SUPPORT DE COURS MATHEMATIQUES NIVEAU 3ième : 2025-2026

Thème : FONCTIONS
LEÇON 13 : APPLICATIONS AFFINES

I. Applications affines

1. Définition

Soit a et b deux nombres fixés.
On appelle application affine de *coefficient* a et de *terme constant* b, la correspondance f qui à chaque nombre réel x associe le nombre réel $ax + b$.
On note : $f : x \longmapsto ax + b$.
$ax + b$ est l'image de x par f et on note $f(x) = ax + b$.
Si $f(x) = y$ on dit que : y est l'image de x par f.
Dans l'écriture $ax + b$, a s'appelle le coefficient ; b s'appelle le terme constant.

Exemple
La correspondance $f : x \longmapsto 2x + 1$ est une application affine.
• 2 est le coefficient et 1 est le terme constant.

Exercice de fixation
Complète les colonnes du tableau ci-dessous selon l'exemple traité à la ligne1.

Correspondance	Application affine (oui ou non)	Coefficient	Terme constant
$l : x \longmapsto -3x + \frac{1}{3}$	oui	-3	$\frac{1}{3}$
$m : x \longmapsto 16x - 5$			
$n : x \longmapsto 4x^2 - 5$			
$p : x \longmapsto -4 + \frac{1}{7}x$			
$q : x \longmapsto \frac{1}{7x} - 10$			
$r : x \longmapsto x\sqrt{3} + 1$			

2. Calcul de l'image d'un nombre par une application affine

Méthode
Soit f une application affine telle que pour tout nombre réel x, $f(x) = ax + b$.
Pour calculer l'image d'un nombre réel t, on remplace x par t dans l'expression de $f(x)$.
On écrit : $f(t) = at + b$ et on calcule $at + b$.

Exercice de fixation
Calcule l'image de 2 et l'image de -1 par l'application affine $f : x \longmapsto -5x + 7$.

3. Détermination du nombre x tel que $f(x) = y$, étant donné un nombre réel y et une application affine f

Méthode
Soit y un nombre réel donné et f une application affine telle que pour tout réel x, $f(x) = ax + b$.

Pour déterminer le nombre réel x tel que $(x) = y$, on résout l'équation $ax + b = y$.

Exercice de fixation
On donne l'application affine $g : x \longmapsto 5x - 7$.
Détermine le nombre réel x tel que $g(x) = 8$

Remarque
On peut vérifier ce résultat.
En effet $g(3) = 5 \times 3 - 7 = 15 - 7 = 8$.

4. Détermination l'expression d'une application affine f définie par deux nombres réels et leurs images

Exemple
Soit f une application affine telle que : $f(2) = -3$ et $f(4) = 1$.
Détermine l'expression de $f(x)$ pour tout nombre réel x.

5. Représentation graphique d'une application affine

a) Propriété

Le plan étant rapporté à un repère (O, I, J), l'application affine f définie pour tout réel x par : $f(x) = ax + b$, a pour représentation graphique la droite (D) d'équation : $y = ax + b$.

Si M$(x; y)$ appartient à la droite (D), alors x et y vérifient l'égalité $y = ax + b$.

<u>Remarque</u>

- Le coefficient a est le coefficient directeur de la droite (D).
- La constante b est l'ordonnée à l'origine de f (l'image de 0 par f).

Exercice de fixation

Relie chaque application affine de la colonne 1 à la droite qui la représente dans la colonne 2.

Colonne 1		Colonne 2
f est l'application affine définie par : $f(x) = 3x - 2$	× ×	La droite d'équation : $y = -4x$
g est l'application affine définie par : $g(x) = -4x$	× ×	La droite d'équation : $y = 8$
h est l'application affine définie par : $h(x) = -5x + 9$	× ×	La droite d'équation : $y = 3x - 2$
k est l'application affine définie par : $k(x) = 8$	× ×	La droite d'équation : $y = -5x + 9$

b) Représentation graphique d'une application affine connaissant son expression

Méthode

Le plan étant rapporté à un repère (O, I, J).
Pour tracer la droite (D) , représentation graphique de l'application affine f :
- on choisit deux nombres et on calcule leurs images. Chaque nombre et son image sont les coordonnées d'un point de la droite (D);
- on obtient ainsi deux points de (D) que l'on place dans le repère (O, I, J) ;
- on trace la droite qui passe par ces deux points qui est la droite (D).

Exercice de fixation

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), trace la droite (Δ), représentation graphique de l'application affine f définie par : $f(x) = 0{,}5x - 3$.

c) Représentation graphique d'une application affine connaissant deux nombres réels et leurs images

Exercice de fixation

On donne l'application affine g telle que $g(-1) = 5$ et $g(3) = 1$.
Représente graphiquement g dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

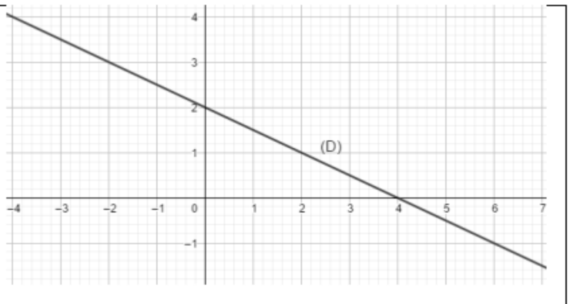
6) Utilisation de la représentation graphique d'une application affine.

a) Détermination graphique de l'image d'un nombre par une application affine

Méthode

Pour déterminer l'image d'un réel m à partir de la représentation graphique (D) d'une application affine f dans un repère :
- on trace d'abord la droite (Δ) d'équation : $x = m$;
- la droite (Δ) coupe la droite (D) en un point A d'abscisse m;
- l'ordonnée n de A est l'image de m par f.

Exercice de fixation

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) ci-contre, la droite (D) est la représentation graphique d'une application affine g. 1. Détermine graphiquement l'image de 1 par g. 2. Détermine graphiquement l'image de (-2) par g.	

b) Détermination graphique du nombre réel m tel que $f(m) = n$, f étant une application affine

Méthode

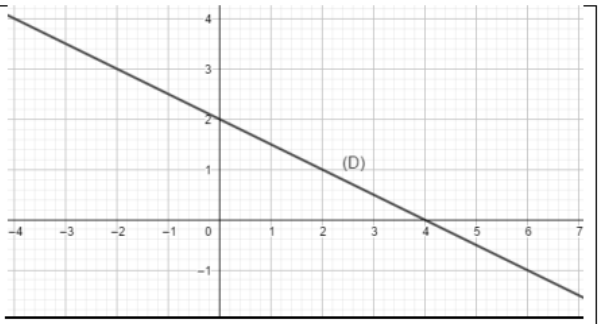
Etant donné un nombre réel n, pour déterminer graphiquement le nombre réel m tel que $f(m) = n$ à partir de la représentation graphique (D) d'une application affine f :

- on trace d'abord la droite (Δ) d'équation $y = n$;
- la droite (Δ) coupe la droite (D) en un point A d'ordonnée n ;
- l'abscisse du point A est le nombre m cherché.

Exercice de fixation

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) ci-contre, la droite (D) est la représentation graphique d'une application affine f.

1. Détermine graphiquement le nombre réel m tel que : $f(m) = 3{,}5$.
2. Détermine graphiquement le nombre réel t tel que : $f(t) = -1$.



c) Détermination de l'expression d'une application affine connaissant une équation de sa représentation graphique

Méthode

Une droite (D) d'équation : $px + qy + r = 0$ est la représentation graphique d'une application affine.

Pour connaître l'expression de cette application affine, il suffit de réécrire l'équation de la droite sous la forme $y = ax + b$.

Exercice de fixation

Détermine l'expression de l'application affine dont la droite donnée est sa représentation graphique dans un repère.

1. La droite (Δ) d'équation : $3x + y - 5 = 0$ est la représentation graphique de f.
2. La droite (D) d'équation : $2x - 3y - 15 = 0$ est la représentation graphique de g.

d) Détermination de l'expression d'une application affine f à partir de sa représentation graphique :

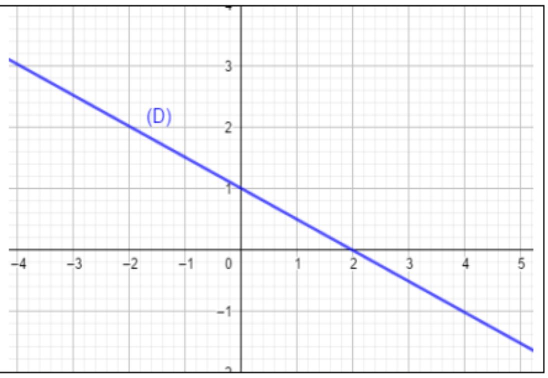
Méthode

Pour déterminer l'expression d'une application affine f à partir de sa représentation graphique dans un repère, il faut choisir deux points A et B dont on peut lire facilement les coordonnées sur le graphique.

Puis on remplace x et $f(x)$ par les coordonnées des points A et B dans l'expression : $f(x) = ax + b$, pour déterminer les nombres réels a et b.

Exercice de fixation

Détermine l'expression de l'application affine f dont la représentation graphique (D) est donnée par la figure ci-contre.



7. Sens de variation d'une application affine

a) Définitions

Soit f une application affine, m et n deux nombres réels quelconques.

- On dit que f est croissante lorsque pour tous nombres réels m et n, si $m > n$, alors $f(m) > f(n)$.
- On dit que f est décroissante lorsque pour tous nombres réels m et n, si $m > n$, alors $f(m) < f(n)$.
- On dit que f est constante lorsque pour tous nombres réels m et n, si $m > n$, alors $f(m) = f(n)$

Exemple

- f est l'application affine telle que : $f(-5) = 3$ et $f(2) = 7$.
  On a : $-5 < 2$ et $f(-5) < f(2)$. Donc, f est croissante.

- g est l'application affine telle que : $g(1) = -2$ et $f(3) = -6$.
  On a : $1 < 3$ et $g(1) > g(3)$. Donc, g est décroissante.

b) Propriétés

Soit f une application affine définie par : $f(x) = ax + b$.

- Si $a > 0$, alors l'application f est croissante.
- Si $a < 0$, alors l'application f est décroissante.
- Si $a = 0$, alors l'application f est constante.

Exercice de fixation

Complète le tableau suivant en mettant une croix dans la case qui convient, puis justifie.

Application affine	Décroissante	Constante	Croissante	Justification
$f: x \longmapsto 2x - 1$				
$g: x \longmapsto -5x + 3$				
$h: x \longmapsto 12$				
$i: x \longmapsto -8 + 3x$				
$j: x \longmapsto -\sqrt{5}$				
$k: x \longmapsto -(7 - 0{,}5x)$				
$l: x \longmapsto 10 - \frac{3}{4}x$				
$m: x \longmapsto -(-1 + 23x)$				

c) Utilisation du sens de variation d'une application affine pour comparer les images de nombres réels

Exercice de fixation

On donne les applications affines f ; g et h telle que f est constante, g est décroissante et h est croissante. Compare :

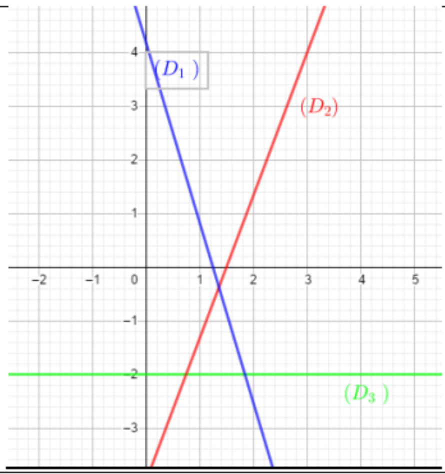
1. $f(136)$ et $f(-7)$;
2. $g(1{,}5)$ et $g(4{,}3)$;
3. $h(-9)$ et $h(-14)$.

d) Le sens de variation d'une application affine et sa représentation graphique

• Lorsqu'une application affine est *croissante,* sa représentation graphique est une droite « montante » de la gauche vers la droite.
• Lorsqu'une application affine est *décroissante* sa représentation graphique est une droite « descendante » de la gauche vers la droite.
• Lorsqu'une application affine est *constante* sa représentation graphique est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Exemple

Soit les droites (D_1), (D_2) et (D_3) représentées dans le repère ci-contre.



• La droite (D_1), en bleu, est descendante de la gauche vers la droite. Donc elle est la représentation graphique d'une application affine décroissante.
• La droite (D_2), en rouge, montante de la gauche vers la droite. Donc elle est la représentation graphique d'une application affine croissante.
• La droite (D_3), en vert, est parallèle à l'axe des abscisses. Donc elle est la représentation graphique d'une application affine constante.

II. Applications linéaires

1. Définition

Soit a un nombre.
On appelle application linéaire de coefficient a, toute application affine f telle que $f(x) = ax$.

Exemples
• Les applications f et g telles que $f(x) = -7x$ et $g(x) = x\sqrt{2}$ sont des applications linéaires.
• L'application h telle que $h(x) = -4x + 3$ n'est pas une application linéaire.

Remarque
Une application linéaire étant une application affine, tout ce que nous avons vu concernant les applications affines est aussi valable pour les applications linéaires.

Exercices de fixation
Exercice 1

Parmi les applications affines suivantes, écris dans ton cahier les numéros de celles qui sont des applications linéaires.

N°	Applications affines
1	$f : x \longmapsto -7x+4$
2	$g: x \longmapsto 3x$
3	$h : x \longmapsto -11x - 10$
4	$j : x \longmapsto 4$
5	$k: x \longmapsto x$

Exercice 2
On donne l'application linéaire f telle que $f(x) = x\sqrt{2}$.
a) Calcule l'image par f de -2, de 0 puis de $\sqrt{2}$.
b) Détermine le nombre réel m tel que $f(m) = 1$.

Exercice 3
On donne l'application linéaire g telle que $g(-6) = 2$.
Détermine l'expression de $g(x)$.

2. Représentation graphique d'une application linéaire

Propriété
Le plan est rapporté à un repère (O, I, J).
La représentation graphique d'une application linéaire f est une droite qui passe par l'origine du repère c'est-à-dire le point de couple de coordonnées $(0; 0)$.

Exercices de fixation
Exercice 1
Dans le plan muni d'un repère, trace la droite (D) représentation graphique de l'application linéaire f telle que $f(x) = -\frac{3}{2}x$.

3. Les propriétés de linéarité

a) Propriétés
Soit f une application linéaire, m, n et k sont des nombres réels. On a:
• $f(m + n) = f(m) + f(n)$
• $f(km) = kf(m)$

Exercice de fixation
Soit f une application linéaire telle que $f(2) = -6$ et $f(-3) = 9$
Calcule $f(-1)$, $f(5)$ et $f(9)$ sans déterminer $f(x)$.

b) Traduire une situation de proportionnalité par une application linéaire

Exercice de fixation
Au marché Gouro d'Adjamé, un kilogramme (kg) d'oranges coûte 340 FCFA.
1. Cauphy y achète 1,5 kg d'oranges. Détermine le montant à payer.
2. Détermine le montant à payer si Cauphy y achète x kg d'oranges.
3. Etablis la correspondance qui, à chaque quantité d'oranges exprimée en kg, associe la somme en FCFA à payer.