

Thème : Géométrie de l'espace
Leçon 14 : PYRAMIDES ET CÔNES

I. Pyramides

1. Présentation

Une pyramide est un solide qui a :

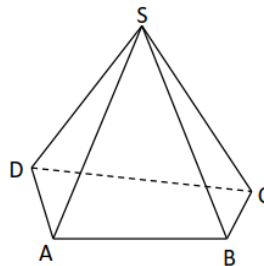
- un **sommet** appelé aussi le sommet principal ;
- une **base** en forme de polygone (une figure plane qui a plusieurs côtés et qui est formée d'une ligne brisée fermée) ;
- des **faces latérales** triangulaires ayant un même sommet appelé « sommet principal » ;
- le sommet principal du solide est relié aux sommets de sa base par des segments appelés arêtes de la pyramide.



Exemple

Le solide SABCD représenté ci-contre est une **pyramide**.

- Le point S est le **sommet** de la pyramide.
- Le quadrilatère ABCD est la **base** de la pyramide.
- Les triangles SAB, SBC, SDC et SDA sont les **faces latérales** de la pyramide.
- Les segments [SA], [SB], [SC], [SD], [AB], [BC], [CD] et [DA] sont les **arêtes** de la pyramide.

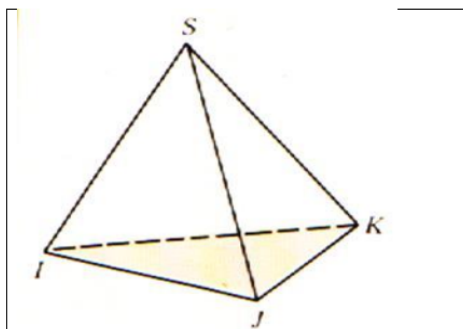


Exemples de pyramides particulières

Nom	Tétraèdre	Pyramide carrée	Pyramide pentagonale
Solide			
Base	Triangle équilatéral	Carré	Pentagone régulier

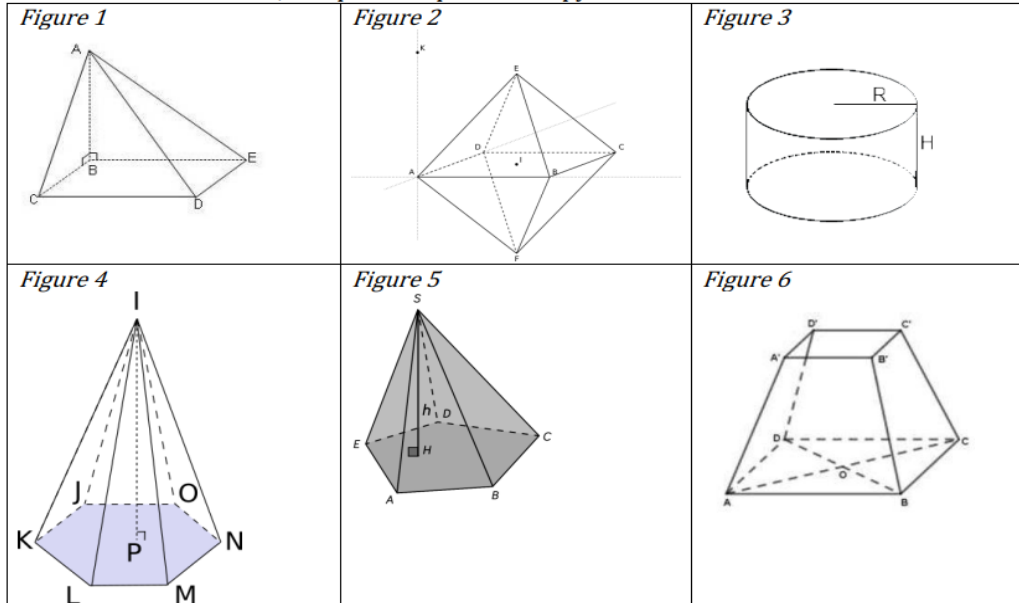
Remarques

- Une pyramide a autant de faces latérales que sa base a de côtés.
- Dans une pyramide à base triangulaire, chaque face latérale peut être considérée comme base de cette pyramide et chaque sommet peut être considéré comme le sommet de cette pyramide.

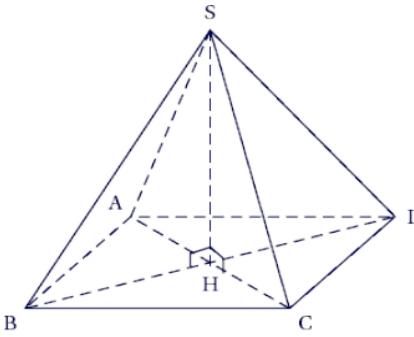


Exercice de fixation

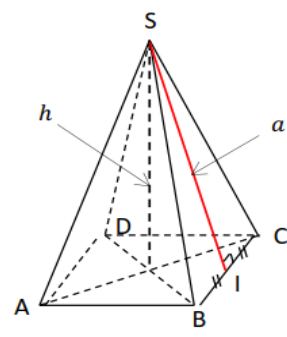
Parmi les solides suivants, indique ceux qui sont des pyramides



2. Hauteur d'une pyramide

<p>Définition</p> <ul style="list-style-type: none"> On appelle hauteur d'une pyramide, la droite qui passe par le sommet de cette pyramide et qui est perpendiculaire au plan de sa base. <p>Exemple</p> <p>Dans la pyramide SABCD ci-contre, le support du segment [SH] est perpendiculaire au plan de la base ABCD. Donc le segment [SH] est la hauteur de cette pyramide.</p>	
---	---

3. Apothème d'une pyramide

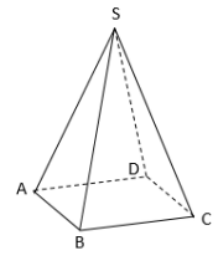
<p>Définition</p> <p>Un apothème d'une pyramide est la hauteur d'une face latérale issue du sommet de la pyramide.</p> <p>Exemple</p> <p>Dans la pyramide SABCD ci-contre, le segment [SI] est un apothème.</p> <p>Remarque</p> <p>Un apothème est aussi une longueur de la hauteur d'une face latérale issue du sommet de la pyramide.</p>	
---	--

4. Pyramide régulière

- a) **Définition**
- Une pyramide est dite **régulière** lorsque :
- Sa base est un **polygone régulier** (polygone inscrit dans un cercle et dont tous les côtés ont la même longueur). Par exemple, la base peut être un triangle équilatéral, un carré, ...
 - Ses faces latérales sont des triangles **isocèles** superposables.

Exemple

Sur la figure ci-contre, SABCD est une pyramide régulière car sa base ABCD est un carré et les triangles SAB ; SBC ; SCD et SDA sont isocèles.



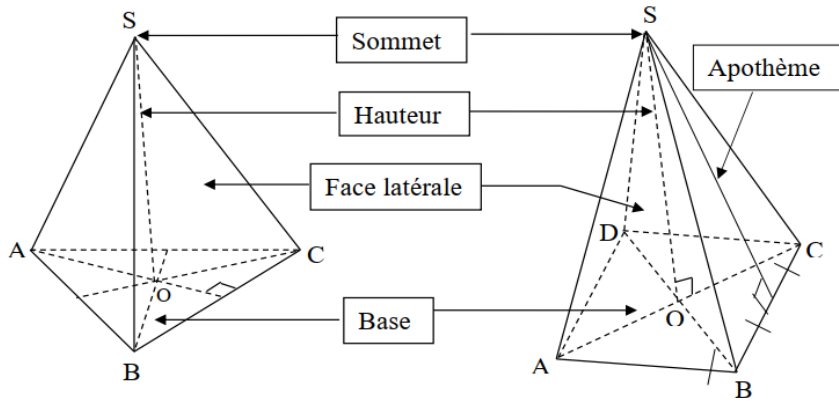
- b) **Propriétés**
- Si une pyramide est régulière, alors sa hauteur passe par le sommet de la pyramide et le centre du cercle circonscrit à sa base.
 - L'apothème d'une pyramide régulière est la hauteur d'une face latérale.

Remarques :

- Dans le cas de la pyramide à base carrée, le centre de la base correspond à l'intersection des diagonales.
- Pour une base en forme de triangle équilatéral, cela correspond à l'intersection des médianes.

c) Exemples des pyramides régulières

Les figures ci-dessous représentent deux pyramides régulières



SABC est une pyramide régulière de base : le triangle équilatéral ABC.

SABCD est une pyramide régulière de base : le carré ABCD.

Exercices de fixation

Exercice 1

Parmi les figures ci-dessus, indique celles qui représentent des pyramides régulières.

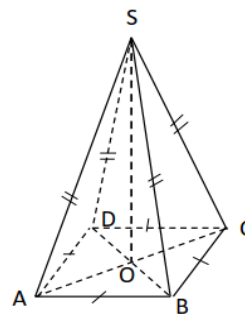
<p>Figure 1</p>	<p>Figure 2</p>	<p>SA=SB=SC=SD</p> <p>Figure 3</p>
-----------------	-----------------	------------------------------------

Exercice 2

La figure SABCD ci-contre est une pyramide régulière de base carrée.

Fais correspondre chaque désignation de la colonne 1 à la désignation correspondante de la colonne 2.

Colonne 1	Colonne 2
S	• Face latérale
SAB	• Hauteur
ABCD	• Sommet
(SO)	• Base



5. Aire latérale et volume d'une pyramide régulière

Propriétés

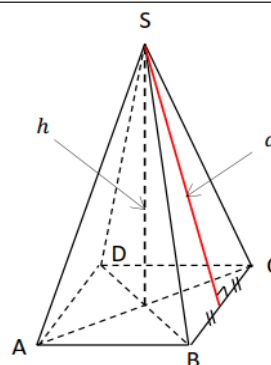
SABCD est une pyramide régulière de base un polygone régulier ABCD.

Aire latérale (A)

$A = \frac{P \times a}{2}$, où P est le périmètre de la base et a l'apothème (hauteur d'une face latérale).

Volume de la pyramide (V)

$V = \frac{B \times h}{3}$, où B est l'aire de la base et h la hauteur de la pyramide.



Remarque :

L'aire totale A_T d'une pyramide fermée à la base est égale à la somme de l'aire latérale A et de l'aire de la base B de cette pyramide. Soit $A_T = A + B$.

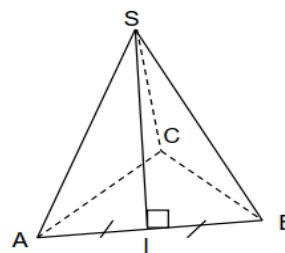
Exercices de fixation

Exercice 1

Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur, SABC est une pyramide régulière de sommet principal S et de base le triangle équilatéral ABC. I est le milieu du segment [BC].

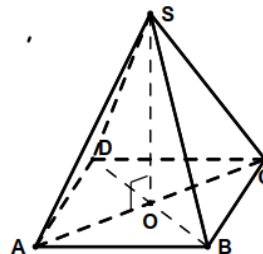
On donne : $SB=9$ cm, $AB=6$ cm et $SI = 6\sqrt{2}$ cm.

- 1) Que représente [SI] pour la pyramide ?
- 2) Calcule l'aire latérale de la pyramide SABC.



Exercice 2

L'unité de longueur est le centimètre.
 SABCD est une pyramide régulière de sommet S et de base le carré ABCD de centre O.
 On donne : $SO = 12$ et $AB = 6$.
 Calcule le volume V de la pyramide SABCD.



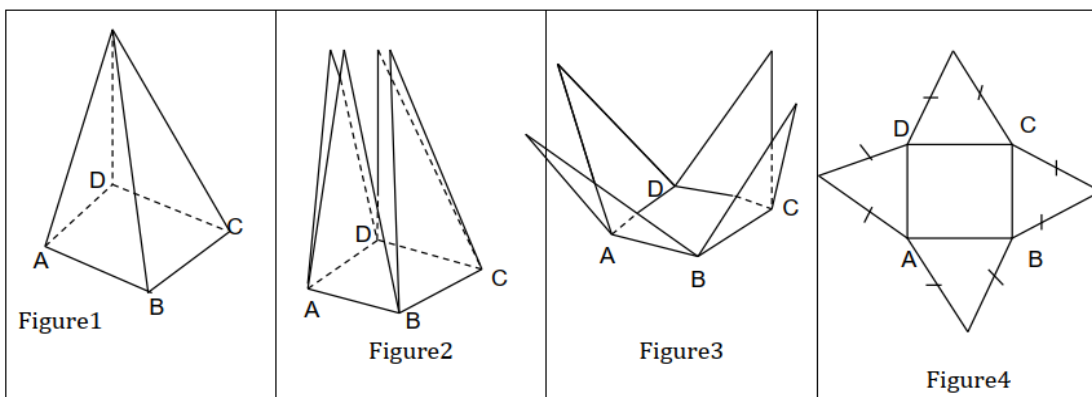
6. Patron d'une pyramide régulière

Définition

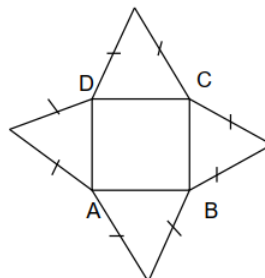
Un **patron** d'une pyramide est une surface plane, qui, par pliage, doit permettre de retrouver la pyramide.

Exemple

Les figures ci-dessous sont les étapes de dépaillage d'une pyramide régulière à base carrée pour obtenir un patron.

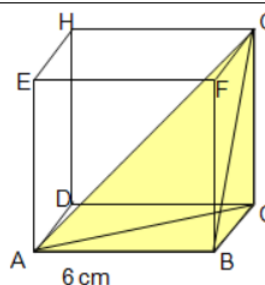


La figure 4 est un patron de la pyramide régulière à base carrée.

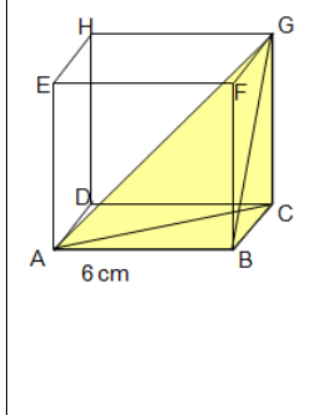


Exemple de construction d'un patron de pyramide

Construis le patron de la pyramide GABC inscrite dans le cube ABCDEFGH

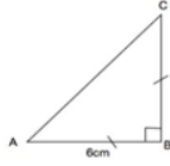


Corrigé



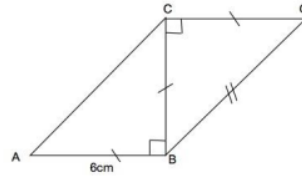
Etape 1

On commence par tracer par exemple la base de la pyramide qui est le triangle ABC rectangle et isocèle en B tel que $AB=BC=6\text{ cm}$.



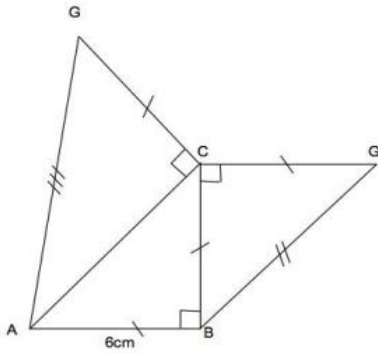
Etape 2

On trace ensuite la face de droite qui est le triangle BCG rectangle et isocèle en C tel que $CG=6\text{ cm}$



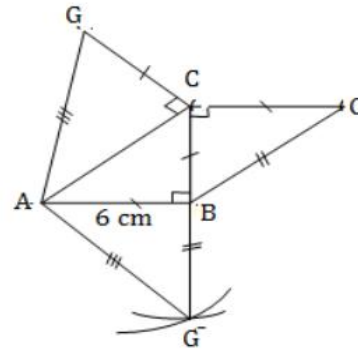
Etape 3

On trace ensuite la face arrière qui est le triangle ACG rectangle en C tel que $CG=6\text{ cm}$



Etape 4

On finit en traçant la face de devant qui est le triangle ABG. Pour cela, on reporte au compas les longueurs AG et BG déjà construites sur les autres triangles.



II. CÔNE DE RÉVOLUTION

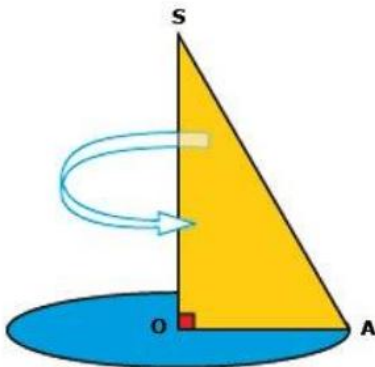
Quelques images de cônes de révolution



Les parties supérieures de ces châteaux d'eau ont la forme d'un cône de révolution.

1. Présentation

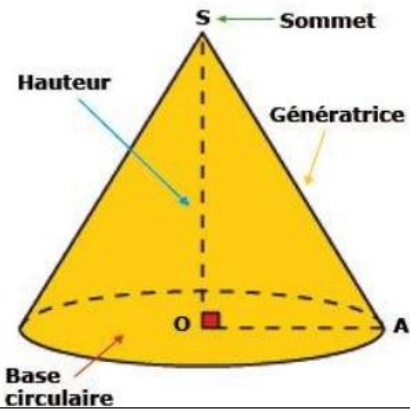
Considérons un triangle SOA rectangle en O.



Faisons tourner le triangle SOA rectangle en O autour de la hauteur (SO).
On génère un **cône**. L'hypoténuse d'un tel triangle est appelé génératrice du cône.

Le solide représenté ci-contre est un cône de révolution dont le sommet est S, la base est le disque (D) de centre O et de rayon [OA].

- La droite (SO) est l'axe de révolution du cône.
- Le support du segment [SO] est la hauteur du cône.
- Le segment [SA] est une génératrice de ce cône.



2. Hauteur d'un cône de révolution

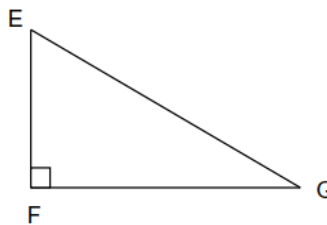
Définition :

On appelle hauteur d'un cône, la droite qui passe par son sommet et qui est perpendiculaire au plan de sa base.

La distance du sommet au centre O du disque de base s'appelle aussi la hauteur du cône.

Exercice de fixation

On donne la figure codée ci-contre. Complète chacune des phrases suivantes à l'aide de l'une des expressions suivantes : une génératrice ; la rotation ; le rayon de la base ; la hauteur.



- 1) Un cône de révolution est engendré par du triangle EFG autour de la droite (FE).
- 2) Le segment [FG] est du cône.
- 3) Le segment [EG] est du cône.
- 4) La distance FE est du cône.

3. Patron d'un cône de révolution

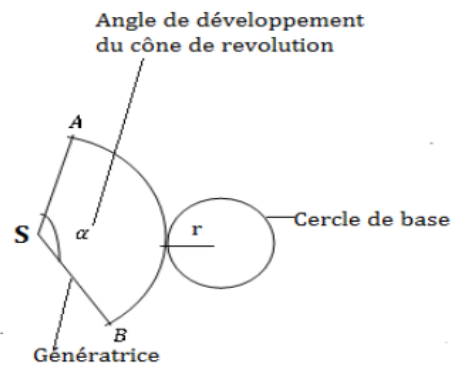
Définition

Définition

Le patron d'un cône de révolution est composé d'un disque qui est la base du cône et d'un secteur angulaire, qui est la face latérale.

L'angle du secteur angulaire α du patron est l'angle de développement du cône.

$\alpha = 360^\circ \times \frac{r}{g}$, où r est le rayon du disque et g est la génératrice du cône.
 α est en degré.



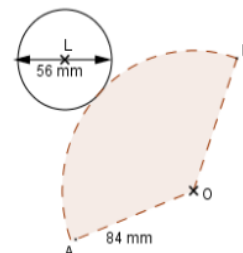
Exercice de fixation

La figure ci-contre est un patron d'un cône de révolution.

- a) Nomme son sommet et le centre de sa base.
- b) Indique le rayon de la base et la longueur des génératrices.

Corrigé

- a) Le sommet de la base est le point O et le centre de la base est le point L.
- b) Le rayon de la base est 28 mm .
La longueur des génératrices est 84 mm.



Remarque

- La longueur de l'arc \widehat{AB} est égale au périmètre du cercle de base.
 - Le patron d'un cône est obtenu en traçant le cercle de base et la surface latérale.
- Pour cela, il faut connaître la génératrice g , le rayon du disque r et l'angle de développement α .

Exercices de fixation

Exercice 1

Un secteur angulaire de mesure 130° et de rayon 3cm est la surface latérale d'un cône de révolution. On donne $\pi = 3,14$.

Calcule le périmètre de base P de ce cône.

Exercice 2

Réalise le patron d'un cône de révolution dont le diamètre du disque de base est 6 cm et la génératrice est 5 cm.

4. Formules de l'aire latérale et du volume d'un cône de révolution.

• Aire latérale (\mathcal{A})

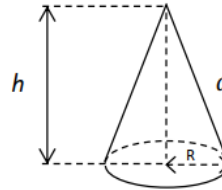
$$\mathcal{A} = \frac{P \times a}{2}$$

Où P désigne le périmètre de la base et a la génératrice ou l'apothème.

• Volume d'un cône de révolution

$$V = \frac{B \times h}{3}$$

Où B est l'aire de la base et h la hauteur du cône.



Remarque :

L'aire totale \mathcal{A}_T du cône est égale à la somme de l'aire latérale \mathcal{A} et de l'aire B du disque de base. Soit $\mathcal{A}_T = \mathcal{A} + B$.

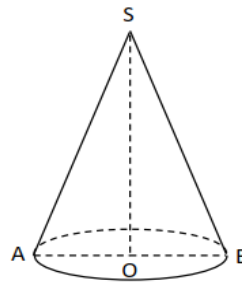
Exercice de fixation

L'unité de longueur est le centimètre.

La figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur, représente un cône de révolution de sommet S , de hauteur SO et de base, le disque de diamètre AB .

On donne : $AB = 10$, $SO = 12$ et $SA = 13$.

- 1) Calcule l'aire latérale de ce cône.
- 2) Calcule le volume de ce cône.

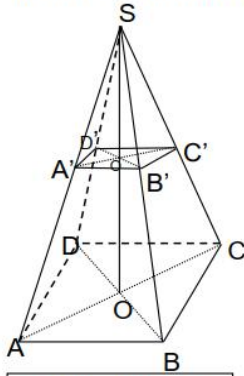


III. Sections planes

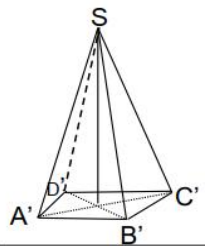
1. Section d'une pyramide régulière par un plan parallèle au plan de la base

a) Présentation -vocabulaire

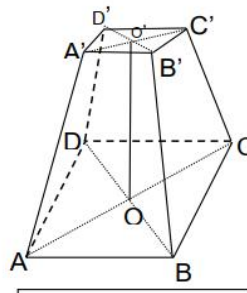
- Sur la figure ci-dessous $SABCD$ est une pyramide régulière à base carrée. A' est un point du segment $[SA]$. Le plan (P) passant par A' et parallèle au plan (ABC) de la base coupe (SB) en B' , (SC) en C' et (SD) en D' .
- L'intersection de cette pyramide et du plan (P) est un carré. C'est la section de la pyramide $SABCD$ par le plan (P) . On obtient alors une petite pyramide $SA'B'C'D'$ et un tronc de pyramide $ABCD A'B'C'D'$.



Grande pyramide



Petite pyramide



Tronc de pyramide

b) Propriété

La section d'une pyramide par un plan parallèle à la base est un polygone de même nature que cette base. Les supports des côtés de ces deux polygones sont parallèles deux à deux.

c) Propriété de réduction

Lorsqu'on coupe une pyramide régulière par un plan parallèle au plan de sa base, on obtient une réduction de cette pyramide.

Si l'échelle de réduction est égale au nombre k alors :

- $\frac{\text{La longueur d'un segment de la pyramide réduite}}{\text{La longueur d'un segment correspondant de la pyramide}} = k.$

- $\frac{\text{Aire de la pyramide réduite}}{\text{Aire de la pyramide}} = k^2.$

- $\frac{\text{Volume de la pyramide réduite}}{\text{Volume de la pyramide}} = k^3.$

Exercices de fixation

Exercice 1

Recopie et complète les phrases ci-dessous avec les groupes de mots suivants : **les volumes, les longueurs, les aires.**

Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k

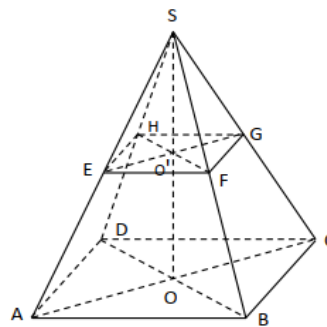
- a) sont multipliées par k
- b) sont multipliées par k^2
- c) sont multipliés par k^3

Exercice 2

L'unité de longueur est le centimètre.
 Sur la figure ci-contre, SABCD est une pyramide régulière de base, le carré ABCD, de sommet S et de hauteur SO. On donne : $AB = 6\sqrt{2}$ et $SO = 8$.

- 1) Justifie que le volume de la pyramide est 192 cm^3
- 2) On réalise une section parallèle au plan de la base au point E telle que $SE = \frac{3}{4}SA$.

- a) Justifie que $EF = \frac{9}{2}\sqrt{2}$.
- b) Calcule l'aire du carré EFGH.
- c) Calcule le volume du petit cône SEFGH.



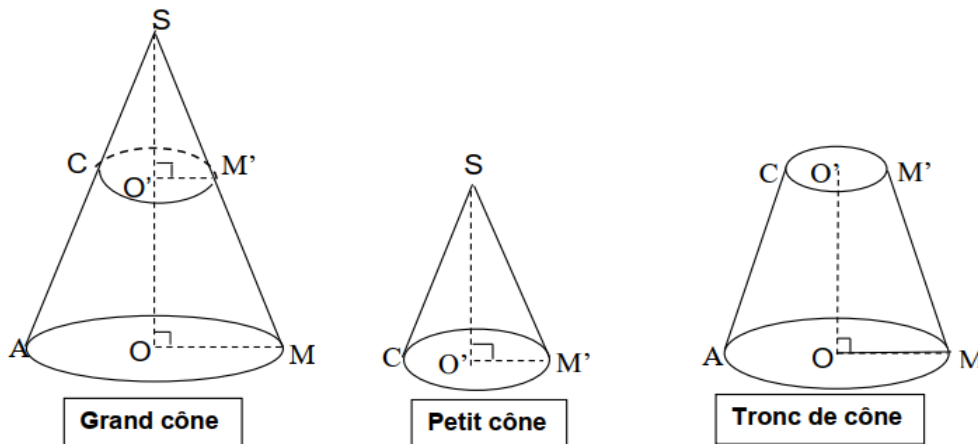
2. Section d'un cône de révolution par un plan parallèle au plan de la base

a) Présentation -vocabulaire

On considère un cône de révolution de sommet S, de base le disque de centre O et de diamètre [AB].

- C est un point de la génératrice [SA]. Le plan (P) passant par C et parallèle au plan de la base du cône coupe la génératrice [SM] en M'.
- L'intersection du cône et du plan (P) est un disque. C'est la section du cône par le plan (P).

On obtient un petit cône de sommet S, de base le disque de centre O' et un tronc de cône.



b) Propriété

La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base est un disque.

c) Propriété de réduction

Lorsqu'on coupe un cône de révolution par un plan parallèle au plan de sa base, on obtient une réduction de ce cône.

Si l'échelle de réduction est égale au nombre k alors :

$$\frac{\text{La longueur d'un segment du cône réduit}}{\text{La longueur d'un segment correspondant du cône}} = k$$

$$\frac{\text{Aire du cône réduit}}{\text{Aire du cône}} = k^2$$

$$\frac{\text{Volume du cône réduit}}{\text{Volume du cône}} = k^3$$

Exercices de fixation

Exercice 1

Réponds par Vrai ou par Faux à chacune des affirmations suivantes :

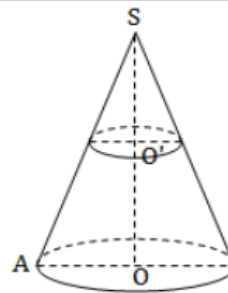
Affirmations	Réponses
La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base est un rectangle.	
Si on réduit un cône de révolution en multipliant les longueurs par $\frac{2}{3}$ alors son volume est multiplié par $(\frac{2}{3})^3$.	
La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base est un disque.	

Exercice 2

On considère un cône de révolution de sommet S et de base, le disque de centre O . On donne :

$$OA = 3 \text{ cm}; SO = 10 \text{ cm}$$

- Justifie que le volume V du cône est $30\pi \text{ cm}^3$
- On coupe le cône par un plan parallèle au plan de la base. Ce plan passe par le point O' du segment $[SO]$ tel que : $SO' = \frac{2}{3}SO$
Calcule le volume V' du petit cône.



3) Tronc d'une pyramide ou d'un cône de révolution

Propriété.

Si A_G désigne l'aire latérale de la grande pyramide (ou du grand cône) et A_P désigne l'aire latérale de la pyramide réduite (ou du cône réduit).

L'aire A_T du tronc est : $A_T = A_G - A_P$.

Si V_G désigne le volume de la grande pyramide (ou du grand cône) et V_P désigne le volume de la pyramide réduite (ou du cône réduit).

Le volume V_T du tronc est : $V_T = V_G - V_P$.

Exercice de fixation

On considère les résultats de l'exercice précédent :

Le volume du grand cône est : $V_G = 30\pi \text{ cm}^3$ et le volume du petit cône $V_P = \frac{80\pi}{9} \text{ cm}^3$.

Calcule le volume V_T du tronc de ce cône.

