MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE
DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE
ET DE L'APPRENTISSAGE

RÉPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE

COURS

MATHEMATIQUES GENERALES

BT Comptabilité 3ème Année

NOM & PRENOM DE L'ELEVE :

……………………………………………………………………………..

ETABLISSEMENT :

…………………………………………………………………………….

Année scolaire : ……………………

PROF : M. KOULIBALI

BT COMPTABILITÉ 3ème ANNÉE

PROGRESSION ANNUELLE :

CHAPITRE I : SUITES NUMERIQUES

Leçon 1 : Calculs des termes d'une suite numérique

EVALUATION FORMATIVE

Leçon 2 : Calculs avec les suites arithmétiques

EVALUATION FORMATIVE

Leçon 3 : Calculs avec les suites géométriques

EVALUATION FORMATIVE

CHAPITRE II : FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

Leçon 1 : Représentation graphique de la fonction logarithme népérien

EVALUATION FORMATIVE

Leçon 2 : Problème de spécialité faisant intervenir la fonction logarithme népérien

EVALUATION FORMATIVE

CHAPITRE III : FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

Leçon 1 : Représentation graphique de la fonction exponentielle népérienne

EVALUATION FORMATIVE

Leçon 2 : Problème de spécialité faisant intervenir la fonction exponentielle népérienne

EVALUATION FORMATIVE

REVISIONS GENERALES

CHAPITRE I :

SUITES NUMERIQUES

Leçon 1 : Calculs des termes d'une suite numérique

1) Définition d'une suite numérique

On appelle suite numérique, toute fonction définie sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Notation et vocabulaire :

Soit U une suite numérique définit sur $\mathbb{N}$.

On note $\boldsymbol{U} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

$n \longmapsto U_n$

On la note $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou tout simplement (U_n).

$-$ $\boldsymbol{U_n}$ est le terme d'indice n ou le terme de rang ***n*** ou encore le terme général de la suite ***U***. C'est l'image de ***n*** par ***U***. Le premier terme est appelé le terme initial.

$-$ $(\boldsymbol{U_n})$ désigne la suite d'indice ***n***.

Exercice d'application 1 :

Soit U la suite d'indice n et de premier U_0 définit par : $(U_n) : \begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \sqrt{2U_n^2 + 7} \end{cases}$

Calcule le terme d'indice 1 de la suite U

2) Calcul de termes d'une suite définie par une formule explicite

Définition :

Une suite U est définie par une formue explicite quand U_n est exprimé en fonction de *n*.

Propriété :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (U_n) de terme général $U_n = f(n)$ est dite définie par une formule explicite.

Exemple : $U_n = 2n^2 - 1$, $U_n = 3n + 5$ et $V_n = \frac{2n-3}{4}$ sont des suites définies par une formule explicite.

<u>Exercice d'application 2</u> :

On donne : $U_n = 2 + 4n$

Calculer U_5 ; U_6 ; U_7 ; U_8 et U_9.

3) Calcul de termes d'une suite définie par une formule de récurrence

<u>Définition</u> :

Une suite U est définie par une formule de récurrence quand on donne le terne initial et une relation entre deux termes d'indices consécutifs.

<u>Exemple</u> : $(U_n): \begin{cases} U_0 = 0{,}5 \\ U_{n+1} = 3U_n + 4 \end{cases}$

<u>Exercice d'application 3</u> :

On donne: $(U_n): \begin{cases} U_0 = 0{,}5 \\ U_{n+1} = 3U_n + 4 \end{cases}$

Calculer U_1 ; U_2 ; U_3 et U_4

EVALUATION FORMATIVE

Leçon 2 : Calculs avec les suites arithmétiques

1) Définition d'une suite arithmétique

Une suite numérique $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est dite arithmétique lorsque son premier terme est donné et que chaque terme est la somme du terme qui le précède par une constante *r* appelée la raison.
Autrement dit une suite numérique $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est dite arithmétique si u_0 étant donné il existe un nombre réel r tel que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$.

Remarque :

- Une suite arithmétique peut être définie à partir d'un rang $n_0 > 0$.
- $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r lorsque pour tout entier n , $u_{n+1} - u_n = r$.

Exemple : La suite numérique $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ définie par u_0=125 et pour tout entier naturel, $u_{n+1} = u_n + 250$ est une suite arithmétique de raison 250 et de premier terme $u_0 = 125$.

Exercice d'application 1 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_3 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 7$, pour tout $n \geq 3$.

1) Calcule u_4 et u_5.
2) Justifie que la suite $(u_n)_{n\geq3}$ est une suite arithmétique dont on donnera la raison et le premier terme.

2) Sens de variation

Propriété :

• Une suite arithmétique est croissante si sa raison est positive
• Une suite arithmétique est décroissante si sa raison est négative
• Une suite arithmétique est constante si sa raison est nulle.

Exercice d'application 2 :

Soit $(u_n)_{n\geq0}$ une suite arithmétique de raison *r*.

Etudie le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ dans chacun des cas suivants :

a) r = -2

b) r = 0

c) r = 10

3) L'expression du terme général U_n en fonction de n et de la raison

Propriété :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r

On a pour tout entier naturel n, $u_n = n\,r + u_0$.

En général : Pour toute suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison r, pour tous entiers naturels n et p, on a $u_n = u_p + (n-p)r$.

Exercice d'application 3 :

Soit la suite arithmétique $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par : $v_1 = 1350$ et $v_{n+1} = v_n + 200$ pour $n \geq 1$. Exprime v_n en fonction de n puis calcule v_{21}.

4) Somme de termes consécutifs

Propriété :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique donnée.

- Pour tout nombre entier naturel n, on a : $u_0+u_1+\ldots+u_n = (n+1)(\frac{u_0+u_n}{2})$

- Pour tous entiers naturels n et p tels que $n \geq p$, on a :

$$u_p+u_{p+1}+\ldots+u_n = (n-p+1)(\frac{u_p+u_n}{2})$$

Remarque : La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale à :

$$\mathbf{S} = (nombre\ de\ termes) \times \frac{premier\ terme + derner\ terme}{2}.$$

<u>Exercice d'application 4</u> :

Soit (u_n) la suite arithmétique définie par : $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = 3 + u_n, n \geq 1 \end{cases}$

Calcule la somme des 26 premiers termes de cette suite.

<u>EXERCICES</u> :

<u>Exercice 1</u> :

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n = 5n - 4$

1) Démontre que la suite (u_n) est une suite arithmétique.

2) Précise le premier terme et la raison de (u_n).

3) Précise le sens de variation de (u_n).

4) Calcule la somme des seize premiers termes de la suite (u_n).

<u>Exercice 2</u> :

Le premier janvier 2015, Monsieur Yao a été embauché dans une entreprise avec un salaire mensuel initial de 125 000f. Chaque année, à la date anniversaire de son embauche, son salaire mensuel connaît une augmentation de 12000f CFA. On note U_0, le premier salaire mensuel de Monsieur Yao et U_n son salaire mensuel au premier janvier de l'an 2015 + n.

1) Calcule U_1, U_2 et U_3.

2) Calcule le salaire mensuel que percevra Monsieur Yao au premier janvier 2020.

3) Exprime U_{n+1} en fonction de U_n.

4) a). Justifie qu'au bout des cinq premières années de service, l'entreprise aura dépensé pour le compte de cet employé une somme totale correspondant à 12 $(U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4)$

b) Déduis-en la valeur numérique de cette somme.

EVALUATION FORMATIVE

<u>**Leçon 3**</u> **:** Calculs avec les suites géométriques

1) Définition d'une suite géométrique

Une suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite géométrique lorsque son premier terme est donné et que chaque terme est le produit du terme qui le précède par une constante q appelée la raison.

Autrement dit, une suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite géométrique si v_0 étant donné, il existe un nombre réel q tel que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = qv_n$

<u>**Remarque**</u> **:**

- Une suite géométrique peut être définie à partir d'un rang $n_0 > 0$

- Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q de termes non tous nuls alors $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$.

<u>**Exercice d'application 1**</u> **:**

On donne t_0=1000 000 et pour tout entier naturel n, t_{n+1} =0,9t_n

1) Calcule t_1 et t_2

2) Justifie que la suite (t_n) est une suite géométrique dont tu préciseras le premier terme et la raison

2) Sens de variation

<u>**Propriété**</u> **:**

Soit $(V_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique à termes positifs et de raison q.

• Si 0 <q <1, alors la suite $(V_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

• Si q >1, alors la suite $(V_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

• Si q = 1, alors la suite $(V_n)_{n\geq 0}$ est constante.

<u>**Exercice d'application 2**</u> **:**

Etudie le sens de variation de la suite géométrique $(v_n)_{n\geq 0}$ de raison q dans chacun des cas suivants :

a)$v_0 = 0,5$ et $q = 7$

b)$v_0 = 21$ et $q = 0,6$

$c)$ $v_0 = 0,5$ et $q = 1$

Remarque :

Si $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite géometrique de raison un nombre réel négatif, alors $(v_n)_{n\geq 0}$ n'est ni croissante ni décroissante ni constante.

3) L'expression du terme général U_n en fonction de n et de la raison

Propriété :

Si $(v_n)_{n \geq 0}$ est la suite géométrique de premier termev_0 et de raison un réel non nul q, alors pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 q^n$

En général : Pour toute suite géométrique de raison q, on a:

Pour tous entiers naturels $n\ et\ p\ avec\ p \leq n;\ v_n = v_p \times q^{n-p}$.

Exercice d'application 3 :

Soit $(v_n)_{n\geq 0}$la suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et tel que $v_3 = 12$;

Calcule v_7

4) Somme de termes consécutifs

Propriété

Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de raison q différente de 1.

- Pour tout nombre entier naturel n, on a : $v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

- Pour tous entiers naturels n et p tels que $n \geq p$, on a :

$$v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n = v_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}.$$

Remarque :

La somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q différente de 1est égale à **S** $= (premier\ terme) \times \frac{1-q^{nombre\ de\ termes}}{1-q}$.

Exercice d'application 4 :

Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ la suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de troisième terme $v_3 = 12$e.

1) Vérifie que : $v_1 = 48$.

2) Détermine en fonction de n l'expression de la somme : $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

EXERCICES :

Exercice 1 :

Soit (V_n) la suite définie pour tout entier naturel *n* par : $V_n = 3^n$.

1) Démontre que la suite (V_n) est une suite géométrique.

2) Précise le premier terme et la raison de (V_n).

3) Précise le sens de variation de (V_n).

4) Calcule la somme des seize premiers termes de la suite (V_n).

Exercice 2 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n$, pour tout $n \geq 1$.

1) Calcule u_1, u_2, u_3.

2) Justifie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

3) Démontre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

4) Démontre que le terme général en fonction de n est $u_n = \frac{2}{3^n}$

5) On veut calculer le nombre réel $P_n = u_0 u_0 \dots \dots u_{n-1}$. Pour cela, on pose $w_n = \ln(u_n)$.

a) Démontre que la suite (w_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Exprime $le\ terme\ général\ \ w_n$ en fonction de n.

c) Déduis-en que $P_n = (\frac{4}{3^{n-1}})^{\frac{n}{2}}$.

EVALUATION FORMATIVE

CHAPITRE II :

FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

Leçon 1 : Représentation graphique de la fonction logarithme népérien

1) Définition et propriétés de la fonction logarithme népérien

a) Définition

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction dont la dérivée sur]0 ; +∞[est la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$ et qui s'annule en 1.

Conséquences de la définition :

- L'ensemble de définition de la fonction : $x \mapsto \ln(x)$ est $]0; +\infty[$
- **ln 1 = 0** (l'image de 1 par la fonction ln est 0
- La fonction logarithme népérien est dérivable sur]0 ; +∞[et pour tout $x > 0$, $\mathbf{ln'}(x) = \frac{1}{x}$.

Exercice d'application 1 :

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

Affirmations	Réponses
L'ensemble de définition de la fonction : $x \mapsto \ln(x)$ est $\mathbb{R}$	
ln(1)=0	
Pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.	
La fonction logarithme népérien est la dérivée sur $]0; +\infty[$ de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$	
L'image d'un nombre réel négatif par la fonction ln existe.	

b) Propriétés algébriques

Propriétés :

Pour tous réels a et b strictement positifs et pour tout r élément de $\mathbb{Q}$

• $ln(ab) = ln(a) + ln(b)$ • $ln(ar) = rln(a)$

• $ln\left(\frac{1}{b}\right) = -ln(b)$ • $ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}ln(a)$ • $ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln(a) - ln(b)$

• $ln(a) = ln(b) \Leftrightarrow a = b$ • $ln(a) < ln(b) \Leftrightarrow a < b$

<u>Exercice d'application 2</u> :

1) Exprime en fonction de $ln2$ et $ln3$ chacun des nombres suivants :

$A = \ln(24)$ $B = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$ $C = \ln(3^5) - ln(2^4)$

2) Ecris chacun des nombres suivants sous la forme $\ln(k)$ où k est un nombre réel strictement positif.

$D = \ln(5) + \ln(3)$ $E = \ln(2) - \ln(0{,}1)$ $F = 4\ln 5$

2) Etude de la fonction ln

a) Limites de référence de la fonction ln

Propriété

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$. (3) $\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ >}} x\ln x = 0$

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ >}} \ln x = -\infty$ (4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0$

<u>Exercice d'application 3</u> :

Calcule les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ >}}(x + lnx)$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x + lnx)$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{lnx}{x}\right)$ 4) $\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ >}} x(1 + lnx)$

b) Variation de la fonction ln

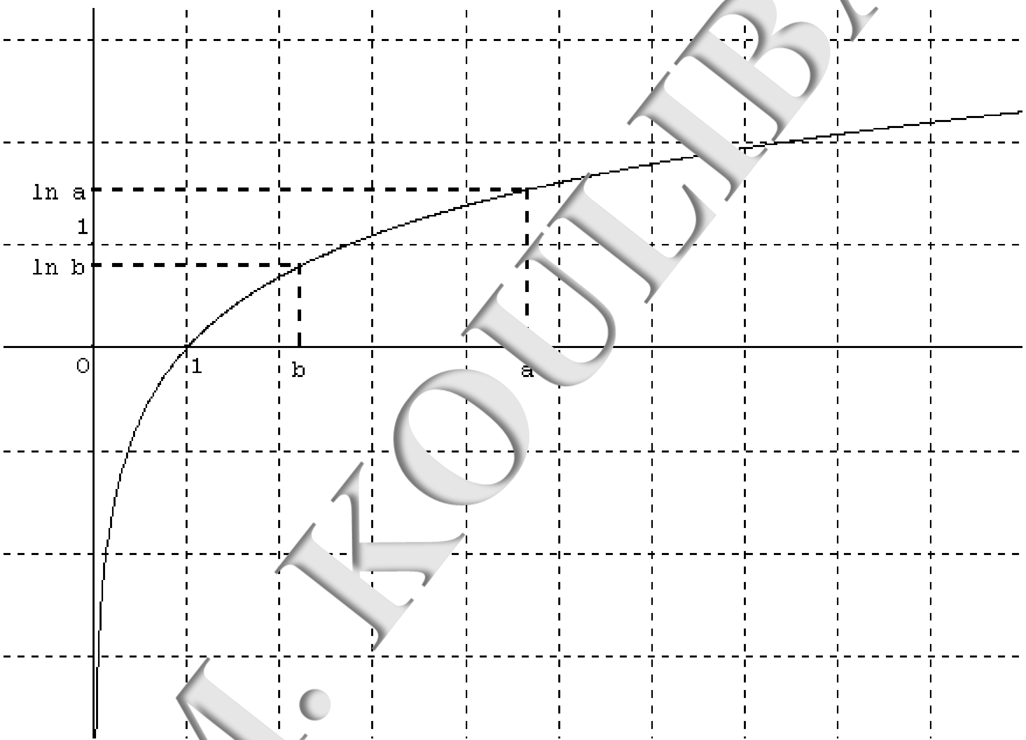
La fonction ln est strictement croissante sur]0 ; +∞[.

Tableau de variation :

x	0	$+\infty$
$ln'(x)$		$+$
$\ln(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

3) Représentation graphique

Courbe représentative de la fonction ln :



EXERCICES :

Exercice 1 :

Soit la fonction f de ℝ vers ℝ définie par: $f(x) = 2x + lnx$.

1) Détermine l'ensemble de définition D_f de f
2) Calcule $f'(x)$.
3) Etudie le sens de variation de f .

Exercice 2 :

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par: $f(x) = 1 - x + lnx$.

1) Détermine l'ensemble de définition D_f de f et calcule $f'(x)$.
2) Etudie le sens de variation de f.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3\text{-x-ln(x)}$.

1) Calcule les limites de f en 0 et en$+\infty$.
2) Calcule la dérivée f' de f.
3) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.

EVALUATION FORMATIVE

Leçon 2 : Problème de spécialité faisant intervenir la fonction logarithme népérien

1) Ensemble de définition d'une fonction $\boldsymbol{ln}(\boldsymbol{U})$

Propriété :

$x \in D_{ln(u)} \iff x \in D_u$ et $u(x) > 0$

Exercice d'application 1 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f de ℝ vers ℝ définie par :

1) $f(x) = \ln(-2x + 3)$
2) $f(x) = \ln(2 - x) + \ln(x)$

2) Dérivée de $\boldsymbol{ln}(\boldsymbol{U})$

Propriété :

- Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle K, alors $ln(u)$ est dérivable sur K et : $(ln(u))' = \frac{u'}{u}$

Exercice d'application 2 :

Déterminer sur l'intervalle I, la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \ln(3x^2 + 4x - 2)$; $I = \mathbb{R}$
2) $f(x) = \ln\left(\frac{7-x}{3x+4}\right)$; $I =]-\frac{4}{3} ; 7[$
3) $f(x) = \ln\sqrt{2x^2 - 1}$; $I =]-\frac{\sqrt{2}}{2} ; +\infty[$

3) Résolution de problèmes faisant intervenir la fonction ln

Problème :

Le médico-scolaire de ta commune organise une campagne de dépistage de la fièvre typhoïde dans ton établissement. Après avoir examiné n élèves pris au hasard, le médecin chef affirme que la probabilité d'avoir au moins un élève non atteint de la fièvre typhoïde dans cet établissement est de $1-(0,325)^n$.

Afin de sensibiliser davantage les élèves contre cette maladie, le chef de l'établissement veut connaitre le nombre minimum d'élèves tel que la probabilité d'avoir au moins un élève non atteint de la fièvre typhoïde soit supérieur à 98%.Ne sachant pas faire , il sollicite ta classe.

En te basant sur tes connaissances mathématiques, détermine ce nombre minimum d'élèves.

EXERCICES :

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur]0 ; +∞[par : $f(x) = 2 - x + \ln(x)$.

1) a-Calcule la limite de *f* en +∞

b-Calcule la limite de *f* en en 0, puis donne une interprétation graphique du résultat.

2) Calcule la dérivée *f'* de *f*.
3) Etudie les variations de *f*.
4) Dresse le tableau de variation de *f* sur]0 ; +∞[.
5) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique a sur [3 ; 4].
6) Trace la courbe représentative de la fonction *f* dans le repère orthonormé (O, I, J).

Exercice 2 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est le centimètre.

On considère la fonction f dérivable et définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = -2x + 1 + lnx$.

On note (C) la représentation graphique de f dans le repère (O, I, J).

1. Justifie que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$ puis donne une interprétation graphique de cette limite.

3. Calcule la limite de f en $+\infty$.

2. a) Vérifie que pour tout élément x de $]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{-2x+1}{x}$

b) Etudie le signe de la dérivée $f'(x)$.

Déduis-en les variations de f sur $]0;+\infty[$.

c) Dresse le tableau de variation de f.

4. Recopie et complète le tableau des valeurs ci – dessous.

x	0,25	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$									

5. Construis (C) sur l'intervalle $]0;4]$.

Exercice 3 :

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par: $f(x) = x - \ln(x)$. On note (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J),

1. Précise l'ensemble de définition de f, noté D_f.

2. Calcule la limite de f en 0 puis interprète graphiquement le résultat.

3. a) Vérifie que pour tout nombre réel $x > 0$, $f(x) = x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$

b) Déduis-en la limite de f en $+\infty$.

4. a) On admet que f est dérivable sur $]0;+\infty[$. Calcule $f'(x)$.

b) Déduis-en les variations de f et dresse son tableau de variations.

6. Reproduis et complète le tableau suivant :

x	0,25	0,5	1	1,5	2	2,5
f(x)						

7. Trace (C) et (Δ) sur $]0;3]$

EVALUATION FORMATIVE

<u>CHAPITRE III</u> :

FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

Leçon 1 : Représentation graphique de la fonction exponentielle népérienne

1) Définition et propriétés de la fonction exponentielle népérienne

a) Définition

La fonction exponentielle népérienne, notée exp, est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

Notation : Pour tout nombre$x$ réel , $exp(x)$ se note également e^x : $\exp(x) = e^x$.

Conséquences de la définition :

- L'ensemble de définition de la fonction exp est $\mathbb{R}$.
- Pour tout nombre réel a strictement positif et pour tout nombre réel b, ln $(a) = b$ équivaut à $a = e^b$.
- $e^0 = 1$; $e^1 = e$.
- Pour tout nombre réel a, $e^a > 0$.
- Pour tout nombre réel a. $\ln(e^a) = a$.
- Pour tout nombre réel a strictement positif, $e^{\ln a} = a$.

Exercice d'application 1 :

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

Affirmations	Réponses
L'ensemble de définition de la fonction $x: \mapsto e^x$ est $\mathbb{R}$	
Le nombre e^{-10} est négatif.	
Le nombre e^0 est égal à 0.	
Le nombre réel, $e^{\ln(12)}$ est égal à ln12.	
Le nombre $\ln(e^{51})$ est égal à 51	

b) Propriétés algébriques

Pour tous nombres réels *a* et *b*, r un nombre rationnel

$e^a \times e^b = e^{a+b}$; $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

$(e^a)^r = e^{a \times r}$; $\frac{1}{e^a} = e^{-a}$

<u>Exercice d'application 2</u> :

Ecris chacun des nombres E, F et G suivants sous la forme $e^k, k \in \mathbb{R}$.

E = $e^6 \times e^{-4}$ F = $(e^{-2})^4$ G = $\frac{e^4}{e^{-5}}$

2) Etude de la fonction exp

a) Limites de référence de la fonction exp

(1) $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ (2) $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

(3) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (4) $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$

<u>Exercice d'application 3</u> :

Calcule les limites suivantes :

a) $\lim_{x \to -\infty} (e^x + 3)$; b) $\lim_{x \to -\infty} 2xe^x$; c) $\lim_{x \to +\infty} (2x - 1 - e^x)$

b) Variation de la fonction exp

<u>Propriété</u> :

La fonction exponentielle népérienne est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x,

La dérivée de la fonction $x \longmapsto e^x$ est la fonction $x \longmapsto e^x$

$\mathbf{(e^x)' = e^x}$ et $\mathbf{e^x > 0}$.

La fonction exponentielle népérienne est strictement croissante sur$\mathbb{R}$.

Tableau de variation :

x	$-\infty$ $+\infty$
$(e^x)'$	$+$
e^x	$0 \nearrow +\infty$

__Exercice d'application 4__ **:**

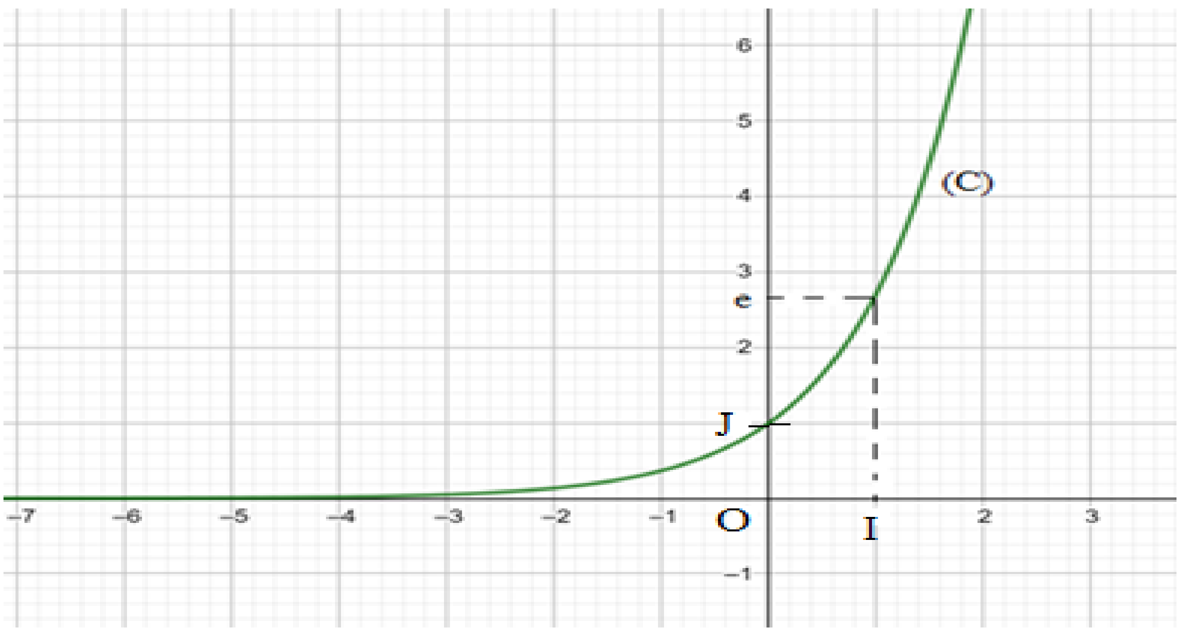
Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par: $f(x) = 2x + e^x$.

1) Calcule : $f'(x)$
2) Donne le sens de variation de f

3) Représentation graphique

Notons (C) la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto e^x$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$. Donc la droite d'équation y = 0, c'est-à-dire l'axe (OI), est asymptote horizontale à (C) en $-\infty$.



EVALUATION FORMATIVE

Leçon 2 : Problème de spécialité faisant intervenir la fonction exponentielle népérienne

1) Ensemble de définition d'une fonction $exp(U)$

L'ensemble de définition de la fonction $exp(U)$ est $\mathbb{R}$.

2) Dérivée de $exp(U)$

Propriété

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle K, alors e^{u} est dérivable sur K et on a :

$$(e^{u})' = u'e^{u}$$

Exercice d'application 2 :

Dans chaque cas, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Détermine la fonction dérivée de f.

1) $f(x) = e^{-4x+3}$
2) $f(x) = e^{x+3} - 2x + 5$
3) $f(x) = (2x+1)e^{x}$

3) Résolution de problèmes faisant intervenir la fonction exp

Problème :

Des élèves de terminale A travaillent les samedis dans le service marketing d'un grand magasin. Ce magasin veut informer la population des nouvelles offres promotionnelles. Le service marketing a observé que la proportion P de la population qui est au courant de ces nouvelles offres après *t* jours d'annonces publicitaires est donnée par la fonction : P(*t*) $=1 - e^{-0,21t}$.

Le magasin veut arrêter cette publicité lorsque 90 % de la population sera au courant des nouvelles offres mais ne sait pas quand. Il te sollicite pour savoir le nombre de jours qu'il devra consacrer à la publicité.

Détermine le nombre de jours nécessaires au grand magasin pour faire la publicité de ces nouvelles offres.

EXERCICES :

Exercice 1 :

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par: $f(x) = 1 - x + e^x$. On note (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J),

1. Précise l'ensemble de définition de f, noté D_f.

2. Calcule la limite de f en $-\infty$.

3. a) Vérifie que pour tout nombre réel $x \neq 0$, $f(x) = x\left(\frac{1}{x} - 1 + \frac{e^x}{x}\right)$

   b) Déduis-en la limite de f en$+\infty$.

4. a) Démontre que la droite (Δ) d'équation $y = -x + 1$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$.

   b) Précise la position relative de (C) par rapport à(Δ).

5. a) On admet que f est dérivable sur$\mathbb{R}$. Calcule $f'(x)$.

   b) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$

   c) Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) > 0$

   d) Déduis-en les variations de f et dresse son tableau de variations.

6. Reproduis et complète le tableau suivant :

x	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)						

7. Trace (C) et (Δ) sur $[-3 ; 2]$

<u>Exercice 2</u> :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est le centimètre.

On considère la fonction f dérivable et définie sur $]-\infty\,;2]$ par $f(x) = (-2x+3)e^{x}$.

On note (C) la représentation graphique de f dans le repère (O, I, J).

1. Justifie que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, puis interprète graphiquement ce résultat.

2.a) Vérifie que pour tout élément x de $]-\infty\,;2]$, $f'(x) = (-2x+1)e^{x}$

b) Etudie le signe de la dérivée $f'(x)$ sur $]-\infty\,;2]$.

Déduis-en les variations de f sur $]-\infty\,;2]$.

c) Dresse le tableau de variation de f.

3. Soit A le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses et B le point d'intersection de (C) avec l'axe des ordonnées.

Détermine les coordonnées respectives des points A et B.

4. Recopie et complète le tableau des valeurs ci – dessous.

x	-4	-3	-2	-1	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	$0{,}2$	$0{,}4$		$1{,}8$		$3{,}3$			$-7{,}4$

5. Construis (C) sur l'intervalle $]-\infty\,;2]$.

EVALUATION FORMATIVE

REVISIONS GENERALES

Examens professionnels BT — Examens professionnels BT

Niveau : **BT COMPTABILITE**
BT COMPTABILITE-COMMERCE
BT TRANSIT
BT SCIENCES MEDICO- SOCIALES

Durée de l'épreuve : **2 HEURES**

Session : **2023**

Coefficient : **2**

MATHEMATIQUES GENERALES

Exercice 1

Une association d'anciens stagiaires BT d'un lycée professionnel de la place a vu le jour en l'an 2020.

Cette association compte 800 adhérents à sa date de création. Elle constate que le nombre d'adhérents augmente de 10% chaque année.

On note $U_0 = 800$ et U_n le nombre d'adhérents en l'an 2020 + n.

1. Calculer U_1, U_2 et U_3.
2. a) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.

   b) En déduire que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
3. Justifier que $U_n = 800(1,1)^n$.
4. Calculer le nombre d'adhérents en l'an 2030.
5. Calculer le nombre d'adhérents de 2020 à 2030.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=8\ln x-3x+\frac{4}{x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O;I;J) unité graphique : 2 cm

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. a)Vérifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$,

$$f(x)=\frac{8x\ln x-3x^2+4}{x}$$

b) Déterminer la limite de la fonction f en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.

3. a) Calculer la fonction dérivée $f'(x)$ et vérifier que pour tout nombre réels x de l'intervalle $]0;+\infty[$ $f'(x)=\frac{(3x-2)(2-x)}{x^2}$

b) Etudier le signe de f' sur $]0;+\infty[$ puis donner le sens de variation de f.

c) Dresser le tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$

4. a) Reproduire et compéter le tableau suivant en donnant les valeurs au $10^{ème}$ près.

x	0,5	1	1,5	2	2,5	5,5	7	8,5
$f(x)$								

b) Construire la courbe de f dans un repère (O ;I ;J).

Examens professionnels BT — **Examens professionnels BT**

Niveau : **BT COMPTABILITE**
BT COMPTABILITE-COMMERCE
BT TRANSIT
BT SCIENCES MEDICO-SOCIALES

Durée de l'épreuve : 2 heures

Session**: 2016** — Coefficient : 2

MATHEMATIQUES GENERALES

EXERCICE 1 :

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x)=6x^3-5x^2-2x+1$$

1-

a) Calculer P(1)

b) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que pour tout réel x, on ait :

$$P(x) = (x-1)(ax^2+ bx + c)$$

2- Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation P(x)=0.

3- Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

a) $6(\ln x)^3-5(\ln x)^2-2\ln x+1=0$.

b) $6e^{3x}-5e^{2x}-2e^{x}+1=0$.

EXERCICE 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{x^2+7x-4}{x-1}$$

et ($\mathcal{C}f$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

1- Déterminer l'ensemble de définition Df de f.

2-

a) Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x)$, puis interpréter les résultats obtenus.

1/2

3- La fonction f étant dérivable sur Df et f′ sa dérivée, vérifier que pour tout x élément de Df.

$$f'(x)=\frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$$

4- Etudier le signe de f′(x) suivant les valeurs de x et dresser le tableau de variation de f.

5-

a) Démontrer que pour tout x élément de Df, on a :

$$f(x)=\frac{4}{x-1}+x+8$$

b) En déduire que la droite (D) d'équation y = x+8 est asymptote à ($\mathcal{C}$f) en infini.

c) Etudier la position de ($\mathcal{C}$f) par rapport à (D).

6- Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe ($\mathcal{C}$f) au point d'abscisse 0.

7- Tracer la courbe ($\mathcal{C}$f).

Examens professionnels BT

Examens professionnels BT

Niveau : **BT COMPTABILITE**
BT COMPTABILITE-COMMERCE
BT TRANSIT
BT SCIENCES MEDICO-SOCIALES
Session: **2017**

Durée de l'épreuve : 2 heures
Coefficient : 2

MATHEMATIQUES GENERALES

Chaque candidat recevra une feuille de papier millimétré.

EXERCICE 1 :

(Dans cet exercice on arrondira les résultats obtenus à l'entier.)

Dans une ville d'Amérique latine, la fièvre ZIKA est en net recul.

Le nombre de femmes contaminées est estimé à 1 000 au mois de Janvier 2017, et le taux de recul de l'épidémie par mois est de 4%.

On note U_n le nombre de femmes contaminées au $n^{ème}$ mois.

On considère que $U_1 = 1\ 000$.

1- Calculer U_2, U_3 et U_4.

2- Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n, puis préciser la nature de la suite (U_n).

3- Exprimer U_n en fonction de n.

4- a) Combien de femmes contaminées aura-t-on en octobre 2017 ?

b) Au bout de combien de mois le nombre de femmes contaminées sera t-il inferieur à 565 ?

EXERCICE 2 :

PARTIE A :

Dans cette partie, on se propose d'étudier sur $]0\ ;+\infty[$ la fonction f définie par :

$$f(x) = x - 20 + \frac{400}{x}$$

Soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

Unités graphiques : $\begin{cases} \text{Abscisse} : 1\text{cm} \rightarrow 10. \\ \text{Ordonnée} : 1\text{cm} \rightarrow 10. \end{cases}$

1/2

1- a) Déterminer les limites de f aux bornes de l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

b) En déduire une éventuelle asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.

2- a) Déterminer la dérivée f' de f, et étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3- Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - 20$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

4- a) Reproduire et compléter le tableau des valeurs suivant :

x	5	10	20	40	50	80	100	160
$f(x)$								

b) Construire (D) et $(\mathcal{C})$. Sur $]0\,;\,160]$.

PARTIE B :

Une entreprise fabrique pendant un intervalle de temps donné une quantité x d'objets. Les charges C en franc de cette entreprise pour fabriquer x objets sont données par :

$$C(x) = x^2 - 20x + 400 \quad \text{pour} \quad x > 0.$$

1- Les charges moyennes unitaires, notées C_m, sont définies par :

$$C_m(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

Déterminer la quantité d'objets à fabriquer pour avoir des charges moyennes unitaires minimales.

2- Chaque objet fabriqué est vendu à 100 F.

Déterminer le bénéfice $B(x)$ de cette entreprise en fonction de x.

3- a) Etudier le sens de variation de B et dresser son tableau de variation.

b) Déterminer x pour que le bénéfice soit maximal.

BONNE CHANCE !