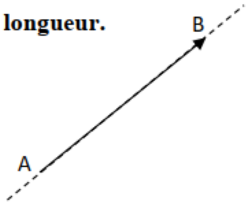
Thème : Géométrie du plan
Leçon 7 : VECTEURS

I. Caractérisation d'un vecteur

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par sa **direction,** son **sens** et sa **longueur.**

1. Caractéristiques d'un vecteur

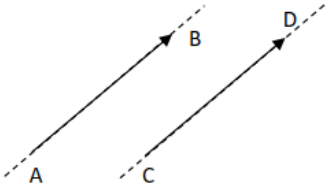
Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :



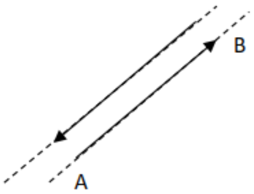
- sa direction qui est la droite (AB),
- son sens qui est celui de A vers B,
- sa longueur qui est la distance AB.

2. Vecteurs égaux – Vecteurs opposés

- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux s'ils ont :
  - la même direction,
  - le même sens,
  - la même longueur.



- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{BA}$.
  On note : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.



3. Somme de vecteurs

Egalité de Chasles

A, B et C sont des points du plan.

On a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

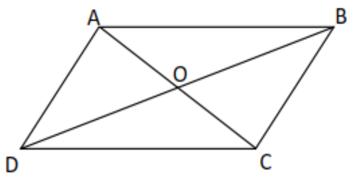
$\overrightarrow{AC}$ est la somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

Remarques

- La somme de deux vecteurs de même direction est un vecteur de même direction.
- La somme de deux vecteurs opposés est le vecteur nul.

Exercice de fixation

ABCD est un parallélogramme de centre O. Nomme un vecteur de la figure égal à :



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$; $\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OB}$

4. Différence de deux vecteurs

a) Définition

A, B, C et D sont quatre points distincts du plan.

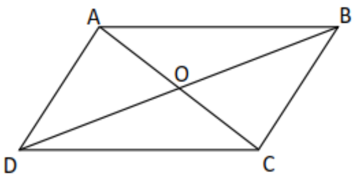
Le vecteur $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$ est appelé **différence des vecteurs $\overrightarrow{AB}$** et **$\overrightarrow{CD}$.**

Remarque

On a : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.

Exercice de fixation

ABCD est un parallélogramme de centre O. Nomme un vecteur de la figure égal à :



$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CO}$; $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}$

b) Réduction d'une somme de vecteurs

<u>Méthode</u>

Pour effectuer une somme de plusieurs vecteurs, on peut :

- déplacer et regrouper certains vecteurs,
- transformer une différence de vecteurs en somme,
- appliquer l'égalité de Chasles.

Exemple

Calculons la somme : $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$.

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$ (On a déplacé les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DE}$).

$= -\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF}$ (On a appliqué l'égalité de Chasles à chacune des sommes $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$).

$= -\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BF}$ (On a appliqué l'égalité de Chasles à la somme $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF}$).

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$ (On a transformé $-\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BF}$ en $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$).

$= \overrightarrow{AF}$. (On a appliqué l'égalité de Chasles à la somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$).

<u>Exercice de fixation</u>

Simplifie l'écriture de chacune des sommes suivantes :

$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$.

5. <u>Produit d'un vecteur par un nombre réel</u>

a) Définition

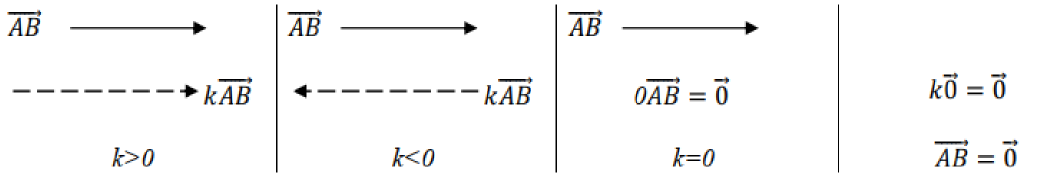
On appelle produit du vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ par le nombre réel non nul k, le vecteur $\overrightarrow{MN}$ tel que :

- (MN) et (AB) ont la même direction ;
- $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AB}$ $\begin{cases} - \textit{ont le même sens lorsque } k \textit{ est positif;} \\ - \textit{ont des sens contraires lorsque } k \textit{ est négatif;} \end{cases}$
- $MN = |k|$AB.

Le produit du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le nombre k est noté : $k.\overrightarrow{AB}$.

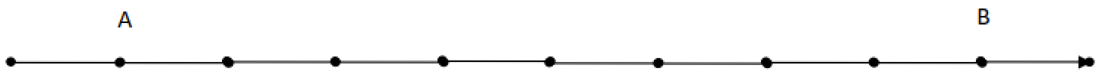
Par convention :

- Le produit du vecteur nul par un nombre réel est le vecteur nul.
- Le produit du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par 0 est le vecteur nul.



Exemple

(D) est une droite graduée. A, B, C, D et E sont des points de (D).



Plaçons les points C, D et E tels que : $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD} = -\frac{5}{8}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

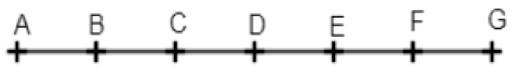
Exercices de fixation

Exercice 1

(D) est une droite graduée. E, F, G , H et K sont des points de (D).

Place les points G, H et K tels que : $\overrightarrow{EG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EH} = \frac{7}{5}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FK} = -\frac{8}{5}\overrightarrow{EF}$.

Exercice 2
Sur la figure ci-dessous, le segment $[MN]$ est partagé en six segments de même longueur.



Recopie et complète chacune des égalités suivantes par le nombre réel qui convient.

a) $\overrightarrow{AC} = \cdots\overrightarrow{AD}$; b) $\overrightarrow{FE} = \cdots\overrightarrow{GA}$ c) $\overrightarrow{CG} = \cdots\overrightarrow{CB}$.

b) Propriétés
A, B, C et D sont des points du plan. k et h sont des nombres réels. On a :

- $k(h\overrightarrow{AB}) = (kh)\overrightarrow{AB}$.
- $k\overrightarrow{AB} + h\overrightarrow{AB} = (k+h)\overrightarrow{AB}$.
- $k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{CD} = k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$.
- $1\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$.

Exercice de fixation
Simplifie les écritures suivantes :

a) $\frac{1}{2}(8\overrightarrow{AB})$
b) $-3\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AB}$
c) $-3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD})$

II. Vecteurs de même direction – Vecteurs colinéaires

1. Vecteurs de même direction

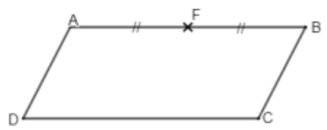
***Propriété* :** A, B, C et D sont quatre points du plan.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction. équivaut à On peut trouver un nombre réel k non nul tel que : $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$

Exemple
$\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{CD}$ équivaut à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction.

Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre, ABCD est un parallélogramme et F est le milieu du segment [AB].
Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AF}$ ont la même direction.



2. Vecteurs colinéaires

a. Définition
On dit que des vecteurs sont **colinéaires** lorsqu'ils ont la même direction, ou lorsque l'un d'eux est le vecteur nul.

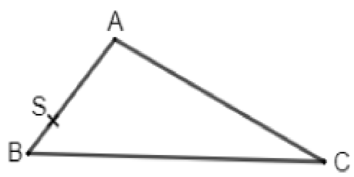
Exemple
$\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{CD}$ équivaut à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même direction alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

b. Propriété
A et B sont deux points du plan.
$M \in (AB)$ équivaut à $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle et S ∈ [AB].
On donne le point I tel que : $3\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

1) Donne trois vecteurs colinéaires au vecteur $\overrightarrow{BS}$.
2) Justifie que I ∈ [BC].

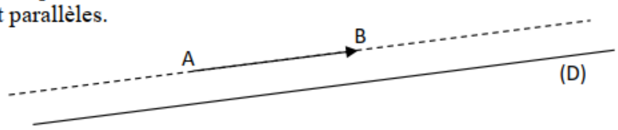


III. Vecteurs directeurs d'une droite – vecteurs orthogonaux

1. Vecteurs directeurs d'une droite

Définition

On dit que le vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ est un ***vecteur directeur*** de la droite (D) lorsque les droites (D) et (AB) sont parallèles.

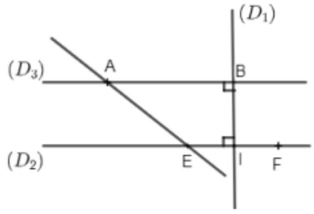


$(AB)//(D)$

Remarque : La droite (AB) détermine une direction, et chaque droite parallèle à la droite (AB) a la même direction que (AB).

Exercice de fixation

Observe la figure ci-contre puis écris le numéro de l'affirmation suivi de la lettre qui correspond à la réponse correcte.



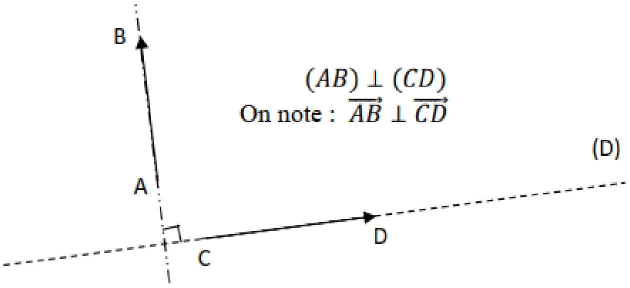
1) Un vecteur directeur de la droite (D_3) est :
   a) $\overrightarrow{AE}$ b) $\overrightarrow{BI}$ c) $\overrightarrow{AB}$.

2) Un vecteur directeur de la droite (D_2) est :
   b) $\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{AE}$ c) $\overrightarrow{BI}$.

2. Vecteurs orthogonaux

Définition

On dit que deux vecteurs non nuls sont orthogonaux lorsqu'ils sont des vecteurs directeurs de deux droites perpendiculaires.

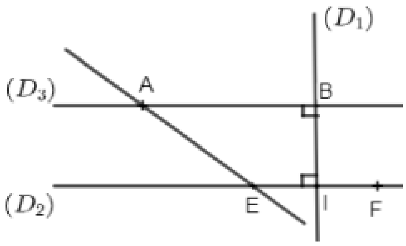


$(AB) \perp (CD)$

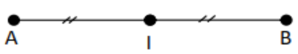
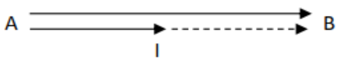
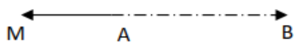
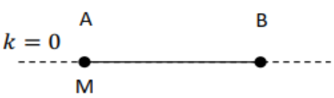
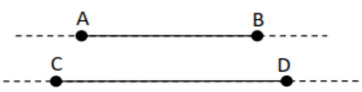
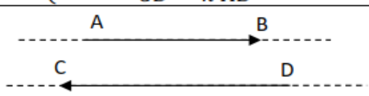
On note : $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$

Exercice de fixation

Observe la figure ci-dessous puis cite deux vecteurs orthogonaux.



IV- Langage géométrique – langage vectoriel

<table>
<tr><th></th><th>Langage géométrique</th><th></th><th>Langage vectoriel</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Milieu d'un segment</td><td>I est le milieu de [AB]</td><td>équivaut à</td><td>$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Points Alignés</td><td>A, B et M sont alignés</td><td>équivaut à</td><td>$\begin{cases} \text{On peut trouver un} \\ \text{nombre } k \text{ tel que:} \\ \overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB} \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>
$k \neq 0$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$k = 0$
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Droites parallèles</td><td>$(AB)//(CD)$</td><td>équivaut à</td><td>$\begin{cases} \text{On peut trouver un} \\ \text{nombre } k \text{ non nul tel que:} \\ \overrightarrow{CD} = k\,\overrightarrow{AB} \end{cases}$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>