

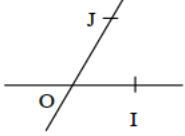
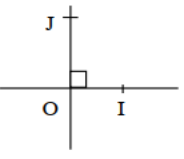
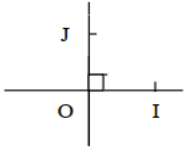
THEME : GEOMETRIE DU PLAN
LEÇON 9 : COORDONNEES D'UN VECTEUR

I. Coordonnées d'un vecteur

1. Repère

Présentation

Un repère du plan est un triplet (O, I, J) de points distincts non alignés. Il existe plusieurs types de repères :

<ul style="list-style-type: none"> • Le repère quelconque 	<ul style="list-style-type: none"> • Le repère orthogonal $((OI) \perp (OJ))$ et $OI \neq OJ$ 	<ul style="list-style-type: none"> • Le repère orthonormé $((OI) \perp (OJ))$ et $OI = OJ$ 
---	--	--

Vocabulaire

Dans chacun des cas :

- La droite (OI) représente l'axe des abscisses.
- La droite (OJ) représente l'axe des ordonnées.

2. Coordonnées d'un point

a) **Coordonnées d'un point**

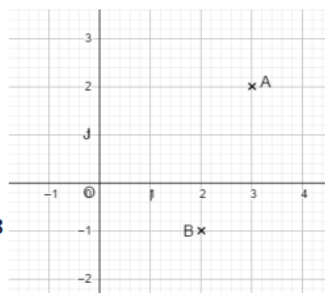
Définitions

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) . Soit le point $A(x; y)$.

- L'écriture $(x; y)$ désigne le couple des nombres réels x et y .
 x est le **premier terme** du couple et y est le **deuxième terme** du couple.
- Dans l'écriture $A(x; y)$, x est l'**abscisse** du point A et y est l'**ordonnée** du point A .
 On dit que $(x; y)$ est le **couple de coordonnées** du point A dans le repère (O, I, J) .
- L'ensemble formé de tous les couples de nombres réels est noté $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On lit \mathbb{R} **croix** \mathbb{R} .

Exemples

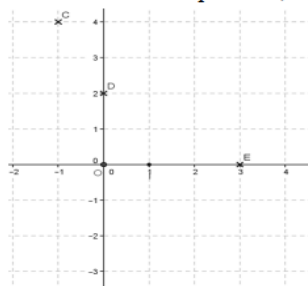
- A a pour abscisse 3 et pour ordonnée 2.
 On note $A(3; 2)$.
 $(3; 2)$ est le **couple de coordonnées** du point A dans le repère (O, I, J) .
- B a pour abscisse 2 et pour ordonnée -1.
 On note $B(2; -1)$.
 $(2; -1)$ est le **couple de coordonnées** du point B dans le repère (O, I, J) .



Exercice de fixation

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

- Place le point $M(3; -2)$.
- Détermine les coordonnées de chacun des points C, D, E et O .



b) Égalité de couples de nombres réels

Propriété

Les couples $(x; y)$ et $(x'; y')$ sont égaux, équivaut à : $x = x'$ et $y = y'$.

Exemple

$(x; 2) = (4; y)$ équivaut à $x = 4$ et $y = 2$.

Remarque

Les couples $(4; 2)$ et $(2; 4)$ ne sont pas égaux.

Exercice de fixation

Détermine x et y dans chaque cas pour que les couples ci-dessous soient égaux.

- $(x + 1; -3)$ et $(-2; y - 5)$;
- $(-5; 3y)$ et $(2x; 4)$.

3. Couple de coordonnées d'un vecteur

Définition

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) . A et B sont des points du plan.

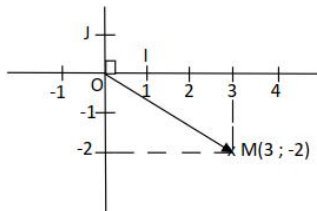
On appelle couple de coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} , le couple de nombres réels $(x; y)$ tel que :

$$\overrightarrow{AB} = x \cdot \overrightarrow{OI} + y \cdot \overrightarrow{OJ}.$$

On écrit : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou $\overrightarrow{AB}(x; y)$.

Exemples

- L'écriture $\overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{OI} - 3 \cdot \overrightarrow{OJ}$ montre que $(2; -3)$ est le couple de coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} . On écrit : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.
- Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . On donne $M(3; -2)$.



Sur la figure ci-contre, $\overrightarrow{OM} = 3 \cdot \overrightarrow{OI} - 2 \cdot \overrightarrow{OJ}$.
Donc le vecteur \overrightarrow{OM} et le point M ont le même couple de coordonnées.

Remarque

Le vecteur nul a pour couple de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice de fixation

Dans chacun des cas suivants, identifie le couple de coordonnées du vecteur \overrightarrow{CD} .

- $\overrightarrow{CD} = -3 \cdot \overrightarrow{OI} - 7 \cdot \overrightarrow{OJ}$; b) $\overrightarrow{CD} = \sqrt{2} \cdot \overrightarrow{OI} + 2 \cdot \overrightarrow{OJ}$; c) $\overrightarrow{CD} = -6 \cdot \overrightarrow{OI}$; d) $\overrightarrow{CD} = 9 \cdot \overrightarrow{OJ}$.

4. Représentation d'un vecteur

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On donne un point A.

Point méthode

Pour construire le vecteur \overrightarrow{AB} tel que $\overrightarrow{AB}(a; b)$, on peut procéder comme suit :

- on exprime le vecteur \overrightarrow{AB} en fonction du vecteur \overrightarrow{OI} et du vecteur \overrightarrow{OJ} ($\overrightarrow{AB} = a \cdot \overrightarrow{OI} + b \cdot \overrightarrow{OJ}$, où a et b sont des nombres réels) ;
- on place le point A dans le repère donné ;
- on marque le point C tel que : $\overrightarrow{AC} = a \cdot \overrightarrow{OI}$;
- on marque le point B tel que : $\overrightarrow{CB} = b \cdot \overrightarrow{OJ}$.

Exercices de fixation

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

On donne le point $A(0; 2)$.

Construis le vecteur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.



5. Vecteurs égaux

Propriété

Le plan est muni d'un repère $(O; I; J)$. A, B, C et D sont des points du plan tels que $\overrightarrow{AB}(x; y)$ et $\overrightarrow{CD}(x'; y')$.

Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont égaux, équivaut à $x = x'$ et $y = y'$.

Exercice de fixation

Détermine les nombres a et b pour que les vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} a-3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 8 \\ -5-b \end{pmatrix}$ soient égaux.

Conséquence

Le plan est muni d'un repère $(O; I; J)$. A et B sont deux points du plan tels que $\overrightarrow{AB}(x; y)$.
 $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ équivaut à $x = 0$ et $y = 0$.

II. Coordonnées d'une somme de vecteurs

Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . A, B, A' et B' sont des points du plan tels que :
 $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'}) \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$.

Exercice de fixation

Soit $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$. Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

III. Coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre réel

Propriété

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) . Soient A et B deux points du plan et k un nombre réel.
Si $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors $k \cdot \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Exercice de fixation

Soit $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix}$. Détermine les coordonnées du vecteur $-4\overrightarrow{AB}$.

IV. Vecteurs colinéaires - Vecteurs non nuls orthogonaux

1. Vecteurs colinéaires

Propriété

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) .
 $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires équivaut à $xy' - x'y = 0$.

Exercice de fixation

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) , on donne les vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.
Vérifie que \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires.

2. Vecteurs non nuls orthogonaux

Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . \overrightarrow{AB} et $\overrightarrow{A'B'}$ sont deux vecteurs non nuls.
 $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont orthogonaux équivaut à $xx' + yy' = 0$.

Exercice de fixation

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .
On donne les vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Justifie que les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont orthogonaux.

Remarques

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs.

- Si $xy' - x'y \neq 0$ alors les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} ne sont pas colinéaires.
- Si $xx' + yy' \neq 0$ alors les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} ne sont pas orthogonaux.

V. Calculs dans un repère

1. Calcul des coordonnées d'un vecteur

Propriété

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) . A et B sont deux points du plan.
Si A $(x; y)$ et B $(x'; y')$ alors $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix}$.

Exercice de fixation

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) , on donne les points A $(-2; 3)$ et B $(1; 2)$.
Calcule les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} .

2. Calcul des coordonnées du milieu d'un segment

Propriété

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) . K est le milieu du segment $[AB]$.

Si $A(x; y)$ et $B(x'; y')$ alors $K\left(\frac{x+x'}{2}; \frac{y+y'}{2}\right)$.

Exercice de fixation

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) , on donne deux points $A(2; -3)$ et $B\left(\frac{3}{2}; -5\right)$.

Détermine les coordonnées du milieu K du segment $[AB]$.

3. Distance de deux points dans un repère orthonormé

Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . A et B sont deux points du plan.

Si $A(x; y)$ et $B(x'; y')$ alors $AB = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$.

Exercice de fixation

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

On donne $L(2; -2)$ et $M(5; -1)$. Calcule la distance LM .