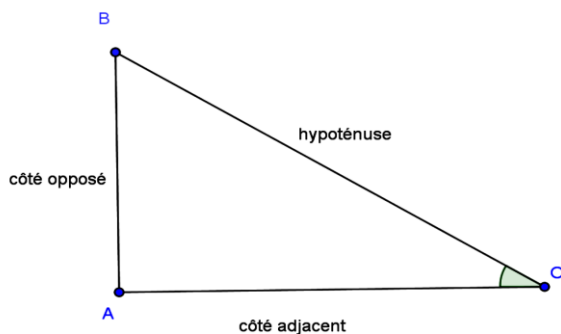
2) sinus d'un angle aigu

(Calculer le rapport de (OB) sur (AB).  $k' = \frac{AB}{OB}$  dans l'activité précédente)

Définition

ABO est un triangle rectangle en A. On appelle sinus de l'angle  $\widehat{AOB}$  le réel  $\frac{AB}{OB}$

$$\text{On note } \sin \widehat{AOB} = \frac{AB}{OB}$$



[AB] est appelé le côté opposé de l'angle  $\widehat{AOB}$

$$\text{Alors } \sin \widehat{AOB} = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{AB}{OB}$$

Remarque

-Si  $\widehat{AOB} = 0^\circ$  alors  $AB = 0$  donc  $\sin 0^\circ = 0$

-Si  $\widehat{AOB} = 90^\circ$  alors  $AB = OB$  donc  $\sin 90^\circ = 1$

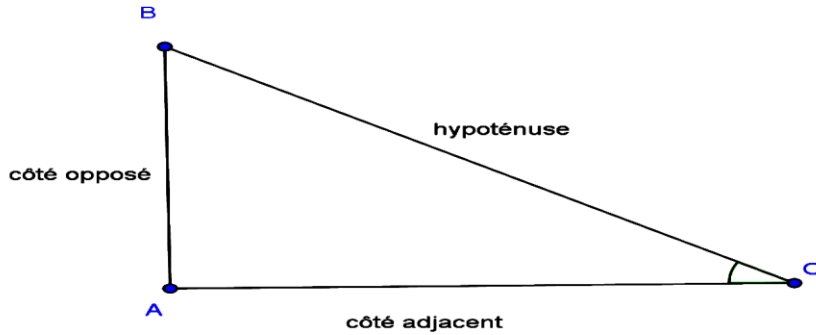
3) Tangente d'un angle aigu

(Calculer le rapport de (OA) sur (AB) parallèlement à (OB).  $k'' = \frac{AB}{OA}$  dans l'activité précédente)

Définition

ABO est un triangle rectangle en A. On appelle tangente de l'angle  $\widehat{AOB}$  le réel  $\frac{AB}{OA}$

$$\text{On note } \tan \widehat{AOB} = \frac{AB}{OA}$$



[

$$\text{Alors } \tan \widehat{AOB} = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{AB}{OB}$$

Remarque

-Si  $\widehat{AOB} = 0^\circ$  alors  $AB = 0$  donc  $\tan 0^\circ = 0$

-Si  $\widehat{AOB} = 90^\circ$  alors  $OA = 0$  donc  $\tan 90^\circ$  n'existe pas

Exercice d'application

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que  $AB = 4$  ;  $AC = 3$  ;  $BC = 5$

Calculer  $\cos \widehat{B}$  ;  $\sin \widehat{B}$  ;  $\tan \widehat{B}$  ;  $\cos \widehat{C}$  ;  $\sin \widehat{C}$  ;  $\tan \widehat{C}$

II) Propriété

1) Relations entre sinus, cosinus et tangente d'un angle aigu

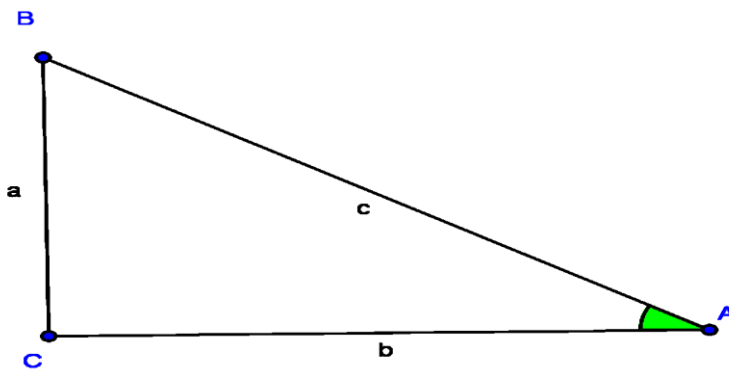
a) Activité

Soit ABC un triangle rectangle en C (figure ci-dessus)

1) Trouver  $\cos \widehat{A}$  ;  $\sin \widehat{A}$  et  $\tan \widehat{A}$  en fonction de a ; b ; c

2) calculer  $\frac{\sin \widehat{A}}{\cos \widehat{A}}$  que remarque t-on ?

3) calculer  $\cos^2 \widehat{A}$  ;  $\sin^2 \widehat{A}$  ; et  $\cos^2 \widehat{A} + \sin^2 \widehat{A}$



$$\cos \widehat{A} = \frac{b}{c} ; \sin \widehat{A} = \frac{a}{c} ; \tan \widehat{A} = \frac{a}{b}$$

2) Calculons  $\frac{\sin \widehat{A}}{\cos \widehat{A}}$

$$\frac{\sin \widehat{A}}{\cos \widehat{A}} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{c} \times \frac{c}{b} = \frac{a}{b}$$

On remarque  $\tan \widehat{A} = \frac{\sin \widehat{A}}{\cos \widehat{A}} = \frac{a}{b}$

3) Calculons

$$(\cos \widehat{A})^2 = \cos^2 \widehat{A} = \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{b^2}{c^2} ; \sin^2 \widehat{A} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2}$$

$$\cos^2 \widehat{A} + \sin^2 \widehat{A} = \frac{b^2}{c^2} + \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2 + a^2}{c^2} \text{ comme } c^2 = b^2 + a^2 \text{ (car ABC est un triangle rectangle en C)}$$

$$\text{on a : } \cos^2 \widehat{A} + \sin^2 \widehat{A} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

$$\cos^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{A} = 1$$

Conclusion

Pour tout angle aigu  $\hat{A}$  on a :  $\cos^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{A} = 1$  ;  $\tan \hat{A} = \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}}$  ( $\hat{A} \neq 90^\circ$ )

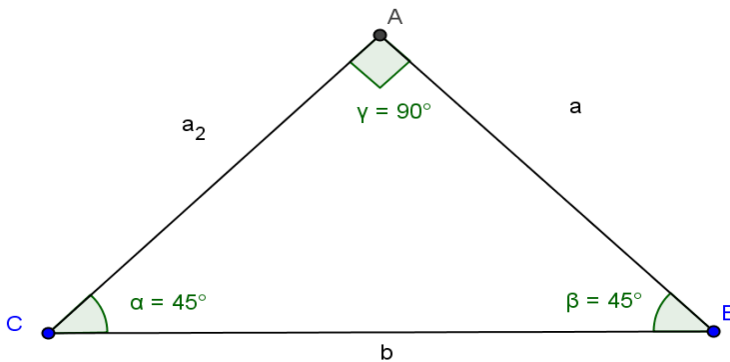
2) Valeurs remarquables

a) Angle de  $45^\circ$

Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A

1) Calculer BC

2) Calculer  $\cos \hat{B}$  ;  $\sin \hat{B}$  ;  $\tan \hat{B}$



$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$b^2 = a^2 + a^2$$

$$b^2 = 2a^2$$

$$b = \sqrt{2a^2}$$

$$b = a\sqrt{2}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{a}{b} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{alors } \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \hat{B} = \frac{\sin \hat{B}}{\cos \hat{B}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \quad \text{alors } \tan 45^\circ = 1$$

$$\sin \hat{B} = \frac{a}{b} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{alors } \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

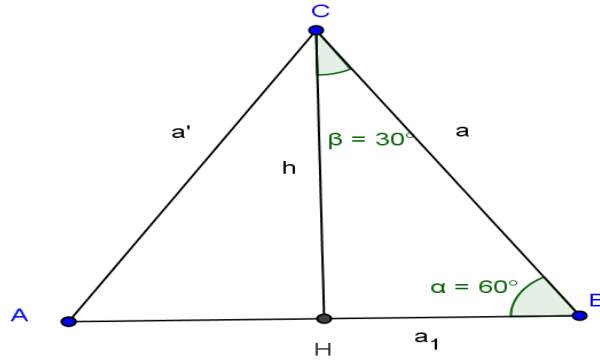
b) Valeur des angle de  $30^\circ$  et  $60^\circ$

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a et de hauteur h.

1) Calculer h

2) Calculer  $\cos 30^\circ$  ;  $\sin 30^\circ$  ;  $\tan 30^\circ$

3) Calculer  $\cos 60^\circ$  ;  $\sin 60^\circ$  ;  $\tan 60^\circ$



$$H = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad HB = \frac{a}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{CH}{BC} = \frac{h}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{alors } \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{BH}{BC} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} \quad \text{alors } \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{2} \times \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{alors } \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{BH}{BC} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} \quad \text{alors } \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

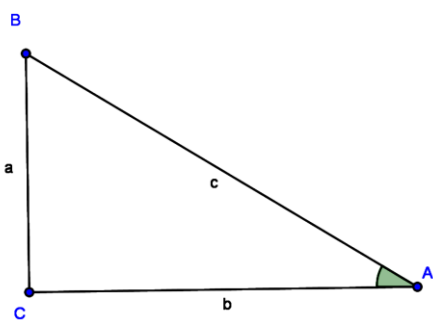
$$\sin 60^\circ = \frac{CH}{BC} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{alors } \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{CH}{BH} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \quad \text{alors } \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

Tableau Récapitulatif

$\hat{A}$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin \hat{A}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \hat{A}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \hat{A}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	n'existe pas

## Formules



$$\cos \hat{B} = \frac{\text{Côté adjacent}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{BC}{BA}$$

$$\sin \hat{B} = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{AC}{BA}$$

$$\tan \hat{B} = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\cos^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{B} = 1 \quad ; \quad \tan \hat{B} = \frac{\sin \hat{B}}{\cos \hat{B}}$$

( $\hat{B} \neq 90^\circ$ )

$$\cos \hat{B} = \sin \hat{A} \quad ; \quad \cos \hat{A} = \sin \hat{B}$$

I) Equations et système d'équations dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

1) Equations dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

a) Exemple

Soit à résoudre dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  l'équation  $3x+2y=5$

Toute solution de l'équation  $3x+2y=5$  est un couple de réels  $(x ; y)$ . On dit que le couple  $(x ; y)$  est l'inconnue de l'équation  $3x+2y=5$

Résoudre l'équation  $3x+2y=5$  c'est donc trouver tous les couples de réels  $(x ; y)$  pour que l'égalité  $3x+2y=5$  se vérifie

b) Exemple de résolution

Trouvons des couples de nombres réels qui vérifient l'équation  $3x+2y=5$

	x	y
A	1	1
B	-1	4
C	3	-1

$$y = \frac{5-3x}{2}$$

$(x ; \frac{5-3x}{2})$  est une solution générale de  $3x+2y=5$

L'équation  $3x+2y=5$  admet une infinité de solutions

c) Résolution graphique

Soit à résoudre graphiquement l'équation  $3x+2y=5$

Résoudre graphiquement l'équation  $3x+2y=5$  c'est trouver dans le plan muni d'un repère les points dont les coordonnées  $(x ; y)$  vérifient l'équation  $3x+2y=5$ .

L'ensemble de ces points représente une droite d'équation  $3x+2y=5$

2) Système d'équations dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

a) Exemple

Soit à résoudre dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  le système (F) :  $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 7x + 5y = 15 \end{cases}$

Résoudre ce système c'est trouver l'ensemble des couple de réels  $(x ; y)$  qui sont à la fois solution de  $3x + 2y = 5$  et de  $7x + 5y = 15$

b) Méthodes de résolution

➤ Résolution par Identification

On choisit une des inconnues que l'on exprime en fonction de l'autre dans chacune des deux équations.

Résolvons par identification (F)  $\begin{cases} 3x + 2y = 5 & (1) \\ 7x + 5y = 15 & (2) \end{cases}$

$$(F) \begin{cases} 3x + 2y = 5 & (1) \\ 7x + 5y = 15 & (2) \end{cases}$$

Tirons  $y$  dans (1) et dans (2)  $\begin{cases} 2y = 5 - 3x & (1) \\ 5y = 15 - 7x & (2) \end{cases} \begin{cases} y = \frac{5-3x}{2} & (1) \\ y = \frac{15-7x}{5} & (2) \end{cases}$

$$Y=Y \Leftrightarrow \frac{5-3x}{2} = \frac{15-7x}{5} ;$$

$$5(5-3x) = 2(15-7x) ;$$

$$25 - 15x = 30 - 14x ;$$

$$-15x + 14x = 30 - 25 ;$$

$$-x = 5 ;$$

$$x = -5 ;$$

Remplaçons  $x$  par sa valeur dans l'équation (1)

$$3x + 2y = 5 ;$$

$$3x(-5) + 2y = 5 ;$$

$$-15 + 2y = 5 ;$$

$$2y = 5 + 15$$

$$; 2y = 20 ;$$

$$y = 10$$

$$S_{RXR} = \{(-5; 10)\}$$

➤ Résolution par substitution

Dans l'une des équations, on exprime  $x$  en fonction de  $y$  (ou  $y$  en fonction de  $x$ ) et reporte le résultat dans la seconde équation

Exemple : Résolvons par substitution (F)  $\begin{cases} 3x + 2y = 5 & (1) \\ 7x + 5y = 15 & (2) \end{cases}$

$$(F) \begin{cases} 3x + 2y = 5 & (1) \\ 7x + 5y = 15 & (2) \end{cases}$$

exprimons  $y$  en fonction de  $x$  dans (1)

$$\begin{cases} 2y = 5 - 3x & (1) \\ 7x + 5y = 15 & (2) \end{cases} \begin{cases} y = \frac{5-3x}{2} & (1) \\ 7x + 5y = 15 & (2) \end{cases}$$

Remplaçons  $y$  par  $\frac{5-3x}{2}$  dans (2)

$$5\left(\frac{5-3x}{2}\right) + 7x = 15 ;$$

$$\frac{25-15x+14x}{2} = 15$$

$$25 - x = 30$$

$$-x = 5$$

$$x = -5$$

Remplaçons  $x$  par sa valeur dans l'équation (1)

$$3x + 2y = 5 ;$$

$$3x(-5) + 2y = 5 ;$$

$$-15 + 2y = 5 ;$$

$$2y = 5 + 15$$

$$; 2y = 20 ;$$

$$y = 10$$

$$S_{RXR} = \{(-5; 10)\}$$

➤ Résolution par combinaison linéaires

On élimine une des inconnues en multipliant les membres de chaque équation par un nombre judicieusement choisi.

Exemple : Résolvons par combinaison linéaire (F)  $\begin{cases} 3x + 2y = 5 & (1) \\ 7x + 5y = 15 & (2) \end{cases}$

(F)  $\begin{cases} 3x + 2y = 5 & (1) \\ 7x + 5y = 15 & (2) \end{cases}$   
 Multiplions les membres de l'équation(1) par « -5 » et ceux de (2) par « 2 »

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 & (1) \times \ll -5 \gg \\ 7x + 5y = 15 & (2) \times \ll 2 \gg \\ \hline -15x - 10y = -25 & (1) \\ 14x + 10y = 30 & (2) \\ \hline -x + 0 = 5 \\ x = -5 \end{cases}$$

Remplaçons x par sa valeur dans l'équation (1)

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 5 ; \\ 3x(-5) + 2y &= 5 ; \\ -15 + 2y &= 5 ; \\ 2y &= 5 + 15 \\ ; 2y &= 20 ; \\ y &= 10 \end{aligned}$$

$S_{\text{RXR}} = \{(-5; 10)\}$

➤ Méthode graphique

On représente dans un repère orthonormé les droites (D<sub>1</sub>) et (D<sub>2</sub>) d'équation respective  $2x - y = 5$  et  $x + 3y = 6$

Les coordonnées du point d'intersection des droites (D<sub>1</sub>) et (D<sub>2</sub>) est solution du

(E)  $\begin{cases} 2x - y = 5 & (1) \\ x + 3y = 6 & (2) \end{cases}$

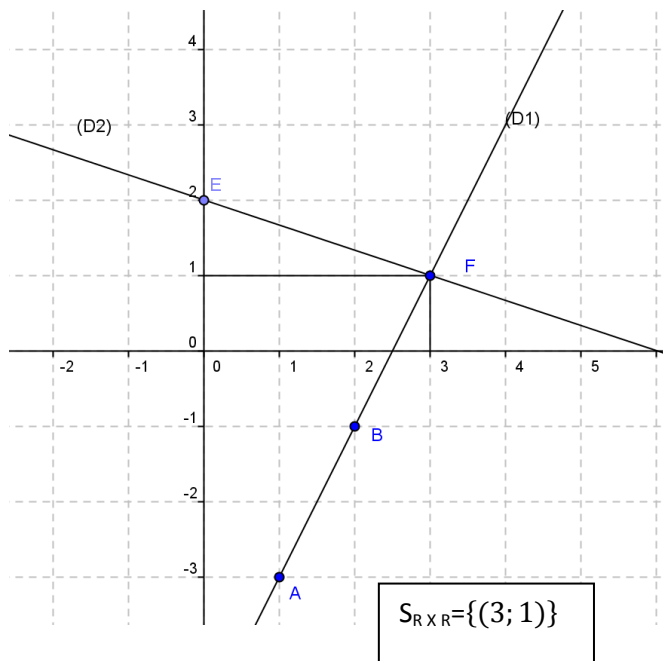
Exemple résolvons graphiquement (E)  $\begin{cases} 2x - y = 5 & (1) \\ x + 3y = 6 & (2) \end{cases}$

**(D<sub>1</sub>) :  $2x - y = 5$**

	x	y
<b>A</b>	<b>1</b>	<b>-3</b>
<b>B</b>	<b>2</b>	<b>-1</b>

**(D<sub>2</sub>) :  $x + 3y = 6$**

	x	y
<b>A</b>	<b>0</b>	<b>2</b>
<b>B</b>	<b>3</b>	<b>1</b>



## II) Inéquations et systèmes d'inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

### 1) Inéquation dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

#### a) Exemple

Soit à résoudre dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  l'inéquation  $2x - y + 3 > 0$

Résoudre cette inéquation  $2x - y + 3 > 0$  c'est trouver tous les couples de réels  $(x; y)$  tels que l'inéquation  $2x - y + 3 > 0$  se vérifie. L'inéquation  $2x - y + 3 > 0$  admet une infinité de solutions

Par exemple

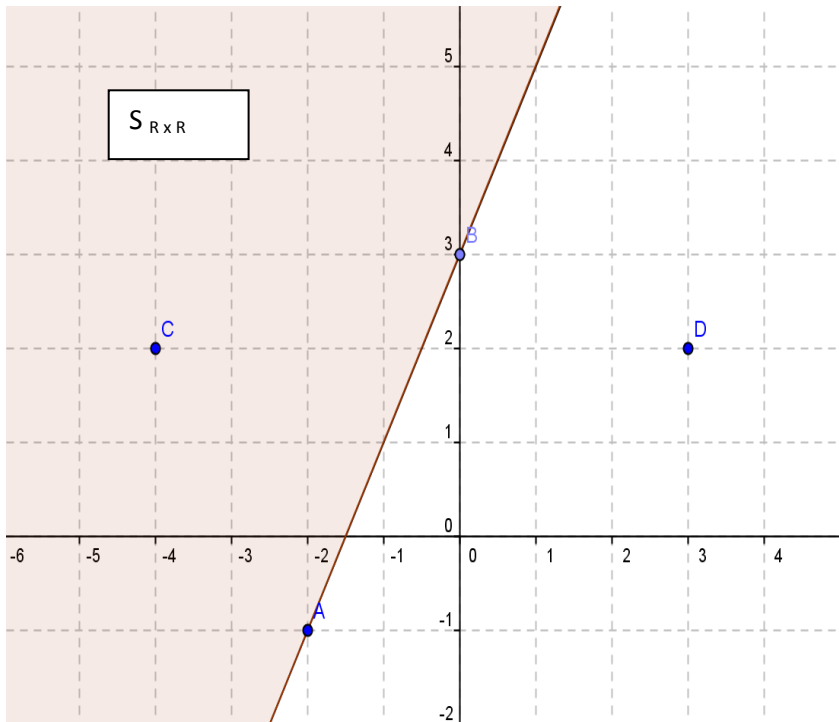
	X	y
A	0	0
B	1	1
C	3	-1
D	5	2
E	7	0

#### b) Résolution graphique

Soit à résoudre graphiquement inéquation  $2x - y + 3 < 0$

Résoudre graphiquement l'inéquation  $2x - y + 3 < 0$  c'est trouver dans le plan muni d'un repère les points dont les coordonnées  $(x; y)$  vérifient  $2x - y + 3 < 0$

Ainsi on représente la droite (D) d'équation  $2x - y + 3 = 0$  et l'ensemble solution est un demi plan délimité par la droite (D) que l'on peut hachurer



**(D) :  $2x - y + 3 = 0$**

	x	y
<b>A</b>	-2	-1
<b>B</b>	0	3

**C(-4 ; 2)  $2(-4) - 2 + 3 = 0$   
 $-8 - 2 + 3 = -7 < 0$  alors  $C \in S_{R \times R}$   
 $2x - y + 3 < 0$**

**D(3 ; 2)  $2(3) - 2 + 3 = 0$   
 $6 - 2 + 3 = 7 > 0$  alors  $D \notin S_{R \times R}$   
 $2x - y + 3 < 0$**

2) Systèmes d'inéquations dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

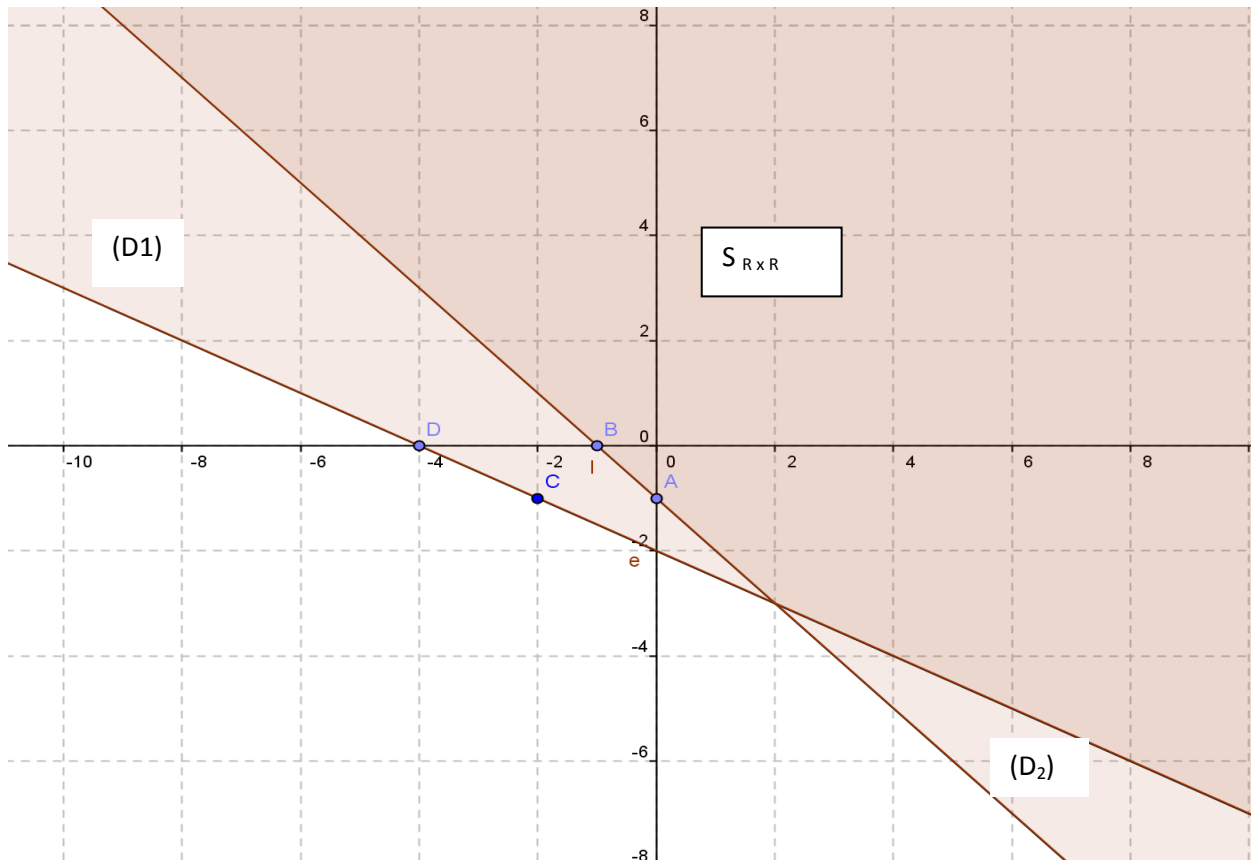
Soit à résoudre graphiquement le système (E)  $\begin{cases} x + y > -1 & (1) \\ x - 2y > -4 & (2) \end{cases}$

**(D<sub>1</sub>) :  $x + y = -1$**

	x	Y
<b>A</b>	0	-1
<b>B</b>	-1	0

**(D<sub>2</sub>) :  $x - 2y = -4$**

	x	y
<b>A</b>	-2	-1
<b>B</b>	-4	0



### III) Résolution de Problèmes

1) Problème conduisant à un système d'équations dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Pour faire la fête de la réussite de leurs enfants aux examens scolaires, la famille SAVADOGO a tué des pintades et des lapins. Sachant que 20 animaux ont été tués et le nombre de pattes de ces animaux est de 54, trouver le nombre de pintades et celui des lapins.

Pour résoudre ce problème on suit la démarche suivante :

(1) Choix des inconnues

Soit  $x$  le nombre de pintades et  $y$  le nombre de lapins

(2) Mise en équations  $\begin{cases} x + y = 20 & (1) \\ 2x + 4y = 54 & (2) \end{cases}$

(3) Résolution du système

$$\begin{cases} x + y = 20 & (1) \\ 2x + 4y = 54 & (2) \end{cases}$$

**On trouve après résolution que**

**$x=13$  et  $y=7$**

4) Vérification

$\begin{cases} x + y = 20 & (1) \\ 2x + 4y = 54 & (2) \end{cases} \begin{cases} 13 + 7 = 20 & (1) \\ 2 \times 13 + 4 \times 7 = 54 & (2) \end{cases}$  vrai

5) Conclusion

Le nombre de pintades est de 13 et celui de lapins est de 7

Exercice d'application

Dans une ferme il y a des poules et des chèvres. Sachant qu'il y a au total 23 têtes et 76 pattes. Combien y a-t-il de poules et de chèvres ?

2) Problème conduisant à un système d'inéquation dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Une usine fabrique deux produits A et B. La fabrication d'une tonne du produit A nécessite 1h de travail et la fabrication d'une tonne du produit B nécessite 2h de travail. L'usine travaille au maximum 16heures par jour. La fabrication d'une tonne de A entraîne une dépense de 3000francs et la fabrication d'une tonne de B entraîne une dépense de 1000francs. Le budget de l'entreprise en permet de consacrer plus de 24000francs par jour à cette fabrication. Un client commande à cette usine x tonnes du produit A et y tonnes de produit B.(x et y non nuls).

a) Déterminer graphiquement l'ensemble des couples naturels(x ; y) qui correspondent aux commandes que l'usine peut fabriquer en une journée.

b) Déterminer l'ensemble de couples de naturels(x ; y) pour lesquels la masse totale des produits fabriqués est maximale.

Résolution du problème

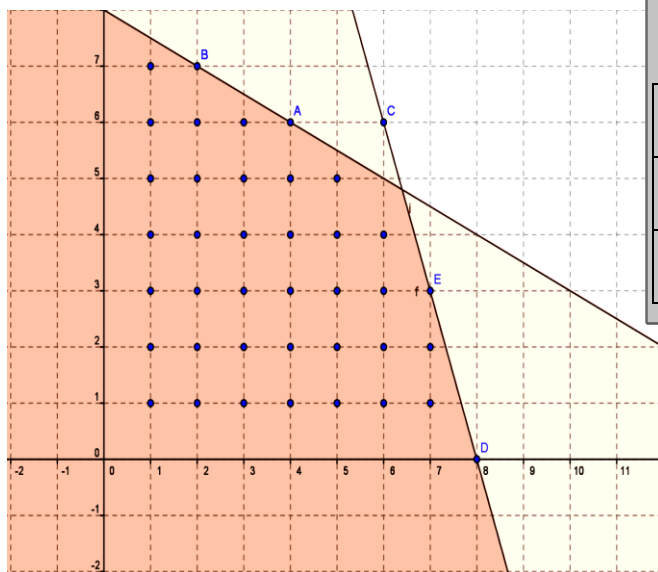
(1) Choix des inconnues

Soit x le nombre de tonnes de produit A et y celui du produit B tel que  $x > 0$  et  $y > 0$

(2) Mise en inéquations

$$\begin{cases} x + 2y \leq 16 & (1) \\ 3000x + 1000y \leq 24000 & (2) \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y \leq 16 & (1) \\ 3x + y \leq 24 & (2) \end{cases}$$

(3) Résolution graphique



**(D<sub>1</sub>) : x + y = -1**

	x	Y
A	4	6
B	2	7

**(D<sub>2</sub>) : x - 2y = -4**

	x	y
E	6	6
F	8	0

(4) conclusion

a) L'ensemble des couples naturels(x ; y) qui correspondent aux commandes que l'usine peut fabriquer en une journée sont (1 ; 1) ; (1 ; 2).....les 39 Points

a) L'ensemble de couples de naturels(x ; y) pour lesquels la masse totale des produits fabriqués est maximale sont : A(4 ; 6) ; B(2 ; 7) ; D(8 ; 0) et E(7 ; 3)

1) Position relative d'une droite et d'un cercle

1) Activité :

Soit (D) une droite et O un point du plan. Soit (C) un cercle de centre O de rayon  $r=3\text{cm}$ . H est le projeté orthogonal de O sur (D). On note  $d=OH$ . Faire la figure dans les cas suivants :

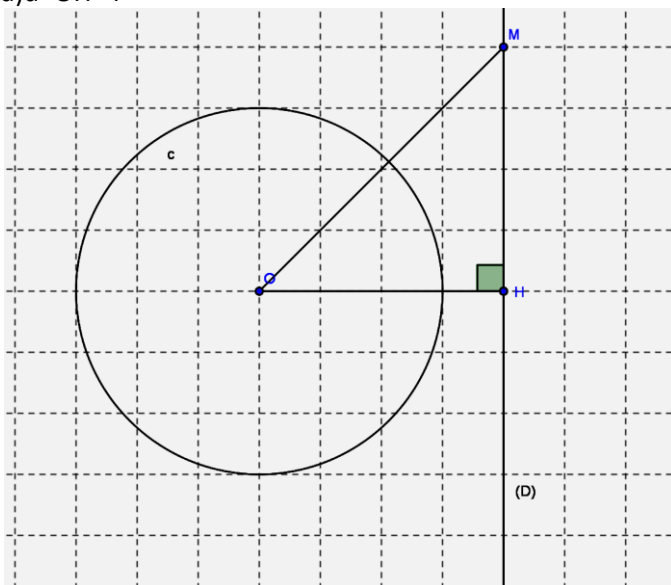
a)  $d=4$

b)  $d=2$

c)  $d=3$

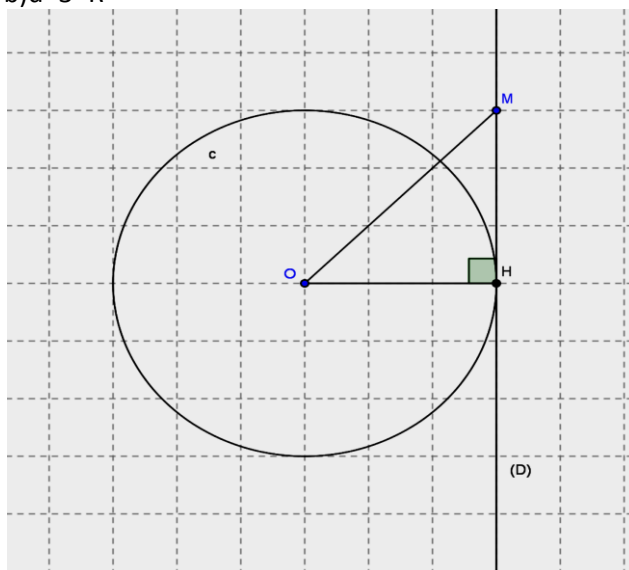
Reponse

a)  $d=OH=4$



(D) et (C) n'ont aucun point commun ; on note :  $(D) \cap (C) = \emptyset$ . On dit que (D) est à l'extérieur de (C)

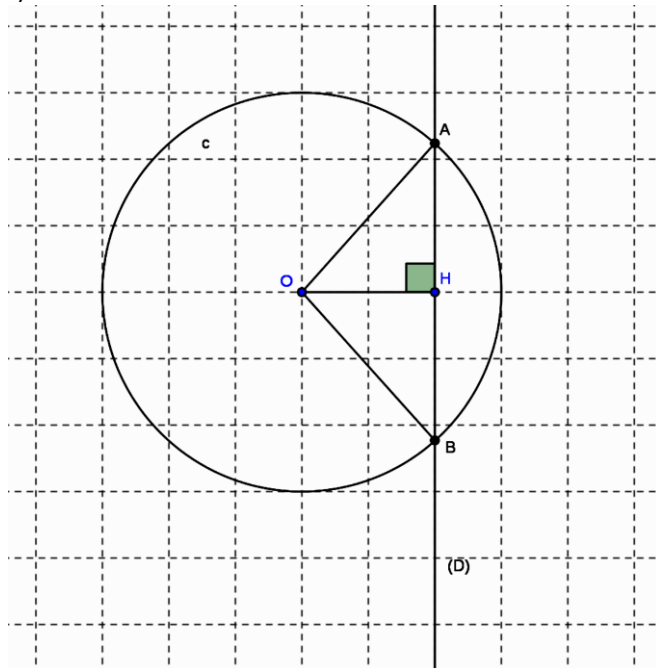
b)  $d=3=R$



H est le seul point commun à (C) et à (D). On note :  $(D) \cap (C) = \{H\}$

On dit que (D) est TANGENTE en H au cercle (C) ; on dit aussi que H est le point de Tangence.

c)  $d < 2 < R$



A et B sont les points communs à (C) et à (D). On note:  $(D) \cap (C) = \{A; B\}$ ; on dit que (D) est sécante à (C)

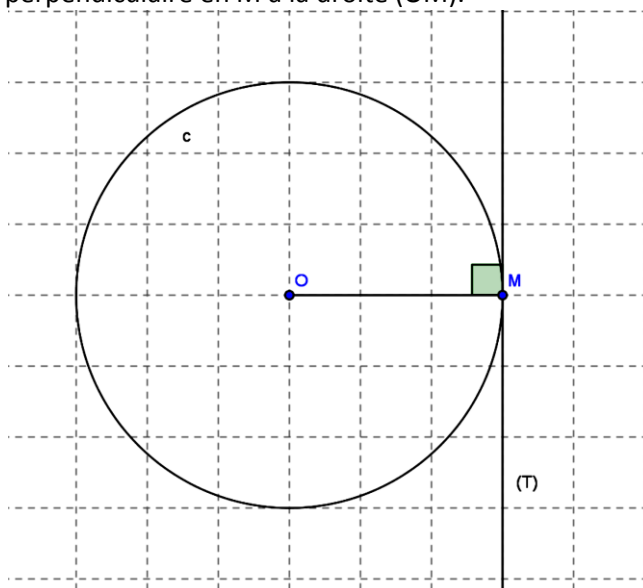
### 2) Propriété

- Une droite est extérieure à un cercle si sa distance au centre est strictement supérieure au rayon du cercle.
- Une droite est dite tangente à un cercle si sa distance au centre du cercle est égale au rayon de ce cercle.
- Une droite est dite sécante à un cercle si la distance au centre du cercle est inférieure au rayon de ce cercle.

### II) Tangente en un point ; construction

#### 1) Unicité de la tangente

Soit (C) un cercle de centre O. Le cercle (C) admet en tout point M une tangente et une seule ; c'est la perpendiculaire en M à la droite (OM).



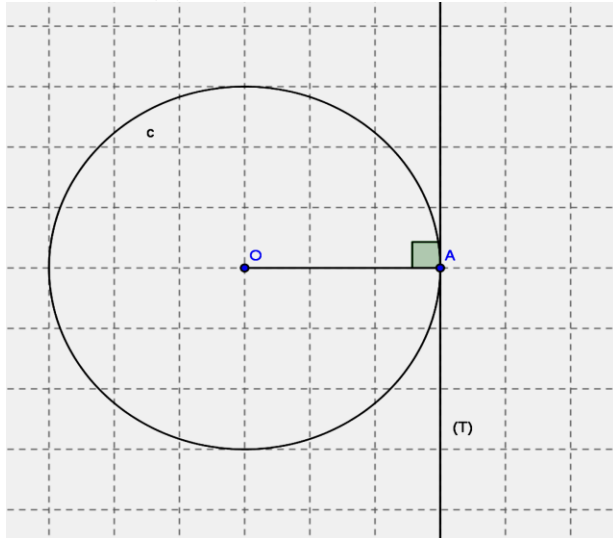
## 2) Méthode de construction

Soit  $(C)$  un cercle de centre  $O$  et de rayon  $r$ . Soit  $A$  un point quelconque du plan.  
Construire une tangente  $(T)$  au cercle passant par  $A$  dans les cas suivants :

- a)  $A$  est un point du cercle  $(C)$
- b)  $A$  est un point à l'extérieur du cercle  $(C)$

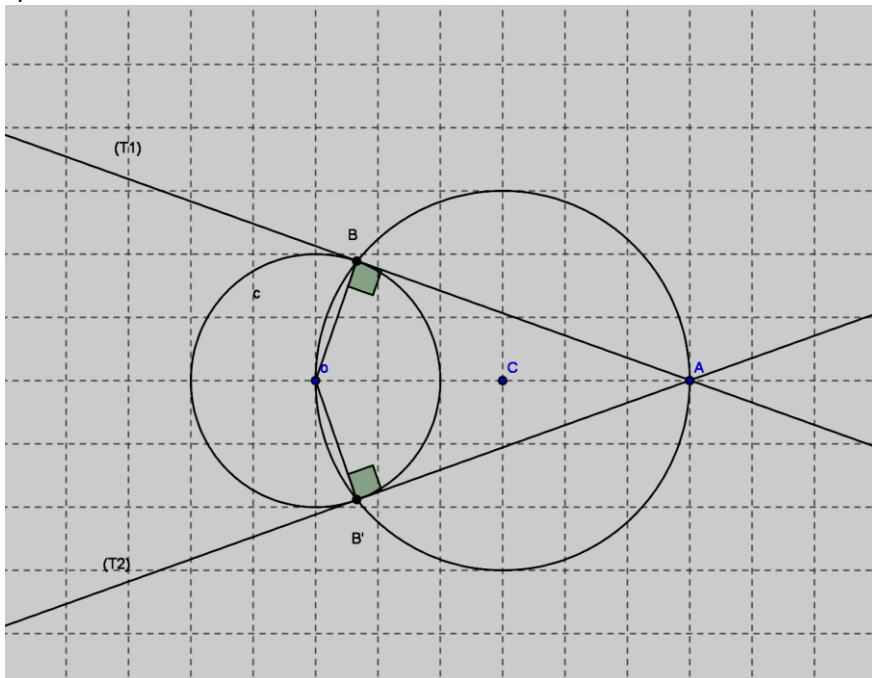
Réponse

- a)  $A$  sur le cercle  $(C)$



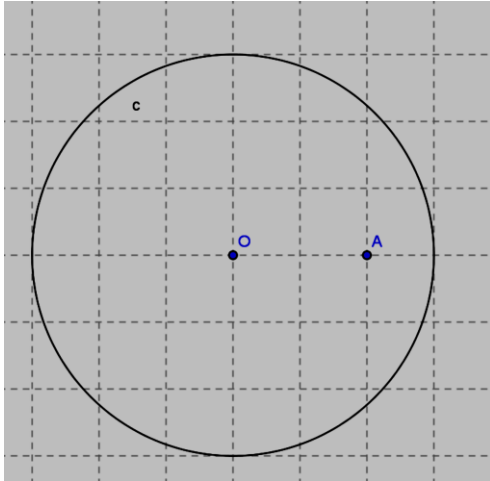
On a une seule Tangente

- b)  $A$  est à l'extérieur du cercle



On a deux Tangentes  $(AB)$  et  $(AB')$

- c)  $A$  est à l'intérieur du cercle



Toute droite passant par A coupe le cercle en deux points ; il est donc impossible de construire une Tangente passant par A.

### Chapitre 17 : Applications Linéaires – Applications Affines

#### 1) Applications linéaires

##### 1) Définition

On appelle application linéaire de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  toute application  $f$  définie par

$$\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto ax \end{array}$$

Remarque :

- Une application linéaire de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  est un monôme de degré 1 et de coefficient « a »
- Le réel « a » est appelé coefficient de l'application linéaire

Exemple :  $f(x)=3x$  ;  $g(x)=\frac{1}{3}x$  ;  $h(x)=-7x$  ;  $k(y)=2y$  sont des applications linéaires de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$

##### 2) Représentation graphique

###### a) Théorème

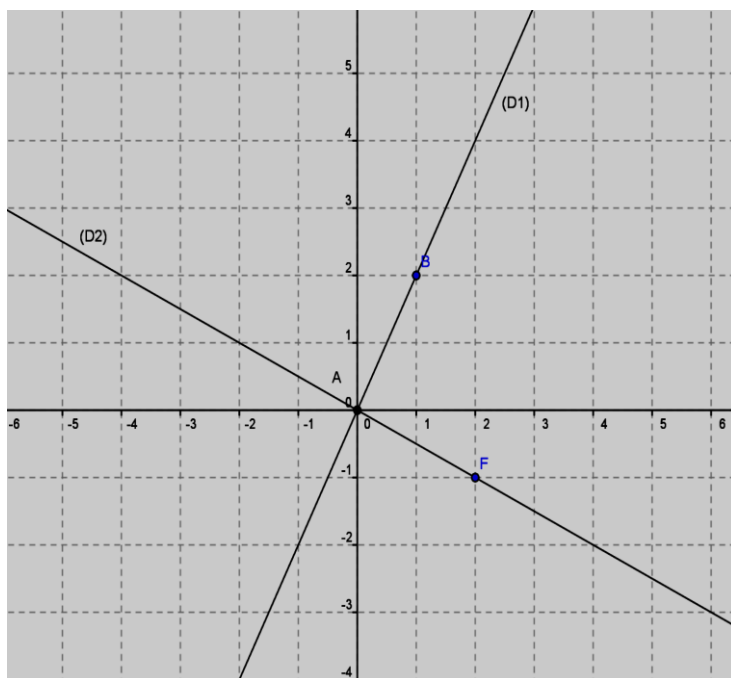
La représentation graphique de l'application linéaire

$$\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto ax \quad (a \in \mathbb{R}) \end{array}$$

est une droite d'équation  $y=ax$  qui passe par l'origine du repère et par le point de coordonnées (1 ; a).  
le vecteur  $\vec{v}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ a \end{smallmatrix}\right)$  est un vecteur directeur de cette droite.

###### b) Représentation

Soit a représenter  $f(x)=2x$  et  $g(x)=-\frac{1}{2}x$



**F ; (D<sub>1</sub>) : y = 2x**

	X	y
A	0	0
B	1	2

**G ; (D<sub>2</sub>) : y = - $\frac{1}{2}$ x**

	x	y
E	0	0
B	2	-1

### 3) Propriétés

a) Image de la somme de deux nombres réels

Activité

Soit f une application linéaire de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par

- Compléter le tableau suivant
- Comparer  $f(x_1+x_2)$  et  $f(x_1) + f(x_2)$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto 2x$
---

Réponse

$x_1$	$x_2$	$x_1 + x_2$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	<b><math>f(x_1 + x_2)</math></b>	<b><math>f(x_1) + f(x_2)</math></b>
3	5	8	6	10	<b>16</b>	<b>16</b>
-1	2	1	-2	4	<b>2</b>	<b>2</b>
-4	-6	-10	-8	-12	<b>-20</b>	<b>-20</b>

On remarque que  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

- Propriété 1

-Si f est une application linéaire de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  et  $x_1$  et  $x_2$  deux réels, alors  **$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$**

b) Image du produit de deux réels

Activité

Soit g l'application linéaire définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = -3x$ . Calculer  $g(2 \times 5)$  et  $2 \times g(5)$  ; que remarque-t-on ?

Réponse

$g(x) = -3x$  ;  $g(2 \times 5) = g(10) = -3 \times 10 = -30$

$2 \times g(5) = 2 \times (-3 \times 5) = 2 \times (-15) = -30$  ; on remarque que  $g(2 \times 5) = 2 \times g(5)$

- Propriété 2

Si f est une application linéaire de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  et x et k des réels, alors  **$f(kx) = k \cdot f(x)$**

c) Image de 0 par une application linéaire

- Propriété 3

Pour toute application linéaire f, on a  $f(0) = 0$

## II) Applications affines

### 1) Définition

On appelle application affine de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  toute application  $f$  définie par :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = ax + b \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des nombres réels}$$

### 2) Cas particuliers

-si  $a=0$  alors  $f(x)=b$  ; on dit que  $f$  est une application constante

-si  $b=0$  alors  $f(x)=ax$  ; alors dans ce cas  $f$  est une application linéaire

### 2) Exemple

$f(x)=2x+1$  ;  $g(x)=7x-4$  ;  $h(x)=\frac{1}{3}x-4$  sont les applications affines

### 3) Représentation graphique

✓ Théorème

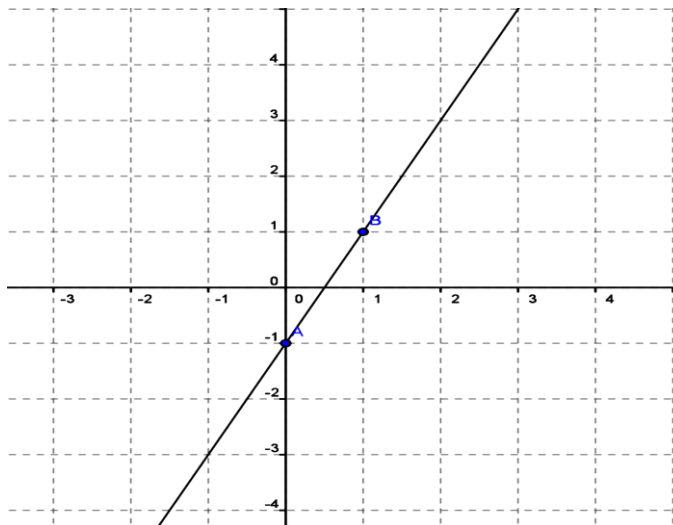
La représentation graphique de l'application affine

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = ax + b$$

est une droite d'équation  $y=ax+b$  qui passe par le point  $M(0 ; b)$

### Représentation

Soit à représenter  $f(x)=2x-1$



$$(D) : y = 2x - 1$$

	x	Y
A	0	-1
B	1	1

### 3) Sens de variation d'une application affine

#### a) Activité

Soit  $f$  une application affine définie par

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = 2x + 1$$

et soit  $x_1=2$  et  $x_2=3$

1) Calculer  $f(x_1)$  et  $f(x_2)$  et comparer  $x_1$  et  $x_2$  et ensuite  $f(x_1)$  et  $f(x_2)$

2) Soit l'application affine  $g(x)=-3x+4$  ; calculer  $g(x_1)$  et  $g(x_2)$  et les comparer.

#### Réponse

1) Calculons  $f(x_1)=f(2)=2 \times 2 + 1 = 4 + 1 = 5$  ;  $f(x_2)=f(3)=2 \times 3 + 1 = 6 + 1 = 7$

On a  $2 < 3 \Leftrightarrow x_1 < x_2$  et  $f(x_1) < f(x_2)$  on dit  $f$  est croissante.

2) Calculons  $g(x_1) = g(2) = -3 \times 2 + 4 = -6 + 4 = -2$  ;  $g(x_2) = g(3) = -3 \times 3 + 4 = -9 + 4 = -5$

On a  $2 < 3 \Leftrightarrow x_1 < x_2$  et  $g(x_1) > g(x_2)$  on dit  $g$  est décroissante

### **b) Théorème**

L'application affine définie par

$$\boxed{\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = ax + b \end{array}} \text{ est:}$$

-croissante si  $a > 0$  c'est-à-dire pour tout réels  $x_1$  et  $x_2$  ; si  $x_1 < x_2$  alors  $f(x_1) < f(x_2)$

- décroissante si  $a < 0$  c'est-à-dire pour tout réels  $x_1$  et  $x_2$  ; si  $x_1 < x_2$  alors  $f(x_1) > f(x_2)$

-Constante si  $a = 0$  c'est-à-dire  $f(x) = b$  pour tout  $x$

#### Exercice d'application

Soit  $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{3}x - 5$  ;  $g(x) = 2(6 - \frac{1}{2}x)$  et  $h(x) = 3(4 - \frac{1}{3}x) + (4+x)$

1) Ces applications sont-elles des applications affines ?

2) Donner le sens de variation de chacune d'elles

3) Représenter ces applications dans un même repère

### III) applications affines par intervalles

1) Exemple 1

Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = |2x+1| + |-x+3|$

1) Ecrire  $f(x)$  sans le symbole de valeur absolue

2) Représenter  $f(x)$  sur chaque intervalle

#### Réponse

$$f(x) = |2x+1| + |-x+3|$$

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$3$	$+\infty$
$ 2x+1 $	$-2x-1$	$2x+1$		$2x+1$
$ -x+3 $	$-x+3$	$-x+3$	$x-3$	
$f(x)$	$-3x+2$	$x+4$	$3x-2$	

Pour  $x \in ]-\infty ; -\frac{1}{2}]$   $f(x) = -3x+2$  ;  $f$  coïncide alors avec une application  $f_1(x) = -3x+2$

Pour  $x \in [-\frac{1}{2} ; 3]$   $f(x) = x+4$  ;  $f$  coïncide alors avec une application  $f_2(x) = x+4$

Pour  $x \in [3 ; +\infty[$   $f(x) = 3x-2$  ;  $f$  coïncide alors avec une application  $f_3(x) = 3x-2$

$f(x)$  coïncide dans chacun des trois intervalles avec une application affine ; on dit que  $f$  est une application affine par intervalles

✓ Représentation graphique

$f_1(x) = -3x + 2$  sur  $]-\infty ; -\frac{1}{2}]$   
 $y = -3x + 2$

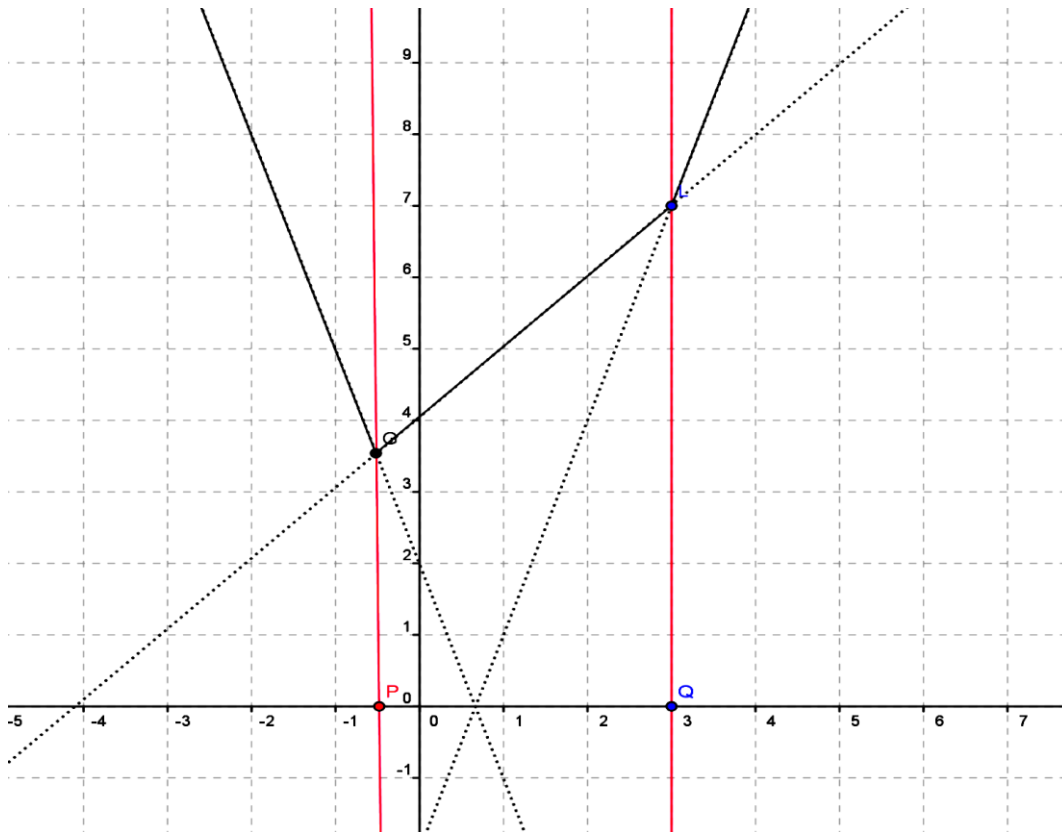
	X	y
A	0	2
B	1	-1

$f_2(x) = x + 4$  sur  $[-\frac{1}{2} ; 3]$   
 $y = x + 4$

	X	y
E	0	4
F	-1	3

$f_1(x) = 3x - 2$  sur  $[3 ; +\infty]$   
 $y = 3x - 2$

	X	y
I	0	-2
J	1	1

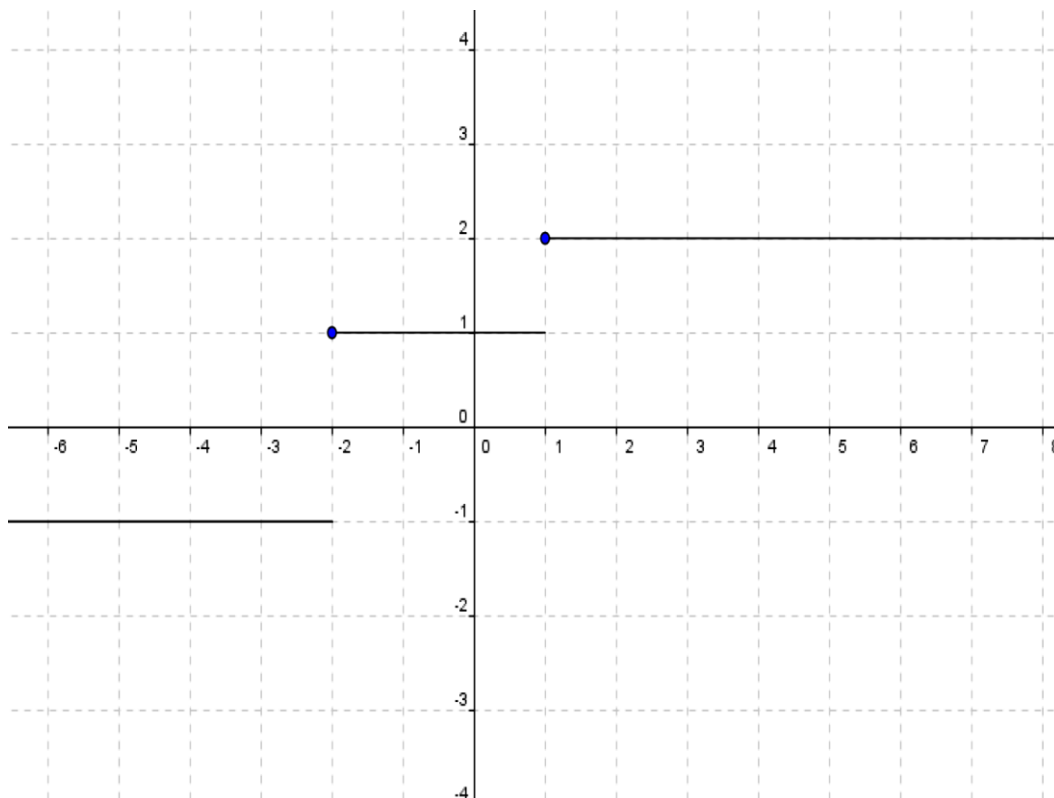


2) Exemple 2

Soit  $g$  l'application de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par

$$\begin{cases} \text{si } x < -1 & g(x) = -1 \\ \text{si } -1 \leq x < 1 & g(x) = 1 \\ \text{si } x \geq 1 & g(x) = 2 \end{cases}$$

Représentons dans un repère orthonormé la fonction  $g$



Sur chaque intervalle l'application  $g$  est constante . La réunion de ces trois intervalles est l'ensemble  $\mathbb{R}$

Pour traduire le fait que l'application  $g$  est constante sur chacun des intervalles ; on dit que  $g$  est une fonction en escalier sur  $\mathbb{R}$ .

Chapitre 18 : Statistique

### I) Rappels

- La population est l'ensemble sur lequel on étudie (travaille)
- Le caractère est la propriété étudiée sur la population
- L'effectif est le nombre total des individus de la population.
- L'individu est un élément de la population
- La fréquence est le rapport de l'effectif correspondant sur l'effectif total.

Elle s'exprime souvent en %

$$\text{Fréquence} = \frac{\text{effectif correspondant}}{\text{effectif total}}$$

- Le caractère est quantitatif s'il est exprimé par des nombres
- Le caractère est qualitatif s'il est exprimé par des adjectifs

### II) Regroupement en classe

#### 1) Régroupement

##### ➤ Activité

Voici le temps mis par les élèves de la classe de 3<sup>ème</sup> pour se rendre au lycée le matin : 27 ; 7 ; 48 ; 10 ; 15 ; 6 ; 35 ; 20 ; 7 ; 10 ; 19 ; 11 ; 25 ; 30 ; 5 ; 2 ; 15 ; 45 ; 55 ; 35 ; 8 ; 17 ; 5 ; 19 ; 15 ; 25 ; 18 ; 11 ; 1.

1) Quelle est la population étudiée

2) Quel est le caractère étudié ? est-il quantitatif ou qualitatif ?

### 3) Regrouper les valeurs en classe d'amplitude 10

#### Réponse

- 1) La population étudiée est l'ensemble des élèves de la classe de 3<sup>ème</sup>
- 2) Le caractère étudié est le temps mis pour se rendre au lycée  
Ce caractère est quantitatif
- 3) Regroupons les valeurs

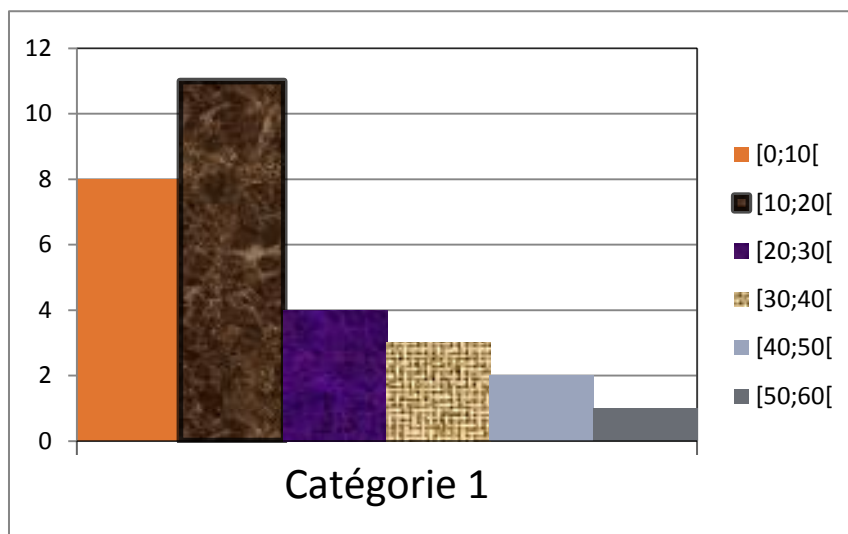
Temps mis	[0 ;10[	[10 ;20[	[20 ;30[	[30 ;40[	[40 ;50[	[50 ;60[
Effectifs	8	11	4	3	2	1

On dit que les valeurs du caractère ont été regroupé en classe d'amplitudes égales

#### 2°) Représentation

Construisons l'histogramme des effectifs du tableau précédent.

Echelle  $\begin{cases} 1cm \rightarrow 10mn \\ 1cm \rightarrow 1\text{élève} \end{cases}$



Les hauteurs des rectangles sont proportionnelles aux effectifs des classes

#### 3) Effectifs et fréquences cumulées croissantes

On se propose de trouver le nombre d'élèves qui mettent moins de 20mn pour se rendre au lycée ; on trouve 19 c'est-à-dire  $8 + 11 = 19$  est un effectif cumulé.

Tableau des effectifs cumulés

Temps mis	[0 ;10[	[10 ;20[	[20 ;30[	[30 ;40[	[40 ;50[	[50 ;60[
Effectifs	8	11	4	3	2	1
Effectifs cumulés	8	19	23	26	28	29

Tableau des fréquences et des fréquences cumulées croissantes

Temps mis	[0 ;10[	[10 ;20[	[20 ;30[	[30 ;40[	[40 ;50[	[50 ;60[
Fréquences	28	38	14	10	7	3
Fréquences cumulées	28	66	80	90	97	100

## l) Moyenne

Compléter le tableau avec les centres des classes

Temps mis	[0 ;10[	[10 ;20[	[20 ;30[	[30 ;40[	[40 ;50[	[50 ;60[
Effectifs	8	11	4	3	2	1
Centre des classes	5	15	25	35	45	55

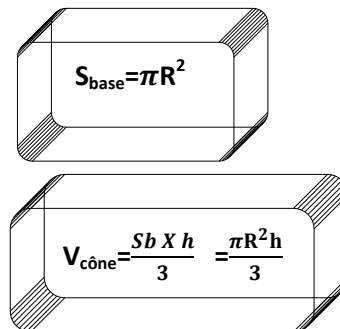
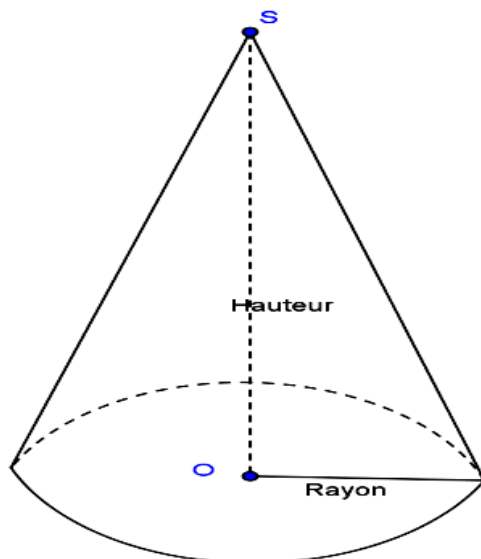
$$M = \frac{(5 \times 8) + (15 \times 11) + (25 \times 4) + (35 \times 3) + (45 \times 2) + (55 \times 1)}{29} = \frac{555}{29} = 19,13$$

## Chapitre 19 : Solides

### l) Rappels

#### 1) Cône de révolution

Un cône de révolution est un solide obtenu en faisant tourner un triangle rectangle autour de l'un des côtés de l'angle droit.



#### 2) La pyramide

Les pyramides sont des solides ayant :

- des faces latérales qui sont des triangles
- une base polygonale (triangle ; carré ; .....

Une pyramide régulière est une pyramide dont la base est un polygone régulier (figure ayant les côtés égaux et inscriptible dans un cercle)

Dans une pyramide régulière la hauteur passe par le centre du cercle circonscrit

### II) Application du théorème de Pythagore

Considérons la pyramide régulière (Base triangle équilatéral de côté 8 cm)

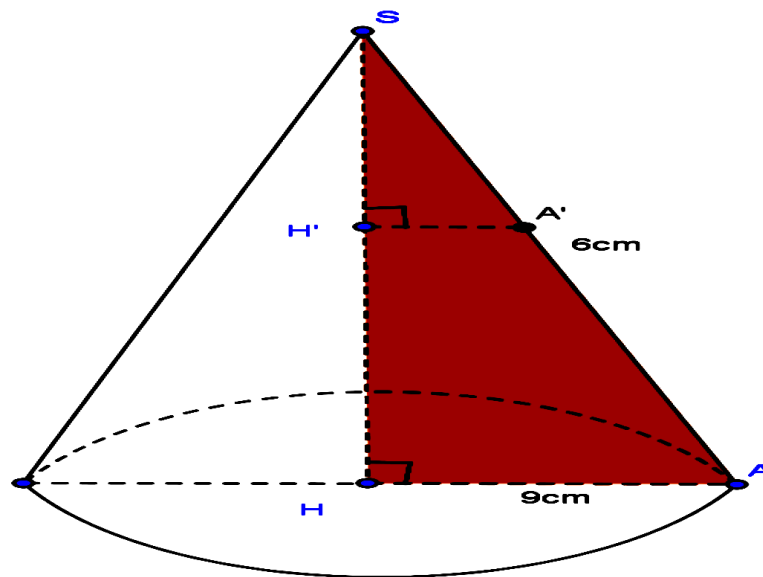
1) En utilisant la trigonométrie dans le triangle GIH rectangle en I ; exprimer  $\cos \widehat{IGH}$  en fonction de GI et GH

2) (GJ) est la bissectrice de l'angle  $\widehat{IGE}$ . En déduire la mesure de  $\widehat{IGH}$

3) Sachant que  $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$  déduire que  $GH = \frac{8\sqrt{3}}{3}$



Calculer  $SH'$  et  $A'H'$



Réponse

$SH'A'$  et  $SHA$  forment une configuration de Thalès alors  $\frac{SA'}{SA} = \frac{SH'}{SH} = \frac{A'H'}{AH}$

Calculons  $SH'$  :  $SH' = SH - H'H = 6 - 2 = 4$

Calculons  $A'H'$  :  $\frac{A'H'}{AH} = \frac{SH'}{SH}$  ;  $A'H' = \frac{SH'}{SH} \times AH$  ;  $A'H' = \frac{4}{6} \times 9 = 6$  alors  $A'H' = 6$

Chapitre20: Isométrie du plan

1) Définition

1) Activité

ABCD est un carré de centre O. I, J, K, L sont les milieux respectifs des côtés [AB] ; [BC] ; [CD] et [DA].

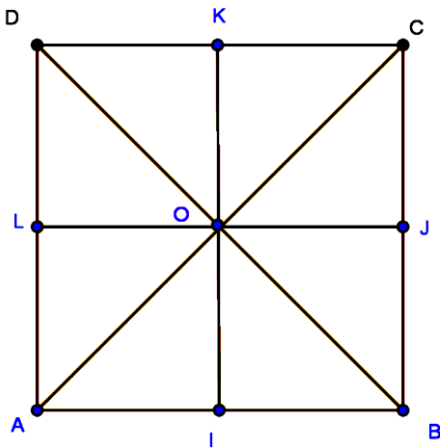
On note :

- t la translation de vecteur  $\vec{AO}$
- S la symétrie orthogonale d'axe (BD)
- S' la symétrie orthogonale d'axe (IK)
- S<sub>o</sub> la symétrie centrale de centre O

a) Construire la figure et compléter tableau suivant

b) comparer la mesure du segment [AI] avec son image par chaque application. Que remarque t-on ?

c) Même question pour les triangles OAI et OAL



	A	L	O	[AI]	[AO]	OAI	OAL
Image par t	O	K	C	[OJ]	[OC]	OJC	OKC
Image par S	C	K	O	[CI]	[OC]	OJC	OKC
Image par S'	B	J	O	[IB]	[OB]	IBO	BJO
Image par S <sub>0</sub>	C	J	O	[KC]	[OC]	OKC	OJC

On remarque que  $[AO]=[OC]=[OC]=[OB]=[OC]$  ;  $[AI]=[OJ]=[CI]=[IB]=[KC]$  de même les triangles OAI ; OJC ; OJC ; IBO ; OKC ont même dimensions .

On dit que les applications t ; S ; S' ; S<sub>0</sub> conservent les distances . Elles sont appelées des ISOMETRIES ( en grec : ISOS= égale et METRON= mesure)

Le triangle OCK est l'image du triangle OAI par l'isométrie S<sub>0</sub> ; on dit que les triangles OCK et OAI sont isométriques

## 2) Définition

On appelle isométrie toute application du plan qui conserve les distances.

Exemple : La symétrie centrale ; la symétrie orthogonale ; la translation

## II) Propriété des isométries

### 1) Activité

Dans l'activité précédente :

a) A, I, B sont trois points alignés. Que peut-on dire de leurs images par chacune des isométries t ; S ; S' ; S<sub>0</sub> ?

b) I est le milieu du segment [AB]. Que peut-on dire de l'image de I pour l'image du segment [AB] par chacune des isométries t ; S ; S' ; S<sub>0</sub> ?

c) Les droites (AB) et (AD) sont perpendiculaires ; que peut-on dire de la position relative de leur image par chacune des isométries t ; S ; S' ; S<sub>0</sub> .

d) Quelle est la mesure de l'angle  $\widehat{AOC}$  et de chacune de ses images par les isométries t ; S ; S' ; S<sub>0</sub>

### Réponse

a) Les images de A, I, B sont aussi alignés

b) L'image de I est aussi milieu de l'image de [AB]

c) Les images (AB) et (AD) sont aussi perpendiculaires

d) Les images de l'angle  $\widehat{AOC}$  ont la même mesure que l'angle  $\widehat{AOC}$

### 2) Propriété

- Les images par une isométrie de trois points alignés sont trois points alignés.

- L'image par une isométrie du milieu d'un segment est le milieu des images des extrémités de ce segment.

- Les images par une isométrie de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires

- Les images par une isométrie de deux droites parallèles sont deux droites parallèles
- L'image par une isométrie d'un angle est un angle de même mesure.
- L'image par une isométrie d'une surface est une surface de même aire.