

Thème : Calculs algébriques

**LEÇON 12 : EQUATIONS ET INEQUATIONS DANS  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$**

## I. Equations du 1<sup>er</sup> degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

### Définitions

Soient  $a, b$  et  $c$  des nombres réels tels que  $(a; b) \neq (0; 0)$ .

- Une équation du type  $ax + by = c$  est une équation du premier degré dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .
- Tout couple  $(x_0; y_0)$  vérifiant l'égalité  $ax + by = c$  est solution de cette équation.
- Résoudre une équation du type  $ax + by = c$ , c'est trouver tous les couples solutions de cette équation.

### Exemple

$3x + 5y = 2$  est une équation du premier degré dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

On a :  $3 \times 4 + 5(-2) = 12 - 10 = 2$ . Donc, le couple  $(4; -2)$  est solution de cette équation.

On a :  $3 \times 1 + 5 \times 0 = 3 + 0 = 3$  et  $3 \neq 2$ . Donc, le couple  $(1; 0)$  n'est pas solution de cette équation.

### Exercice de fixation

On considère l'équation à deux inconnues  $x$  et  $y$  définie par :  $3x + 2y = 8$ .

1. Vérifie que  $(2; 1)$  est une solution de cette équation.
2. Vérifie que  $(1; 2)$  n'est pas solution de cette équation.
3. Vérifie si  $(0; 4)$  est solution ou non de cette équation.

## II. Systèmes d'équations du 1<sup>er</sup> degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

### 1) Définitions

Soient  $a, b, c, a', b'$  et  $c'$  des nombres réels tels que  $(a; b) \neq (0; 0)$  et  $(a'; b') \neq (0; 0)$ .

- Un système d'équations du premier degré à deux inconnues  $x$  et  $y$  est un système de la forme :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

- Résoudre le système, revient à trouver tous les couples solutions aux deux équations.

### Exercice de fixation

Identifie, parmi les systèmes suivants, ceux qui sont des systèmes de deux équations du premier degré dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

a)  $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$  ; b)  $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$  ; c)  $\begin{cases} x^2 + y = 0 \\ x + y = -1 \end{cases}$  ; d)  $\begin{cases} 2x - 3y + 5 = 0 \\ -3y = 0 \end{cases}$

### 2) Résolution d'un système d'équations

#### a) Résolution par substitution

#### Méthode

Pour résoudre un système par substitution :

- 1) On utilise l'une des équations pour exprimer une des inconnues en fonction de l'autre.
- 2) Dans l'autre équation, on remplace cette inconnue par son expression exprimée en 1) et on obtient une équation à une inconnue qu'on résout.
- 3) Dans l'équation obtenue au 1), on remplace l'inconnue par la valeur trouvée et on trouve la deuxième inconnue.
- 4) On donne la solution du système.

#### Exemple

Pour résoudre par substitution le système :  $\begin{cases} x - 3y = 5 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$

1) On exprime  $x$  en fonction de  $y$  dans la première équation et on obtient l'équation :

$$x = 5 + 3y.$$

2) On remplace  $x$  par sa nouvelle expression dans la deuxième équation pour obtenir l'équation suivante :  $3(5 + 3y) + 2y = 4$  ; donc  $15 + 9y + 2y = 4$  ; d'où  $15 + 11y = 4$

$$11y = -11 ; \text{ donc } y = -1.$$

3) D'après le 1),  $x = 5 + 3(-1) = 5 - 3 = 2$ .

4) Ainsi, la solution du système est le couple  $(2; -1)$ .

### Exercice de fixation

Résous par la méthode substitution le système suivant :  $\begin{cases} x + y = 35 \\ 8x + 7y = 260 \end{cases}$

#### b) Résolution par combinaison

#### Méthode

Pour résoudre un système par combinaison :

- 1) On choisit l'inconnue que l'on veut éliminer, par exemple  $x$ .
- 2) On multiplie les deux membres de l'une des équations (ou les deux équations, si nécessaire) par des coefficients de sorte que la variable  $x$  ait des coefficients opposés.
- 3) On additionne membre à membre les deux nouvelles équations obtenues en 2) et on obtient une nouvelle équation du premier degré à une inconnue  $y$ .
- 4) On résout l'équation en 3), et on trouve la valeur de  $y$ .
- 5) On élimine la deuxième inconnue en suivant les étapes énoncées précédemment.
- 6) On donne la solution du système.

#### Exemple

Pour résoudre par combinaison le système suivant :  $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x - 2y = -7 \end{cases}$

- 1) On choisit d'éliminer  $x$ .
- 2) On multiplie les deux membres de la première équation par 3 et ceux de la deuxième par  $-2$ . On obtient le système suivant :  $\begin{cases} 6x + 9y = 12 \\ -6x + 4y = 14 \end{cases}$
- 3) On additionne membre à membre ces deux équations pour obtenir l'équation suivante :  $13y = 26$ .
- 4) On résout l'équation  $13y = 26$ .  
Donc  $y = 2$ .
- 5) On va éliminer  $y$ .  
On multiplie les deux membres de la première équation par 2 et ceux de la deuxième par 3.  
On obtient le système suivant :  $\begin{cases} 4x + 6y = 8 \\ 9x - 6y = -21 \end{cases}$
- On additionne membre à membre ces deux équations pour obtenir l'équation suivante :  $13x = -13$ . Donc  $x = -1$ .
- 6) Ainsi la solution du système est le couple  $(-1 ; 2)$ .

#### Exercice de fixation:

Résous par combinaison le système suivant :  $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 4x + 7y = 1 \end{cases}$

#### c) Résolution graphique

##### Méthode

Pour résoudre graphiquement un système de deux équations  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

on trace les deux droites (D) et (D') d'équations respectives :  $ax + by = c$  et  $a'x + b'y = c'$  dans un même repère.

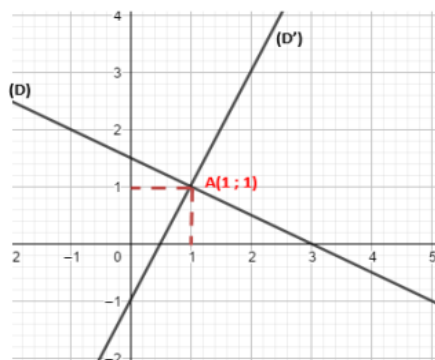
Trois cas de figure se présentent :

- Si les deux droites sont sécantes en un point, alors le couple de coordonnées de ce point est la solution du système.
- Si les deux droites sont parallèles disjointes, alors le système n'a pas de solution.
- Si les deux droites sont confondues, alors le système admet une infinité de solutions.  
Les solutions sont les couples de coordonnées de n'importe quel point de (D) ou (D').

##### Exemple 1

Pour résoudre graphiquement le système :  $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ ,

on trace les droites (D) et (D') d'équations respectives  $x + 2y = 3$  et  $2x - y = 1$ .

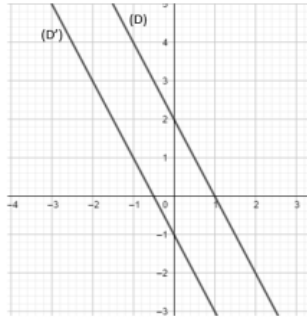


(D) et (D') se coupent au point A de coordonnées  $(1 ; 1)$ .  
Donc le couple  $(1 ; 1)$  est la solution du système.

### Exemple 2

Pour résoudre graphiquement le système :  $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$

on trace les droites (D) et (D') d'équations respectives :  
 $2x + y = 2$  et  $2x + y = -1$

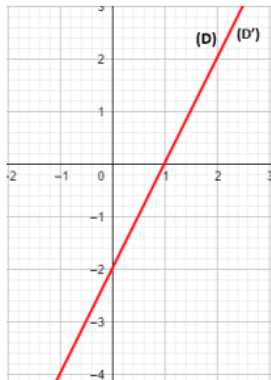


Les droites (D) et (D') sont parallèles (disjointes).  
Donc le système n'a pas de solution.

### Exemple 3

Pour résoudre graphiquement le système :  $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 4x - 2y = 4 \end{cases}$

on trace les droites (D) et (D') d'équations respectives :  $2x - y = 2$  et  $4x - 2y = 4$ .



(D) et (D') sont confondues.

Donc le système admet une infinité de solutions. Les solutions sont les couples de coordonnées de n'importe quel point de (D) ou (D').

## III. Inéquations du 1<sup>er</sup> degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

### 1) Définitions

Soient  $a, b$  et  $c$  des nombres réels tels que  $(a; b) \neq (0; 0)$ .

• On appelle inéquation du premier degré dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  toute inéquation d'un des types :  
 $ax + by + c > 0$ ;  $ax + by + c < 0$ ;  $ax + by + c \geq 0$  ou  $ax + by + c \leq 0$ .

• Un couple  $(x_0; y_0)$  de nombres réels est solution d'une des inéquations, signifie que  $x_0$  et  $y_0$  vérifient cette inéquation.

### Exemple

$x - y + 3 < 0$  est une inéquation du premier degré dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

- Pour  $x = 1$  et  $y = 5$ , on a :  $1 - 5 + 3 = -1$ .  
 $-1 < 0$  est vrai, donc le couple  $(1; 5)$  est solution de l'inéquation.
- Pour  $x = 0$  et  $y = 0$ , on a  $0 - 0 + 3 = 3$ .  $3 < 0$  est faux. Donc  $(0; 0)$  n'est pas solution de l'inéquation.

### Exercice de fixation

Pour chaque ligne du tableau, une seule affirmation est vraie.

Recopie le numéro de la ligne et la lettre qui correspond à l'affirmation vraie.

N°	Affirmations	Réponses		
		A	B	C
1	Une solution de l'équation suivante : $x - y + 5 = 0$ est	(2 ; 3)	(3 ; 2)	(-2 ; 3)
2	Une solution de l'inéquation suivante : $x + y - 1 < 0$ est	(0 ; 0)	(1 ; 1)	(2 ; 2)
3	Une solution de l'inéquation suivante : $x - y + 2 > 0$ est	(-2 ; 1)	(2 ; -1)	(-5 ; -2)

## 2) Propriété

Dans le plan muni d'un repère  $(O, I, J)$ , on considère la droite  $(D)$  d'équation :

$$ax + by + c = 0.$$

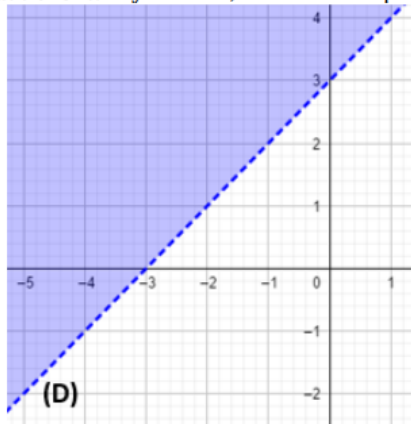
$(D)$  partage le plan en deux demi-plans :

- L'un de ces demi-plans contient tous les points dont les coordonnées vérifient  $ax + by + c > 0$  ou  $ax + by + c \geq 0$
- L'autre demi-plan contient tous les points dont les coordonnées vérifient  $ax + by + c < 0$  ou  $ax + by + c \leq 0$

L'ensemble des solutions d'une inéquation est donc l'ensemble des couples de coordonnées des points d'un demi-plan.

### Exemple

L'ensemble des solutions de l'inéquation :  $x - y + 3 < 0$  est le demi-plan, de bord la droite  $(D)$  d'équation :  $x - y + 3 = 0$ , ne contenant pas le point  $O(0; 0)$ .



## IV. Système d'inéquations du 1<sup>er</sup> degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

### 1) Définitions

- On appelle système d'inéquations du premier degré dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  un système constitué de plusieurs inéquations du premier degré dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .
- Résoudre un tel système, c'est trouver tous les couples de nombres qui vérifient toutes les inéquations (en même temps).

### Exemple

$\begin{cases} x - y + 3 < 0 \\ x + y - 2 > 0 \end{cases}$  est un système d'inéquations du premier degré dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

### 2) Résolution graphique

#### Méthode

Pour résoudre graphiquement un système de deux inéquations du premier degré dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,

- 1) On trace, dans un même repère, la droite associée à chaque inéquation ;
  - 2) On colorie (ou hachure) les demi-plans qui correspondent aux solutions de chaque inéquation ;
- L'ensemble des solutions du système est l'intersection des deux demi-plans coloriés (ou hachurés).

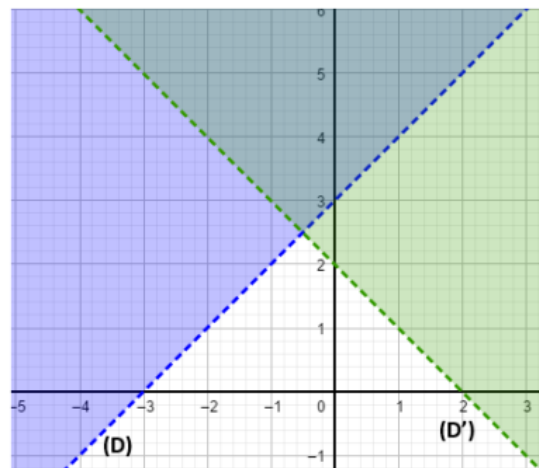
### Exemple

Pour résoudre graphiquement le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} x - y + 3 < 0 \\ x + y - 2 > 0 \end{cases}$$

1. On trace, dans un même repère,  $(D)$  et  $(D')$  d'équations respectives :

$$x - y + 3 = 0 \text{ et } x + y - 2 = 0.$$



2. On hachure les demi-plans qui correspondent aux solutions de chaque inéquation. L'ensemble de solutions est la partie hachurée deux fois (en bleu et en rouge).

## V. Problème conduisant à une équation, une inéquation, un système d'équations ou un système d'inéquations du 1<sup>er</sup> degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

### Méthode de résolution

Pour résoudre un problème conduisant à une équation, une inéquation, un système d'équations ou un système d'inéquations du premier degré dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , on peut procéder comme suit :

- 1) Choisir les inconnues ;
- 2) Mettre le problème en équations ou en inéquations [traduire les données de l'énoncé en langage mathématique par une (ou des) équation(s) ou inéquation(s)] ;
- 3) Résoudre l'équation, l'inéquation ou le système en utilisant une méthode appropriée ;
- 4) S'assurer que la (ou les) solution(s) trouvée(s) vérifie(nt) bien l'équation, l'inéquation ou le système ;
- 5) Conclure en interprétant le résultat trouvé.

### Exemple

Un organisateur propose les tarifs suivants à un spectacle :

- 1 000 f pour les adultes
- 500 f pour les enfants.

A la fin du spectacle il fait une recette totale de 120 000 f pour 205 tickets vendus.

Déterminons le nombre d'adultes et celui d'enfants ayant assisté au spectacle.

### RESOLUTION

- 1) On désigne par  $x$  le nombre d'adultes et par  $y$  celui d'enfants ayant assisté au spectacle.
- 2) On traduit les expressions suivantes en mathématiques :
  - a) Le nombre total de tickets vendus est 205. On trouve :  $x + y = 205$ .
  - b) La recette totale est égale à 120 000 f. On trouve :  $500x + 1\,000y = 120\,000$ .

On obtient le système d'équations du premier degré dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  suivant :

$$\begin{cases} x + y = 205 \\ 500x + 1000y = 120000 \end{cases}$$

- 3) On résout le système d'équations (par combinaison).

$$\begin{cases} x + y = 205 \\ 500x + 1000y = 120000 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} x + y = 205 \\ x + 2y = 240 \end{cases}$$

En multipliant les deux membres de la première équation par  $-1$ , on obtient :

$$\begin{cases} -x - y = -205 \\ x + 2y = 240 \end{cases}$$

On additionne membre à membre ces deux équations pour obtenir l'équation suivante :  $y = 35$ .

Donc  $y = 35$ .

En multipliant les deux membres de la première équation par  $-2$ , on obtient :

$$\begin{cases} -2x - 2y = -410 \\ x + 2y = 240 \end{cases}$$

On additionne membre à membre ces deux équations pour obtenir l'équation suivante :  $-x = -170$ .

Donc  $x = 170$ .

- 4) La solution du système est le couple  $(170 ; 35)$ .

- 5) Conclusion : il y a 170 enfants et 35 adultes qui ont assisté au spectacle.