

# LEÇON 13 : APPLICATIONS AFFINES

Formes  
ça s'outra!

## ❖ APPLICATION AFFINE

### Définition :

On appelle application affine de coefficient  $a$  et de terme constant  $b$  la correspondance qui, à chaque nombre réel  $x$ , associe le nombre réel :  $ax + b$ .

- On dit que l'application affine  $f$  est définie par:  $f(x) = ax + b$ .
- On dit que  $f(x)$  est l'image de  $x$  par l'application affine  $f$ .

### ▪ Utiliser l'expression d'une application affine pour :

- ✓ Calculer l'image d'un nombre réel par une application affine  $f$ .

### Exemple :

On veut calculer l'image de 3 par l'application affine  $f$  définie par :  $f(x) = 2x - 5$ .

On écrit :  $f(3) = 2 \times 3 - 5$  (on remplace  $x$  par le nombre donnée dans l'expression de  $f$ )

Donc  $f(3) = 2 \times 3 - 5 = 6 - 5 = 1$  alors  $f(3) = 1$ .

- ✓ Calculer le nombre réel  $x$  tel que  $f(x) = y$ . ( $y$  étant un nombre donné)

Pour déterminer le nombre réel  $x$  tel que  $f(x) = y$ , résout l'équation :  $ax + b = y$

### Exemple :

On veut calculer le nombre  $x$  tel que  $f(x) = -4$  par l'application affine  $f$  définie par :

$$f(x) = 3x + 2.$$

On résout l'équation  $f(x) = -4$  équivaut à :  $3x + 2 = -4$

$$\text{équivaut à : } 3x = -4 - 2$$

$$\text{équivaut à : } 3x = -6$$

$$\text{équivaut à : } x = -2 \quad \text{donc : } x = -2$$

- ✓ Déterminer l'expression d'une application affine connaissant deux nombres réels et leurs images.

### Exemple :

On veut déterminer l'application  $f$  définie par :  $f(2) = 1$  et  $f(3) = -4$ .

Cela revient à déterminer les nombres réels  $a$  et  $b$  tels que :  $f(x) = ax + b$ .

On a :  $f(2) = 1$  équivaut à :  $2a + b = 1$

$$f(3) = -4 \text{ équivaut à : } 3a + b = -4$$

On résout le système :  $\begin{cases} 2a + b = 1 \\ 3a + b = -4 \end{cases}$  on trouve  $a = -5$  et  $b = 11$ , ainsi  $f(x) = -5x + 11$ .

### Autre méthode de détermination :

$f$  est une application affine, pour tous nombres réels  $x_1$  et  $x_2$  tels que  $f(x_1)$  et  $f(x_2)$  donnés.

En notant  $f(x) = ax + b$ , on obtient,  $a = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$  et  $b = f(x_1) - ax_1$

**Exemple :**

Déterminons l'application affine  $f$  telle que  $f(2) = 1$  et  $f(3) = -4$ .

**Détermine a**

$$a = \frac{f(2)-f(3)}{2-3} = \frac{1-(-4)}{2-3}$$

$$a = \frac{5}{-1} \text{ donc } a = -5$$

**Déterminons b**

$$b = f(2) - 2(-5)$$

$$b = 1 + 10 \text{ donc } b = 11$$

Donc  $f$  est l'application affine définie par :  $f(x) = -5x + 11$

▪ **Représentation graphique d'une application affine**

**Définition :**

On appelle représentation graphique de l'application affine  $f$ , des points du plan de couple de coordonnées  $(x ; f(x))$ ,  $x$  étant un nombre réel.

**Propriété :**

$a$  et  $b$  sont deux nombres réels donnés.

La représentation graphique de l'application affine  $f$  définie par  $f(x) = ax + b$  est la droite d'équation  $y = ax + b$ .

- Le nombre  $a$  est le **coefficient directeur** de cette droite et le nombre  $b$  son **ordonnée à l'origine**.
- Cette droite n'est pas parallèle à l'axe (OJ) des ordonnées.

▪ **Sens de variation d'une application affine**

**Propriété :**

$f$  est une application affine définie par :  $f(x) = ax + b$ .

- Si  $a > 0$ , alors l'application affine  $f$  est croissante
- Si  $a < 0$ , alors l'application affine  $f$  est décroissante
- Si  $a = 0$ , alors l'application affine  $f$  est constant

▪ **Comparaison des images de nombres réels par une application affine**

$f$  est une application affine telle que  $f(x) = ax + b$ .  $u$  et  $v$  sont des nombres réels.

- $f$  étant **croissante**, si  $u < v$  alors  $f(u) < f(v)$ ;
- $f$  étant **décroissante**, si  $u < v$  alors  $f(u) > f(v)$ ;
- $f$  étant **constante**, si  $u < v$  alors  $f(u) = f(v) = b$

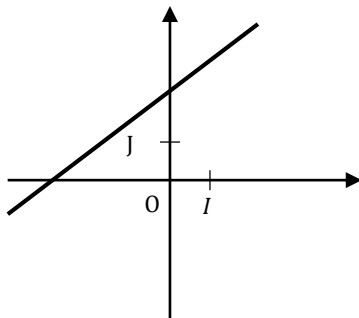
**Remarque :**

En pratique, pour deux nombres réels  $u$  et  $v$ .

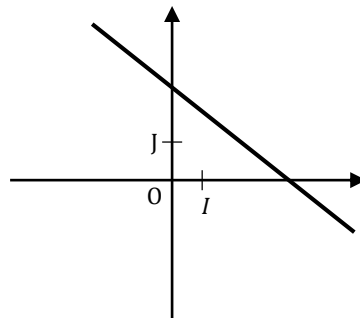
- Si on a :  $u < v$  et  $f(u) < f(v)$ , on peut conclure que  $f$  est croissante.
- Si on a :  $u < v$  et  $f(u) > f(v)$ , on peut conclure que  $f$  est décroissante.

▪ **Sens de variation d'une application affine et sa représentation graphique**

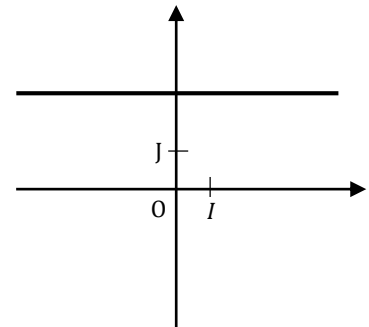
- Lorsqu'une application affine est croissante, sa représentation graphique est une droite "**montante**" de la gauche vers la droite.
- Lorsqu'une application affine est décroissante, sa représentation graphique est une droite "**desendante**" de la gauche vers la droite.
- Lorsqu'une application affine est constante, sa représentation graphique est une droite **Parallèle à l'axe des abscisse**.



$$a > 0$$



$$a < 0$$



$$a = 0$$

❖ **APPLICATIONS LINÉAIRES**

**Définition :**

$a$  est un nombre réel.

On appelle application linéaire, une application affine définie par :  $f(x) = ax$ ,

$a$  étant un nombre réel.

▪ **Utiliser l'expression d'une application linéaire pour :**

- ✓ **Calculer l'image d'un nombre réel par une application linéaire  $f$ .**

**Exemple :**

On veut calculer l'image de 5 par l'application linéaire  $f$  définie par :  $f(x) = -2x$ .

On écrit :  $f(5) = -2 \times 5$  (on remplace  $x$  par le nombre donnée dans l'expression de  $f$ )

Donc  $f(5) = -2 \times 5 = -10$  alors  $f(5) = -10$ .

- ✓ **Calculer le nombre réel  $x$  tel que  $f(x) = y$ . ( $y$  étant un nombre donné)**

Pour déterminer le nombre réel  $x$  tel que  $f(x) = y$ , résout l'équation :  $ax = y$

**Exemple :**

On veut calculer le nombre  $x$  tel que  $f(x) = 20$  par l'application affine  $f$  définie par :  $f(x) = -4x$ .

On résout l'équation  $f(x) = 20$  équivaut à :  $-4x = 20$

$$\text{équivaut à : } -x = \frac{20}{4}$$

$$\text{équivaut à : } -x = 5$$

$$\text{équivaut à : } x = -5 \text{ donc : } x = -5$$

✓ **Déterminer l'expression d'une application linéaire connaissant un nombre réels et son image.**

**Exemple :**

On veut déterminer l'application linéaire  $f$  définie par :  $f(5) = -2$ .

Cela revient à déterminer le nombre réel  $a$  tel que :  $f(x) = ax$ .

On a :  $f(5) = -2$  équivaut à :  $5a = -2$

$$\text{équivaut à : } a = -\frac{2}{5} \text{ donc } a = -\frac{2}{5} \text{ alors } f(x) = -\frac{2}{5}x.$$

**Autre méthode de détermination :**

$f$  est une application linéaire,  $x_1$  est un nombre réel tel que  $f(x_1)$  est donné.

En posant  $f(x) = ax$ , on obtient :  $a = \frac{f(x_1)}{x_1}$ .

**Exemple :**

Déterminons l'application linéaire  $f$  telle que  $f(5) = -2$ .

On sait que  $f(x) = ax$ .

On a :  $a = \frac{f(5)}{5} = \frac{-2}{5}$  donc  $f(x) = -\frac{2}{5}x$ .

▪ **Représentation graphique d'une application linéaire**

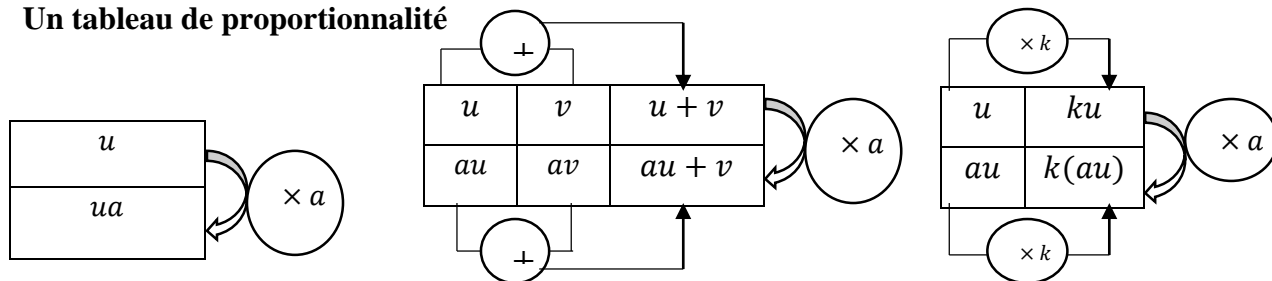
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

La représentation graphique d'une application linéaire  $f$  est une droite qui passe par l'origine du repère.

▪ **Tableau de proportionnalité et application linéaire**

On peut traduire une situation et les propriétés de proportionnalité par :

✓ **Un tableau de proportionnalité**



✓ **Une application linéaire  $f$  définie par :**

$$f(x) = ax$$

$$f(u + v) = f(u) + f(v)$$

$$f(ku) = kf(u)$$