

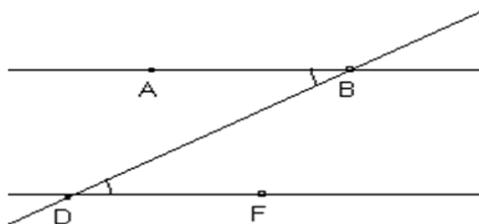
### Corrigé

- Les angles  $\widehat{A}_4$  et  $\widehat{B}_5$  sont alternes-internes.
- Les angles  $\widehat{A}_3$  et  $\widehat{B}_6$  sont alternes-internes.

## 2) Propriétés

### Propriété 1

Si deux angles alternes-internes sont formés par deux droites parallèles et une sécante, alors ils ont la même mesure.



Les droites (AB) et (DF) sont parallèles.  
La droite (BD) est sécante à (AB) et à (DF)

Données :

$\widehat{ABD}$  et  $\widehat{BDF}$  sont deux angles alternes-internes.

(AB) // (DF)

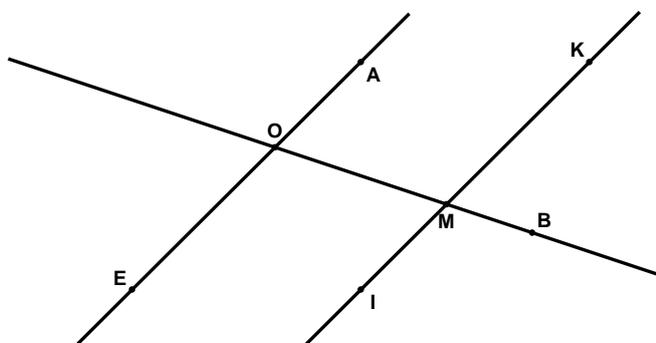
Conclusion :

$mes \widehat{ABD} = mes \widehat{BDF}$

### Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre, les droites (AE) et (KI) sont parallèles. La droite (OM) est sécante aux droites (AE) et (KI) respectivement en O et M.

- 1) Justifie que les angles  $\widehat{AOM}$  et  $\widehat{OMI}$  ont la même mesure.
- 2) Justifie que les angles  $\widehat{EOM}$  et  $\widehat{OMK}$  ont la même mesure.



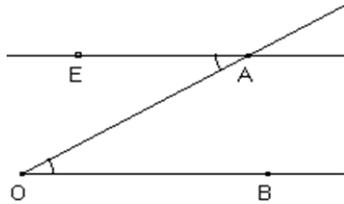
### Corrigé

1) Les angles  $\widehat{AOM}$  et  $\widehat{OMI}$  sont des angles alternes-internes formés par deux droites parallèles et une sécante commune. Donc les angles  $\widehat{AOM}$  et  $\widehat{OMI}$  ont la même mesure

2) Les angles  $\widehat{EOM}$  et  $\widehat{OMK}$  sont des angles alternes-internes formés par deux droites parallèles et une sécante commune. Donc les angles  $\widehat{EOM}$  et  $\widehat{OMK}$  ont la même mesure

### Propriété 2

Si deux droites forment avec une sécante deux angles alternes-internes de même mesure, alors elles sont parallèles.



La droite (AO) est sécante à (AE) et à (OB)

Données :

$\widehat{EAO}$  et  $\widehat{AOB}$  sont deux angles alternes-internes.

$\text{mes } \widehat{EAO} = \text{mes } \widehat{AOB}$

Conclusion:

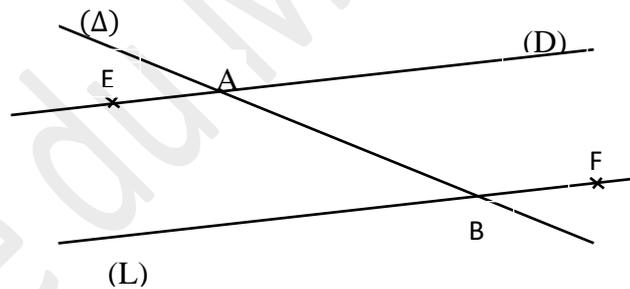
$(EA) // (OB)$

### Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre, la droite  $(\Delta)$  est sécante aux droites  $(D)$  et  $(L)$  respectivement en A et en B.

De plus les angles  $\widehat{EAB}$  et  $\widehat{ABF}$  ont la même mesure.

Justifie que les droites  $(D)$  et  $(L)$  sont parallèles.



### Solution

Les angles  $\widehat{EAB}$  et  $\widehat{ABF}$  sont des angles alternes-internes formés par les droites  $(D)$  et  $(L)$  et la sécante  $(\Delta)$ .

De plus, les angles  $\widehat{EAB}$  et  $\widehat{ABF}$  ont la même mesure.

Donc, les droites  $(D)$  et  $(L)$  sont parallèles.

## II. ANGLES CORRESPONDANTS

### 1) Présentation

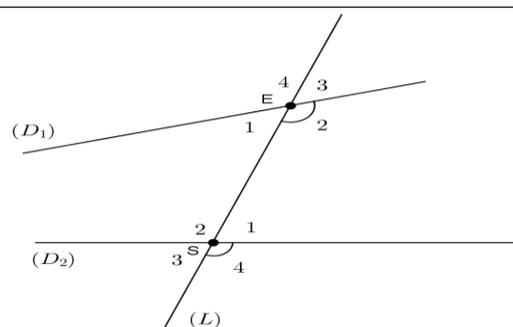
Sur la figure ci-contre, la droite  $(L)$  est sécante aux droites  $(D_1)$  et  $(D_2)$  respectivement en E et en S.

- Les angles  $\widehat{E_2}$  et  $\widehat{S_4}$  sont des angles correspondants.

-  $\widehat{S_1}$  et  $\widehat{E_3}$  sont des angles correspondants ;

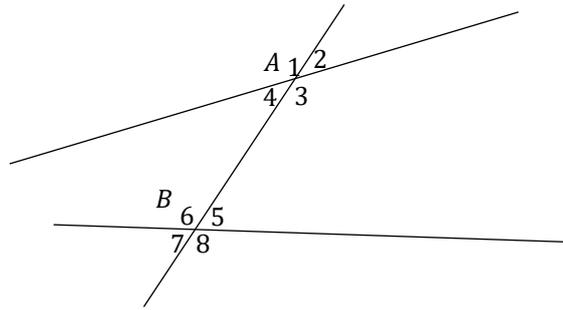
-  $\widehat{S_2}$  et  $\widehat{E_4}$  sont des angles correspondants ;

-  $\widehat{S_3}$  et  $\widehat{E_1}$  sont des angles correspondants.



## Exercice de fixation

Sur la figure ci-dessous, la droite  $(AB)$  est sécante aux droites  $(D_1)$  et  $(D_2)$  respectivement en A et en B. Cite tous les angles correspondants.



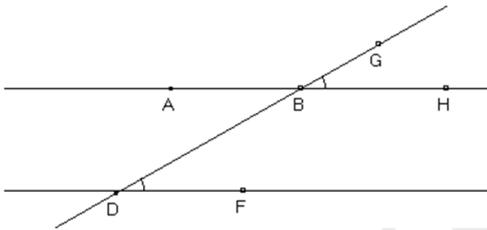
## Corrigé

- Les angles  $\widehat{A_1}$  et  $\widehat{B_6}$  sont deux angles correspondants.
- Les angles  $\widehat{A_4}$  et  $\widehat{B_7}$  sont deux angles correspondants.

## 2) Propriétés

### Propriété 1

Si deux angles correspondants sont formés par deux droites parallèles et une sécante, alors ils ont la même mesure.



Les droites  $(AB)$  et  $(DF)$  sont parallèles.  
La droite  $(BD)$  est sécante à  $(AB)$  et à  $(DF)$ .

Données :

$\widehat{BDF}$  et  $\widehat{HBG}$  sont deux angles correspondants.

$(AB) // (DF)$

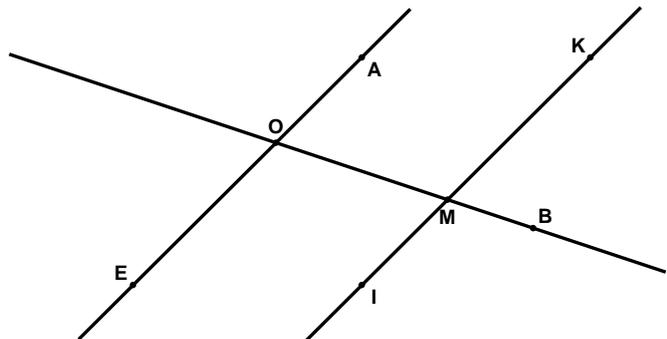
Conclusion :

$$\text{mes } \widehat{BDF} = \text{mes } \widehat{HBG}$$

## Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre, les droites  $(AE)$  et  $(KI)$  sont parallèles. La droite  $(OM)$  est sécante aux droites  $(AE)$  et  $(KI)$  respectivement en O et en M.

- 1) Justifie que les angles  $\widehat{AOM}$  et  $\widehat{KMB}$  ont la même mesure.
- 2) Justifie que les angles  $\widehat{EOM}$  et  $\widehat{IMB}$  ont la même mesure.

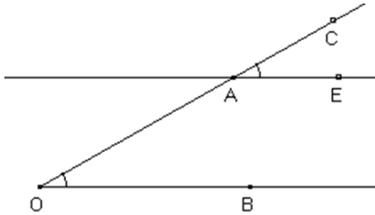


**Corrigé**

- 1) Les angles  $\widehat{AOM}$  et  $\widehat{KMB}$  sont deux angles correspondants formés par deux droites parallèles et la sécante commune  $(OM)$ . Donc les angles  $\widehat{AOM}$  et  $\widehat{KMB}$  ont la même mesure.
- 2) Les angles  $\widehat{EOM}$  et  $\widehat{IMB}$  sont deux angles correspondants formés par deux droites parallèles et une sécante commune. Donc les angles  $\widehat{EOM}$  et  $\widehat{IMB}$  ont la même mesure.

**Propriété 2**

Si deux droites forment avec une sécante deux angles correspondants de même mesure, alors elles sont parallèles.



La droite  $(AO)$  est sécante à  $(AE)$  et à  $(OB)$ .

Données :

$\widehat{CAE}$  et  $\widehat{BOA}$  sont deux angles correspondants.

$\text{mes } \widehat{CAE} = \text{mes } \widehat{BOA}$

Conclusion :

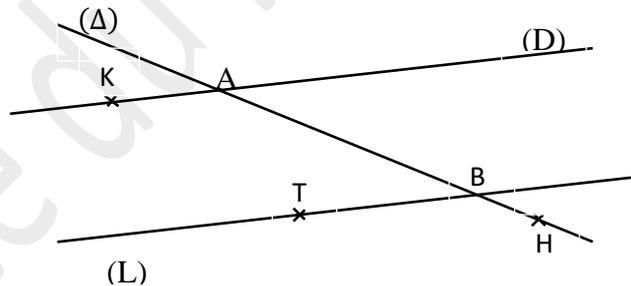
$(EA) // (OB)$

**Exercice de fixation**

Sur la figure ci-contre, la droite  $(\Delta)$  est sécante aux droites  $(D)$  et  $(L)$  respectivement en  $A$  et en  $B$ .

De plus, les angles  $\widehat{KAB}$  et  $\widehat{TBH}$  ont la même mesure.

Justifie que les droites  $(D)$  et  $(L)$  sont parallèles.



**Corrigé**

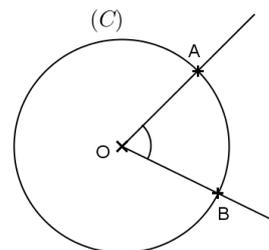
Les angles  $\widehat{KAB}$  et  $\widehat{TBH}$  sont deux angles correspondants formés par les droites  $(D)$  et  $(L)$  et la sécante  $(\Delta)$ . De plus les deux angles  $\widehat{KAB}$  et  $\widehat{TBH}$  ont la même mesure. Donc, les droites  $(D)$  et  $(L)$  sont parallèles.

**III. ANGLE AU CENTRE**

**1) Définition**

On appelle *angle au centre* d'un cercle, tout angle ayant pour sommet le centre de ce cercle.

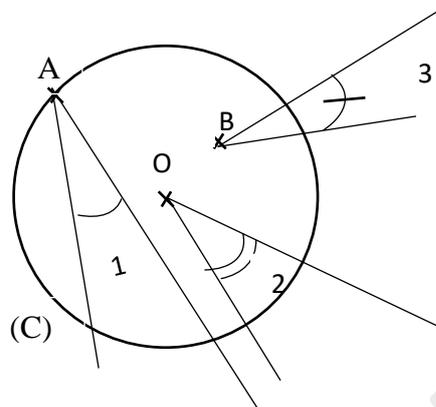
Sur la figure ci-contre,  $(C)$  est un cercle de centre  $O$ .  $A$  et  $B$  sont deux points distincts de  $(C)$ .  $\widehat{AOB}$  est un angle au centre du cercle  $(C)$ .



### Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre O.

Parmi les angles 1 ; 2 et 3, quel est l'angle au centre. Justifie ta réponse.



### Corrigé

- L'angle 1 n'est pas un angle au centre car son sommet A n'est pas le centre du cercle.
- L'angle 3 n'est pas un angle au centre car son sommet B n'est pas le centre du cercle.
- L'angle 2 est un angle au centre car son sommet O est le centre du cercle.

### 2) Arc intercepté par un angle au centre

#### Présentation

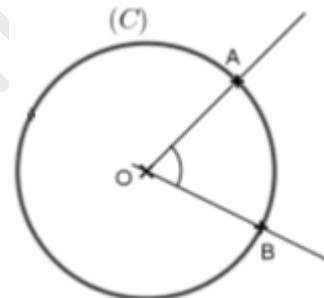
(C) est un cercle de centre O.

A et B sont deux points de (C).

- Les points A et B déterminent deux parties du cercle appelées **arcs de cercle**.

- Lorsque [AB] n'est pas un diamètre de (C), l'arc le plus court est noté  $\widehat{AB}$  et l'arc le plus long est noté  $\widehat{AB}$ .

On dit que l'angle au centre  $\widehat{AOB}$  intercepte l'arc  $\widehat{AB}$  ou l'arc  $\widehat{AB}$  est intercepté par l'angle au centre  $\widehat{AOB}$ .



### 3) Longueur d'un arc de cercle

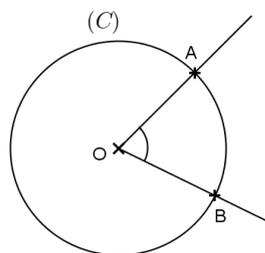
#### Propriété

La longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre qui l'intercepte.

#### Remarque

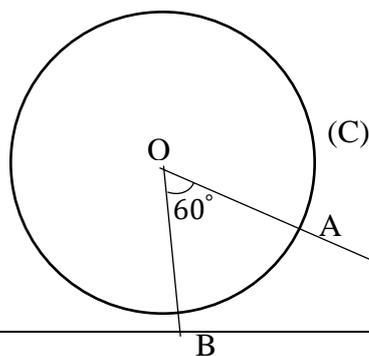
Un arc d'un cercle de centre O et de rayon r, intercepté par un angle au centre  $\widehat{AOB}$  a pour longueur :  $\pi r \times \frac{\text{mes } \widehat{AOB}}{180^\circ}$ .

Longueur  $\widehat{AB} = r \times \frac{\text{mes } \widehat{AOB}}{180^\circ}$ .



### Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre,  $(C)$  est un cercle de centre  $O$  et de rayon  $2\text{ cm}$ .  
 $A$  et  $B$  sont deux points de  $(C)$  tels que  $\text{mes } \widehat{AOB} = 60^\circ$ .  
Calcule la longueur en centimètres de l'arc  $\widehat{AB}$ .  
On prendra  $\pi = 3,14$ .



### Corrigé

Sachant que  $\text{mes } \widehat{AOB} = 60^\circ$ , calculons la longueur en  $cm$  de l'arc  $\widehat{AB}$ .

$$\text{Longueur } \widehat{AB} = r \times \frac{\text{mes } \widehat{AOB}}{180^\circ}$$

$$\text{Longueur } \widehat{AB} = 2 \times \pi \times \frac{60}{180} \text{ cm} = 2\pi \times \frac{1}{3} \text{ cm} = \frac{2\pi}{3} \text{ cm}$$

La longueur de l'arc est de  $\frac{2\pi}{3} \text{ cm}$ , soit environ  $2,09 \text{ cm}$ .

### 4) Propriétés

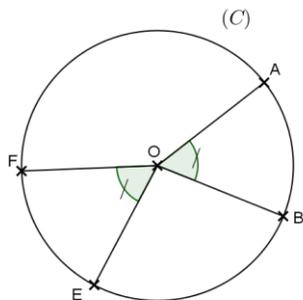
#### Propriété 1

Dans un cercle, si deux angles au centre ont la même mesure, alors ils interceptent deux arcs de même longueur.

$\widehat{AOB}$  et  $\widehat{EOF}$  sont des angles au centre.

$\text{mes } \widehat{AOB} = \text{mes } \widehat{EOF}$

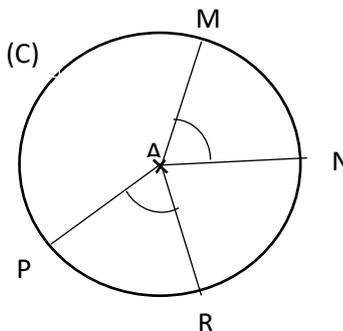
Les arcs  $\widehat{AB}$  et  $\widehat{EF}$  sont de même longueur



### Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre,  $(C)$  est un cercle de centre  $A$ .  
 $M, N, P$  et  $R$  sont des points de  $(C)$  tels que  $\text{mes } \widehat{MAN} = \text{mes } \widehat{PAR}$ .

Justifie que les arcs  $\widehat{MN}$  et  $\widehat{PR}$  ont la même longueur.

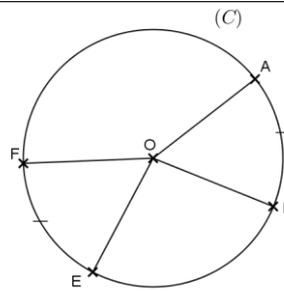


## Corrigé

Les angles au centre  $\widehat{MAN}$  et  $\widehat{PAR}$  ont la même mesure.  
Donc, les arcs  $\widehat{MN}$  et  $\widehat{PR}$  ont la même longueur.

### Propriété 2

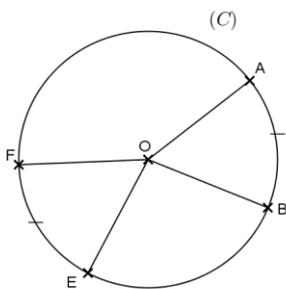
Dans un cercle, si deux arcs ont la même longueur, alors ils sont interceptés par deux angles au centre de même mesure.



$\widehat{AOB}$  et  $\widehat{EOF}$  sont des angles au centre.

Les arcs  $\widehat{AB}$  et  $\widehat{EF}$  sont de même longueur.

$$\text{mes}\widehat{AOB} = \text{mes}\widehat{EOF}$$

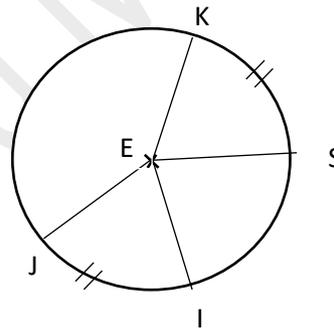


### Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre E.

Les arcs  $\widehat{JI}$  et  $\widehat{KS}$  ont la même longueur.

Justifie que les angles au centre  $\widehat{JEI}$  et  $\widehat{KES}$  ont la même mesure.



## Corrigé

Les angles au centre  $\widehat{JEI}$  et  $\widehat{KES}$  interceptent respectivement les arcs  $\widehat{JI}$  et  $\widehat{KS}$ .

Les arcs  $\widehat{JI}$  et  $\widehat{KS}$  ont la même longueur. Donc, les angles  $\widehat{JEI}$  et  $\widehat{KES}$  ont la même mesure.

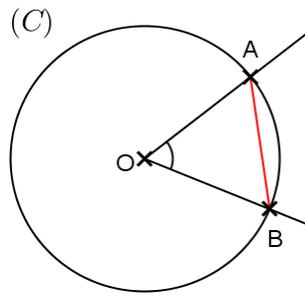
### 5) Cordes et arcs de cercle

#### a) Définition

Une corde d'un cercle est un segment dont les extrémités sont deux points du cercle.

#### b) Présentation

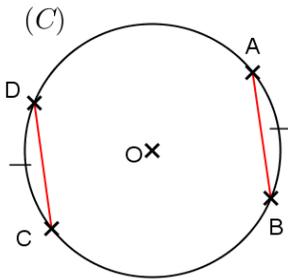
(C) est un cercle de centre O. A et B sont deux points de (C).  
 Le segment [AB] est une **corde** du cercle (C).  
 La corde [AB] **sous-tend** les deux arcs d'extrémités A et B.



### c) Propriétés

#### Propriété 1

Dans un cercle, si deux arcs ont la même longueur, alors les deux cordes qui les sous-tendent ont la même longueur.



[AB] et [CD]  
sont deux cordes  
de (C).

Les arcs  $\widehat{AB}$  et  
 $\widehat{CD}$  sont de  
même longueur.

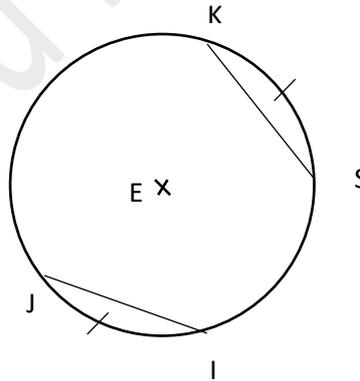
$$AB = CD$$

#### **Exercice de fixation**

Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre E.

I, J, K et S sont des points de (C) tels que les arcs  $\widehat{IJ}$  et  $\widehat{KS}$  ont la même longueur.

Justifie que :  $KS = IJ$ .



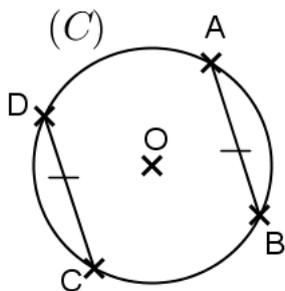
#### **Corrigé**

[IJ] et [KS] sont deux cordes de (C) qui sous-tendent les arcs  $\widehat{IJ}$  et  $\widehat{KS}$ .

On sait que les arcs  $\widehat{IJ}$  et  $\widehat{KS}$  ont la même longueur ; donc  $KS = IJ$ .

#### Propriété 2

Dans un cercle, si deux cordes ont la même longueur, alors elles sous-tendent deux arcs de même longueur.



[AB] et [CD]  
sont deux cordes  
de (C).

$AB = CD$

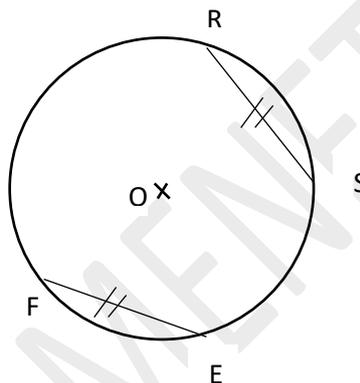
Les arcs  $\widehat{AB}$  et  $\widehat{CD}$  sont de  
même longueur.

### Exercice de fixation

Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre O.

R, S, F et E sont des points de (C) tels que les cordes [RS] et [EF] ont la même longueur.

Justifie que les arcs  $\widehat{EF}$  et  $\widehat{RS}$  ont la même longueur.



### Corrigé

Les segments [EF] et [RS] sont des cordes du cercle (C) qui ont la même longueur, donc les arcs  $\widehat{EF}$  et  $\widehat{RS}$  qu'ils sous-tendent ont la même longueur.

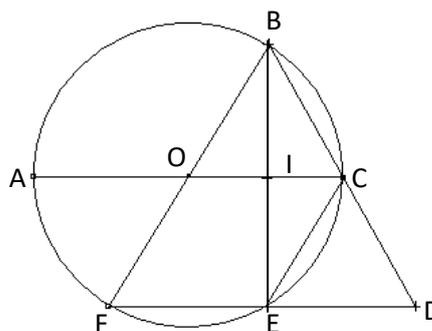
### C- SITUATION D'ÉVALUATION

A la recherche d'un logo pour le club mathématique du collège, une élève de la classe de quatrième propose à ses camarades le motif ci-contre.

Elle donne les précisions suivantes :

- . Le point O est le centre du cercle ;
- . Les droites (AI) et (FD) sont parallèles ;
- . Les droites (OF) et (CE) sont parallèles.

Le meilleur élève de la classe affirme que dans cette figure, plusieurs angles ont la même mesure que l'angle  $\widehat{AOF}$ .



Les autres élèves se mettent au travail pour vérifier cette affirmation.

En utilisant les outils mathématiques au programme, détermine les angles qui ont la même mesure que l'angle  $\widehat{AOF}$ .

### Corrigé

Les angles qui ont la même mesure que l'angle  $\widehat{AOF}$  sont :

- $\widehat{BOC}$ , car opposé à  $\widehat{AOF}$  par le sommet O ;
- $\widehat{EFO}$ , car  $\widehat{BOC}$  et  $\widehat{EFO}$  sont des correspondants formés par les parallèles (AC) et (FD), et la sécante commune (BF) ;

- $\widehat{ACE}$ , car  $\widehat{ACE}$  et  $\widehat{AOF}$  sont deux angles correspondants formés par les parallèles (BF) et (CE), et la sécante commune (AC).
- $\widehat{BFE}$ , car  $\widehat{BFE}$  et  $\widehat{AOF}$  sont deux angles alternes-internes formés par les parallèles (AI) et (FD), et la sécante commune (BF).

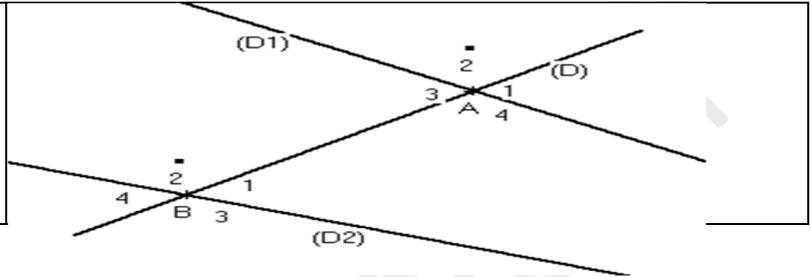
## D- EXERCICES

### D-1 Exercices de fixation

#### Exercice 1

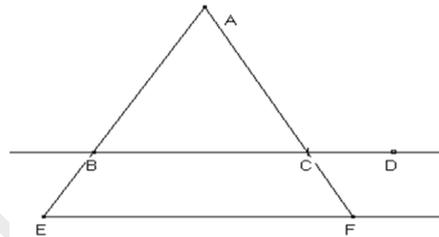
Observe la figure ci-contre :

- 1) Cite des angles alternes-internes
- 2) Cite des angles correspondants



#### Exercice 2

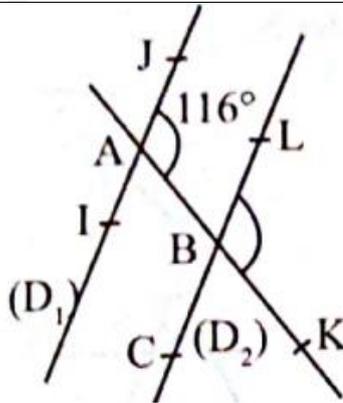
Sur la figure ci-contre, (BC)//(EF)  
Cite des angles qui ont la même mesure en justifiant ta réponse.



#### Exercice 3

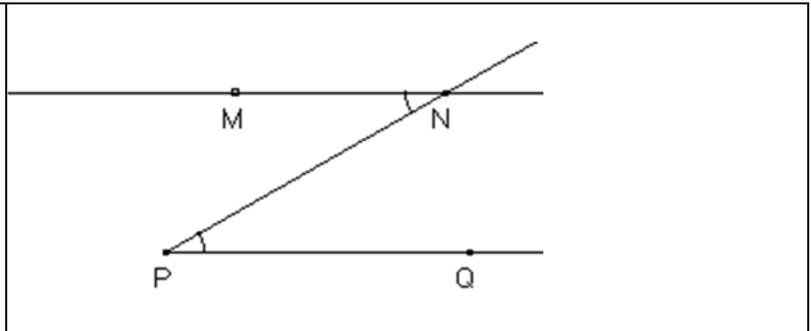
On considère la figure codée ci-contre où les droites  $(D_1)$  et  $(D_2)$  sont parallèles.

Détermine la mesure de l'angle  $\widehat{KBL}$ .



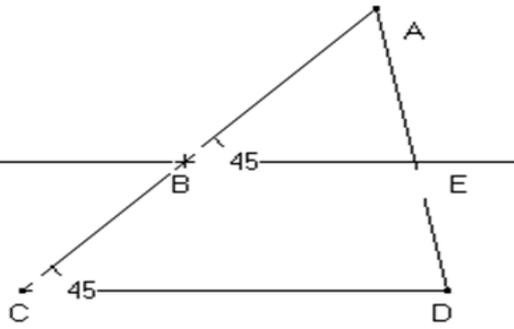
#### Exercice 4

Sur la figure ci-dessous, les angles  $\widehat{MNP}$  et  $\widehat{NPQ}$  ont la même mesure.  
Justifie que (MN)//(PQ)



### Exercice 5

Observe la figure ci-contre.  
Justifie que les droites (BE)  
Et (CD) sont parallèles.



### Exercice 6

Dans chacune des figures ci-dessous, (C) est un cercle de centre O.  
Nomme les angles au centre du cercle (C).

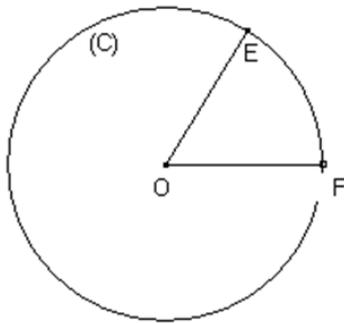


figure 1

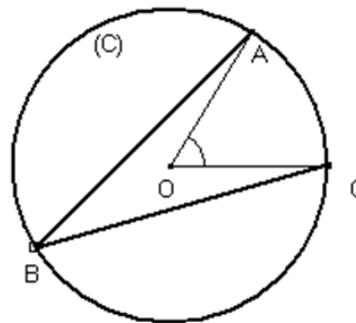


figure 2

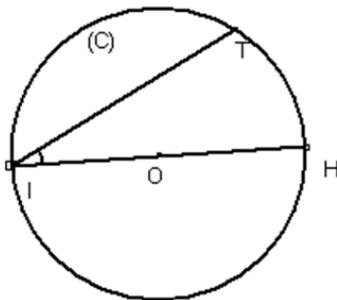


figure 3

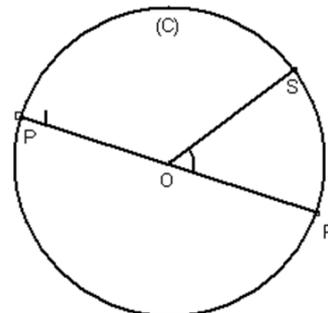


figure 4

### Exercice 7

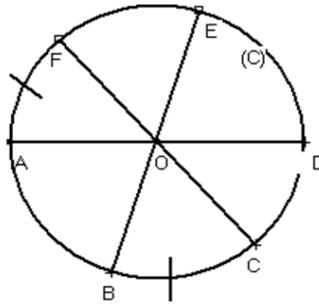
(C) est un cercle de centre O et de rayon 3 cm.

Calcule la longueur en cm de chacun des arcs interceptés respectivement par un angle au centre de  $30^\circ$  et  $135^\circ$ .

### Exercice 8

(C) est un cercle de centre O.  
Observe attentivement la figure codée ci-contre.

- 1) Justifie que les arcs  $\widehat{AB}$  et  $\widehat{ED}$  ont la même longueur.
- 2) Justifie que les angles au centre  $\widehat{FOA}$  et  $\widehat{BOC}$  ont la même mesure.



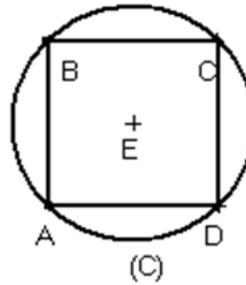
### D-2 Exercices de renforcement

#### Exercice 9

(C) est un cercle de centre E et de rayon 1 cm.

ABCD est un carré inscrit dans ce cercle.

Justifie que les arcs  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{BC}$ ,  $\widehat{CD}$  et  $\widehat{DA}$  ont la même longueur.

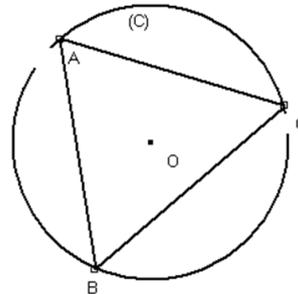


#### Exercice 10

(C) est un cercle de centre O.

A, B et C sont trois points de (C) tels que les arcs  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{BC}$  et  $\widehat{AC}$  ont la même longueur.

Justifie que le triangle ABC est équilatéral.

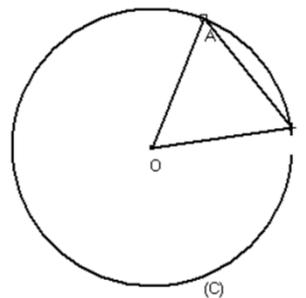


#### Exercice 11

Sur la figure ci-contre, qui n'est pas en vraie grandeur, (C) est un cercle de centre O.

A et B sont deux points de (C) tels que AOB est un triangle équilatéral de coté 2,1 cm.

- 1) Calcule la longueur de l'arc  $\widehat{AB}$ .
- 2) Déduis-en la longueur de l'arc  $\widehat{AB}$ .



### Exercice 12

On considère un cercle (C) de centre O et de diamètre [BC].

A est un point de (C) et R est le milieu du segment [AC].

La droite (RO) coupe le cercle en deux points E et F tel que F appartient à l'arc  $\widehat{BC}$  ne contenant pas le point A.

- Réalise une figure
- Démontre que les angles  $\widehat{ABC}$  et  $\widehat{BOF}$  ont la même mesure
- Démontre que les segments [BF] et [EC] ont la même longueur.

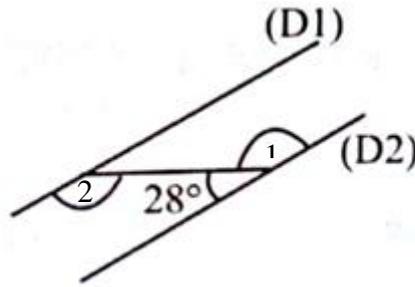
### D-3 Exercices d'approfondissement

#### Exercice 13

On considère la figure codée ci-contre.

Les droites  $(D_1)$  et  $(D_2)$  sont parallèles.

Détermine les mesures des angles  $\textcircled{1}$  et  $\textcircled{2}$ .



#### Corrigé

Les angles 1 et 2 sont alternes – internes formés par les droites parallèles  $(D_1)$  et  $(D_2)$ , et la sécante commune. Ils ont donc la même mesure.

Or la mesure de 1 est  $180 - 28 = 152^\circ$ .

Donc la mesure de 2 est  $152^\circ$ .

#### Exercice 14

La figure ci-contre représente le logo d'une société. Sur cette figure, EFG est un triangle isocèle en E inscrit dans le cercle (C) de centre O et de rayon 4 cm.

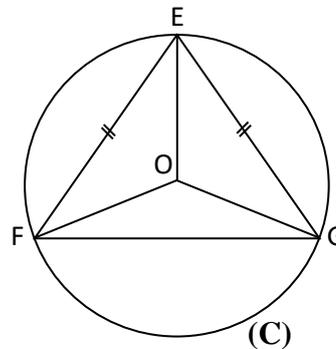
1/ Justifie que les arcs  $\widehat{EF}$  et  $\widehat{EG}$  ont la même longueur.

2/ Compare les angles au centre  $\widehat{EOF}$  et  $\widehat{EOG}$  qui interceptent respectivement les arcs  $\widehat{EF}$  et  $\widehat{EG}$ . Justifie ta réponse.

3/ Déduis-en la mesure de l'angle  $\widehat{EOF}$  sachant que la somme des mesures des trois angles au centre de (C) vaut  $360^\circ$  et la mesure de  $\widehat{FOG}$  vaut  $140^\circ$ .

4/ Calcule la longueur de l'arc  $\widehat{FG}$ . Tu donneras le résultat avec deux chiffres après la virgule.

Prends  $\pi = 3,14$ .



#### Corrigé

- Les arcs  $\widehat{EF}$  et  $\widehat{EG}$  sont sous tendus par les cordes de même longueur [EF] et [EG], ils ont donc la même longueur.
- Les deux angles interceptent deux arcs de même longueur ( $\widehat{EF}$  et  $\widehat{EG}$ ), ils ont donc la même mesure.
- On a :  $mes\widehat{FOG} + mes\widehat{FOE} + mes\widehat{EOG} = 360^\circ$  ;  
or  $mes\widehat{FOE} = mes\widehat{EOG}$  et  $mes\widehat{FOG} = 140^\circ$  ;  
donc :  $2\ mes\widehat{FOE} = 360 - 140$ , c'est-à-dire que  $mes\widehat{FOE} = 110^\circ$ .
- La longueur de l'arc  $\widehat{EF}$  est :  $\pi \times 4 \times \frac{110}{180} \approx 7,65\text{ cm}$ .