**Thème : Géométrie du plan**
**LEÇON 10 : EQUATIONS DE DROITES**

# I. Equations d'une droite

## 1. Equation d'une droite

**Propriétés**
Soient $a, b$ et $c$ des nombres réels.
Dans le plan muni d'un repère,

- Toute droite a une équation de la forme $ax + by + c = 0$ où $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;\ 0)$.
- Toute équation de la forme $ax + by + c = 0$ où $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;\ 0)$ est une équation d'une droite.

## 2. Détermination d'une équation de droite

### a. Equation d'une droite passant par deux points

**Exemple**
Dans le plan muni d'un repère (O ; I ; J), on donne les points $A(4; -3)$ et $B(6\ ;1)$.
Déterminons une équation de la droite $(AB)$.
Considérons un point $M$ du plan tel que $M(x; y)$.
On sait que M appartient à (AB) équivaut à $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-4 \\ y+3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6-4 \\ 1-(-3) \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\binom{2}{4}$.
D'où $M \in (AB)$ équivaut à : $4(x-4) - 2(y+3) = 0$.

$$4x - 16 - 2y - 6 = 0$$
$$4x - 2y - 22 = 0$$
$$2x - y - 11 = 0$$

$2x - y - 11 = 0$ est une équation de la droite (AB).

### b. Equation d'une droite passant par un point donné et parallèle à une droite donnée

**Exemple**
Dans le plan muni du repère $(O, I, J)$, on donne les points $A(3; 2)$; $B(-1; -4)$ et $C(-2; 1)$.
Déterminons une équation de la droite (D) passant par C et parallèle à (AB).
Considérons $M$ un point du plan tel que $M(x; y)$.
On sait que $M$ appartient à $(D)$ équivaut à $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
Or $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1-3 \\ -4-2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$.
D'où $M$ appartient à $(D)$ équivaut à : $-6(x+2) + 4(y-1) = 0$

$$-6x - 12 + 4y - 4 = 0$$
$$-6x + 4y - 16 = 0$$
$$-3x + 2y - 8 = 0$$

$-3x + 2y - 8 = 0$ est une équation de la droite (D).

**Exercice de fixation**

Dans le plan muni du repère $(O, I, J)$, on donne les points $E(5; 3)$; $F(-3; 2)$ et $G(0; -4)$.
Détermine une équation de la droite (D) passant par E et de vecteur directeur $\overrightarrow{FG}$.

### c) Equation d'une droite passant par un point donné et perpendiculaire à une droite donnée

**Exemple**
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, I, J)$, on donne $E(1; 3)$ $F(-2; -6)$ et $G(2; -2)$.
Déterminons une équation de la droite $(D)$ passant par $G$ et perpendiculaire à $(EF)$.
Considérons un point M du plan tel que $M(x; y)$.
On sait que $M$ appartient à $(D)$ équivaut à $\overrightarrow{GM}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont orthogonaux.
Or $\overrightarrow{GM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y+2 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -2-1 \\ -6-3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} -3 \\ -9 \end{pmatrix}$.
D'où $M$ appartient à $(D)$ équivaut à : $-3(x-2) + (-9)(y+2) = 0$

$$-3x + 6 - 9y - 18 = 0$$
$$-3x - 9y - 12 = 0$$
$$x + 3y + 4 = 0$$

$x + 3y + 4 = 0$ est une équation de la droite (D).

# II. Le coefficient directeur d'une droite

## 1. Calcule du coefficient directeur d'une droite passant par deux points et non parallèle à l'axe des ordonnées

**Propriété**
Le plan est muni du repère $(O, I, J)$. La droite $(D)$ passe par les points $A(x_A\ ;\ y_A)$ *et* $B(x_A\ ;\ y_B)$
Le **coefficient directeur a** de (D) est donné par la formule : $\boldsymbol{a} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

**Exercice de fixation**
Dans le plan muni du repère $(O, I, J)$, on donne les points $A(1; 3)$ et $B(-3; -5)$.
Calcule le coefficient directeur de la droite $(AB)$.

## 2. Détermination du coefficient directeur d'une droite

**Présentation**

Dans le plan muni du repère $(O, I, J)$, on donne une droite (D) qui a pour équation $ax$ +b $y$ +c = 0.
On peut transformer cette équation sous la forme $y$ = **A** $x$ + **B. (A et B étant des nombres réels).**
Dans ces conditions :
- **A est le coefficient directeur de la droite (D).**
- **B est l'ordonnée à l'origine de la droite (D).**

**Exemple**

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), une droite (D) a pour équation $6x + 2y - 5 = 0$.
Déterminons le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de cette droite.
On écrit : $2y = -6x + 5$

$$y = \frac{-6}{2}x + \frac{5}{2}$$

$$y = -3x + \frac{5}{2}.$$

**-3** est le **coefficient directeur de la droite (D).**
$\frac{5}{2}$ est **l'ordonnée à l'origine de la droite (D).**

**Exercice de fixation**

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), une droite (D) a pour équation : $3x + 2y + 8 = 0$.
Détermine le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la droite (D).

# III. Construction d'une droite dont on connaît une équation

**Exemple**

Construisons dans le plan muni d'un repère (O, I, J), la droite $(D)$ d'équation $2x - y + 3 = 0$.

# IV. Positions relatives de deux droites

## 1. Droites parallèles

**Propriété**

Le plan est muni du repère $(O, I, J)$.
Les droites $(D)$ et $(D')$ ont pour coefficients directeurs respectifs $a$ et $a'$.
$(D) // (D')$ équivaut à : $a = a'$.

**Exercice de fixation**

Dans le plan muni d'un repère $(O, I, J)$, on donne les droites :
$(D) : x - 3y + 4 = 0$ et $(D') : \frac{1}{3}x + y - 2 = 0$.
Justifie que $(D)$ et $(D')$ sont parallèles.

## 2. Droites perpendiculaires

**Propriété**

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, I, J)$.
Les droites $(D)$ et $(D')$ ont pour coefficients directeurs respectifs $a$ et $a'$.
$(D) \perp D')$ équivaut à : $a \times a' = -1$.

**Exercice de fixation**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, I, J)$.
On donne les droites :
$(D) : 3x - y - 3 = 0$ et $(D') : y = -\frac{1}{3}x - 4$.
Justifie que les droites $(D)$ et $(D')$ sont perpendiculaires.

## 3. Construction d'une droite dont on connaît un point et le coefficient directeur

**Exercice**

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J).
Construis la droite passant par le point A(0 ; 2) et de coefficient directeur -2.