Cours de Mathématiques des BT2

PROGRAMME

Partie A ANNALYSE

- *ÉQUATIONS – INÉQUATIONS – SYSTÈMES*
- *FONCTION NUMÉRIQUE D'UNE VARIABLE RÉLLE*
- *LIMITES-CONTINUITÉ-DÉRIVATION*
- *ETUDE DE FONCTION*
- *SUITES NUMÉRIQUES*

Partie B ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

- *BARYCENTRE*
- *TRIGONOMÉTRIE*
- *TRANSFORMATIONS DU PLAN*

Partie C STATISTIQUES

- *STATISTIQUE A UNE VARIABLE*

CHAPITRE 1 : ÉQUATIONS – INÉQUATIONS – SYSTÈMES

Objectifs pédagogiques

A la fin de ce cours, l'élève doit être capable de :

- *résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation du second degré à l'aide du discriminant et discuter lorsqu'elle comporte un paramètre ;*
- *trouver un zéro d'un polynôme du second degré connaissant l'autre en utilisant la somme ou le produit ;*
- *déterminer deux nombres réels dont on connaît la somme et le produit,*
- *résoudre dans $\mathbb{R}$ des équations et inéquations se ramenant au second degré (équations et inéquations bicarrées ou de degré 3),*
- *résoudre un système de deux équations du 1er degré dans $\mathbb{R}^2$ par la méthode de Cramer et discuter lorsqu'il comporte un paramètre,*
- *résoudre algébriquement une équation, un système de deux équations, un système de trois équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$,*
- *mettre un problème en équation et le résoudre,*

I. ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

1) Fonctions polynômes du second degré

a) Définition

On appelle polynôme du second degré, tout polynôme de la forme $ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels tel que $a \neq 0$.

Exemple1 : *$P(x) = -5x^2 + 4x + 1$; $Q(x) = 4x^2 + 12x + 9$; $R(x) = 3x^2 + 4x + 5$.*

Remarque : *La courbe représentative d'un polynôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$, est une **parabole** de sommet $S\left(\frac{-b}{2a} ; -\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$.*

b) Forme canonique d'un polynôme du second degré

$$\begin{aligned} P(x) &= ax^2 + bx + c \quad \text{avec } a \neq 0 \\ &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] \qquad Or\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \Longrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

D'une manière générale, tout polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ du second degré a pour forme canonique $P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

Exercice 1.1 *:*

Ecrire la forme canonique, factoriser lorsque cela est possible et déterminer les racines éventuelles des polynômes suivants : $P(x) = 5x^2 - 4x - 1$; $Q(x) = 4x^2 - 4x + 1$; $T(x) = 3x^2 + 4x + 2$

c) Discriminant d'un polynôme du second degré

On appelle discriminant d'un polynôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ le nombre réel noté Δ tel que $\Delta = b^2 - 4ac$.

Exercice 1.2 :

Déterminer le discriminant de chacun des polynômes suivants :

$P(x) = 5x^2 - 4x - 1$; $Q(x) = 4x^2 - 4x + 1$; $T(x) = 3x^2 + 4x + 2$

2) ***Résolution d'une équation du second degré:***

❖ *Soit le polynôme du second degré* $P(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$
Le discriminant de P est $\Delta = b^2 - 4ac$

- *si* $\Delta < 0$, *alors P n'admet pas de racine réelle et n'est pas factorisable.*
- *si* $\Delta = 0$, *alors P admet une racine double* x_0 *telle que* $x_0 = \frac{-b}{2a}$ *et* $P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.
- *si* $\Delta > 0$, *alors P admet deux racines distinctes* x_1 *et* x_2 *telles que* $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

❖ *Résoudre l'équation du second degré* $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$, *équivaut à déterminer les racines du le polynôme du second degré* $P(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$.

Exercice 1.3 :
Résoudre dans $\mathbb{R}$ *les équations suivantes :*
$x^2 - 4x - 5 = 0$; $2x^2 - 12x + 18 = 0$; $-x^2 + 5x - 4 = 0$; $2x^2 - x + 3 = 0$.

3) ***Signe d'un polynôme du second degré***

❖ *Soit* $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ *et* $\Delta = b^2 - 4ac$.
On utilise l'un des tableaux ci-dessous :

- *si* $\Delta < 0$, *alors* $P(x) = ax^2 + bx + c$ *n'admet pas de racine.*
Le signe de $ax^2 + bx + c$ *est celui de a comme l'indique le tableau suivant :*

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	*signe de a*	

- *si* $\Delta = 0$, *alors* $P(x) = ax^2 + bx + c$ *admet une racine double* $x_0 = \frac{-b}{2a}$.
Le signe de $ax^2 + bx + c$ *est celui de a comme l'indique le tableau suivant :*

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	*signe de a*		*signe de a*

- *si* $\Delta > 0$, *alors* $P(x) = ax^2 + bx + c$ *admet deux racines distinctes* x_1 *et* x_2 *tels que* $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
En supposant que $x_1 < x_2$, *le signe de* $ax^2 + bx + c$ *est donné par le tableau suivant :*

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	*signe de a*		*signe de* $(-a)$		*signe de a*

❖ *Toute inéquation du type* $ax^2 + bx + c \leq 0$ *ou* $ax^2 + bx + c \geq 0$ $(a \neq 0)$ *est appelée inéquation du second degré. Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *une telle inéquation revient à étudier le signe de* $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ *et à donner l'ensemble solution suivant l'inégalité* $(\leq; \geq; <$ *ou* $>)$ *utilisée.*

Exemple 1.4 :
Résoudre dans $\mathbb{R}$ *les inéquations suivantes :*
(I1): $-5x^2 + 4x + 1 \leq 0$; *(I2):* $4x^2 + 12x + 9 > 0$; *(I3):* $3x^2 + 4x + 5 \geq 0$;
(I4): $-5x^2 + 4x + 1 < 0$; *(I5):* $4x^2 + 12x + 9 \leq 0$; *(I6):* $3x^2 + 4x + 5 < 0$

4) *Somme et produit des solutions d'une équation du second degré*

- *Soient x_1 et x_2 les solutions de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).*
  On a alors : $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ *et* $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.
- *S'ils existent deux nombres réels x_1 et x_2 tels que $S = x_1 + x_2$ et $P = x_1 \times x_2$, alors x_1 et x_2 sont solutions de l'équation* $x^2 - Sx + P = 0$.

Exercice 1.5

1. Déterminer deux nombres réels, s'ils existent, dont la somme S et le produit P vérifient :

a). S = 23 et P = 132 ;   b). S = 1 et P = $\frac{5}{36}$.

2. Sans résoudre l'équation, déterminer la somme S et le produit P des solutions des équations suivantes : (E1) : $2x^2 - 5x - 3 = 0$ *; (E2) :* $3x^2 - x - 10 = 0$ *; (E3) :* $-4x^2 - x + 5 = 0$.

5) *Exemple d'équation dépendant d'un paramètre réel*

Exercice 1.6

Soit l'équation (E_m) : $x \in \mathbb{R}$, $(2m - 1)x^2 - 2(m - 2)x + m = 0$, m étant un paramètre réel.

1. Pour quelles valeurs de m l'équation (E_m) est-elle du 1er degré ? En donner les solutions correspondantes.

2.a. Pour quelles valeurs de m l'équation (E_m) est-elle du second degré ?

b. Déterminer pour de telles valeurs de m, le discriminant Δ, la somme S et le produit P d'éventuelles solutions.

3. a. Pour quelles valeurs de m l'équation (E_m) admet-elle deux solutions égales ? Déterminer ces solutions.

b. Pour quelles valeurs de m l'équation (E_m) admet-elle deux solutions de signes contraires.

c. Pour quelles valeurs de m l'équation (E_m) admet-elle deux solutions distinctes de même signe.

4. Discuter suivant les valeurs de m le nombre et le signe des solutions de l'équation (E_m).

6) *Équation et inéquations de degré 3*

Exercice 1.7

On considère le polynôme P défini par $P(x) = -x^3 + 7x - 6$

1) *Calculer* $P(1)$ *et conclure.*
2) *En déduire que $P(x)$ peut s'écrire sous la forme $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$ où a, b et c sont des réels à déterminer.*
3) *On pose $Q(x) = ax^2 + bx + c$ où $a, b, et\ c$ sont des réels déterminés en 2). Factoriser Q(x).*
4) *Factoriser P(x) puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation* $P(x) = 0$
5) *Etudier le signe de P(x) suivant les valeurs de x.*
6) *En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation* $P(x) \geq 0$

Exercice 1.8

Soit P le polynôme défini par $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

1) *Montrer que le réel $\propto = 3$ est un zéro de P(x).*
2) *Déterminer trois nombres réels a, b, et c tels que* $P(x) = (x - 3)(ax^2 + bx + c)$
3) *On pose $Q(x) = ax^2 + bx + c$ où $a, b, et\ c$ sont des réels déterminés en 2). Factoriser Q(x).*
4) *Factoriser P(x) puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation P(x) =0*
5) *Etudier le signe de P(x) suivant les valeurs de x.*
6) *En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation* $P(x) < 0$

7) *Equations et inéquations bicarrées*

Toute équation de la forme $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ($a \neq 0$) est appelée ***équation bicarrée****. Pour résoudre une telle équation, on la ramène au second degré $aX^2 + bX + c = 0$ ($a \neq 0$) en posant $X = x^2$. On calcule x en prenant les valeurs positives de X.*

Exercice 1.9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

(a) $2x^4 - 21x^2 + 10 = 0$ *; (b)* $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ *; (c)* $4x^4 - 20x^2 + 25 = 0$

(d) $x^4 - 2x^2 - 15 \geq 0$ *; (e)* $3x^4 - 5x^2 + 22 < 0$

II-SYSTEMES D'EQUATIONS

1) *Système de deux équations linéaires dans IR²*

Il se présente généralement sous la forme suivante : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$, *où x et y sont les inconnues, a, b, c , a' ,b' et c' sont les coefficients réels.*

Il existe plusieurs méthodes de résolutions telles les méthodes de substitution, de combinaison, de comparaison, l'utilisation du graphique (vues en 3ème)

Exercice 1.10

Résoudre dans IR² les systèmes d'équations suivantes :

$a)\ \begin{cases} x-y=-1 \\ 2x+3y=8 \end{cases}$; $b)\ \begin{cases} x-3y=4 \\ -\frac{1}{3}x+y=-\frac{4}{3} \end{cases}$; $c)\ \begin{cases} -2x+3y=7 \\ x-\frac{3}{2}y=3 \end{cases}$

Exercice 1.11

Résoudre dans IR², les systèmes suivants :

$a)\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 5x-2y=17 \end{cases}$ $b)\begin{cases} 2x+8y=5 \\ 3x+12y=17 \end{cases}$ $c)\ \begin{cases} 3x-6y=12 \\ -5x+10y=-20 \end{cases}$

2). *Système de 3 équations linéaires dans IR³*

Il est sous la forme $(\Sigma)\ \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}$

Méthode de substitution *: On exprime l'une des inconnues en fonction des autres dans l'une des équations puis on remplace cette inconnue par son expression dans les deux équations restantes. On obtient alors un système de deux équations à deux inconnues que l'on sait résoudre.*

Exercice 1.12

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ *les systèmes suivants par la méthode de substitution.*

$a)\ \begin{cases} x-2y+3z=1 \\ 2x-3y+4z=1 \\ -4x+y-5z=-4 \end{cases}$; $b)\ \begin{cases} 3x+2y+z=7 \\ x-2y+3z=-3 \\ -2x+3y-z=4 \end{cases}$; $c)\begin{cases} 3x+2y+z=9 \\ x-4y+2z=8 \\ -4x+y-5z=-23 \end{cases}$

Méthode de Gauss

Elle consiste à transformer le système (Σ) *ci-dessus en un système dit triangulaire sous la forme*

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ \quad b_1y+c_1z=d_1 \\ \qquad c_2z=d_2 \end{cases}$$

Exercice 1.13

Résoudre dans IR³ les systèmes suivants par la méthode de Gauss.

$a)\ \begin{cases} x-2y-3z=-9 \\ 2x+5y-3z=0 \\ x+y+2z=9 \end{cases}$ $b)\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=-1 \\ x-y+2z=0 \end{cases}$ $c)\begin{cases} x+y-2z=7 \\ 2x-y+z=0 \\ 3x+y-z=8 \end{cases}$ $d)\begin{cases} 2x-y-2z=6 \\ x+y-z=1 \\ x-5y-z=9 \end{cases}$

3. *Problèmes concrets dont la résolution se ramène à celle d'un système d'équation linéaire*

Exercice 1.14

Une coopérative décidé d'acheter trois terrains. Les terrains 1, 2 ,3 coûtent respectivement 942.000F, 2.374.000F et 1.004.000F. Les membres de la coopérative sont répartis en trois groupes A, B et C. Le tableau ci-dessous indique ce que chaque membre de chaque groupe a payé pour les trois terrains :

	A	**B**	**C**
Terrain 1	*9.000F*	*12.000F*	*21.000F*
Terrain 2	*12.000F*	*35.000F*	*80.000F*
Terrain 3	*7.000F*	*13.000F*	*31.000F*

1- *Quel est le nombre de membre de chaque groupe ?*
2- *Quel est le nombre de membre de cette coopérative ?*

CHAPITRE 2 : FONCTION NUMERIQUE D'UNE VARIABLE REELLE

Objectifs pédagogiques

A la fin de ce cours, l'élève doit être capable de :

- *déterminer l'ensemble de définition des fonctions usuelles,*
- *montrer qu'une fonction donnée est paire, ou impaire,*
- *montrer qu'une droite donnée est un axe de symétrie à la courbe d'une fonction donnée,*
- *montrer qu'un point donné est un centre de symétrie à la courbe d'une fonction donnée,*

1. Ensemble de définition

Soit $f: A \longrightarrow IR$

$x \longmapsto f(x)$

On appelle ensemble de définition de f noté D_f *l'ensemble des éléments de A qui ont une image par f dans B. On écrit :* $D_f = \{x \in A / f(x) existe\}$.

- *f est une fonction polynôme :* $D_f = ensemble\ de\ départ$
- $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$: $D_f = \{x \in A / Q(x) \neq 0\}$
- $f(x) = \sqrt{g(x)}$: $D_f = \{x \in A / g(x) \geq 0\}$

Exercice 2.1

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f de IR vers IR.

$(a)\ f(x) = \sqrt{x+3}$ (b) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-x-2}$ (c) $f(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3}$

2. Parité d'une fonction

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f*, T un nombre réel.*

- *f est dite* ***paire*** *si, pour tout x élément de* D_f*, -x est élément de* D_f *et* $f(-x) = f(x)$.

La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

- *f est dite* ***impaire*** *si, pour tout x élément de* D_f*, -x est élément de* D_f *et* $f(-x) = -f(x)$.

La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Exercice 2.2

Dans chacun des cas suivants, étudier la parité de la fonction f de IR vers IR.

$(a)\ f(x) = 2x^3 - 5x$ (b) $f(x) = \frac{3x^2+1}{x^2-1}$ (c) $f(x) = 3x^2 + x$ (d) $f(x) = \frac{|x|}{x}$ $(e)\ f(x) = \sqrt{1-x^2}$

3. Éléments de symétrie

a. Axe de symétrie

Soit f une fonction numérique d'ensemble de définition D_f *et de représentation graphique* C_f*. La droite d'équation x = a est un axe de symétrie de* C_f *si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :* $\begin{cases} \forall x \in D_f, 2a - x \in D_f \\ f(2a-x) = f(x) \end{cases}$

Exercice 2.3

Démontrer, dans chaque cas, que la droite (D) est un axe de symétrie de (Cf).

$(a)\ f(x) = x^2 + 4x + 3$ *et (D) : x = –2 ; (b)* $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ *et (D) : x = 1*

$(c)\ f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ *et (D): x = 1*

b. Centre de symétrie

Soit f une fonction numérique d'ensemble de définition D_f *et de représentation graphique* C_f*. Soit* $I(a;b)$ *un point du plan. On dit que le point* $I(a;b)$ *est un centre de symétrie de* C_f *si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :* $\begin{cases} \forall x \in D_f, 2a - x \in D_f \\ f(2a-x) + f(x) = 2b \end{cases}$

Exercice 2.4

Démontrer, dans chaque cas, que le point Ω est un centre de symétrie à (Cf).

(a) $f(x) = \frac{3x}{x+1}$ *et Ω (-1 ; 3),* (b) $f(x) = (x-1)^3 + 1$ *et Ω (1; 1)*

(c) $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-3}$ *et Ω (1; 0)*

CHAPITRE 3 : LIMITES ET CONTINUITE D'UNE FONCTION

Objectifs pédagogiques

A la fin de ce cours l'élève doit être capable de :

- *calculer les limites aux bornes de l' ensemble de définition, d'écrire l'équation d'éventuelles des asymptotes à la courbe représentative d'une fonction donnée,*
- *étudier la continue d'une fonction en un point x_0 ou sur un intervalle donné,*

I/ Limite d'une fonction en l'infini

1/ Activité

a) *Lorsqu'on élève un grand nombre au carré, on obtient un grand nombre. En d'autre terme, on dit : « lorsque x tend vers $+\infty$ alors x² tend vers $+\infty$ » et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.*

***E**n détaille, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} (+\infty)^2 = +\infty$.*

De même, en $-\infty$, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = \lim\limits_{x\to-\infty} (-\infty)^2 = +\infty$.

b) *Avec le même raisonnement, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = \lim\limits_{x\to+\infty} (+\infty)^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = \lim\limits_{x\to-\infty} (-\infty)^3 = -\infty$.*

c) *Lorsqu'on divise un nombre R par un très grand nombre, le résultat est proche de zéro. Et, on dit « lorsque x tend vers $+\infty$, alors $\frac{R}{x}$ tend vers 0 ». On note $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{R}{x} = 0$.*

En généralisant, on dit en terme de limite $\frac{Réel}{Infini} = zéro$ avec $Infini = +\infty$ ou $-\infty$.

2/. Limite en l'infini de fonctions élémentaires

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} k = k$; $\lim\limits_{x\to-\infty} k = k$, $k \in \mathbb{R}$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.

e) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, *alors* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & si \ n \ est \ pair \\ -\infty & si \ n \ est \ impair \end{cases}$$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$;

g) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

3/. Limite en l'infini des fonctions polynômes et des fonctions rationnelles

a) La limite à l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite à l'infini de son monôme de plus haut degré.

On écrit : $\lim\limits_{x\to\infty}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = \lim\limits_{x\to\infty} a_n x^n$.

b) La limite à l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite à l'infini du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

On écrit : $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$

Exercice 3.1 *: Calculer les limites suivantes.*

$\lim\limits_{x\to-\infty} -5x^2-3x+2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} -5x^2-3x+2$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3+2x-3}{x^2-3x+1}$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x-3}{x^2-3x+1}$

II) Limite d'une fonction en un point x_0

1) Limite en x_0 *d'une fonction définie en* x_0

- *Soit f une fonction définie en* x_0*. Si f admet une limite en* x_0 *alors cette limite est égale à* $f(x_0)$ *c'est-à-dire* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
- *Lorsqu'une fonction admet une limite en* x_0*, cette limite est unique.*
- *La limite en n'importe quel point d'une fonction constante est égale à cette constante*

Exercice 3.2

Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de la fonction f ***en*** $\boldsymbol{x_0}$

a) $f(x) = -x^2+4x-1$, $x_0 = 1$

b) $f(x) = -4x^2+x$; $x_0 = -1$

c) $f(x) = \frac{3x}{x+1}$; $x_0 = 1$

d) $f(x) = \frac{2x-5}{4x+1}$; $x_0 = 0$

2) Limite en x_0 *d'une fonction non définie en* x_0

Soit f *une fonction rationnelle non définie en* x_0 *(*x_0 *annule le dénominateur de* f*)*

- *Si le numérateur en* x_0 *est non nul alors calculer la limite de* f *en* x_0 *revient à calculer la limite de* f *à gauche en* x_0 *ou la limite de* f *à droite en* x_0.
  - *On étudie le signe du dénominateur*
  - *En terme de limite, retenons que* $\frac{\text{réel}}{\text{zéro}} = \infty$*. Il s'agira de* $-\infty$ *ou* $+\infty$ *suivant le signe du numérateur et celui du dénominateur.*
- *Si le numérateur en* x_0 *est nul alors la limite de* f *en* x_0 *est égale à* $\frac{\text{zéro}}{\text{zéro}}$ *qui est une indétermination. On lève cette indétermination en mettant* $(x-x_0)$ *en facteur au numérateur et au dénominateur, puis on simplifie et on calcule aisément la limite demandée.*
- ***Remarque :*** ***En général, on calcule les limites à gauche et à droite en*** $\boldsymbol{x_0}$ ***d'une fonction f lorsque f n'est pas définie en*** $\boldsymbol{x_0}$ ***ou lorsque f est définie par intervalles dont*** $\boldsymbol{x_0}$ ***est un point de raccordement.***

Exercice 3.3

Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonction f à gauche et à droite en x_0

1) $f(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$; $x_0 = -2$ *(2)* $f(x) = \frac{x^2-4}{x-3}$; $x_0 = 3$

3) $f(x) = \frac{x^2+3x-4}{x^2-4}$; $x_0 = 2$ *(4)* $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$; $x_0 = 0$

Exercice 3.4

Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de la fonction f en x_0

1) $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$; $x_0 = 3$; ***2)*** $g(x) = \frac{1-x^2}{x-1}$; $x_0 = 1$.

Exercice 3.5

Dans chacun des cas suivants , calculer les limites de la fonction f en x_0

a) $f: \begin{cases} f(x) = x^2+4 & si\ x \le 2 \\ f(x) = 3x+2 & si\ x > 2 \end{cases}$; $x_0 = 2$

b) $f: \begin{cases} f(x) = 2x^2-1 & si\ x \in]-\infty;1] \\ f(x) = 3x & si\ x \in]1;+\infty[\end{cases}$; $x_0 = 1$

III) Calculs de limites

Limite de la somme de deux fonctions

f et g sont des fonctions ; x_0, l et l' des nombres réels. Lorsque x tend vers $+\infty, -\infty$ ou x_0,		
si f a pour limite	*et si g a pour limite*	*alors (f + g) a pour limite*
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	l'	$+\infty$
l	l'	$l + l'$
$-\infty$	l'	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	*indétermination*

Limite du produit de deux fonctions

f et g sont des fonctions ; x_0, l et l' des nombres réels. Lorsque x tend vers $+\infty, -\infty$ ou x_0,		
si f a pour limite	*et si g a pour limite*	*alors (fg) a pour limite*
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$l'; l' > 0$	$+\infty$
$+\infty$	$l'; l' < 0$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
l	l'	$l \times l'$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$l'; l' > 0$	$-\infty$
$-\infty$	$l'; l' < 0$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
0	$+\infty$	*indétermination*

Limite du quotient de deux fonctions

f et g sont des fonctions ; x_0, l et l' des nombres réels. Lorsque x tend vers $+\infty, -\infty$ ou x_0,		
si f a pour limite	*et si g a pour limite*	*alors $\left(\frac{f}{g}\right)$ a pour limite*
l	$l'; l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$
$l; l \neq 0$	$+\infty$	0
$l; l \neq 0$	$-\infty$	0
$l; l \neq 0$	0	$(signe)\infty$
0	0	*Indétermination*
$+\infty$	$l'; l' > 0$	$+\infty$
$+\infty$	$l'; l' < 0$	$-\infty$
$-\infty$	$l'; l' > 0$	$-\infty$
$-\infty$	$l'; l' < 0$	$+\infty$
∞	∞	*indétermination*

Formes indéterminées

On identifie à partir des tableaux de limites ci-dessus ***quatre formes indéterminées****, à savoir :*

$+\infty - \infty$ **;** $\mathbf{0} \times \infty$ **;** $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ **;** $\frac{\infty}{\infty}$.

Ces formes ne permettent pas de se prononcer sur les résultats de calculs de limite. Il faut alors trouver une autre méthode pour arriver au résultat. Si on y parvient, on dit qu'on ***« a levé l'indétermination ».***

IV) Notion d'asymptote

1) Asymptote verticale

Lorsque $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ *(*$x_0 \in \mathbb{R}$ *), alors la droite (D) :* $x = x_0$ *est une asymptote verticale à* (C_f)*.*

Le réel x_0 *est souvent une borne ouverte de* D_f*.*

2) Asymptote horizontale

Lorsque $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$ *(*$b \in \mathbb{R}$ *), alors la droite (D) : y = b est une asymptote horizontale à* (C_f) *en* $-\infty$ *ou en* $+\infty$*.*

3) Asymptote oblique

Soit $(D): y = ax + b$*. Lorsque* $\lim_{x \to \infty} [f(x) - y] = 0$*, alors la droite* $(D): y = ax + b$ *est une asymptote oblique à* (C_f) *en* $-\infty$ *ou en* $+\infty$*.*

Position relative de (C_f) ***et*** (D) ***:***

- *Si* $f(x) - y > 0$ *alors la courbe* (C_f) *est au dessus de (D).*
- *Si* $f(x) - y < 0$ *alors la courbe* (C_f) *est au dessous de (D).*

Exercice 3.6

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{-x^2+4x}{x-1}$ *et* (C_f) *la courbe de f.*

1) *Calculer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.*
2) *Montrer que les droites* $(\Delta): x = 1$ *et* $(D): y = -x + 3$ *sont des asymptotes à* (C_f)*.*
3) *Etudier la position relative de* (C_f) *et (D).*

Exercice 3.7

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2 - \frac{1}{x^2-1}$ *et* (C_f) *sa courbe représentative.*

1) *Calculer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.*
2) *Préciser les différentes asymptotes de* (C_f)*.*

Exercice 3.8

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{-x^2+3x}{x-2}$ *et* (C_f) *sa courbe représentative.*

1) *Déterminer les réels a , b et c tel que* $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$
2) *En déduire une équation de l'asymptote oblique à la courbe* (C_f)

V) Continuité d'une fonction

1) Continuité d'une fonction en un point d'abscisse x_0

- *Une fonction f est continue en* x_0 *si et seulement si* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ *ou* $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)$
- *Si f est continue en* x_0 *alors elle est définie en* x_0*. Mais la réciproque est fausse.*

Exercice 3.9

Dans chacun des cas suivants , étudier la continuité de la fonction f en x_0

a) $f(x) = 3x^2 - 5x - 7$; $\quad x_0 = -1$

b) $f: \begin{cases} f(x) = x^2 + 4 & si\ x \leq 2 \\ f(x) = 3x + 2 & si\ x > 2 \end{cases}$; $\quad x_0 = 2$

c) $f: \begin{cases} f(x) = 2x^2 - 1 & si\ x \epsilon]-\infty; 1] \\ f(x) = 3x & si\ x \epsilon]1; +\infty[\end{cases}$; $\quad x_0 = 1$

2) Continuité sur un intervalle

Soient I un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$ *et f une fonction définie sur I. f est continue sur I si f est continue en tout élément de I.*

Propriété

- *Toute fonction polynôme est continue sur* $\mathbb{R}$*.*
- *Toute fonction rationnelle est continue sur son ensemble de définition.*
- *La fonction valeur absolue et toute fonction constante sont continues sur* $\mathbb{R}$*.*
- *Les fonctions* $x \longmapsto sinx$ *et* $x \longmapsto cosx$ *sont continues sur* $\mathbb{R}$*.*

CHAPITRE 4 : DERIVATION ET ETUDE DE FONCTIONS

Objectifs pédagogiques

A la fin de ce cours l'élève doit être capable de :

- *étudier la dérivabilité d'une fonction en un point x_0 ou sur un intervalle et écrire une équation de la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse x_0,*
- *calculer l'expression de la fonction dérivée d'une fonction, étudier son sens de variation et établir son tableau de variation.*
- *étudier les variations d'une fonction polynôme et tracer sa courbe représentative,*
- *étudier les variations d'une fonction rationnelle et tracer sa courbe représentative,*
- *étudier les variations d'une fonction f donnée par intervalles et tracer sa courbe représentative,*
- *étudier les variations d' une fonction f contenant une valeur absolue et tracer sa représentation graphique,*

I) Dérivabilité en un point d'abscisse x_0

1) Nombre dérivé d'une fonction en x_0

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f contenant un réel x_0.

- *On appelle taux de variation de f en x_0, la fonction notée T_{x_0} et définie sur $D_f - \{x_0\}$ par $T_{x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.*
- *f est dérivable en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est finie. Cette limite est appelée le nombre dérivé de f en x_0 et notée $f'(x_0)$.*

2) Equation de la tangente au point d'abscisse x_0

Si f est dérivable en x_0 alors la courbe (Cf) admet une tangente (T) au point d'abscisse x_0, dont le coefficient de directeur est $f'(x_0)$.Son équation réduite est donnée par (T) : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Exercice 4.1

Dans chacun des cas suivants, en utilisant la définition, montrer que la fonction f est dérivable en x_0 et déterminer une équation de la tangente à (Cf) au point d'abscisse x_0

a) $f(x) = x^2 - x$, $x_0 = -1$

b) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$, $x_0 = 0$

c) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x_0 = 1$

3) Propriété

Si une fonction est dérivable en x_0 alors elle est continue en x_0. La réciproque est fausse est fausse.

II) Dérivabilité sur un intervalle

1) Définitions et propriétés

- *Lorsque f est dérivable sur un intervalle I, on dit que I est l'ensemble de dérivabilité de f c-à-d I est l'ensemble de définition de la fonction dérivée f'.*
- *Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$,*
- *Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition*
- *Les fonctions $x \longmapsto \sin x$ et $x \longmapsto \cos x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$,*
- *La fonction $x \longmapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$,*
- *La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$.*

2) ***Détermination de fonctions dérivées***

a) ***Fonction dérivée***

Soient f une fonction d'ensemble de définition D_f et I l'ensemble de dérivabilité de f.

La fonction dérivée est : $f': I \to \mathbb{R}, x \longmapsto f'(x)$

b) **Remarque**

La dérivée de la dérivée f' est notée f'' ou $f^{(2)}$ *et appelée dérivée seconde*

c) **Dérivées des fonctions élémentaires**

$Fonction\ f(x)$	$Dérivée\ \ f'(x)$
$f(x) = c,$ $c\ \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^n,$ $n \in \mathbb{R}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}\ , n \in \mathbb{R}^*$	$f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = Sinx$	$f'(x) = cosx$
$f(x) = Cosx$	$f'(x) = -sinx$
$f(x) = tanx$	$f'(x) = 1 + tan^2x$

d) **Formules de calculs de dérivées**

Soient U *et* V *deux fonctions*

$\boldsymbol{Fonction\ \ f}$	$\boldsymbol{Dérivée\ f'}$
$\boldsymbol{f = U + V}$	$\boldsymbol{f' = U' + V'}$
$\boldsymbol{f = kU\ \ \ (k \in \mathbb{R})}$	$\boldsymbol{f' = kU'}$
$\boldsymbol{f = UV}$	$\boldsymbol{f' = U'V + V'U}$
$\boldsymbol{f = \frac{1}{V}}$	$\boldsymbol{f' = \frac{-V'}{V^2}}$
$\boldsymbol{f = \frac{U}{V}}$	$\boldsymbol{f' = \frac{U'V - V'U}{V^2}}$
$\boldsymbol{f = U^n\ \ \ (n \in \mathbb{R}^*)}$	$\boldsymbol{f' = nU'U^{n-1}}$
$\boldsymbol{f = \sqrt{U}}$	$\boldsymbol{f' = \frac{1}{2\sqrt{U}}}$
$\boldsymbol{f = cosU}$	$\boldsymbol{f' = -U'sinU}$
$\boldsymbol{f = sinU}$	$\boldsymbol{f' = U'cosU}$

Exercice 4.2

Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de la fonction f

$(a)\ \ f(x) = -3x + 1$ *(b)* $f(x) = -x^2 + 3x + 1$ *(c)* $f(x) = -3x^2 + \frac{1}{2}x - 2$

$(d)\ \ f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x$ (e) $f(x) = (3x - 2)^3$ *(f)* $f(x) = (x^2 - 1)^4$

$(g)\ \ f(x) = (x^2 - 1)(x + 1)$

Exercice 4.3

Dans chacun des cas suivants, déterminer la fonction dérivée de f

$(a)\ \ f(x) = \frac{1}{2x-1}$ *(b)* $f(x) = \frac{1-3x}{x+4}$ *(c)* $f(x) = \frac{3x^2-x+2}{3x-1}$ *(d)* $f(x) = \frac{x^2-3}{5x^2-x-1}$

3) **Dérivée et sens de variation**

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et de dérivée f'.

- $\forall x \in I,\ f'(x) < 0\ \Leftrightarrow$ *f est strictement décroissante sur I,*
- $\forall x \in I,\ f'(x) > 0\ \Leftrightarrow$ *f est strictement croissante sur I,*
- $\forall x \in I,\ f'(x) = 0\ \Leftrightarrow$ *f est constante sur I.*

4) **Dérivée et extrémum relatif**

Soit f une fonction dérivable sur intervalle $]a; b[$ *et* x_0 *un élément de* $]a; b[$.

f' *s'annule et change de signe en* x_0 *si et seulement si* f *admet un extremum relatif en* x_0 *égal* $f(x_0)$.

L'extrémum relatif est soit un minimum, soit un maximum.

5) **Tableau de variation d'une fonction**

Le tableau de variation d'une fonction f est un tableau de synthèse renseignant sur son ensemble de définition, ses limites, le signe de sa dérivée, ses éventuels extrémums, son sens de variation et permet de tracer l'allure de sa courbe.

Exercice 4.4

Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variation.

$(a)\ \ f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ *(b)* $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$ (c) $f(x) = \frac{2x-4}{2x-3}$ *(d)* $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

III) Etude de fonctions

1) *Plan d'étude de sens de variations de f*

- *Ensemble de définition D_f*
- *dérivée f' de f*
- *signe de f' et sens de variation de f*

2) *Plan d'étude des variations de f*

- *Ensemble de définition D_f*
- *limites aux bornes de D_f*
- *dérivée f' de f*
- *signe de f' et sens de variation de f*
- *tableau de variation de f*

4. Représentation des fonctions associées à une fonction f

Soient C_f et C_g désignent les courbes représentatives respectives de f et g. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

a) $\boldsymbol{g(x) = -f(x)}$ $\Leftrightarrow$ *C_g est le symétrique de C_f par rapport à l'axe des abscisses soit $C_g = S_{(Ox)}(C_f)$*

b) $\boldsymbol{g(x) = f(-x)}$ $\Leftrightarrow$ *C_g est le symétrique de C_f par rapport à l'axe des ordonnées soit $C_g = S_{(Oy)}(C_f)$*

Exercice 4.5

Soit f la fonction définit par $f(x) = x^3 - 3x + 1$

1) *Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition*
2) *Déterminer la dérivée de f et en déduire le sens de variation de f*
3) *Dresser le tableau de variation de f*
4) *Déterminer les extrémums relatifs de f*
5) *Construire la courbe (Cf)*

Exercice 4.6

On considère la fonction f définie par : $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$

1) *Etudier les variations de f et Construire la courbe (Cf)*
2) *Déterminer les coordonnées des points de (C_f) où la tangente est parallèle la droite d'équation : $y = 2x$.*

Exercice 4.7

Soit f la fonction rationnelle définie par $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x-1}$

a. *Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition*
b. *Préciser l'asymptote verticale à (Cf)*
c. *Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation*
d. *Montrer que la droite (D): $y = x + 2$ est asymptote oblique à (Cf)*
e. *Montrer que le point $A(1\,;3)$ est centre de symétrie à (Cf)*
f. *Construire la courbe (Cf)*

Exercice 4.8

Soit la fonction rationnelle définie par $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

a. *Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. En donner une interprétation graphique.*
b. *Montrer que la fonction f est paire. En déduire une interprétation graphique.*
c. *Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.*
d. *Tracer la courbe (Cf)*
e. *Soit g la fonction définie par $g(x) = -f(x)$ Expliquer comment la courbe la courbe (Cg) se déduit-elle de (Cf). Tracer (Cg) dans le même repère que (Cf).*

Exercice 4.9

Soit la fonction polynôme définie par $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$.

1) *Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.*
2) *Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation*
3) *Montrer que la droite (D) d'équation $x = 2$ est axe de symétrie à (Cf)*
4) *Construire la courbe (Cf)*
5) *Soit g la fonction définie par $g(x) = f(-x)$. Tracer (Cg) dans le même repère que (Cf)*

CHAPITRE 5 : SUITES NUMERIQUES

Objectifs pédagogiques

A la fin de ce cours, l'élève doit être capable de :

- *calculer les termes d'une suite,*
- *établir le sens de variation d'une suite donnée,*
- *démontrer qu'une suite définie explicitement est convergente ou divergente*
- *reconnaître une suite arithmétique ou géométrique,*
- *calculer une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.*

I) Généralités

1) Définition

On appelle suite numérique une application définie de $\mathbb{N}$ $ou\ d'une\ partie\ de$ $\mathbb{N}$ *vers* $\mathbb{R}$.

2/. Termes et indices

Soit I l'ensemble de définition d'une suite numérique U, on a :

$U: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \longmapsto U(n) = U_n$

- *La suite U est encore notée* $(U_n)_{n\epsilon I}$ *ou plus simplement* (U_n)
- U_n *est appelé terme d'indice n ou terme général*
- *Si* $I = \mathbb{N}$ *alors le premier terme de la suite* (U_n) *est* U_0
- *Si* $I = \mathbb{N}^*$ *alors le premier terme de la suite* (U_n) *est* U_1
- *On note* $(U_n)_{n \geq n_0}$ *la suite de terme général* U_n *et de premier terme* U_{n_0}

3) Mode de définition d'une suite

a) Une formule explicite.

Une suite (u_n) *est dite définie par* ***une formule explicite*** *lorsqu'il est sous la forme* $u_n = f(n)$ *où f est une fonction numérique ;* u_n *est alors le terme général de la suite.*

Exercice 5.1

On donne $u_n = \frac{n+1}{n^2+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Calculer les trois premiers termes de la suite (u_n).

Calculer u_{20} *et* u_{100}.

b) Une formule de récurrence

Une suite (u_n) *est dite définie* ***par une formule de récurrence*** *lorsqu'il est sous la forme* $\begin{cases} u_a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ *où* u_a *est le 1er terme donné et f est une fonction numérique.*

Exercice 5.2

On donne la suite (u_n) *définie par* $u_1 = 2$ *et* $u_{n+1} = \frac{1-u_n}{2+u_n}$ *pour tout* $n \geq 1$.

Calculer les quatre premiers termes de la suite (u_n).

4) Sens de variation d'une suite

Soit $(u_n)_{n \in I}$ *une suite. Pour étudier le sens de variation de* $(U_n)_{n\epsilon I}$ *, on calcule* $U_{n+1} - U_n$ *:*

- *Si pour tout* $n\epsilon I$, $U_{n+1} - U_n \leq 0$ *alors la suite* (U_n) *est décroissante*
- *Si pour tout* $n\epsilon I$, $U_{n+1} - U_n \geq 0$ *alors la suite* (U_n) *est croissante*
- *Si pour tout* $n\epsilon I$, $U_{n+1} - U_n = 0$ *alors la suite* (U_n) *est constante*

Exercice 5.3

On considère la suite (u_n) *définie par* $u_n = n^2 + 2n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3, u_4. *Que pensez-vous du sens de variation de la suite* (u_n) *?*

2. a. Déterminer u_{n+1} *en fonction de n et en déduire que* $u_{n+1} - u_n = 2n + 3$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

b. Démontrer que la suite (u_n) *est croissante.*

Exercice 5.6 : Etudier *le sens de variation de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n = \frac{1}{n+2}$.

Exercice 5.7

On donne la suite (u_n) *définie par :* $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n} \end{cases}$ *Déterminer* u_0 *pour que cette suite soit constante.*

II) Suites arithmétiques-suites géométriques

1) Suites arithmétiques

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in I}$ *est* ***une suite arithmétique*** *s'il existe un nombre réel r tel que pour tout* $n \in I$, $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n = r}$.

On dit alors que r est la raison de la suite arithmétique (u_n)

Terme général d'une suite arithmétique

Soit (U_n) *une suite arithmétique de 1er terme* U_a $(a \in \mathbb{N})$ *et de raison r. Le terme général de la suite* (U_n) *est donné par :*

$U_n = U_a + (n - a)r$

Relation entre deux termes d'indices n et p tel que $\boldsymbol{p \leq n}$

$U_n = U_p + (n - p)r$

Somme des termes consécutifs

$S_n = U_a + U_{a+1} + U_{a+2} + \cdots + U_n$

$S_n = \frac{nombre\ de\ termes(\ 1er\ \ terme + dernier\ terme)}{2}$

$S_n = (n - a + 1)\frac{(U_a + U_n)}{2}$

$S_n = (n - a + 1)\frac{(2U_a + (n - a)r)}{2}$

2) Suites géométriques

On dit qu'une suite $(U_n)_{n\in I}$ *est* ***une suite géométrique*** *s'il existe un nombre réel q tel que pour tout* $n \in I$, $\boldsymbol{U_{n+1} = qU_n}$.

On dit alors que q est la raison de la suite géométrique (U_n)

Terme général d'une suite géométrique

Soit (U_n) *une suite géométrique de 1er terme* U_a $(a \in \mathbb{N})$ *et de raison q. Le terme général de la suite* (U_n) *est donné par :*

$U_n = U_a q^{n-a}$

Relation entre deux termes d'indices n et p tel que $\boldsymbol{p \leq n}$

$U_n = U_p q^{n-p}$

Somme des termes consécutifs

$S_n = u_a + u_{a+1} + u_{a+2} + \cdots + u_n$

$S_n = \frac{1er\ terme(\ 1 - q^{nombre\ de\ termes})}{1 - q}, si\ q \neq 1$

$S_n = U_a\frac{(1 - q^{n-a+1})}{1 - q}$, *si* $q \neq 1$

$S_n = (n - a + 1)U_a$, *si* $q = 1$

Exercice 5.8

On considère la suite numérique U définie par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + 1 \end{cases}$

1) *Calculer* U_1 *,*U_2 *,*U_3
2) *On considère la suite V définie sur* $\mathbb{N}$ *par* $V_n = U_n - 3$ *.Démontrer que V est une suite géométrique. Exprimer* V_n *puis* U_n *en une fonction de n .*
3) *Exprimez* $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-1}$ *en fonction de n.*

Exercice 5.9

On considère la suite (U_n) *definie sur* $\mathbb{N}$ *par* $U_o = 1$ *et* $U_{n+1} = \frac{2U_n}{U_{n+2}}$ $\forall n \epsilon \mathbb{N}$

1) *Calculer* U_1 *,*U_2*;* U_3
2) *On pose* $V_n = \frac{1}{U_n}$ *, pour tout entier naturel n. Démontrer que la suite* (V_n) *est suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison. Exprimer* V_n *puis* U_n *en une fonction de n.*
3) *Exprimez* $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-1}$ *en fonction de n.*

CHAPITRE 6 : BARYCENTRE

Objectifs pédagogiques

A la fin de ce cours, l'élève doit être capable de :

- *indiquer la condition d'existence du barycentre de deux, trois points ou n points*
- *démontrer qu'un point est barycentre de deux ou trois points*
- *construire le barycentre de n points (n=2 ;3 .)*
- *démontrer que trois points sont alignés en utilisant les propriétés des barycentres*

I) Barycentre de deux points :

1/. Activité

Soient A et B deux points du plan, a *et* b *des réels.*

Dans chacun des cas suivants, résoudre l'équation (E) *d'inconnue X un point du plan.*

$a)$ (E_1): $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}=\vec{0}$ $b)$ (E_2): $3\overrightarrow{XA}-2\overrightarrow{XB}=\vec{0}$ $c)$ (E_3): $a\overrightarrow{XA}+b\overrightarrow{XB}=\vec{0}$

2/. Définition

- *Soient A et B deux points du plan,* a *et* b *des réels.*

  Si $a+b\neq 0$ *alors il existe un et un seul point G tels que* $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.
- *On appelle point pondéré tout couple* (A,a) *où A est un point et* a *un réel.* a *est appelé coefficient de pondération du point A.*
- *Soient* (A,a) *et* (B,b) *deux points pondérés tels que* $a+b\neq 0$*. On appelle barycentre des points pondérés* (A,a) *et* (B,b)*, l'unique point G du plan vérifiant* $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

  On note : $G = bar\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$.

2) Remarques

$a)$ *Si* $G = bar\{(A,a);(B,b)\}$*, alors :*

- *A, B et G sont alignés*
- $G = bar\{(A,ka);(B,kb)\}$ *pour* $k\in\mathbb{R}^*$ *(homogénéité du barycentre) : Le barycentre de deux points reste inchangé lorsqu'on multiplie tous les coefficients par un même nombre réel non nul.*
- *Si* $a=b$*, on dit que G est l'isobarycentre de A et B. Dans ce cas, G est alors le milieu du segment* $[AB]$.

$b)$ *Si* $a+b=0$*, le système* $\{(A,a);(B,b)\}$ *n'admet pas de barycentre.*

$c)$ *A et B étant deux points quelconques du plan, l'ensemble des barycentres de A et B est la droite* (AB).

Exercice 6.1

Soient $(A,2),(B,3)$ *et* $(C,-2)$ *des points pondérés. Les systèmes* $\{(A,2);(B,3)\}$ *et* $\{(A,2);(C,-2)\}$ *admettent-ils des barycentres?.*

3) Réduction de $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}$

Pour tout point M du plan, on a :

- *Si* $a+b=0$*, alors* $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=b\overrightarrow{AB}$,
- *Si* $a+b\neq 0$*, alors* $G = bar\{(A,a);(B,b)\}$ *et* $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=(a+b)\overrightarrow{MG}$

4) Propriétés caractéristiques du barycentre de deux points

Soit $G = bar\{(A,a);(B,b)\}$*, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

b) $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=(a+b)\overrightarrow{MG}$

c) $\overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{BG}=\frac{a}{a+b}\overrightarrow{BA}$*. Ces égalités permettent chacune en particulier la construction du point G. Ailleurs, elles montrent que les trois points A, B et G sont alignés.*

Exercice 6.2

Soit IAB un triangle quelconque. Soit $G = bar\{(A,5);(B,2)\}$ *et* $J = bar\{(I,3);(G,1)\}$*, Construire G puis J.*

5) Coordonnées du barycentre de deux points

Le plan est muni du repère orthonormé (O,I,J).

Si $A\binom{x_A}{y_A}$ *,* $B\binom{x_B}{y_B}$ *et* $G = bar\{(A,a);(B,b)\}$ *alors* $G\left(\frac{ax_A+bx_B}{a+b};\frac{ay_A+by_B}{a+b}\right)$.

Exercice 6.3 : *On donne dans le repère orthonormé* (O, I, J), *les points* $A\binom{1}{2}$ *et* $B\binom{-2}{-3}$ *tels que* $G = bar\{(A,5);(B,-2)\}$. *Déterminer les coordonnées du barycentre G.*

II) Barycentre de trois points :

1) Définition

Soient $(A,a),(B,b)$ *et* (C,c) *trois points pondérés tels que* $a+b+c \neq 0$. *On appelle barycentre des points pondérés* $(A,a),(B,b)$ *et* (C,c), *l'unique point G vérifiant* $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
On note : $G = bar\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$

2) Remarques

- *Si* $G = bar\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$, *alors* $G = bar\{(A,ka),(B,kb),(C,kc)\}$ *pour* $k \in \mathbb{R}^*$ *(homogénéité du barycentre). Le barycentre de trois points reste inchangé lorsqu'on multiplie tous les coefficients par un même nombre réel non nul.*
- *Si* $a = b = c$, *on dit que G est l'isobarycentre de A, B et C. Dans ce cas, G est alors le centre de gravité du triangle ABC lorsque A, B et C sont non alignés.*

3) Réduction de $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$

Pour tout point M du plan, on a :

- ***Si*** $a+b+c = 0$, *alors* $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$
- ***Si*** $a+b+c \neq 0$, *alors* $G = bar\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$ *et* $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MG}$

4) Propriétés caractéristiques du barycentre de trois points

Soit $G = bar\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$, *alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$
b) *Pour tout point M du plan,* $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MG}$
c) $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BG} = \frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{BA} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{BC}$ *et* $\overrightarrow{CG} = \frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{CA} + \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{CB}$
Ces égalités permettent chacune en particulier la construction du point G.

5) Coordonnées du barycentre de trois points

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
Si $A\binom{x_A}{y_A}$, $B\binom{x_B}{y_B}$, $C\binom{x_C}{y_C}$ *et* $G = bar\{(A,a);(B,b);(C,c)\}$ *alors* $G\left(\frac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c}; \frac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}\right)$.

Exercice 6.4

$G = bar\{(A,7),(B,8),(C,-5)\}$ et $A(8,7)$, $B(-12;-8)$ et $(4;-11)$ dans le repère (O,I,J). Déterminer les coordonnées de G dans (O,I,J).

Remarque : *La notion de barycentre a été étendue de deux à trois points pondérés. Cette notion peut être étendue à plus de trois points pondérés.*

Exercice 6.5

ABC est un triangle équilatéral de côté $\sqrt{3}$. *On considère le système*
$S = \{(A; 2-\alpha);(B; 1+\alpha);(C; 2-\alpha)\}$ *où* $\propto$ *est un nombre réel.*
Déterminer l'ensemble E des valeurs du nombre réel $\propto$ *pour lesquelles S admet un barycentre.*

Exercice 6.6

ABC est un triangle. Construire le point G barycentre de (A, -1), (B, 2), (C, 3).

Exercice 6.7

ABC est un triangle équilatéral de côté 4.
D est le point du plan tel que : $3\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

1- *Démontrer que D est le barycentre des ponts A, B, C affectés de coefficients que l'on déterminera.*
2- *a/ I étant le milieu de [AC], démontrer que D est le barycentre des points B et I affectés de coefficients que l'on déterminera.*
b/ En déduire que D appartient à la médiatrice de [AC].

CHAPITRE 7 : TRIGONOMÉTRIE

Objectifs pédagogiques

A la fin de ce cours, l'élève doit être capable de :

- *placer l'image d'un angle orienté sur le cercle trigonométrique*
- *calculer le sinus, le cosinus et la tangente d'un nombre réel,*
- *transformer des expressions à partir des formules trigonométriques,*
- *résoudre dans $]-\pi;\pi]$ ou dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations trigonométriques*

1) Mesures d'un angle orienté-mesure principale

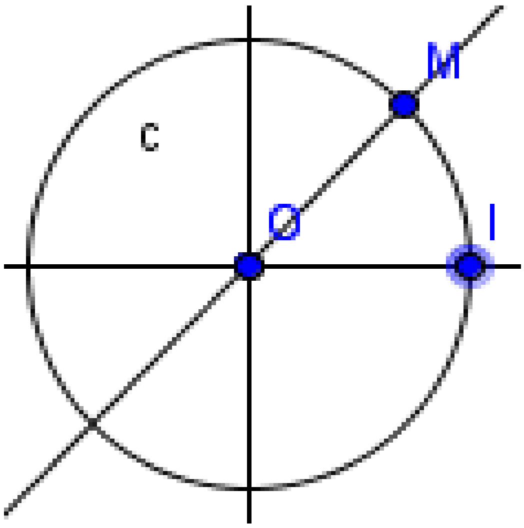
- *Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls déterminent un angle orienté $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$*
- *Soit $(\vec{u};\vec{v})$ un angle orienté et x une mesure en radians de $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$.*

  Tout autre mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ est de la forme $\boldsymbol{x+2k\pi, k} \in \mathbb{Z}$.
- *Parmi toutes les mesures d'un angle orienté $(\vec{u};\vec{v})$, il en existe une et une seule qui appartient à l'intervalle $]\boldsymbol{-\pi;\pi}]$. C'est la mesure principale de cet angle orienté notée $\boldsymbol{Mes(\vec{u};\vec{v})}$.*
- *Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J)*

  *On appelle **cercle trigonométrique**, le cercle $(\mathcal{C})$ orienté de centre O et de rayon unité.*

  A chaque mesure $\propto \in]\boldsymbol{-\pi;\pi}]$, on associe le point $M \in (\mathcal{C})$ telle que $Mes(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}}) = \propto$.

  *M est appelé **point image de** $\propto$ sur le cercle $(\mathcal{C})$ et est noté $M(\propto)$.*



- *Déterminer la mesure principale $\propto$ d'un angle orienté de mesure x connue, consiste à écrire $\propto = x+2k\pi$, où $\propto \in]-\pi;\pi]$ et $k \in \mathbb{Z}$.*
  - *Si $x \in]-\pi;\pi]$ alors $\propto = x$*
  - *Sinon, on détermine tout d'abord k à l'aide des inégalités $-\pi < x+2k\pi \leq \pi$*
  - *Puis l'on détermine $\propto$ en utilisant l'égalité $\propto = x+2k\pi$.*

Exercice 7.1 *: Placer les angles remarquables sur le cercle trigonométrique.*

2) Cosinus, sinus et tangente d'un nombre réel

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, si M est le point du cercle trigonométrique image du réel x,

- *l'abscisse de M est appelée cosinus de x, elle est notée cos(x) ou cosx,*
- *l'ordonnée de M est appelée sinus de x, elle est notée sin(x) ou sinx,*
- *tangente de x est le nombre réel noté $tanx = \frac{sinx}{cosx}$ si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$*
- *Pour tout réel x, on a : $-1 \leq cosx \leq 1$; $-1 \leq sinx \leq 1$; $cos^2x + sin^2x = 1$*
- *Pour tout réel x, on a : $cos(x+2\pi) = cosx$ et $sin(x+2\pi) = sinx$*

3) Cosinus et sinus des angles remarquables et angles associés

Angle en degré	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1

- $\begin{cases} cos(-x) = cosx \\ sin(-x) = -sinx \end{cases};$
- $\begin{cases} cos(\pi + x) = -cosx \\ sin(\pi + x) = -sinx \end{cases};$
- $\begin{cases} cos(\pi - x) = -cosx \\ sin(\pi - x) = sinx \end{cases};$
- $\begin{cases} cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -sinx \\ sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = cosx \end{cases};$
- $\begin{cases} cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sinx \\ sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cosx \end{cases}$

Exercice 7.2
Calculer en fonction de sinx et de cosx, les expressions suivantes :
$A = cos(x + \pi) + cos(\pi - x) + cos(-x)$ et $B = sin(x + \pi) + sin(\pi - x) + sin(-x)$

4) Formules usuelles de trigonométrie
a) Formule d'addition

(1) $cos(a + b) = cosacosb - sinasinb$ (2) $cos(a - b) = cosacosb + sinasinb$
(3) $sin(a + b) = sinacosb + sinbcosa$ (4) $sin(a - b) = sinacosb - sinbcosa$

Exercice 7.3 : *En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, utiliser les formules d'addition pour trouver les valeurs exactes de $sin\frac{\pi}{12}$ et $cos\frac{\pi}{12}$.*

b) Formule de duplication

En posant a = b, on a :
(1)⇒ $cos2a = cos^2a - sin^2a$ (5) ***(3)⇒ $sin2a = 2sinacosa$ (6)***

c) Formule de linéarisation

$Cos^2a+sin^2a=1$⇒ $\begin{cases} cos^2a = 1 - sin^2a \\ sin^2 = 1 - cos^2a \end{cases}$ *d'où (5) donne :* $\begin{cases} cos^2a = \frac{1+cos2a}{2} & (\mathbf{7}) \\ sin^2a = \frac{1-cos2a}{2} & (\mathbf{8}) \end{cases}$

Exercice 7.4 : *On considère un réel α tel que $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ et $sin\alpha = \frac{1}{3}$.*
Calculer les valeurs exactes de $cos\alpha$; $sin2\alpha$; $cos2\alpha$; $sin3\alpha$; $cos3\alpha$.

5) Équations trigonométriques
a) Equations du type (E): $x \in \mathbb{R}$, $cosx = a$ ou $sinx = a$, avec $a \in \mathbb{R}$

1er cas *: si $|a| > 1$ alors l'équation (E) n'admet pas de solution*
2ème cas *: si $-1 \leq a \leq 1$ alors on cherche une solution particulière $\alpha \in]-\pi; \pi]$ et l'équation devient :*

- $cosx = cos\,\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi, k \in Z$
- $sinx = sin\,\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Exercice 7.5 *Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $cosx = \frac{1}{2}$; $cosx = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $cosx = 2$*

Exercice 7.6 *Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $sinx = \frac{1}{2}$; $sinx = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $sinx = -3$*

CHAPITRE 8 : TRANSFORMATIONS DU PLAN

Objectifs pédagogiques

A la fin de ce cours, l'élève doit être capable de :

- *déterminer et construire l'image d'un point par une translation, une rotation, une symétrie orthogonale, une symétrie centrale ou une homothétie ;*
- *utiliser la définition, le vocabulaire et les propriétés des transformations dans la résolution de problèmes portant sur les positions relatives de figures géométriques (alignement, orthogonalité et parallélisme,…) et/ou de comparaison de mesures (angles ou longueurs,…).*

1. Translation

Définition

Etant donné un vecteur $\vec{u}$ du plan, la translation de vecteur $\vec{u}$, notée $t_{\vec{u}}$, est la transformation du plan qui associe à tout point M du plan le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Remarques

- *L'image du point M par $t_{\vec{u}}$ est appelé le translaté de M par le vecteur $\vec{u}$. On note : $M' = t_{\vec{u}}(M)$.*
- *L'élément caractéristique de la translation $t_{\vec{u}}$ est le vecteur $\vec{u}$.*
- $M' = t_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow M = t_{-\vec{u}}(M') = M.$

Exercice 8.1

On considère les points A, B, C, D et E du plan deux à deux distincts et non tous alignés.

1. Déterminer l'image des points B, C, D et E par la translation de vecteur $\overrightarrow{AE}$.

2. Construire ces images.

2. Symétries orthogonales et centrales

a). Symétrie orthogonale

Définition

Etant donnée une droite (Δ) du plan, la symétrie orthogonale d'axe (Δ) est la transformation du plan notée s_Δ, qui associe à tout point M le point M' tel que (Δ) est la médiatrice de $[MM']$.

Le point M' est appelé image de M par s_Δ. On dit aussi que M' est le symétrique de M par rapport à (Δ).

On note $S_\Delta(M) = M'$. La droite (Δ) est l'élément caractéristique de la symétrie orthogonale.

Remarque *: La droite (Δ) est invariante par s_Δ : $\forall\ M \in (\Delta)$, $S_\Delta(M) = M$.*

Exercice 8.2:

1. *Tracer dans le plan une droite (Δ). Placer de part et d'autre de cette droite les points A et B. Placer sur (Δ) les points N et P.*

2. Placer les images A', B', N' et P' images respectives des points A, B, N et P.

3. Que remarque-t-on ?

b). Symétrie centrale

Définition

Soit O un point du plan. On appelle symétrie centrale de centre O et on note S_O, la transformation du plan, qui à tout point M du plan associe le point M' tel que O est milieu de $[MM']$.

On écrit : $M' = S_O(M)$.

Remarques

- *L'image M' de M par la symétrie de centre O est appelée symétrique de M par rapport à O.*
- *Le centre O est l'élément caractéristique de la symétrie centrale S_O.*

Exercice 8.3
Soit O un point du plan. Placer les points A, B, C deux à deux distincts et tous distincts du point O.
1. Construire les images A', B' et C' des points A, B et C par la symétrie centrale de centre O.
2. Quel est l'image de O par cette symétrie.

3. Homothéties
Définition
Soit O un point, k un nombre réel non nul.
On appelle homothétie de centre O et de rapport k l'application $h_{(O,k)}$ du plan dans lui-même qui, à tout point M, associe le point M' tel que : $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.
Conséquences
- *Si $k < 0$, alors le centre O est entre M et M'.*
- *Si $k > 0$, alors le centre O est à l'extérieur du segment $[MM']$.*

Propriété 1
Un point M, son image M' par une homothétie et le centre O de cette homothétie sont alignés.
Propriété 2
Le seul point invariant, par une homothétie de rapport différent de 1, est son centre.
Propriété fondamentale
Soit h une homothétie de rapport k, M' et N' images respectives par h de deux points quelconques M et N. On a : $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

Exercice 8.4
On considère le triangle ABC du plan.
1. Construire les images de B et C par l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{2}$.
2. Construire les images de B et C par l'homothétie de centre A et de rapport 2 sur une autre figure.

4. Rotation
Définition
Soit O un point, α un nombre réel appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$.
On appelle rotation de centre O et d'angle α l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M associe le point M' tel que :
- *si M = O, alors M' = M ;*
- *si $M \neq O$, alors OM' = OM et $Mes(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}) = \alpha$.*

On note $r_{(O,\alpha)}$ la rotation de centre O et d'angle α.
Remarque
Les éléments caractéristiques d'une rotation $r_{(O,\alpha)}$ sont : le centre O et l'angle α.
Propriété 1
Le seul point invariant par une rotation d'angle non nul est le centre de cette rotation.

Propriété fondamentale
Soit r une rotation d'angle α, A' et B' les images respectives par r de deux points quelconques A et B.
On a : $\begin{cases} A'B' = AB \\ Mes(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}}) = \alpha. \end{cases}$

Exercice 8.6
Soit ABC un triangle de sens direct et I un point du plan.
Construire les points A', B' et C' images respectives des points A, B et C par la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
Exercice 8.7
Soit O le centre du cercle circonscrit à un triangle équilatéral ABC de sens direct.
Trouver les images des points A, B et C par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

CHAPITRE 9 ***STATISTIQUES A UNE VARIABLE***

Objectifs pédagogiques

A la fin de ce cours, l'élève doit être capable de :

- *Déterminer les caractéristiques de position d'une série statistique regroupée en classes*
- *Déterminer les caractéristiques de dispersion d'une série statistique regroupée en classes*
- *Déterminer la médiane par interpolation linéaire et par méthode graphique.*
- *Interpréter les caractéristiques de position et de dispersion.*

Introduction

*Les **statistiques** sont des études des faits socio-économiques par des procédées numériques. Elles désignent un ensemble de méthodes scientifiques permettant de collecter, d'analyser et d'interpréter les données numériques afin de pouvoir tirer des conclusions valables et à prendre des décisions raisonnables sur la base cette analyse.*

1) ***Activité 1***

Compléter le texte à l'aide des mots suivants : *classes, enquête, unité statistique, quantitatif, population, classement, effectif, qualitatif, sondage, dépouillement.*

Après une année de commercialisation d'un produit, Monsieur Jean doit effectuer une........... . Les données dont il dispose sont les factures correspondantes à la vente de ce produit, tout au long de l'année. Ces factures constituent la .... sur laquelle va porter l'étude. Une facture représente une .... M. Jean va étudier le montant de ces factures; le montant est un caractère .... .Il possède 1200 factures. Il va en faire le .... Pour simplifier sa tâche, il les range par ordre croissant; il effectue ainsi un .... Il regroupe les factures comprises entre 0 et 100 € puis entre 100 et 200 €, etc..; M. Jean forme donc des .... .Il compte, enfin, le nombre de factures dans chaque groupe. Ce nombre est appelé..............

2) ***Terminologie de base***

a) ***Une population*** *est un ensemble dont les éléments choisis possèdent une même caractéristique ou sont de même nature. C'est un ensemble des faits, d'individus, d'objets sur lequel porte l'étude statistique.*

Exemple : L'ensemble des factures de l'année de l'entreprise. L'ensemble des élèves d'un établissement scolaire est une population

b) ***Un échantillon*** *est un sous ensemble sur lequel porte l'étude statistique dans le cas où tous les individus d'une population ne peuvent pas être atteints (dans le cas d'une population trop importante)*

c) ***Un individu*** *(ou une unité statistique) est un élément de la population*

d) ***Un caractère*** *est un critère retenu pour analyser une population. C'est la variable de l'étude statistique. Exemple : sexe, nationalité, la taille…*

e) ***Les modalités*** *sont les différentes valeurs ou situations qu'on peut attribuer à un caractère*

Exemple :

- *Le sexe peut masculin ou féminin*
- *La nationalité peut être togolaise, béninoise, ghanéenne…*
- *La taille d'un élève peut être 1m ; 1,50m ou 1,70m…*

- *Un caractère est **qualitatif** lorsque ses modalités ne sont pas des valeurs numériques. Exemple : sexe, nationalité…*
- *Un caractère est **quantitatif discret** lorsque ses modalités sont des valeurs numériques isolées. Exemple : la taille, le poids…*

f) ***Effectif :*** *C'est le nombre d'individus ayant la même modalité $\boldsymbol{x_i}$. L'effectif de la valeur x_i est notée $\boldsymbol{n_i}$. Les effectifs sont obtenus après dépouillement des valeurs. La somme des effectifs est notée **N** et est appelé **effectif total**.*

g) ***Fréquence :*** *Pour permettre des comparaisons entre les différentes modalités $\boldsymbol{x_i}$ d'un caractère, on calcule la fréquence f_i de chacune des modalités x_i du caractère. C'est le nombre $f_i = \frac{n_i}{N}$. La fréquence peut aussi s'exprimer en pourcentage $fi = \frac{n_i \times 100}{N}$ (%).*

h) ***Une série statistique*** *est une suite ordonnée ou non des modalités prises par un caractère donné. Une série statistique dont le caractère prend p modalités sera notée $(x_i, n_i)_{1\leq i\leq p}$, n_i étant l'effectif de la modalité x_i.*

3) Caractère quantitatif continu

Un caractère est quantitatif continu *lorsque les modalités du caractère sont des nombres (valeurs numériques) regroupés en classes définies par des intervalles de formes $[a; b[$.*

- *L'effectif $\boldsymbol{n_i}$ d'une classe $[\boldsymbol{a_i}; \boldsymbol{b_i}[$ est le nombre d'individus de la population étudiée dont les modalités appartiennent à $[a; b[$.*
- *Le centre de $[\boldsymbol{a_i}; \boldsymbol{b_i}[$ est le nombre $c = \frac{\boldsymbol{a_i}+\boldsymbol{b_i}}{2}$*
- *L'amplitude de $[\boldsymbol{a_i}; \boldsymbol{b_i}[$ est le nombre $k = \boldsymbol{b_i} - \boldsymbol{a_i}$*
- *Si N est l'effectif total de la série, la fréquence f_i d'une classe $[a_i, b_i[$ d'effectif n_i est le nombre $f_i = \frac{n_i}{N} \times 100$ (%) où $N = \sum n_i$*

Activité 2

Une étude statistique sur l'âge de chacun des élèves d'une section donne la série suivante :
19 - 15 - 18 - 17 - 17 - 15 - 16 - 16 - 15 - 19 - 16 - 15 - 19 - 16 - 18 - 16 - 16 - 17 - 18 - 19 - 15 - 17 - 17 - 16 - 18 - 19 - 17 - 17 - 18 - 19 - 15 - 19 - 18 - 18 - 16 - 16 - 17 - 16 - 18 - 18 -
On regroupe les résultats dans un tableau : compléter le tableau.

Age x_i	Effectif n_i	Fréquence f_i
15		
16		
17		
18		
19		
Total		

Activité 3

Une étude statistique sur la taille (en m) des élèves d'une section donne la série suivante :
1.70 – 1.67 – 1.53 – 1.47 - 1.72 - 1.68 - 1.46 - 1.76 - 1.45 - 1.77 - 1.71 - 1.63 - 1.65 - 1.58 - 1.54 - 1.46 - 1.75 - 1.66 - 1.78 - 1.52 - 1.63 - 1.46 - 1.80 - 1.75 - 1.82 - 1.51 - 1.61 - 1.84 - 1.49 - 1.72 - 1.63 - 1.64 - 1.73 - 1.66 - 1.58 - 1.57 - 1.76 - 1.63 - 1.78 - 1.81 -
Les tailles sont regroupées par intervalles appelées .... d'amplitude déterminée (ici 0,05m).
On regroupe les résultats dans le tableau suivant. Compléter le tableau.

Classes d'âges	Effectif n_i	Fréquence f_i
$[1.45; 1.50[$		
$[1.50; 1.55[$		
$[1.55; 1.60[$		
$[1.60; 1.65[$		
$[1.65; 1.70[$		
$[1.70; 1.75[$		
$[1.75; 1.80[$		
$[1.80; 1.85[$		
Total		

Questions:
a- Combien y a-t- il d'élèves dont la taille est inférieure à 1.65 m ?
b- Calculer le pourcentage d'élèves dont la taille est supérieure ou égale à 1.75 m

4) Effectifs cumulés

Quand les valeurs du caractère sont ordonnées, on peut cumuler les effectifs de façon croissante ou décroissante.

a) ***Effectifs cumulés croissants*** *(ECC)*
L'effectif cumulé croissant d'une classe est la somme de l'effectif de cette classe et des effectifs des classes qui précèdent.

b) ***Effectifs cumulés décroissants*** *(ECD)*
L'effectif cumulé décroissant est la somme de l'effectif de cette classe et des effectifs des classes suivantes.

Activité 4

En utilisant les données des activités 2 et 3 compléter les tableaux correspondants aux effectifs cumulés.

Age x_i	*Effectif* n_i	*ECC*	*ECD*
15			
16			
17			
18			
19			
Total			

Classes d'âges	*Effectif* n_i	*ECC*	*ECD*
$[1.45; 1.50[$			
$[1.50; 1.55[$			
$[1.55; 1.60[$			
$[1.60; 1.65[$			
$[1.65; 1.70[$			
$[1.70; 1.75[$			
$[1.75; 1.80[$			
$[1.80; 1.85[$			
Total			

5) Représentations graphiques des séries statistiques

a) Diagramme en bâtons

Il est utilisé pour représenter les séries statistiques correspondant à un caractère quantitatif à variable discrète (si elle ne prend que des valeurs isolées, souvent entières). Les bâtons sont représentés par des segments de droite dont les longueurs sont proportionnelles:
- aux effectifs s'il s'agit d'un diagramme des effectifs
- aux fréquences s'il s'agit d'un diagramme des fréquences
- aux effectifs cumulés s'il s'agit d'un diagramme des effectifs cumulés.

b) Diagramme à secteurs (diagramme circulaire)

Un diagramme à secteurs admet pour support un disque découpé en secteurs dont les aires sont proportionnelles aux fréquences ou aux effectifs.

Exemple 1 :

La répartition des dépenses prévues au budget de la C.E.E. est la suivante :
- Agriculture et pèche : 72,9%
- Politique sociale : 5,7%
- Industrie et transports : 2,6%
- Politique générale : 5,9%
- Recherche : 3,9%
- Frais de fonctionnement : 4,6%
- Divers : 4,4%

Exemple 2

Dans une société d'assurances, les salaires mensuels payés au personnel sont résumés dans le tableau suivant :

Salaire (en €)	*Effectif* (n_i)
$[800; 850[$	*2*
$[850; 900[$	*5*
$[900; 950[$	*12*
$[950; 1000[$	*36*
$[1000; 1500[$	*30*
$[1500; 2000[$	*15*
Total	

Faire un diagramme à secteurs.

c) Histogramme

Une série statistique dont les valeurs sont regroupées par classe est représentée par un histogramme.

On traitera le cas où toutes les classes ont même amplitude :

Les résultats sont traduits au moyen d'un diagramme composé de rectangles:
- La base de chaque rectangle a même largeur : c'est l'amplitude des classes
- Les hauteurs des rectangles sont proportionnelles aux effectifs si on représente l'histogramme des effectifs.

III) ***Caractéristiques de position***

1. ***Le mode***

- *Pour une série statistique à caractère quantitatif discret* $(x_i; n_i)$, *on appelle* ***mode*** *toute modalité d'effectif maximal.*
- *Pour une série statistique à caractère quantitatif continu* $([a_i ; b_i[; n_i)$, *on appelle* ***classe modale*** *toute classe d'effectif maximal. C'est la classe du mode.*

  Si $[a_0 ; b_0[$ *est une classe modale alors le mode est* $M_o = \frac{a_0+b_0}{2}$
- *Une série statistique peut admettre un ou plusieurs modes*

2. ***La moyenne***

- *Pour une série statistique à caractère quantitatif discret* $(x_i; n_i)$, *la moyenne est*

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} = \frac{n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3+\dots\dots\dots}{n_1+n_2+n_3+\dots\dots\dots} \quad \text{où} \quad x_i \text{ est une modalité d'effectif } n_i.$$

- *Pour une série statistique à caractère quantitatif continu* $([a_i ; b_i[; n_i)$, *la moyenne est*

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i c_i}{\sum n_i} = \frac{n_1c_1+n_2c_2+n_3c_3+\dots\dots\dots}{n_1+n_2+n_3+\dots\dots\dots} \quad \text{où } c_i \text{ est le centre de la classe } [a_i ; b_i[\text{ d'effectif } n_i.$$

IV) ***Caractéristiques de dispersion***

Les Caractéristiques de dispersion sont des nombres qui apportent des informations sur la répartition des individus autour de la moyenne. Il s'agit ici de la variance et de l'écart type.

1- ***L'étendue***

On appelle étendue d'une série statistique, la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur du caractère : $E = X_{max} - X_{min}$.

2- ***Variance***

- *Pour une série statistique à caractère quantitatif discret* $(x_i; n_i)$ *d'effectif total N, la variance est :* $V = \frac{\sum n_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2$ *où* x_i *est une modalité d'effectif* n_i.
- *Pour une série statistique à caractère quantitatif continu* $([a_i ; b_i[; n_i)$ *d'effectif total N, la variance est :* $V = \frac{\sum n_i c_i^2}{N} - \bar{x}^2$ *où* c_i *est le centre de la classe* $[a_i ; b_i[$ *d'effectif* n_i.

3- ***Ecart type***

L'écart-type est le nombre réel positif défini par : $\sigma = \sqrt{V}$ *où V désigne la variance de la série.*

Exercice1

On a relevé les temps de trajet moyens de 100 élèves de lycée. Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

Temps en mn	[0; 5[	[5; 15[	[15; 30[	[30 ; 45[	[45 ; 60[	[60 ; 90[
Effectifs	5	15	25	20	15	20

Calculez la variance et l'écart type de la série.

Exercice 2

On a relevé le kilométrage hebdomadaire de 40 voitures et on a trouvé :

438	770	226	479	685	525	374	591	690	810
587	213	690	853	421	352	511	260	586	675
949	505	383	420	545	642	280	750	573	332
694	553	490	410	628	731	390	612	484	580

1- *Ranger les données dans des classes d'égale amplitude ; la première étant [200 ; 300[*
2- *Représenter la série obtenue par le diagramme qui convient.*
3- *A quel kilomètre roule la grande partie des véhicules par semaine ?*
4- *Quel est le pourcentage de voitures ayant roulé moins de 700km par semaine ?*

Exercice 3

On a relevé ci–dessous, les résultats obtenus par 200 candidats à un concours noté sur 70.

Note	[10 ; 15[	[15 ; 20[	[20 ; 25[	[25 ; 30[	[30 ; 35[	[35 ; 40[	[40 ; 45[	[45 ; 50[
Effectif	20	25	35	50	40	15	10	5

1) *Construire l'histogramme des effectifs*
2) *Déterminer le pourcentage d'élèves qui ont moins de 35 points*
3) *Calculer à* 10^{-3} *pres la moyenne* $\bar{x}$ *et l'écart type* σ *des notes obtenus par les candidats*