

**THEME : CALCULS ALGEBRIQUES****LEÇON 1 DE LA CLASSE DE CINQUIEME : NOMBRES PREMIERS****A- SITUATION D'APPRENTISSAGE**

Lors d'une révision sur les nombres entiers naturels dans un collège, le professeur de mathématique de la 5^{ème} demande à ses élèves de citer tous les chiffres qui permettent d'écrire tous les nombres entiers naturels. Koffi cite les chiffres suivants 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 et 9. Yao dit que les chiffres 2 ; 3 ; 5 et 7 sont des nombres premiers. Il est félicité par le professeur qui affirme à son tour qu'il existe d'autres nombres premiers différents de ceux cités par Yao. Tous les élèves de cette classe sont curieux de découvrir ces nombres.

B - CONTENU DE LA LEÇON**1 Puissances entières d'un nombre entier naturel****1.1 Définition**

a est un nombre entier naturel et n est un nombre entier naturel plus grand que 1.

a^n désigne le produit de n facteurs égaux au nombre a .

On a:
$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs égaux au nombre } a}$$

Vocabulaire

a^n est une puissance du nombre a .

n est l'exposant

a^n se lit "a exposant n"

a^2 se lit "a exposant 2" ou « a au carré »

a^3 se lit "a exposant 3" ou « a au cube ».

Cas particuliers

* si n est un nombre entier naturel non nul, alors $0^n = 0$ et $1^n = 1$.

* si a est un nombre entier naturel quelconque, alors $a^1 = a$.

* par convention $a^0 = 1$.

Exercice de fixation

Recopie, puis complète le tableau ci-dessous.

Le nombre	se lit	est une puissance entière de	a pour exposant	est le produit	est égal à
3^4					
	2 exposant 3				
		5	2		
				$4 \times 4 \times 4$	

Réponses attendues

Le nombre	se lit	est une puissance entière de	a pour exposant	est le produit	est égal à
3^4	3 exposant 4	3	4	$3 \times 3 \times 3 \times 3$	81
2^3	2 exposant 3	2	3	$2 \times 2 \times 2$	8
5^2	5 exposant 2	5	2	5×5	25
4^3	4 exposant 3	4	3	$4 \times 4 \times 4$	64

1.2 Nouvelle règle de priorité

Règle

Dans une suite d'opérations :

- En présence de parenthèses, les calculs entre parenthèses sont prioritaires ;
- En l'absence de parenthèses, on effectue les calculs dans l'ordre suivant :
 - les puissances ;
 - la multiplication et la division ;
 - les additions et les soustractions.

Exemple

- $3 \times (15 - 8) = 3 \times 7 = 21$
- $2 - (3^4 - 71) = 2 - (81 - 71) = 2 - 10 = -8$

1.3 Calcul avec les puissances

Propriété 1

a et b sont deux nombres entiers naturels, n est un nombre entier naturel non nul.

On a : $a^n \times b^n = (a \times b)^n$

Exercice de fixation

Récopie et Complete

$$7^4 \times 8^4 = (\dots \times \dots) \dots ; (2 \times 3)^2 = \dots \times \dots$$

Réponses attendues

$$7^4 \times 8^4 = (7 \times 8)^4 ; (2 \times 3)^2 = 2^2 \times 3^2.$$

Propriété 2

a est un nombre entier naturel, n et m sont deux nombres entiers naturels non nuls.

On a : $a^n \times a^m = a^{n+m}$.

Exercice de fixation:

Recopie et complete

$$2^2 \times 2^3 = \dots = \dots$$

Réponse attendue

$$2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$$

II - Division dans \mathbb{N}

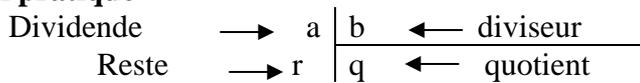
1-Division euclidienne

Propriété

a et b sont deux nombres entiers naturels et b n'est pas nul.

On peut trouver deux nombres entiers naturels q et r tels que : $a = b \times q + r$ et $r < b$.
 L'écriture $a = b \times q + r$ et $r < b$ s'appelle la division euclidienne de a par b .
 a est le dividende, b est le diviseur, q est le quotient et r est le reste.

Disposition pratique



Exercices de fixation

Exercice 1

Effectue la division euclidienne de 57 par 4, puis traduis-la par une égalité.

Réponse attendue

57	4
-4	14
17	
-16	
1	

$57 = 4 \times 14 + 1$

Dans cette égalité 57 est le dividende, 4 est le diviseur, 14 est le quotient et 1 est le reste.

Exercice 2

Examine les égalités suivantes.

- a) $13 = 5 \times 2 + 3$ b) $26 = 6 \times 3 + 9$ c) $24 = 2 \times 12$

Lorsqu'une de ces égalités traduit une division dans \mathbb{N} , précise le dividende, le diviseur, le quotient et le reste de cette division.

Réponses attendues

a)

$13 = 5 \times 2 + 3$ avec $3 < 5$ traduit la division de 13 par 5.

13 est le dividende, 5 est le diviseur, 2 est le quotient et 3 est le reste.

b) $26 = 6 \times 3 + 9$ ne traduit ni la division de 26 par 6 car $9 > 6$, ni celle de 26 par 3 car $9 > 3$.

c) $24 = 2 \times 12$ traduit deux divisions :

-celle de 24 par 2 où 24 est le dividende, 2 est le diviseur, 12 est le quotient et 0 est le reste (On dit que 24 est un multiple de 2) ;

-celle de 24 par 12 où 24 est le dividende, 12 est le diviseur, 2 est le quotient et 0 est le reste (on dit que 24 est un multiple de 12).

Remarque

a et b sont deux nombres entiers naturels et b n'est pas nul.

Si a est un multiple de b alors le reste de la division euclidienne de a par b est nul et $a = b \times q$.

2 Encadrement d'un nombre entier naturel par deux multiples consécutifs d'un même nombre

Propriété

a et b sont deux nombres entiers naturels et b non nul.

Si a n'est pas un multiple de b , alors a peut-être encadré par deux multiples consécutifs de b .

Autrement dit on peut trouver un nombre entier naturel q tel que : $b \times q < a < b \times (q + 1)$

Exercice de fixation

Encadre 17 par deux multiples consécutifs de 6.

Réponse attendue

La division euclidienne de 17 par 6 donne l'égalité suivante $17 = 6 \times 2 + 5$. Donc 17 n'est pas un multiple de 6. On a : $6 \times 2 < 17 < 6 \times (2 + 1)$
On obtient l'encadrement : $12 < 17 < 18$.

III - Nombres premiers

1- Définition

Un nombre **premier** est un nombre entier naturel non nul qui admet exactement deux diviseurs : **1** et le nombre **lui-même**.

Exercice de fixation

Cite les nombres premiers compris entre 1 et 15.

Réponse attendue

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 et 13 sont les nombres premiers compris entre 1 et 15.

REMARQUE

- 1 n'est pas un nombre premier
- 2 est le seul nombre pair premier.

2 Reconnaître un nombre premier

Règle :

Pour savoir si un nombre entier naturel non nul a est premier, on le divise par les nombres premiers successifs pris dans l'ordre croissant jusqu'à trouver dans l'une des divisions :

- soit un reste nul, dans ce cas le nombre a n'est pas premier ;
- soit un quotient plus petit ou égal au diviseur, dans ce cas le nombre a est premier

Exercice de fixation

Justifie que 71 est un nombre premier et que 25 n'est pas un nombre premier.

Réponses attendues

- $71 = 2 \times 35 + 1$
 $71 = 3 \times 23 + 2$
 $71 = 5 \times 14 + 1$
 $71 = 7 \times 10 + 1$
 $71 = 11 \times 6 + 5$
 $6 < 11$ donc 71 est un nombre premier.

- $25 = 2 \times 12 + 1$
 $25 = 3 \times 8 + 1$
 $25 = 5 \times 5 + 0$

Le reste est 0 donc 25 n'est pas un nombre premier

3 – Décomposition d'un nombre entier naturel en un produit de facteurs premiers

Propriété :

Si un nombre entier naturel plus grand que 1 n'est pas un nombre premier, alors il admet une décomposition en **produit de facteurs premiers**

Exemple

40 n'est pas un nombre premier car il admet plus de deux diviseurs par exemple 1 ; 2 et 40.

Décompose 40 en un produit de facteurs premiers

Décomposons 40 en un produit de facteurs premiers

Disposition pratique de décomposition en produit de facteurs premiers.

40		2
20		2
10		2
5		5
1		

$$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 5$$

$2^3 \times 5$ est la **décomposition en produit de facteurs premiers** de 40.

Exercice de fixation

Décompose 56 et 45 en produit de facteurs premiers

Corrigé de l'exercice de fixation

$$56 = 8 \times 7 = 2 \times 2 \times 2 \times 7 = 2^3 \times 7$$

$$45 = 9 \times 5 = 3 \times 3 \times 5 = 3^2 \times 5$$

C - SITUATION D'ÉVALUATION

Le père de ton ami de classe a construit une villa dans son village, il veut carreler sa terrasse de 47m^2 . Il dispose de 9 cartons de carreaux. Chacun des cartons de carreaux ne couvre que 5m^2 . Son fils, ton ami doit lui dire si la quantité de carreaux disponible est suffisante pour le travail ou s'il doit en acheter d'autres. Afin de ne pas se tromper, il demande ton avis.

- 1) Encadre 47 par deux multiples consécutifs de 5 ;
- 2) Dis si la quantité de carreaux disponible est suffisante.

Corrigé de la situation d'évaluation

1) J'effectue la division euclidienne de 47 par 5

$$\text{On a } 47 = 5 \times 9 + 2$$

47 n'est pas un multiple de 5.

$$\text{On a } 5 \times 9 < 47 < 5 \times 10$$

$$\text{On obtient l'encadrement : } 45 < 47 < 50$$

2) Je donne mon avis.

$45 < 47$ donc la quantité de carreaux disponible est insuffisante.

$45 + 5 = 50$ et $47 < 50$ donc le père de mon ami doit acheter un autre carton de carreaux.

IV-EXERCICES

Exercice 1

1) Ecris les produits suivants sous la forme d'une puissance :

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \quad \text{et} \quad 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

2) Ecris sous la forme d'un produit de facteurs égaux chacun des nombres suivants

$$7^3; 6^5 \text{ et } 25^4$$

3) Calcule: 2^3 ; 7^2 ; 24^0 ; 1^{2020}

Corrigé de l'exercice 1

1) Ecriture des produits sous la forme d'une puissance

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^6$$

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$$

2) Ecriture des nombres sous la forme d'un produit de facteurs égaux

$$7^3 = 7 \times 7 \times 7$$

$$6^5 = 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$$

$$25^4 = 25 \times 25 \times 25 \times 25$$

3) Calcul

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$7^2 = 7 \times 7 = 49$$

$$24^0 = 1$$

$$1^{2020} = 1$$

Exercice 2

Relie chaque opération à la bonne réponse

Opérations

$$3 \times 4^2 \cdot \cdot$$

$$15 - 2^2 \times 3 \quad \cdot$$

$$7 \times (11 - 3^2) \quad \cdot$$

Réponses

$$\cdot 24$$

$$\cdot 14$$

$$\cdot 507$$

$$\cdot 48$$

$$\cdot 3$$

Corrigé de l'exercice 2

Opérations

$$3 \times 4^2 \cdot \cdot$$

$$15 - 2^2 \times 3 \quad \cdot$$

$$7 \times (11 - 3^2) \quad \cdot$$

Réponses

$$\cdot 24$$

$$\cdot 14$$

$$\cdot 507$$

$$\cdot 48$$

$$\cdot 3$$

Exercice 3

Recopie puis complète par les nombres qui conviennent

$$9^5 \times 9^7 = 9^{\dots} \qquad 5^{10} \times 6^{10} = (5 \times 6)^{\dots}$$

Corrigé de l'exercice 3

Recopions et remplaçons les pointillés par les nombres qui conviennent

$$9^5 \times 9^7 = 9^{(5+7)} \\ = 9^{12} \qquad 5^{10} \times 6^{10} = (5 \times 6)^{10}$$

Exercice 4

Recopie puis complète par vrai si l'affirmation est vraie et faux si elle est fausse.

Affirmations	Réponse
$10 \times 10 = 10^{10}$	
$5^4 = 20$	
$2+2+2+2+2 = 2^4$	
$8^9 = 8 \times 9$	
$10-2 \times 5 = 40$	
$3^2(5-3) = 18$	
$2^5 \times 2^8 = 2^{13}$	
$3^{10} \times 3 = 3^{10}$	
$5^2 \times 3^2 = 8^2$	

Corrigé de l'exercice 4

Recopions et complétons par vrai si l'affirmation est vraie et faux si elle est fausse.

Affirmations	Réponse
$10 \times 10 = 10^{10}$	Faux
$5^4 = 20$	Faux
$2+2+2+2+2 = 2^4$	Faux
$8^9 = 8 \times 9$	Faux
$10-2 \times 5 = 40$	Faux
$3^2(5-3) = 18$	Vrai
$2^5 \times 2^8 = 2^{13}$	Vrai
$3^{10} \times 3 = 3^{10}$	Faux
$5^2 \times 3^2 = 8^2$	Faux

Exercice 5

1- Complète par les nombres qui conviennent

$$36 = 7 \times 5 + \dots$$

$$7 \times \dots < 36 < 7 \times (\dots + \dots)$$

2- Donne l'encadrement de 36 par deux multiples consécutifs de 7

$$\dots < 36 < \dots$$

Corrigé de l'exercice 5

1- Complétons par les nombres qui conviennent

$$36 = 7 \times 5 + 1$$

$$7 \times 5 < 36 < 7 \times (5+1)$$

2- Donnons l'encadrement de 36 par deux multiples consécutifs de 7

$$\text{On a : } 7 \times 5 < 36 < 7 \times 6$$

Donc $35 < 36 < 42$

Exercice 6

Cite tous les nombres premiers plus petit que 20.

Corrigé de l'exercice 6

Citons tous les nombres premiers plus petits que 50

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 et 47.

Exercice 7

- 1- Justifie que 97 est un nombre premier.
- 2- Justifie que 143 n'est pas un nombre premier.

Corrigé de l'exercice 7

- 1- Justifions que 97 est un nombre premier.

$$97=2\times 48+$$

$$97=3\times 32+1$$

$$97=5\times 19+2$$

$$97=7\times 13+6$$

$$97=11\times 8+9$$

Comme $8 < 11$ donc 97 est un nombre premier.

- 2- Justifions que 143 n'est pas un nombre premier.

$$143=2\times 71+1$$

$$143=3\times 47+2$$

$$143=5\times 28+3$$

$$143=7\times 20+3$$

$$143=11\times 13+0$$

143 est un multiple de 11 et de 13 donc 143 n'est pas un nombre premier.

Exercice 8

Sans calculer le nombre, décompose $11\times 22\times 33\times 44$ en produit de facteurs premiers

Corrigé de l'exercice 8

Décomposons sans calculer le nombre $11\times 22\times 33\times 44$ en produit de facteurs premiers

On a :

$$22 = 11 \times 2$$

$$33 = 11 \times 3$$

$$44 = 11 \times 4 = 11 \times 2 \times 2$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } 11\times 22\times 33\times 44 &= 11 \times 11 \times 2 \times 11 \times 3 \times 11 \times 2 \times 2 \\ &= 2^3 \times 3 \times 11^4 \end{aligned}$$

Exercice 9

Ecris les nombres suivants sous la forme d'une puissance d'un entier

$$A=16\times 8\times 2^2$$

$$B= a^{10}\times a^3\times a$$

$$C=2^8\times 5^8\times 3^8$$

$$D=3 \times 6 \times 3 \times 6 \times 3 \times 6 \times 6 \times 3$$

Corrigé de l'exercice 9

Ecrivons les nombres suivants sous la forme d'une puissance d'un entier

$$A=16 \times 8 \times 2^2 = 2^4 \times 2^3 \times 2^2 = 2^{(4+3+2)} = 2^9$$

$$B= a^{10} \times a^3 \times a = a^{10+3+1} = a^{14}$$

$$C=2^8 \times 5^8 \times 3^8 = (2 \times 5 \times 3)^8 = 30^8$$

$$D=3 \times 6 \times 3 \times 6 \times 3 \times 6 \times 6 \times 3 = (3 \times 6)^4 = 18^4$$

Exercice 10

1- Effectue le calcul suivant

$$7+5^2-2-3 \times (2^3+1)$$

2- x désigne un nombre entier naturel. Le quotient de x par 13 est 19 et le reste est 11.

a- Justifie que x est égal à 258.

b- Décompose x en produit de facteurs premiers.

Corrigé de l'exercice 10

1- J'effectue le calcul suivant

$$\begin{aligned} 7 + 5^2 - 2 - 3 \times (2^3 + 1) &= 7 + 25 - 2 - 3 \times (8 + 1) \\ &= 7 + 25 - 2 - 3 \times 9 \\ &= 7 + 25 - 2 - 27 \\ &= 32 - 29 \end{aligned}$$

$$7 + 5^2 - 2 - 3 \times (2^3 + 1) = 3$$

2- a) Justifions que x est égale 258.

$$\begin{array}{r|l} x & 13 \\ 11 & 19 \end{array}$$

On a l'égalité : $x = 13 \times 19 + 11$

$$x = 247 + 11$$

Donc $x = 258$

b) Décomposons x en produit de facteurs premiers.

$$\begin{array}{r|l} 258 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$258 = 2^2 \times 3^2 \times 7$$

Exercice 11

Trois chameaux portent chacun trois cartons. Chaque carton contient trois paquets .chaque paquet contient trois bonbons.

Calcule le nombre de bonbons portés par les chameaux

Corrigé de l'exercice 11

Le nombre de chameaux est 3

Le nombre de cartons est $3 \times 3 = 3^2 = 9$

Le nombre de paquets de bonbons est $3^2 \times 3 = 3^3 = 27$

Le nombre de bonbons portés par les chameaux est : $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$

Situation d'évaluation

La bibliothèque du Lycée Moderne 2 d'Abobo a reçu 170 livres. La bibliothécaire veut ranger ces livres sur des étagères pouvant recevoir 28 livres chacune. Ton frère en classe de 5^e, présent à la livraison, veut savoir si toutes les étagères auront le même nombre de livres.

- 1) Détermine le nombre d'étagères complètes
- 2) Détermine le nombre de livres sur l'étagère incomplète.
- 3) Détermine le nombre de livres qu'elle devrait recevoir pour que la dernière étagère ait aussi le même nombre de livres.

Corrigé de la situation d'évaluation

1) Déterminons le nombre d'étagères complètes

J'effectue la division euclidienne de 170 par 28.

On a : $170 = 28 \times 6 + 2$

170 est le dividende, 28 est le diviseur, 6 est le quotient et 2 est le reste.

Le quotient de la division de 170 par 28 est 6.

Donc le nombre d'étagères complètes est 6.

2) Déterminons le nombre de livres sur l'étagère incomplète.

Le reste de la division de 170 par 28 correspond au nombre de livres sur l'étagère incomplète

Donc il y a 2 livres sur l'étagère incomplète .

3) Déterminons le nombre de livres qu'elle devrait recevoir pour que la dernière étagère ait aussi le même nombre de livres.

On a $28 \times 7 = 196$

La bibliothèque devrait recevoir 196 livres.