Proportionnalité

Rappels :

- "Le coût de l'achat de baguettes de pain est **proportionnel** au nombre de baguettes achetées. Si j'achète **deux fois plus** de baguettes, je paierai **deux fois plus**"

- Avec un **tableau de proportionnalité**, on obtient chaque nombre d'une ligne en multipliant le nombre correspondant de l'autre ligne **par un même nombre**.

  Ex : Voici une situation proportionnelle représentée sur ce tableau :

  x 0,2

Nombre de boîtes	2	3	4
Masse en kg	**10**	**15**	**20**

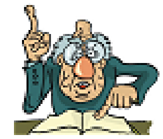
  x 5

  Ce tableau est un **tableau de proportionnalité**.

  2 x 5 = 10   3 x 5 = 15   4 x 5 = 20

  Le **coefficient de proportionnalité** est **5** (masse d'une boîte)

Attention, **0,2** ($\frac{2}{10}$ ou $\frac{3}{15}$ ou $\frac{4}{20}$) est aussi un **coefficient de proportionnalité** !



I) Représentation graphique :

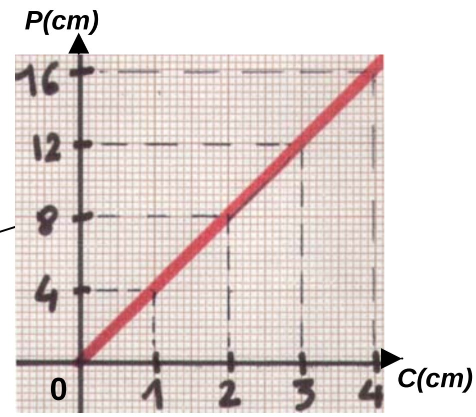
Propriété : si une situation est proportionnelle **alors** les points de sa représentation graphique sont alignés avec l'origine du repère.

Ex : Le périmètre d'un carré est proportionnel à la longueur d'un côté.

Côté (cm)	0	1	2	3	4
Périmètre (cm)	**0**	**4**	**8**	**12**	**16**

x 4

Traçons la représentation graphique

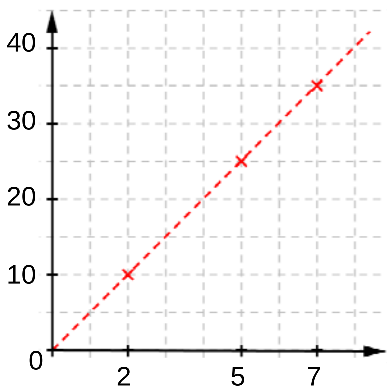


« Tous les points de la courbe sont alignés avec l'origine du repère. Nous avons obtenu une droite passant par l'origine»

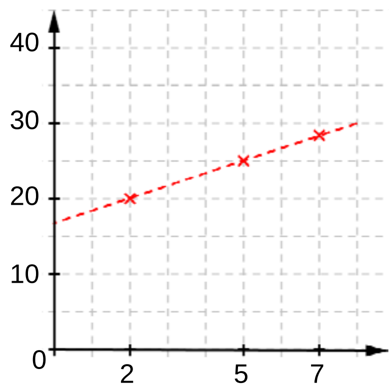
Propriété : si les points de sa représentation graphique sont alignés avec l'origine du repère **alors** la situation est proportionnelle.

« cette propriété est la **réciproque** de la précédente»

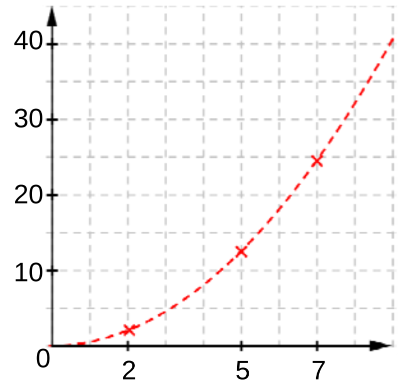
Ex :



graphique 1



graphique 2



graphique 3

▶ Seul, **le graphique 1** correspond à une situation proportionnelle. **Les points sont alignés avec l'origine du repère.**

▶ Dans **le graphique 2**, **les points ne sont pas alignés avec l'origine du repère**. La situation n' est pas proportionnelle.

▶ Dans **le graphique 3**, **les points sont pas alignés**. La situation n' est pas proportionnelle.

II) Quatrième proportionnelle – égalité des produits en croix :

Reprenons la situation proportionnelle du paragraphe précédent.

Côté (cm)	0	1	2	3	4
Périmètre	**0**	**4**	**8**	**12**	**16**

x 4

On a : 2 x 12 = 3 x 8 = 24

1	**4**
4	**16**

On a : 1 x 16 = 4 x 4 = 16

Si on prend **deux colonnes quelconques** d'un tableau de proportionnalité, **les produits en croix** sont égaux.

Propriété : Si un tableau est un tableau de **proportionnalité** alors l**es produits en croix** sont **égaux**

a, b, c, d désignent quatre nombres relatifs.
Le tableau ci-contre est un tableau de proportionnalité.

a	**c**
b	**d**

ad = **bc**

Cette propriété est appelée « l'égalité des produits en croix ».

Ex : Pour faire de la confiture de mirabelles, il faut ajouter 700g de sucre à 1 kg de fruits. Quelle est la quantité de sucre à ajouter à 750 g de fruits ?

La situation est proportionnelle (si j'utilise deux fois plus de fruits, je dois mettre deux fois plus de sucre !)

Fruits (g)	**1000**	**750**
Sucre (g)	**700**	x

x est la **quatrième proportionnelle** (inconnue)

Soit x la quantité de sucre nécessaire

1000 x x = 750 x 700 (égalité des produits en croix)

Donc $x = \dfrac{750 \text{ x } 700}{1000}$ = **525g**

Pour 750g de fruits, il faudra 525g de sucre

II) Pourcentages :

calculer un pourcentage revient à un calcul de proportionnalité

Ex : **Parmi les 24 élèves d'une classe, 9 sont demi-pensionnaires. Calculer le pourcentage d'élèves demi-pensionnaires dans la classe.**

Evaluer le **pourcentage** d'élèves demi-pensionnaires consiste à imaginer que la classe compte 100 élèves en conservant **la même proportion** d'élèves demi-pensionnaires.
Il s'agit bien d'une situation proportionnelle. Utilisons les produits en croix.

Soit x le pourcentage d'élèves

demi-pensionnaires	**9**	x
total des élèves	**24**	**1 00**

$x = \dfrac{9 \text{ x } 100}{24} = 37{,}5$

Il y a 37,5% d'élèves demi-pensionnaires dans la classe.

Ex : **Un gâteau préparé par Julien contient 35% de chocolat. Quelle quantité de chocolat a t'il utilisé pour un gâteau de 425g ?**

Soit x la quantité de chocolat

masse de chocolat (g)	**35**	x
Masse du gâteau (g)	**100**	**425**

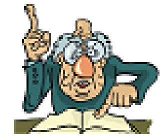
100 x x = 35 x 425 Donc $x = \dfrac{35 \text{ x } 425}{100}$ = **148,75g**

Pour un gâteau de 425g, il faudra 148,75g de chocolat.

III) Vitesse moyenne :

Définition : la **vitesse moyenne** d'un objet en mouvement est le **quotient** de la **distance parcourue** par **la durée du parcours**.

C'est la vitesse qu'il aurait eu en parcourant la même distance en gardant toujours la même vitesse !



Propriété : Si un mobile parcourt **une distance d** pendant **un temps t** à **une vitesse moyenne v**, on a

$$\mathbf{d} = \mathbf{v} \times \mathbf{t}$$

on donc aussi : $\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{d}}{\mathbf{t}}$ et $\mathbf{t} = \dfrac{\mathbf{d}}{\mathbf{v}}$

Ex :

▶ **Un automobiliste parcourt 280 km en 4 heures. Quelle est sa vitesse moyenne** ?

On note v la vitesse moyenne, d la distance parcourue, t la durée du parcours

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{t}} = \frac{280 \text{ km}}{4 \text{ h}} = \mathbf{70\ km/h}$$

70 **km/h** peut s'écrire 70 **km.h**$^{-1}$

▶ **Un train circule pendant 4,5 heures à 70 km/h de moyenne.**
Quelle est la distance parcourue ?

On note v la vitesse moyenne, d la distance parcourue, t la durée du parcours

$$\mathbf{d = v \times t} = 70 \times 4{,}5 = \mathbf{315\ km}$$

▶ **Un routier a effectué 252 km à 63 km/h de moyenne.**
Quelle est la durée du parcours ?

On note v la vitesse moyenne, d la distance parcourue, t la durée du parcours

$$\mathbf{d = v \times t} \text{ donc } \mathbf{t} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{v}} = \frac{252}{63} = \mathbf{4\ h}$$

▶ **Exprimer 8,64 km/h en mètres par seconde (m/s)**

$$\mathbf{V = 8{,}64\ km/h} = \frac{8{,}64 \text{ km}}{1 \text{ h}} = \frac{8\,640\text{m}}{3600\text{s}} = \frac{8640}{3600} \times \frac{1\text{m}}{1\text{s}} = \mathbf{2{,}4\ m/s} \ \ (\text{ou m.s}^{-1})$$