Thème : CALCULS ALGEBRIQUES
Leçon 8 : EQUATIONS ET INEQUATIONS DANS $\mathbb{R}$

I. EQUATIONS DU 1er DEGRE DANS $\mathbb{R}$

1- Equations du type : $x + a = b$ ou $ax = b$

Méthode de résolution

• Résolution des équations du type $x + a = b$, où a et b sont des nombres réels.

$x + a = b$ équivaut à $x = b - a$.

La solution de l'équation est $b - a$.

• Résolution des équations du type $ax = b$, où a et b sont des nombres réels tels que a soit non nul.

$ax = b$ équivaut à $x = \frac{b}{a}$.

La solution de l'équation est $\frac{b}{a}$.

Exemples

- Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation $x + 5 = 9$.

$x + 5 = 9$ équivaut à $x = 9 - 5$.
$x + 5 = 9$ équivaut à $x = 4$.
La solution de l'équation est 4.

- Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation $3x = 18$.

$3x = 18$ équivaut à $x = \frac{18}{3}$.
$3x = 18$ équivaut à $x = 6$.
La solution de l'équation est 6.

Remarque

- L'équation : $0x = 0$ admet une infinité de solutions (tous les nombres réels sont solutions de cette équation)
- L'équation : $0x = b$ où b est non nul n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

2) Equations du type $ax + b = cx + d$

a) Définition

a, b, c *et* d sont des nombres réels donnés. L'équation $ax + b = cx + d$ est appelée équation du 1er degré dans $\mathbb{R}$.
Un nombre est solution de cette équation si en remplaçant x par ce nombre, l'égalité obtenue est vraie.

Exemples

$-2x + 3 = 5x - 8$; $x - 6 = 4$ et $7x = -1$ sont des équations du 1er degré dans $\mathbb{R}$.

b) Propriétés

- Toute équation du type $ax + b = cx + d$ peut se ramener à une équation du type $ex = f$.
- Toute équation du type $= f$, où $e \neq 0$ a une solution unique qui est : $\frac{f}{e}$.

Exercice de fixation

On considère l'équation (E) : $6x - 3 = 2x - 2$.
a) Justifie que l'équation (E) est équivalente à (E') : $4x = 1$.
b) Résous l'équation : $4x = 1$

3) Equations du type $(ax + b)(cx + d) = 0$.

Propriété

a *et* b étant des nombres réels ; $ab = 0$ équivaut à $a = 0$ ou $b = 0$

Exercice de fixation

Résous dans $\mathbb{R}$, l' équation : $(E): (3x + 4)(-x - 7) = 0$.

4) **Equations du type : $x^2 = a$**

Propriété

Si a>0, l'équation $x^2 = a$ est équivalente à $x^2 - a = 0$, c'est-à-dire $(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$.

Donc, l'équation : $\boldsymbol{x^2 = a}$ admet deux solutions qui sont : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Exercice de fixation

Résous l'équation $(E): x^2 = 25$

Remarque

Si a < 0, alors l'équation : $\boldsymbol{x^2 = a}$ n'a pas de solution dans IR.

Si a = 0, alors l'équation : $\boldsymbol{x^2 = a}$ admet 0 comme seule solution.

II. INEQUATIONS DU 1er DEGRE DANS $\mathbb{R}$

1) Inéquations du type : $\boldsymbol{ax + b} > 0$

Propriété

- Toute inéquation du type : $ax + b > 0$, où $a \neq 0$, peut se ramener à une inéquation du type : $x > u$ ou $x < v$.
- Toute inéquation du type : $ax + b \geq 0$, où $a \neq 0$, peut se ramener à une inéquation du type : $x \geq u$ ou $x \leq v$.
- Les solutions de cette inéquation peuvent être représentées sur une droite graduée ou données sous forme d'intervalle.

Exercice de fixation

On considère les inéquations suivantes :

$(I_1): 2x - 6 > 0$ et $(I_2): -3x - 6 \geq 0$

1. a) Justifie que (I_1) est équivalente à l'inéquation (I'_1) : $x > 3$

   b) Justifie que (I_2) est equivalente à l'inéquation (I'_2) : $x \leq -2$.
2. Résous chacune des inéquations (I_1) et (I_2).

2) Inéquations du type : $\boldsymbol{ax + b < cx + d}$

Propriété

Toute inéquation du type $ax + b < cx + d$ peut se ramener à une équation du type $ex < f$.

Exercice de fixation

On considère l'inéquation (I) : $8x + 5 < 3x + 10$

1. Justifie que (I) est équivalente à(I') : $5x < 5$.
2. Résous l'inéquation (I').

3) Système d'inéquations dans $\mathbb{R}$.

Le système : $\begin{cases} ax + b \geq 0 \\ cx + d < 0 \end{cases}$ est un système d'inéquations à une inconnue x.

On peut aussi rencontrer dans les systèmes d'inéquations les symboles : $>$ ou $\leq$.

Résoudre un système d'inéquations d'une inconnue, revient à trouver l'ensemble des solutions communes aux deux inéquations du système.

Méthode de résolution

Pour résoudre un système de deux inéquations du 1er degré dans $\mathbb{R}$,on peut procéder comme suit :

- on résout séparément chacune des inéquations ;
- on détermine l'intersection des deux solutions trouvées et on écrit l'ensemble des solutions du système.

Exercice de fixation

Résous le système d'inéquations :

$\begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ 4x + 5 \geq 0 \end{cases}$

III. PROBLEME CONDUISANT A UNE EQUATION OU UNE INEQUATION DU 1ER DEGRE DANS $\mathbb{R}$

Méthode de résolution

Pour résoudre un problème conduisant à une équation ou une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R}$, on procède comme suit :

- on nomme l'inconnue ;
- on met le problème en équation ou en inéquation ;
- on résout l'équation ou l'inéquation ;
- on conclut en interprétant le résultat trouvé.

Exercice de fixation

Un club de location de CD vidéo fait deux propositions pour la location de ses films :
Première proposition : un abonnement de 1500 F et 200 F pour chaque cassette louée.
Deuxième proposition : pas d'abonnement et chaque cassette est louée à 320 F.
A partir de quel nombre de cassettes louées la première proposition est-elle avantageuse que la deuxième ?