



Code :

Thème : Calculs Algébriques

LEÇON 7 : ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DANS \mathbb{Q}

Durée : 8 heures

A. SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pendant les congés de Noël, le club culturel d'un collège a organisé une journée théâtrale dans la salle de spectacle de l'école. Il y avait 85 spectateurs :

- les spectateurs assis ont payé chacun 500 F le billet d'entrée ;
- les spectateurs debout ont payé chacun 150 F le billet d'entrée.

La recette totale de la journée théâtrale est de 30 250 F.

Pour vérifier que le trésorier du club a été correct dans les comptes, les élèves de la 4^{ème} de ce club décident de résoudre une équation pour déterminer le nombre de spectateurs assis.

B. CONTENU DE LA LEÇON

I. Équations du premier degré dans \mathbb{Q}

1. Définition

a, b et c sont des nombres rationnels tels que a différent de zéro.

Une égalité du type « $ax + b = c$ » où x désigne un nombre rationnel est appelée équation d'inconnue x .

Vocabulaire

- $ax + b$ est le premier membre ou le membre de gauche de l'équation $ax + b = c$.
- c est le second membre ou le membre de droite de l'équation $ax + b = c$.
- Tout nombre rationnel pour lequel l'égalité $ax + b = c$ est vraie, est appelé solution de l'équation $ax + b = c$.

Remarque

Résoudre une équation, c'est trouver toutes les solutions de cette équation.

Exemple

$2x + 3 = 5$ est **une équation** d'inconnue x .

- $2x + 3$ est le premier membre ;
- 5 est le second membre ;
- 1 est solution de l'équation $2x + 3 = 5$ car $2 \times 1 + 3 = 5$.

Exercices de fixation

Exercice 1

Relie chaque équation à son inconnue.

$x + 2 = 12$	×	×	y
$8 = 3 + 5t$	×	×	a
$4y - 3 = -y$	×	×	x
$-23 - 2a = 0$	×	×	t

Corrigé

Relions chaque équation à son inconnue.

$x + 2 = 12$	×	×	y
$8 = 3 + 5t$	×	×	a
$4y - 3 = -y$	×	×	x
$-23 - 2a = 0$	×	×	t

Exercice 2

Pour chacune des équations suivantes, entoure le premier membre.

$$x - 7 = -11 ; 10 = -2 + 5z ; 7t + 3 = -2t ; 40 - 3k = 9.$$

Corrigé

Relions chaque équation à son premier membre

$$\textcircled{x - 7} = -11 ; \textcircled{10} = -2 + 5z ; \textcircled{7t + 3} = -2t ; \textcircled{40 - 3k} = 9$$

Exercice 3

1. Justifie que le nombre -4 est solution de l'équation $-2 + x = -6$.
2. Justifie que le nombre -2 n'est pas solution de l'équation $9x = -10$.
3. Justifie que le nombre 6 est solution de l'équation $2x + 7 = 19$.

Corrigé

1. On a : $-2 + (-4) = -6$.
Donc -4 est solution de l'équation : $-2 + x = -6$.
2. On a : $9 \times (-2) = -18$, or $-18 \neq -10$.
Donc -2 n'est pas solution de l'équation : $9x = -10$.
3. On a : $2 \times 6 + 7 = 19$.
Donc 6 est solution de l'équation : $2x + 7 = 19$

2. Égalités et opérations

Propriété 1

En ajoutant un même nombre rationnel à chaque membre d'une égalité, on obtient une nouvelle égalité.

a, b et c sont des nombres rationnels.

Si $a = b$, alors $a + c = b + c$.

Exemple

$2x + 1 = 2$, donc $2x + 1 + 3 = 2 + 3$, c'est-à-dire : $2x + 4 = 5$.

Exercice de fixation

Réponds par Vrai ou par Faux à chacune des affirmations ci-dessous :

- a) Si $2x + 4 = 1$, alors $2x + 5 = 3$.
- b) Si $2x + 4 = 1$, alors $2x + 9 = 6$.
- c) Si $2x + 4 = 1$, alors $2x - 3 = -6$.
- d) Si $2x + 4 = 1$, alors $2x + 3 = 3$.

Corrigé

- a) Faux b) Vrai c) Vrai d) Faux

Propriété 2

En multipliant par un même nombre rationnel non nul, chaque membre d'une égalité, on obtient une nouvelle égalité.

a, b et k sont des nombres rationnels tels que k est différent de zéro

Si $a = b$ alors $ka = kb$

Exemple

$2x = 4$, donc $2x \times 3 = 4 \times 3$; c'est-à-dire : $6x = 12$.

Exercice de fixation

a, b et c sont des nombres rationnels non nuls.

Complète le tableau ci-dessous par vrai ou par faux.

$Si\ c = b, alors\ ac = ab$	
$Si\ c = b, alors\ ac = bc$	
$Si\ a = b, alors\ ab = bc$	

Corrigé

$Si\ c = b, alors\ ac = ab$	vrai
$Si\ c = b, alors\ ac = bc$	Faux
$Si\ a = b, alors\ ab = bc$	faux

3. Résolution d'une équation

Propriété 1

a et b étant deux nombres rationnels, l'équation : $a + x = b$ a pour unique solution la différence $b - a$.

Exemple

$x + 5 = 7$ a pour solution $x = 7 - 5 = 2$.

Exercice de fixation

Résous dans \mathbb{Q} chacune des équations ci-dessous :

- a) $x + 12 = 1$.
- b) $-13 + x = 0$.

Corrigé

- a) $x = 1 - 12 = -11$.
-11 est la solution de cette équation.
- b) $x = 0 - (-13) = 13$.
13 est la solution de cette équation.

Propriété 2

a et b étant deux nombres rationnels (a différent de zéro), l'équation : $ax = b$ a pour unique solution le quotient $\frac{b}{a}$.

Exemple

$4x = 8$ a pour solution $= \frac{8}{4} = 2$.

Exercice de fixation

Résous dans \mathbb{Q} chacune des équations ci-dessous :

- a) $4x = 2$.
- b) $-3x = 5$.

Corrigé

- a) $x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
 $\frac{1}{2}$ est la solution de l'équation.
- b) $x = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$.
 $-\frac{5}{3}$ est la solution de l'équation.

II. Inéquation du premier degré dans \mathbb{Q}

1. Définition

a, b et c sont des nombres rationnels tels que a est différent de zéro.

Une inégalité du type $ax + b > c$ ou $ax + b < c$ dans laquelle x désigne un nombre rationnel est appelée inéquation d'inconnue x .

Vocabulaire

- $ax + b$ est le premier membre ou le membre de gauche de l'inéquation $ax + b > c$ (ou $ax + b < c$).
- c est le second membre ou le membre de droite de l'inéquation $ax + b > c$ (ou $ax + b < c$).
- Tout nombre rationnel pour lequel l'inégalité $ax + b > c$ (ou $ax + b < c$) est vraie, est appelée solution de l'inéquation $ax + b > c$ (ou $ax + b < c$).

Remarque

Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les solutions de cette inéquation.

Exemple

$3x + 4 < 7$ est une **inéquation** d'inconnue x .

- $3x + 4$ est le premier membre ;
- 7 est le second membre ;
- -2 est une solution de l'inéquation $3x + 4 < 7$ car $3 \times (-2) + 4 = -2$ et $-2 < 7$.

Exercices de fixation

Exercice 1

Parmi les écritures ci-dessous, entoure celles qui sont des inéquations.

- a) $3x + 3$; b) $4t + 1 < 6$ c) $2x + 56 > 22$; d) $6 + a = 27$; e) $3 = 9 - x$.

Corrigé

- a) $3x + 3$; b) $(4t + 1 < 6)$ c) $(2x + 56 > 22)$; d) $6 + a = 27$; e) $3 = 9 - x$

Exercice 2

Pour chacune des inéquations ci-dessous, entoure le second membre.

- a) $x + 7 > 11$; b) $9 > 12 + t$ c) $3z - 17 < 15$; d) $3 - t < 14$.

Corrigé

- a) $x + 7 > (11)$; b) $9 > (12 + t)$ c) $3z - 17 < (15)$; d) $3 - t < (14)$.

2. Inégalités et opérations

Propriété 1

En ajoutant un même nombre rationnel à chaque membre d'une inégalité on obtient une nouvelle inégalité de même sens.

a, b et c sont des nombres rationnels.

- Si $a < b$, alors $a + c < b + c$
- Si $a > b$, alors $a + c > b + c$

Exemples

- $x + 1 < 2$, donc $x + 1 + 4 < 2 + 4$; c'est-à-dire : $x + 5 < 6$.
- $2x + 4 > 0$, donc $2x + 4 + 5 > 0 + 5$; c'est-à-dire : $2x + 9 > 5$.

Exercice de fixation

a, b et c sont des nombres rationnels.

Complète le tableau ci-dessous par vrai ou par faux.

$Si a < b, alors a + c > b + c$	
$Si a < b, alors a + c < b + c$	

Corrigé

$Si a < b, alors a + c > b + c$	faux
$Si a < b, alors a + c < b + c$	vrai

Propriété 2

En multipliant par un même nombre non nul chaque membre d'une inégalité, on obtient :

- une nouvelle inégalité de même sens si ce nombre est positif ;
- une nouvelle inégalité de sens contraire si ce nombre est négatif.

a, b et k sont des nombres rationnels.

- k est **positif et non nul**.
 - Si $a < b$, alors $ka < kb$.
 - Si $a > b$, alors $ka > kb$.
- k est **négatif et non nul**.
 - Si $a < b$, alors $ka > kb$.
 - Si $a > b$, alors $ka < kb$.

Exemples

- $4x < 13$, donc $2 \times 4x < 2 \times 13$; c'est-à-dire : $8x < 26$.
- $5x < 7$, donc $-3 \times 5x > -3 \times 7$; c'est-à-dire : $-15x > -21$.

Exercice de fixation

a, b et c sont des nombres rationnels.

Complète le tableau ci-dessous par vrai ou par faux.

$Si a < b$ et $c < 0$, alors $ac < bc$	
$Si a < b$ et $c > 0$, alors $ac < bc$	
$Si a < b$ et $c < 0$, alors $ac < bc$	
$Si a < b$ et $c < 0$, alors $ac > bc$	

Corrigé

$Si a < b$ et $c < 0$, alors $ac < bc$	faux
$Si a < b$ et $c > 0$, alors $ac < bc$	vrai
$Si a < b$ et $c < 0$, alors $ac < bc$	faux
$Si a < b$ et $c < 0$, alors $ac > bc$	vrai

3. Résolution d'une inéquation

Méthodes

- Pour résoudre une inéquation du type $x + a < b$ (ou $x + a > b$), on ajoute à chaque membre de l'inéquation l'opposé de a pour se ramener à une inéquation du type $x < u$ (ou $x > u$).
- Pour résoudre une inéquation du type $ax < b$ (ou $ax > b$), on multiplie chaque membre de l'inéquation par l'inverse de a pour se ramener à une inéquation du type $x < v$ (ou $x > v$).

Exemples

- Déterminons les solutions de l'inéquation $x - 8 < 5$.

$$x - 8 < 5 ;$$

$$x - 8 + 8 < 5 + 8 ;$$

$$x < 13 .$$

Tout nombre plus petit que 13 est solution de l'inéquation $x - 8 < 5$.

- Déterminons les solutions de l'inéquation $4x > 8$.

$$\frac{1}{4} \times (4x) > \frac{1}{4} \times 8 ;$$

$$x > \frac{8}{4} ;$$

$$x > 2.$$

Tout nombre plus grand que 2 est solution de l'inéquation $4x > 8$.

Exercices de fixation

Exercice 1

Transforme les inéquations ci-dessous en une inéquation du type $x > a$ ou $x < a$ ayant les mêmes solutions.

- a) $x + 11 < -8$.
- b) $x - 12 > -19$.
- c) $x - 3 < \frac{5}{4}$.

Corrigé

- a) $x + 11 < -8$;
 $x + 11 - 11 < -8 - 11$;
 $x < -19$.
- b) $x - 12 > -19$;
 $x - 12 + 12 > -19 + 12$;
 $x > -7$.
- c) $x - 3 < \frac{5}{4}$;
 $x < \frac{5}{4} + 3$;
 $x < \frac{17}{4}$.

Exercice 2

Détermine pour chacune de ces inéquations, trois nombres solutions.

- a) $2x < 5$.
- b) $-3x < -18$.

Corrigé

- a) Résolvons l'inéquation $2x < 5$.

$$\frac{1}{2} \times (2x) < \frac{1}{2} \times 5 ;$$
$$x < \frac{5}{2} .$$

Tout nombre plus petit que $\frac{5}{2}$ est solution de l'inéquation $2x < 5$.

Donc 0; 1 et -2 sont trois solutions de l'inéquation $2x < 5$.

- b) Résolvons l'inéquation $-3x < -18$.

$$-\frac{1}{3} \times (-3x) > -\frac{1}{3} \times (-18) ;$$
$$x > 6 .$$

Tout nombre plus grand que 6 est solution de l'inéquation $-3x < -18$.

Donc 7; 10 et $\frac{29}{4}$ sont trois solutions de l'inéquation $-3x < -18$.

C. SITUATION D'ÉVALUATION

René et Bilé sont deux cultivateurs de la région de Divo. Ils ont ensemble livré trois tonnes de cacao à la coopérative de leur village à raison de 700 F le kilogramme. La production de René pèse plus de deux tonnes.

Le gérant de la coopérative, après avoir payé René, annonce qu'il ne lui reste plus que la somme de 750 000 F dans sa caisse. Troublé par cette annonce, Bilé demande à son fils, élève en classe de 4^e qui l'accompagne, si le gérant peut payer la totalité de son argent. Ce dernier te sollicite pour répondre à la préoccupation de son papa.

- 1- Écris une inéquation qui traduit le poids (en kg) de la production de René.
- 2- Justifie que Bilé peut percevoir la totalité de son argent.

Corrigé

1-Notons x le poids (en kg) de la production de René.

Une inéquation qui traduit le poids de la production de René est : $x > 2000$.

2- René et Bilé ont vendu 3 tonnes et René a plus de 2 tonnes, donc Bilé a une production inférieure à 1 tonne soit 1000 kg.

Le prix d'une tonne de cacao est :

$700 \text{ F} \times 1000 = 700\,000 \text{ F}$ et $700\,000 < 750\,000$. Or, Bilé a moins de 1000 kg de cacao. Donc, Bilé peut percevoir la totalité de son argent.

D. EXERCICES

D-1 EXERCICES DE FIXATION

Exercice 1

a, b et c sont des nombres rationnels et x est l'inconnue.

Remplace les pointillés par le mot qui convient (**équation** , **égalité**, **premier**, **second**)

Unede la forme $ax + b = c$ est une
.....

$ax + b$ est le

c est le

Exercice 2

Remplace les pointillés par le mot qui convient (**ajoutant**, **égalité**, **inégalité**, **multipliant**, **non nul**)

Enun même nombre rationnel à chaque membre
d'une..... on obtient une nouvelle inégalité.

Enchaque membre d'une.....par un même
nombre rationnel....., on obtient une nouvelle égalité.

Exercice 3

Réponds par Vrai ou Faux aux affirmations suivantes.

- 1) 4 est solution de l'équation $x - 6 = 2$.
- 2) 28 est solution de l'équation $\frac{x}{2} - 4 = 9$.
- 3) 3 est solution de l'équation $3x + 4 = 2x + 7$.
- 4) -5 est solution de l'équation $\frac{x}{7} + 11 = -22$.

Exercice 4

Résous dans \mathbb{Q} , les inéquations suivantes.

$$2x - 3 < 4x - 7 \quad ; \quad y + 4 > 8$$
$$-5y + 3 > -7 \quad ; \quad -\frac{7}{8}x + 3 < 4.$$

D-2 EXERCICES DE RENFORCEMENT

Exercice 5

- 1) Traduis chacune des phrases suivantes par une équation :
 - a) La moitié d'un nombre est égal à 11.
 - b) Le double d'un nombre diminué de 3 est égal à 0.
- 2) Déterminer pour chaque équation de la question 1) le premier et le second membre.

Corrigé

1. a) Soit x ce nombre.

Alors, on a : $\frac{1}{2}x = 11$.

- b) Soit x ce nombre.

Alors, on a : $2x - 3 = 0$.

2. $\frac{1}{2}x$ est le premier membre et 11 est le second membre de l'équation $\frac{1}{2}x = 11$.
 $2x - 3$ est le premier membre et 0 est le second membre de l'équation $2x - 3 = 0$.

Exercice 6

Résous dans \mathbb{Q} chacune des équations ci-dessous.

1. $x + 2 = 5$; 2. $x + 14 = 6$; 3. $x - 7 = 3$; 4. $-x - 9 = 0$ 5. $4x = 8$; 6. $2t - 5 = 10$

Corrigé

1. $x + 2 = 5$

$$x + 2 - 2 = 5 - 2$$

$$x = 3$$

- 3 est la solution de l'équation $x + 2 = 5$.

2. $x + 14 = 6$

$$x + 14 - 14 = 6 - 14$$

$$x = -8.$$

-8 est la solution de l'équation $x + 14 = 6$.

3. $x - 7 = 3$

$$x - 7 + 7 = 3 + 7$$

$$x = 10.$$

10 est la solution de l'équation $x - 7 = 3$.

4. $-x - 9 = 0$

$$-x - 9 + 9 = 0 + 9$$

$$-x = 9$$

$$x = -9$$

-9 est la solution de l'équation $-x - 9 = 0$.

5. $4x = 8$

$$\frac{1}{4} \times 4x = 8 \times \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{8}{4}$$

$$x = 2$$

2 est la solution de l'équation $4x = 8$.

6. $2t - 5 = 10$

$$2t - 5 + 5 = 10 + 5$$

$$2t = 15$$

$$\frac{1}{2} \times 2t = 15 \times \frac{1}{2}$$

$$t = \frac{15}{2}.$$

$\frac{15}{2}$ est la solution de l'équation $2t - 5 = 10$.

Exercice 7

Traduis par une inéquation chacune des situations suivantes :

1. Le triple d'un nombre augmenté de 5 est supérieur à 1.
2. La différence d'un nombre et de 15 est inférieur à 10.
3. Le côté d'un carré est tel que le périmètre de ce carré est plus grand que 64 cm.

Corrigé

1. Soit x ce nombre.
Alors, on a : $3x + 5 > 1$.
2. Soit x ce nombre.
Alors, on a : $x - 15 < 10$.
3. Soit x le côté du carré.
Alors, on a : $4x > 64$.

D-3 EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 8

On donne l'inéquation $3x + 2 < 5$

1. Cite 5 nombres solutions de cette inéquation
2. Le nombre 5 est-il solution
3. Le nombre 0 est-il solution

Corrigé

1. 0 ; -2 ; -10 ; -1 ; -5
2. Le nombre 5 n'est pas solution car $3 \times 5 + 2 = 17 > 5$
3. Oui, car $3 \times 0 + 2 = 2 < 5$

Exercice 9

1. Trouve trois nombres solutions de l'inéquation : $\frac{5}{4}x > 5$.
2. Trouve trois nombres qui ne sont pas solutions de l'inéquation : $-6x < -4$.

Exercice 10

Transforme les inéquations ci-dessous en une inéquation du type « $x < a$ »

1. $x + 5 < 8$;
2. $2x - 4 < -10$;
3. $-3x + 5 > 0$;
4. $3x + 18 > 3$;
5. $-x - 7 < -2$;
6. $\frac{3}{2}x > \frac{1}{4}$;
7. $\frac{3}{2}x + \frac{7}{2} > \frac{1}{4}$.