COURS DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES

CLASSES DE PREMIERES ACC/CG/SES/FIG

MICHEL MONEBOULOU

Master 2 en Sciences Economiques

(Economie et Applications)

Professeur des Lycées d’Enseignement Technique

mikydu57@gmail.com

Edition 2020

I- PRESENTATION GENERALE DU COURS

Niveau : **1ère ACC/CG/FIG/SES**
Cours : MATHS APPLIQUEES
Nombre de thèmes : **12**

Horaire Hebdomadaire : 02 heures
Horaire annuel minimum : 44 heures
Coefficient : 2

Objectifs généraux du cours :

A la fin de ce cours, l'élève doit être capable de :

- Etablir par calcul des rapports et des proportions entre des grandeurs données ;
- Effectuer les calculs commerciaux ;
- Effectuer les opérations financières à court terme ;
- Déterminer les éléments d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique ;
- Observer, enregistrer et procéder au regroupement des données d'une population statistique ;
- Déterminer les éléments caractéristiques d'une série statistique ;
- Etablir et utiliser les indices simples et les indices synthétiques nécessaires à la vie économique, à l'activité commerciale et comptable.

II- ELEMENTS DU PROGRAMME

PREMIERE PARTIE : MATHEMATIQUES FINANCIERES

THEME 1 : Rapports et proportions

Leçon 1 : Les rapports

Leçon 2 : Les Proportions

THEME 2 : Les partages

Leçon 3 : Les partages proportionnels simples

Leçon 4 : Les partages proportionnels complexes

THEME 3 : Pourcentages et calculs commerciaux

Leçon 5 : Les pourcentages

Leçon 6 : Calculs commerciaux

THEME 4 : Les intérêts simples

Leçon 7 : Généralités et problèmes de calculs des intérêts simples

Leçon 8 : Représentation graphique de l'intérêt simple et de la valeur acquise

THEME 5 : L'escompte commercial

Leçon 9 : Généralités sur l'escompte commercial

Leçon 10 : Le bordereau d'escompte

THEME 6 : Equivalence des effets

Leçon 11 : La notion d'équivalence des effets

THEME 7 : Suites ou progressions numériques

Leçon 12 : Progressions arithmétiques

Leçon 13 : Progressions géométriques

DEUXIEME PARTIE : STATISTIQUES

THEME 8 : Description statistique d'une population

Leçon 14 : Généralités sur la statistique

Leçon 15 : Tableaux statistiques

THEME 9 : Représentation graphique des séries statistiques

Leçon 16 : Cas d'un caractère qualitatif

Leçon 17 : Cas d'un caractère quantitatif

BIBLIOGRAPHIE :

- Emmanuel Mbabi, Mathias Ateba Ambassa, Ruben Dieudonné Mayo, Crépin Singock Sotong, Mathématiques appliquées premières STT, Editions BMCO, 2016.
- Jeanvier Nguemo, Mathématiques appliquées et statistiques STT, Editions clé, Yaoundé Cameroun, 2015.

PREMIERE PARTIE : MATHEMATIQUES FINANCIERES

THEME 1 : RAPPORTS ET PROPORTIONS

Introduction :
Ce chapitre augmente les acquis de l'élève sur les fractions et les composantes d'un rapport. Il permet de percevoir l'utilité des fractions en sciences de gestion.

Leçon 1 : Les Rapports

OPO : A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :
- Définir les rapports ; suite de rapports égaux
- Interpréter les propriétés des rapports ;
- Résoudre les problèmes relatifs aux rapports ou additionner une suite de rapports égaux.

I- DEFINITION ET PROPRIETES DES RAPPORTS

1- Définition d'un rapport

Le **rapport (x)** de deux nombres **a** et **b** est le quotient exact de la grandeur (a) sur la grandeur (b) non nul (b≠0). Les nombres (a) et (b) forment un rapport : $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \mathbf{x}$. Les nombres (a), (b) et (x) sont **les termes du rapport**, **a = numérateur, b= dénominateur et x le quotient.** Exemple de rapport : soient deux grandeurs a et b, a = 6 et b = 3 on le rapport a/b = 6/3

2- Propriétés des rapports

- On ne change pas la valeur d'un rapport si on multiplie ou divise ses deux termes par un même nombre non nul.
- Les rapports sont soumis aux mêmes opérations que les fractions (addition, soustraction, multiplication et division).

❖ Addition ou soustraction de plusieurs rapports

$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{e}{b}=\frac{a+c+e}{b}$ (**Mêmes dénominateurs**)

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{a*d*f+c*b*f+e*b*d}{b*d*f}$ (**Dénominateurs différents**)

❖ Multiplication de plusieurs rapports

$\frac{a}{b}*\frac{c}{d}*\frac{e}{f}=\frac{a*c*e}{b*d*f}$

❖ Division de deux rapports

$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}*\frac{d}{c}$

Application : Effectuer les opérations suivantes :

$\frac{11}{5}+\frac{4}{3}+\frac{7}{2}$; $\frac{28}{6}-\frac{13}{9}+\frac{19}{4}$; $\frac{10}{8}\text{ x }\frac{41}{39}\text{ x }\frac{75}{21}$; $\frac{23}{7}\div\frac{12}{5}$;

Solution : Effectuons les opérations

$$\frac{11}{5}+\frac{4}{3}+\frac{7}{2}=\frac{11*3*2+4*5*2+7*5*3}{5*3*2}=\frac{66+40+105}{30}=\frac{\mathbf{211}}{\mathbf{30}}$$

$$\frac{28}{6}-\frac{13}{9}+\frac{19}{4}=\frac{28*9*4-13*6*4+19*6*9}{6*9*4}=\frac{1008-312+1026}{216}=\frac{\mathbf{1722}}{\mathbf{216}}$$

$$\frac{10}{8}\text{ x }\frac{41}{39}\text{ x }\frac{75}{21}=\frac{10*41*75}{8*39*21}=\frac{\mathbf{30750}}{\mathbf{6552}}$$

$$\frac{23}{7}\div\frac{12}{5}=\frac{23}{7}\text{ x }\frac{5}{12}=\frac{23*5}{7*12}=\frac{\mathbf{115}}{\mathbf{84}}$$

II- SUITES DES RAPPORTS EGAUX

1- Définition

Une suite de plusieurs rapports égaux est égale au rapport donc le numérateur est la somme des numérateurs et le dénominateur la somme des dénominateurs.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$$

2- Application

Application :

L'économe d'un super marché récapitule les dépenses et les consommations de yaourts du mois de janvier. Le prix unitaire est resté à **1250FCFA**, le kilogramme pendant tout le mois. On vous présente le tableau suivant :

Dates	05 /01	13/01	16/01	25/01	30/01
Quantités achetées (kg)	14	16,5	22	32	18,5

Travail à faire :

1- Former les rapports des prix payés aux quantités achetées ;
2- Former un nouveau rapport égale au précédent qui a pour numérateur la somme des numérateurs et dénominateur la somme des dénominateurs.

Solution

1- Formons les rapports des prix payés aux quantités achetées

Dates	05 /01	13/01	16/01	25/01	30/01
Quantités achetées (kg)	14	16,5	22	32	18,5
Prix payés (Quantités x 1250)	17500	20625	27500	40000	23125
Rapports $=\frac{PRIX\ PAYES}{QUANTITES\ ACHETEES}$	1250	1250	1250	1250	1250

2- Formons un nouveau rapport

Nouveau rapport = $\frac{17500+20625+27500+40000+23125}{14+16,5+22+32+18,5}$ **=1250**

Leçon 2 : Les proportions et les grandeurs proportionnelles

OPO : A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

- Définir les proportions, grandeurs directement proportionnelles et inversement proportionnelles ;
- Résoudre les problèmes relatifs aux proportions, aux grandeurs directement proportionnelles et inversement proportionnelles.

I- LES PROPORTIONS

1- Définition

On appelle **proportion** l'égalité de deux rapports. **a, b, c** et **d** forment une proportion si et seulement si pour tout **b** et **d** **≠o** (c'est-à-dire **b** et **d** différents de zéro ou non nuls).

$$\text{On a : } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Dans cette proportion, a et d sont les **extrêmes**, b et c sont les **moyens**.

2- Propriétés

a- Propriété fondamentale

Dans toute proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

$$a*d = b*c$$

Exemple : soit la proportion suivante

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} \text{ on a : } 1*6 = 2*3 \rightarrow 6 = 6$$

b- La quatrième proportionnelle

On appelle **quatrième proportionnelle (x)** à trois nombres, le quatrième terme de la proportion dont les trois autres sont connus.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \rightarrow x = \frac{bc}{a}$$

Application : Soit un ensemble ordonné de 4, 5, 8 et x. on vous demande de calculer la valeur de la quatrième proportionnelle x.

Solution : $\frac{4}{5} = \frac{8}{x}$ d'où 4x = 5*8 donc x = $\frac{5*8}{4} = \frac{40}{4} = \mathbf{10}$

c- La moyenne proportionnelle

On dit que **(x) est la moyenne proportionnelle** de **a** et **b** si **x** occupe la position des moyens dans une proportion où a et b sont les extrêmes.

$$\text{C'est-à-dire : } \frac{a}{x} = \frac{x}{b} \rightarrow x^2 = ab \text{ d'où } x = \mp\sqrt{ab}$$

Application : Donner la moyenne proportionnelle de 4 et 16.

Solution : $\frac{4}{x} = \frac{x}{16}$ d'où $x^2 = 4*16$ donc $x = \sqrt{4*16} = \sqrt{64} = \mathbf{8}$

II- LES GRANDEURS PROPORTIONNELLES

1- Définition d'une grandeur

On appelle **grandeur** tout élément mesurable auquel on peut attribuer une valeur numérique. **Exemple** : La quantité, le poids, la taille, la distance…

2- Grandeurs directement proportionnelles

Deux grandeurs sont **directement proportionnelles** lorsque les diverses valeurs de l'une sont proportionnelles aux différentes valeurs correspondantes de l'autre.

Ainsi, les valeurs **X**, **Y** et **Z** sont directement proportionnelle à **a**, **b** et **c** si et seulement si :

$$\frac{X}{a} = \frac{Y}{b} = \frac{Z}{c} = \mathbf{k} \text{ (coefficient de proportionnalité)}$$

Application : On vous présente les primes de rendement du premier trimestre de Monsieur ABOLO, agent commercial, par rapport à la quantité de produits vendus.

Mois	**Janvier**	**Février**	**Mars**
Primes en FCFA	15 000	24 000	9 000
Produits vendus	4 000	6 400	2 400

Travail à faire : Montrer que la prime mensuelle reçue par Monsieur ABOLO est directement proportionnelle à la quantité de produits vendus.

Solution : Vérifions les égalités suivantes :

$$\frac{15000}{4000} = 3{,}75\ ; \qquad \frac{24000}{6400} = 3{,}75\ ; \qquad \frac{9000}{2400} = 3{,}75$$

On se rend compte que : $\mathbf{K} = \frac{\mathbf{15000}}{\mathbf{4000}} = \frac{\mathbf{24000}}{\mathbf{6400}} = \frac{\mathbf{9000}}{\mathbf{2400}} = \mathbf{3{,}75}$

Ces trois rapports ont la même valeur, on dit alors que la prime mensuelle est directement proportionnelle à la quantité de produits vendus.

3- Grandeurs inversement proportionnelles

Les trois grandeurs, **X, Y** et **Z** sont **inversement proportionnelles** aux nombres **a**, **b** et **c** si et seulement si :

$$\frac{\boldsymbol{X}}{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}}} = \frac{\boldsymbol{Y}}{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{b}}} = \frac{\boldsymbol{Z}}{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{c}}} = \textbf{k (coefficient de proportionnalité)}$$

Après simplification, on a :

X*a = Y*b = Z*c = K (coefficient de proportionnalité)

On dit alors que **deux grandeurs sont inversement proportionnelles** si et seulement si le produit de leurs mesures correspondantes est constant.

Application : Le tableau ci-contre présente la longueur d'un pagne acheté en fonction du prix.

Longueur du pagne	250	75	50
Prix du pagne	12	40	60

Travail à faire : Montrer que la longueur du pagne acheté est inversement proportionnelle aux prix unitaire du pagne.

Solution : Vérifions les égalités suivantes :

$$\mathbf{250 \times 12 = 3\ 000}\ \ ; \mathbf{75 \times 40 = 3\ 000}\ ; \quad \mathbf{50 \times 60 = 3\ 000}$$

Ces trois produits ont la même valeur, on dit alors que la longueur du pagne est inversement proportionnelle au prix unitaire du pagne.

THEME 2 : LES PARTAGES

Introduction :

On appelle **partage** la répartition d'un ensemble d'éléments en part plus ou moins égales suivant un ensemble de critère bien définie. On distingue :

- Les partages proportionnels simples (directement et inversement proportionnels) ;
- Les partages proportionnels complexes.

Leçon 3 : Les partages proportionnels simples

OPO : A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

- Définir les partages directement proportionnels et inversement proportionnels ;
- Résoudre les problèmes relatifs aux partages directement proportionnels et inversement proportionnels.

I- PARTAGES DIRECTEMENT PROPORTIONNELS

1- Définition

Pour effectuer **un partage directement proportionnel**, on utilise la relation de proportionnalité. Ainsi, partager une somme **S** en parts directement proportionnelles aux nombres **a**, **b** et **c** ; c'est trouver **X**, **Y** et **Z** tel que :

$$\begin{cases} \mathbf{X + Y + Z = S} \\ \frac{X}{a} = \frac{Y}{b} = \frac{Z}{c} = \mathbf{k \text{ avec } k} = \frac{S}{a+b+c} \end{cases}$$

2- Applications

Application 1 :

Partager la somme de 420 000 FCFA en parts proportionnelles aux nombres 4, 3 et 5.

Solution : Trouvons les parts de chacun

$$\begin{cases} \mathbf{X + Y + Z = 420\ 000} \\ \frac{X}{4} = \frac{Y}{3} = \frac{Z}{5} = \mathbf{k} \text{ avec } \mathbf{k} = \frac{420\ 000}{4+3+5} = \frac{420\ 000}{12} = \mathbf{35\ 000} \end{cases}$$

Les parts :

$\frac{X}{4}$ = 35 000 d'où X=4*35000 = **140000**

$\frac{Y}{3}$ = 35 000 d'où Y=3*35000 = **105000**

$\frac{Z}{5}$ = 35 000 d'où Z=5*35000 = **175000**

Vérification :

140000+105000+175000 = **420000**

Application 2 : Méthodes des numérateurs

Partager 40700FCFA à 3 enfants en parts directement proportionnels aux nombres 3/2, 5/4 et 1/3.

Solution : Trouvons les parts de chacun

$$\begin{cases} \mathbf{X + Y + Z = 40700} \\ \frac{X}{3/2} = \frac{Y}{5/4} = \frac{Z}{1/3} = \mathbf{k} \end{cases}$$

Calculons $\frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3*4*3+5*2*3+1*2*4}{2*4*3} = \frac{36+30+8}{24} = \frac{74}{24}$

Partage par rapport aux numérateurs

$$\begin{cases} \mathbf{X + Y + Z = 40700} \\ \frac{X}{36} = \frac{Y}{30} = \frac{Z}{8} = \mathbf{k} \text{ avec } \mathbf{k} = \frac{40700}{74} = \mathbf{550} \end{cases}$$

Les parts

$\frac{X}{36}$ = 550 d'où X=36*550=**19800**

$\frac{Y}{30}$ = 550 d'où Y=30*550=**16500**

$\frac{Z}{8}$ = 550 d'où Z=8*550= **4400**

Vérification

19800+16500+4400=**40700**

II- PARTAGES INVERSEMENT PROPORTIONNELS

1- Définition

Le partage inversement proportionnel est un partage directement proportionnel aux inverses des nombres proportionnels. Partager une somme **S** en parts inversement proportionnelles au nombre **a**, **b** et **c**, c'est trouvé **X**, **Y** et **Z** tel que :

$$\begin{cases} X + Y + Z = S \\ \dfrac{X}{\frac{1}{a}} = \dfrac{Y}{\frac{1}{b}} = \dfrac{Z}{\frac{1}{c}} = k \text{ (coefficient)} \end{cases}$$

NB : k est déterminé de la même manière que dans la méthode des numérateurs.

2- Application

Jean désire distribuer une prime de **1 770 800 FCFA** à trois de ses meilleurs ouvriers **Samuel**, **Jacques** et **Emmanuel**. Pour cela, il partage cette somme en parts inversement proportionnelles aux nombres **5**, **4**, et **2** représentant le nombre de jours d'absence de chacun des ouvriers.

Travail à faire : Déterminer la part chaque ouvrier.

Solution : Trouvons les parts de chacun des ouvriers

$$\begin{cases} X + Y + Z = 1\,770\,800 \\ \dfrac{X}{1/5} = \dfrac{Y}{1/4} = \dfrac{Z}{1/2} = K \end{cases}$$

Calculons $\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1*4*2+1*5*2+1*5*4}{5*4*2} = \frac{\mathbf{8+10+20}}{\mathbf{40}} = \frac{\mathbf{38}}{\mathbf{40}}$

Partage par rapport aux numérateurs

$$\begin{cases} X + Y + Z = 40700 \\ \frac{X}{8} = \frac{Y}{10} = \frac{Z}{20} = k \text{ avec } \mathbf{k} = \frac{\mathbf{1770800}}{\mathbf{30}} = \mathbf{46600} \end{cases}$$

Les parts :

$\frac{X}{8}$= 46600 d'où X=8*46600 = 372800

$\frac{Y}{10}$= 46600 d'où Y=10*46600 = 466000

$\frac{Z}{20}$ = 46600 d'où Z=20*46600 = 932000

Vérification

372 800+466000+932000 = **1 770 800**

Les parts de chacun sont :

- Samuel : **372 800 FCFA** ;
- Jacques : **466 000 FCFA** ;
- Emmanuel : **932 000 FCFA**.

Leçon 4 : Les partages proportionnels complexes

OPO : A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

- Définir les partages composés, mixtes et erronés ;
- Résoudre les problèmes relatifs aux partages proportionnels complexes (composé, mixte et erroné).

Introduction : On distingue **trois** types de partages complexes :

- Les partages **composés** ;
- Les partages **mixtes** ;
- Les partages **erronés.**

I- PARTAGES COMPOSES

1- Définition

Il y a **partage composé** lorsqu'une somme **S** est partager de manière directement proportionnelle aux grandeurs **a**, **b** et **c** et à la fois aux grandeurs **d**, **e** et **f**. le problème consiste à étudier le système suivant :

$$\begin{cases} X + Y + Z = S \\ \dfrac{X}{a*d} = \dfrac{Y}{b*e} = \dfrac{Z}{c*f} = k \text{ avec } k = \dfrac{S}{a*d+b*e+c*f} \end{cases}$$

2- Application

Un employeur partage une somme de **7 260 000 FCFA** entre 03 employés **Ndong**, **Okah** et **Salissou** de manière proportionnelle à leurs âges et à leur ancienneté dans l'entreprise.

	Ndong	Okah	Salissou
Ages	21	25	30
Ancienneté	5	8	10

Travail à faire : Déterminer la part de chacun.

Solution : Trouvons les parts de chacun

$$\begin{cases} X + Y + Z = 7\,260\,000 \\ \dfrac{X}{21*5} = \dfrac{Y}{25*8} = \dfrac{Z}{30*10} = k \text{ avec } k = \dfrac{7\,260\,000}{105+200+300} = \dfrac{7\,260\,000}{605} = 12000 \end{cases}$$

Les parts

$\frac{X}{105}$ = 12000 d'où X=105*12000= 1260000

$\frac{Y}{200}$ = 12000 d'où Y=200*12000=2400000

$\frac{Z}{300}$ = 12000 d'où Z=300*12000=3600000

Vérification

1260000+2400000+3600000 =**7 260 000**

Les parts de chacun sont :

- **Ndong : 1 260 000 FCFA ;**
- **Okah : 2 400 000 FCFA ;**
- **Salissou : 3 600 000 FCFA.**

II- PARTAGES MIXTES

1- Définition

On parle d'un **partage mixte** lorsqu'il est à la fois directement proportionnel et inversement proportionnel. Ainsi partager la somme **S** en parts directement proportionnelles aux nombres **a**, **b**, et **c** et inversement proportionnelles aux nombres **d**, **e** et **f**, revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} X + Y + Z = S \\ \dfrac{X}{a*\frac{1}{d}} = \dfrac{Y}{b*\frac{1}{e}} = \dfrac{Z}{c*\frac{1}{f}} = k \text{ (coefficient)} \end{cases}$$

2- Application

Le directeur d'une entreprise veut partager une gratification de **13 320000 FCFA** à 03 de ses employés **Meka**, **Mbadi** et **Lobe** de manière inversement proportionnel à leur échelon et directement proportionnel à leur nombre d'enfants en charges.

	Meka	Mbadi	Lobe
Echelon	300	400	350
Nombre d'enfants	3	2	4

<u>Travail à faire :</u> Déterminer la part de chacun

<u>Solution :</u>

$$\begin{cases} X + Y + Z = 13320000 \\ \frac{X}{3*\frac{1}{300}} = \frac{Y}{2*\frac{1}{400}} = \frac{Z}{4*\frac{1}{350}} = k \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X + Y + Z = 13320000 \\ \frac{X}{\frac{3}{300}} = \frac{Y}{\frac{2}{400}} = \frac{Z}{\frac{4}{350}} = k \end{cases}$$

Calculons $\frac{3}{300} + \frac{2}{400} + \frac{4}{350} = \frac{3*400*350+2*300*350+4*300*400}{300*400*350} = \frac{420000+210000+480000}{42000000} = \frac{\mathbf{42+21+48}}{\mathbf{4200}} = \frac{\mathbf{111}}{\mathbf{4200}}$

Partage par rapport aux numérateurs

$$\begin{cases} X + Y + Z = 13320000 \\ \frac{X}{42} = \frac{Y}{21} = \frac{Z}{48} = k \text{ avec } \mathbf{k}= \frac{\mathbf{13320000}}{\mathbf{111}} = \mathbf{120000} \end{cases}$$

<u>Les parts</u>

$\frac{X}{42}$= 120000 d'où X=42*120000=**5040000**

$\frac{Y}{21}$= 120000 d'où Y=21*120000= **2520000**

$\frac{Z}{48}$ = 120000 d'où Z=48*120000=**5760000**

<u>Vérification</u>

5040000+2520000+7560000=**13 320 000**

On les parts suivantes :

Meka : **5040 000** FCFA ; Mbadi : **2520 000** FCFA ; Lobe : **5760 000** FCFA

III- PARTAGES ERRONES

1- Définition

On parle de **partage erroné** lorsqu'il y'a des erreurs dans le partage. Il est donc question de rectifier cette erreur pour cela on devrait :

- Faire le partage vrai ;
- Faire le partage tel qu'il a été fait avec erreur ;
- Ecrire l'équation résultante de l'erreur ;
- Déterminer la somme à partager et ensuite les différentes parts.

2- Application

Une somme est partagée entre 03 personnes proportionnellement aux nombres **14**, **12**, et **10**. La personne chargée de faire le partage se trompe et le fait à raison de **8**, **12** et **10**. Après le partage, la première personne constate qu'elle a reçue **35200 FCA** de moins.

<u>Travail à faire :</u> Déterminer la somme à partager et la part de chacun.

<u>Solution :</u>

- **Faisons le partage vrai**

$$\begin{cases} X + Y + Z = S \\ \frac{X}{14} = \frac{Y}{12} = \frac{Z}{10} = k \text{ avec } \mathbf{k}= \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{14+12+10}} = \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{36}} \end{cases}$$

Exprimons les parts de chacun en fonction de S : $\frac{X}{14} = \frac{Y}{12} = \frac{Z}{10} = \frac{S}{36}$

On a : $\mathbf{X}= \frac{\mathbf{14S}}{\mathbf{36}}$; $\mathbf{Y}= \frac{\mathbf{12S}}{\mathbf{36}}$; $\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{10S}}{\mathbf{36}}$

- **Faisons le partage tel qu'il a été fait avec erreur**

$$\begin{cases} X' + Y' + Z' = S \\ \frac{\mathbf{X'}}{\mathbf{8}} = \frac{\mathbf{Y'}}{\mathbf{12}} = \frac{\mathbf{Z'}}{\mathbf{10}} = k \text{ avec } \mathbf{k}= \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{8+12+10}} = \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{30}} \end{cases}$$

Exprimons les parts de chacun en fonction de s : $\frac{X'}{8} = \frac{Y'}{12} = \frac{Z'}{10} = \frac{S}{36}$

On a : **$X' = \frac{8S}{30}$;** $Y' = \frac{12S}{30}$; $\mathbf{Z' = \frac{10S}{30}}$

- **Ecrivons l'équation résultante de l'erreur**

X – X' = 35200 $\Longrightarrow$ $\mathbf{\frac{14S}{36} - \frac{8S}{30} = 35200}$

- **Déterminons la somme à partager et ensuite les différentes parts.**

$\frac{14S}{36} - \frac{8S}{30} = 35200 \Longrightarrow \frac{14S*30-8S*36}{36*30} = 35200 \Longrightarrow \frac{420S-288S}{1080} = 35200 \Longrightarrow \frac{132S}{1080} = 35200$

132S=38 016 00**0** $\Longrightarrow$ **S**=38016000/132=**288 000**

<u>Les parts :</u>

$X = \frac{14S}{36} = \frac{14*288000}{36} = \mathbf{112000}$;

$Y = \frac{12S}{36} = \frac{12*288000}{36} = \mathbf{96000}$;

$Z = \frac{10S}{36} = \frac{10*288000}{36} = \mathbf{80\ 000}$

Vérification : 112 000 + 96 000 + 80 000=**288 000**

Vérification : X'= $\mathbf{\frac{8S}{30} = \frac{8*288000}{30} = 76\ 800}$ **;** X – X' = 112 000-76 800= **35 200 FCFA**

THEME 3 : POURCENTAGES ET CALCULS COMMERCIAUX

Leçon 5 : Les pourcentages

OPO : A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

- Définir la notion de pourcentage ;
- Distinguer les types de pourcentages ;
- Résoudre les problèmes relatifs aux calculs de pourcentages.

I- DEFINITION DE LA NOTION DE POURCENTAGE

Le **pourcentage** est un rapport ayant pour dénominateur 100. Le dénominateur peut aussi être 1000 ou 10000. A cet effet, le pourcentage du nombre A dans le nombre B est un nombre **α** tel que :

$$\frac{A}{B}=\frac{\alpha}{100}\text{. Ainsi, } \alpha=\frac{100*A}{B} \text{ et } A=\alpha\% \text{ de } B.$$

De façon générale, le pourcentage peut être écrit de trois manières différentes :

- Sous la forme d'un rapport **α/100** ;
- Sous forme d'un nombre suivi du signe pourcentage : **x%** ;
- Sous forme d'un nombre décimal.

Application : Un panier comporte 20 fruits donc 5 oranges. Déterminer le pourcentage d'oranges dans les fruits.

Solution : le pourcentage d'oranges = $\frac{5}{20}$ **=25%**

II- LES TYPES DE POURCENTAGES

On distingue 02 types de pourcentages :

- Les pourcentages directs ;
- Les pourcentages indirects.

1- Les pourcentages directs

Un pourcentage **est dit direct** lorsqu'il s'applique à une grandeur connue.

Application : Dans une ville de 180 000 habitants on a 25% d'enfants. Quel est le nombre d'enfant dans cette ville ?

Solution : nombre d'enfant de cette ville= $\frac{180000*25}{100}$ = **45000** enfants

Il existe trois types de pourcentages directs :

- Les pourcentages additifs,
- Les pourcentages successifs ;
- Les pourcentages par tranches.

a- Les pourcentages additifs

Les **pourcentages sont dit additifs** lorsqu'ils s'additionnent les uns avec les autres.

Application : Soit les effectifs des classes par niveau d'un lycée. Présenter dans le tableau ci-après :

Classes	1^{ere}A	2^{e}A	3^{e}A	4^{e}A	2^{nde}	$1^{ère}$	T^{le}	Total
Effectifs	120	200	100	110	86	124	138	878

Travail à faire :

a- Calculer les pourcentages respectifs par classes

b- Quel est le pourcentage des classes du premier cycle ?

Solution :

a-Calculons les pourcentages respectifs par classes

Classes	1^{ere}A	2^{e}A	3^{e}A	4^{e}A	2^{nde}	$1^{ère}$	T^{le}	Total (B)
Effectifs (A)	120	200	100	110	86	124	138	878
$P=\frac{A}{B}*100$	**13,67%**	**22,77%**	**11,38%**	**12,52%**	**09,79%**	**14,12%**	**15,75%**	**100%**

b- Le pourcentage des classes du premier cycle :
Pourcentages des classes du 1er cycle = 13,67 + 22,77 + 11,38 + 12,52 = **60,34%**

b- Les pourcentages successifs

On dit que les **pourcentages sont successifs** lorsqu'ils se calculent en cascade c'est-à-dire les uns après les autres.

Application : Mr Talla achète les marchandises pour **520 000 FCFA**, on lui accorde un rabais de 5% et une remise de 10%. Quelle somme a-t-il déboursée pour cet achat ?

Solution :

Libellés	Calculs	Montants
Montant brut	-	520 000
Rabais (5%)	(520000*5) / 100 =	26 000
Net commercial 1	520000 – 26000 =	494 000
Remise (10%)	(494000*10) / 100 =	49 400
Somme à débourser	494000 – 49400 =	444 600

c- Les pourcentages par tranches

On parle de **pourcentage par tranche** lorsqu'à chaque partie d'un ensemble on attribue un pourcentage spécifique.

Application :

La SABC accorde les ristournes en fin d'année à ses grossistes en fonction du chiffre d'affaires, selon le barème suivant :

Tranches de CA en FCFA	Ristournes
[0 ; 1 000 000[	0,5%
[1 000 000 ; 2 000 000[	1%
[2 000 000 ; 5 000 000[	2%
[5 000 000 ; 10 000 000[	2,5%
+ 10 000 000	3%

Travail à faire : Déterminer la ristourne d'un client dont le CA est de 15 000 000 FCFA et le cas d'un client qui a un CA de 2 500 000FCFA.

Solution :

1- Ristourne d'un client donc le CA est de 15 000 000 FCFA

TRANCHES	BASE DE CALCUL	TAUX	RISTOURNES	CUMUL
[0 ; 1 000 000[	1 000 000	0,5%	5 000	5 000
[1 000 000 ; 2 000 000[	1 000 000	1%	10 000	15 000
[2 000 000 ; 5 000 000[	3 000 000	2%	60 000	75 000
[5 000 000 ; 10 000 000[	5 000 000	2,5%	125 000	200 000
[10 000 000 ; 15 000 000[	5 000 000	3%	150 000	**350 000**

Le montant de la ristourne est de **350 000FCFA**

2- Ristourne d'un client donc le CA est de 2 500 000FCFA

TRANCHES	BASE DE CALCUL	TAUX	RISTOURNES	CUMUL
[0 ; 1 000 000[	1 000 000	0,5%	5 000	5 000
[1 000 000 ; 2 000 000[	1 000 000	1%	10 000	15 000
[2 000 000 ; 2 500 000[	500 000	2%	10 000	**25 000**

Le montant de la ristourne est de **25000FCFA**

2- Les pourcentages indirects

Un pourcentage **est dit indirect** lorsqu'il s'applique à une quantité inconnue. On distingue 02 types de pourcentages indirects :

- Les pourcentages en dedans ;
- Les pourcentages en dehors.

a- Les Pourcentages en dedans

Un **pourcentage est dit en dedans** lorsque la quantité inconnue à laquelle il s'applique est inférieure à la quantité connue.

Application : Le prix TTC d'une marchandise est de 477 000 FCFA. Quel était son prix HT ?

Solution :

Sachant que la TVA est de 19,25%, le prix HT= 477 000/1,1925 = **400000 FCFA**

b- Les pourcentages en dehors

Un **pourcentage est dit en dehors**, lorsque la quantité inconnue à laquelle il s'applique est supérieure à la quantité connue.

Application 1 : Après une remise de 10%, une marchandise coute 360000FCFA. Quel est le prix marqué ?

Solution 1:

Prix marqué=360000/(1 – 0,1) = 360000/0,9 = **400 000 FCFA**

Application 2: Après avoir bénéficier d'une réduction de 20%, une marchandise coûte 336 000FCFA. Quel est le prix marqué ?

Solution 1:

Prix marqué=336000/(1 – 0,2) = 336000/0,8 = **420 000 FCFA**

Leçon 6 : Les calculs commerciaux

OPO : A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

- Définir les types de coûts, taux de marge et taux de marque, coefficient multiplicateur ;
- Déterminer les éléments des calculs commerciaux.

I- LES TYPES DE COUTS

1- Formules de calcul des types de coûts

Un **coût** est un ensemble de charges calculé à un stade donné. Exemple : le coût d'achat, le coût de revient…

Le calcul des coûts diffère selon le type d'entreprise. On distingue principalement **les entreprises commerciales et les entreprises industrielles.**

Eléments	Entreprises commerciales	Entreprises industrielles
Prix d'achat net (PAN)	PAN= Prix marqué - Réductions	PAN= Matières premières (MP) -Réductions
Coût d'achat (CA)	CA des m/ses =PAN + frais d'achat	CA des MP= PAN + Frais d'achat
Coût de production (CP°)	-	CP°= CA des MP + Frais de production
Coût de revient (CR)	CR= CA + Frais de distribution	CR= CP° + Frais de distribution
Prix de vente (PVHT)	PVHT= CR + Bénéfice ou marge	PVHT= CR + Bénéfice ou marge
PVTTC	PVTTC = PVHT x 1,1925	

2- Applications

Application 1 : Un client achète un meuble à 250 000 FCFA, s'il obtient une réduction de 10000 FCFA, quel sera son prix d'achat net ?

Solution : Son prix d'achat net (PAN) = 250000 – 10000= **240 000FCFA**

Application 2 : Le prix d'achat d'une marchandise est de 50 000 FCFA et les frais d'achat s'élèvent à 10% du PAN. Calculer le coût d'achat (CA).

Solution : CA = 50 000 + (10%*50000) = 55 000 FCFA.

Application 3 : le coût d'achat d'une matière première est de 100 000 FCFA, les frais de transformation et de fabrication s'élèvent respectivement à 25000 FCFA et à 5% du coût d'achat. Calculer le coût de production (CP).

Solution : CP°= 100000 +25000+ (5%*100 000) = 130 000 FCFA

Application 4 : le coût de production d'une marchandise s'élève à 80 000 FCFA. Les charges de distribution s'élèvent à 10% du coût de production. Calculer son coût de revient (CR).

Solution : CR = 80 000 + (80 000*10%) = 88 000 FCFA.

Application 5 :

BABA se rend au marché pour faire les achats, il achète les marchandises pour 75 000 000 FCFA, il dépense 500 000 FCFA pour le transport et 300 000 FCFA pour les emballages. Pour faire connaître ses produits, il dépense 50 000 FCFA pour la publicité. Déterminer son prix de vente s'il veut réaliser un bénéfice de 15 000 000 FCFA.

Solution :

CA= 75 000 000 + 500 000 + 300 000 = 75 800 000 FCFA

CR = 75 800 000 + 50 000 = 75 850 000 FCFA

PVHT = 75 850 000 + 15 000 000 = 90 850 000 FCFA

PVTTC = 90 850 000 x 1,1925 = 108 338 625 FCFA

II- MARGE COMMERCIALE ET COEFFICIENT MULTIPLICATEUR

1- Marge Commerciale (M)

C'est la différence entre le prix de vente et le coût d'achat. **M = PV – CA**

a- Taux de marge (Tm)

C'est le pourcentage du bénéfice ou marge bénéficiaire par rapport au coût d'achat. Désignons par **CA** le coût d'achat ou de coût de revient, **100** la base du taux, **M** la marge en valeur absolue (M n'est pas négatif), **Tm** le taux de marge en pourcentage et **PV** le prix de vente.

CA	M	PV
100	Tm	100+Tm

D'où la relation $\frac{CA}{100} = \frac{M}{Tm} = \frac{PV}{100+Tm}$

Cas 1 : $\frac{CA}{100} = \frac{M}{Tm} \quad \rightarrow \quad \mathbf{Tm} = \frac{\mathbf{Marge \times 100}}{\mathbf{CA}}$

Cas 2 : $\frac{M}{Tm} = \frac{PV}{100+Tm} \quad \rightarrow \quad \mathbf{Tm} = \frac{\mathbf{Marge \times 100}}{\mathbf{PV - Marge}}$

Application 1 : Déterminer le taux de marge d'un sac de riz dont le prix de vente est 18 000 FCFA et le coût d'achat 15 000 FCFA.

Solution : $Tm = \frac{(18000-15000)\times 100}{15000} = \mathbf{20\%}$

Application 2 : Déterminer le taux de marge d'un bien dont la marge bénéficiaire est de 5000 FCFA et le coût d'achat de 45 000 FCFA.

Solution : $Tm = \frac{5000\times 100}{45000} = \mathbf{11,11\%}$

b- Taux de marque (TM)

C'est le pourcentage de la marge commerciale ou bénéfice par rapport au prix de vente

CA	M	PV
100-TM	TM	100

D'où la relation $\frac{CA}{100-TM} = \frac{M}{TM} = \frac{PV}{100}$

Cas 1 : $\frac{M}{TM} = \frac{PV}{100} \quad \rightarrow \quad \mathbf{TM} = \frac{\mathbf{Marge \times 100}}{\mathbf{PV}}$

Cas 2 : $\frac{CA}{100-TM} = \frac{M}{TM} \quad \rightarrow \quad \mathbf{TM} = \frac{\mathbf{Marge \times 100}}{\mathbf{CA + Marge}}$

Application 1 : Déterminer le taux de marque d'un bien dont le prix de vente est 12000 FCFA et le coût d'achat 9000 FCFA.

Solution : $TM = \frac{(12000-9000)\times 100}{12000} = \mathbf{25\%}$

Application 2 : Quel est le taux de marque d'un bien dont la marge bénéficiaire est 2500 FCFA et le prix de vente 15 000 FCFA.

Solution : $TM = \frac{2500\times 100}{15000} = \mathbf{16,67\%}$

c- Relation entre le taux de marge et le taux de marque

Si le pourcentage de la marge commerciale sur coût d'achat est de Tm% et celui de la marge commerciale sur le prix de vente est de TM%, les rapports entre le PV et le CA étant égaux, on a :

$$\frac{\mathrm{PV}}{\mathrm{CA}} = \frac{\mathrm{PV}}{\mathrm{CA}} \quad \rightarrow \quad \frac{\mathbf{100 + Tm}}{\mathbf{100}} = \frac{\mathbf{100}}{\mathbf{100 - TM}}$$

Donc connaissant un taux, on peut déterminer l'autre.

2- Le coefficient multiplicateur (K)

C'est le nombre par lequel il faut multiplier une quantité quelconque **A** pour obtenir une autre quantité **B**. Ainsi, **K** est le coefficient multiplicateur qui permet de passer de **A** à **B**.

Si $\mathrm{B} = \mathrm{K} \times \mathrm{A}$ on a: $\mathbf{K} = \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{A}}$

Application 1 : Un commerçant achète des ignames de 52 000 FCFA qu'il vend à 69 825 FCFA. Trouver le quotient qui permet d'obtenir le prix de vente à partir du prix d'achat.

Solution : PV = K*PA on a $\mathrm{K} = \frac{\mathrm{PV}}{\mathrm{PA}}$ A. N: $\mathbf{K} = \frac{\mathbf{60\,825}}{\mathbf{52\,000}} = \mathbf{1,33}$

Application 2 : On a vendu à 75 000 FCFA une marchandise achetée à 60 000 FCFA. Déterminer le coefficient multiplicateur permettant de passer du CA au PV.

Solution : PV = K*CA on a $\mathrm{K} = \frac{\mathrm{PV}}{\mathrm{CA}}$ A. N: $\mathbf{K} = \frac{\mathbf{75\,000}}{\mathbf{60\,000}} = \mathbf{1,25}$

THEME 4 : LES INTERETS SIMPLES

Leçon 7 : Généralités et problèmes de calcul des intérêts simples

OPO : A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

- Définir la notion d'intérêt simple ;
- Résoudre les problèmes liés au calcul des intérêts simples.

I- GENERALITES SUR LES INTERETS SIMPLES

1- Définition

On appelle **intérêt** le prix payé par l'emprunteur au prêteur pour utiliser un capital donné pendant une durée déterminée. Ou encore c'est la rémunération d'un capital prêté ou placé à un certain taux pendant une durée déterminée. Il est aussi appelé **loyer du capital**.

Remarque : l'emprunteur est celui qui reçoit l'argent ou qui paye les intérêts ; par contre le **prêteur** est celui qui donne l'argent à l'emprunteur ou qui reçoit les intérêts.

2- Formules de calcul de l'intérêt simple

L'intérêt dépend à la fois du capital prêté ou placé **C** (la somme d'argent prêtée), du taux d'intérêt **t** et de la durée de placement **n** (temps mis ou prévu). Cette dernière peut être exprimée en en **année,** en **mois** et en **jours :**

- **L'année commerciale ou financière** est composée de 12 mois de 30 jours chacun, soit une durée totale de **360 jours** ;
- **L'année civile** correspond quant à elle à l'année réelle avec son décompte de mois dont 28, 29, 30 et 31 jours. Soit une durée totale de **365 jours ou 366 jours** pour l'année bissextile (février 29 jours).

Durée de placement (n)	Intérêts
En année	$I=\frac{C\times t\times n}{100}$
En mois	$I=\frac{C\times t\times n}{1200}$
En jours	$I=\frac{C\times t\times n}{36000}$

Remarque : lorsque la durée de placement est exprimée en jour, les mois sont comptés pour leur nombre exact de jour. Exemple : Janvier 31 jours, Février 28 ou 29 jours, etc.

Applications :

1- Quel est l'intérêt produit par un capital de 100 000 FCFA, placé pendant 2 ans au taux de 5% l'an ?

2- Le 1er Mars N, M. KALA dépose 400 000 FCFA dans un compte d'épargne au taux de 6%. Quel sera le montant de l'intérêt 8 mois plus tard ?

3- Calculer l'intérêt produit par un capital de 600 000 FCFA placé au taux de 4% le 30/05/N et retirer le 29/10/N.

4- Calculer l'intérêt produit par un capital de 700 000 FCFA placé au taux de 10% l'an, pendant 60 jours.

Solution : Calculons le montant de l'intérêt dans les cas suivants :

1- $I = \frac{100000\times5\times1}{100} = 10\ 000$ FCFA

2- $I = \frac{400000\times6\times8}{1200} = 16\ 000$ FCFA

3- Décompte du nombre de jours :

Mai : 2 jours
Juin : 30 jours
Juillet : 31 jours
Août : 30 jours
Septembre : 31 jours
0ctobre : 28 jours
Total (n) : 152 jours

on a : $I = \frac{600\,000 \times 4 \times 152}{36000} = \mathbf{10\,133,33\ FCFA}$

4- $I = \frac{700\,000 \times 10 \times 60}{36000} = \mathbf{11\,666,66\ FCFA}$

3- Notions d'intérêt post-compté et intérêt précompté

Les intérêts sont dits **post-comptés** lorsqu'ils sont payables à l'échéance, c'est-à-dire au moment du remboursement du capital placé ou emprunté. Par contre, on parle d'intérêts **précomptés** lorsqu'ils sont payables au moment de la mise à la disposition des fonds à l'emprunteur. Ils sont retranchés directement au capital emprunté.

II- PROBLEMES DE CALCUL DES INTERETS SIMPLES

La formule générale met en relation l'intérêt **I**, le capital placé **C**, le taux de placement **t** et la durée de placement **n** (**I=C*t*n**). A partir de cette formule, on peut exprimer une quantité en fonction des autres.

1- La durée du placement (n)

En année	$n=\frac{100\times I}{C\times t}$
En mois	$n=\frac{1200\times I}{C\times t}$
En jours	$n=\frac{36000\times I}{C\times t}$

Application : Déterminer la durée du placement de 1000 000 FCFA, dont le taux d'intérêt est de 5% et le montant des intérêts de 150 000 FCFA.

Solution : Déterminons la durée du placement dans les cas suivants

En année	$n=\frac{100\times 150000}{1000\,000\times 5} = \mathbf{3\ ans}$
En mois	$n=\frac{1200\times 150000}{1000\,000\times 5} = \mathbf{36\ mois}$
En jours	$n=\frac{36000\times 150000}{1000\,000\times 5} = \mathbf{1080\ jours}$

2- Le taux de placement (t)

En année	$t=\frac{100\times I}{C\times n}$
En mois	$t=\frac{1200\times I}{C\times n}$
En jours	$t=\frac{36000\times I}{C\times n}$

Application : Déterminer le taux d'un placement de 800 000 FCFA, dont la durée est d'un an six mois et le montant des intérêts de 40800 FCFA.

Solution : Déterminons le taux de placement dans les cas suivants

En année	$t=\frac{100\times 40800}{800000\times 1,5} = \mathbf{3,4\%}$
En mois	$t=\frac{1200\times 40800}{800000\times 18} = \mathbf{3,4\%}$
En jours	$t=\frac{36000\times 40800}{800000\times 540} = \mathbf{3,4\%}$

3- Le capital placé (C)

En année	$C=\frac{100\times I}{t\times n}$
En mois	$C=\frac{1200\times I}{t\times n}$
En jours	$C=\frac{36000\times I}{t\times n}$

Application : Déterminer le montant d'un capital dont la durée de placement est de 15 mois, le taux d'intérêt de 3,2% l'an et le montant des intérêts est de 52 000 FCFA.

Solution : Déterminons le montant du capital dans les cas suivants

En année	$C=\frac{100\times52000}{3,2\times1,25}=\mathbf{130\ 000\ FCFA}$
En mois	$C=\frac{1200\times52000}{3,2\times15}=\mathbf{130\ 000\ FCFA}$
En jours	$C=\frac{36000\times52000}{3,2\times450}=\mathbf{130\ 000\ FCFA}$

Calculs annexes :
12 mois → 1 an
15 mois → n an on a : n = 15/12=1,25 an

4- La méthode des nombres et des diviseurs fixes

Cette méthode est généralement utilisée lorsque la durée du placement est exprimée en jours. Dans ce cas, la formule qui permet de trouver l'intérêt devient :

$$\mathbf{I}=\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{D}} \quad \text{avec} \quad \mathbf{N}=\mathbf{C.n} \quad \text{et} \quad \mathbf{D}=\frac{\mathbf{36000}}{\mathbf{t}}$$

Le produit **C. n** désigné par **N** est appelé **nombre**, tandis que le quotient $\frac{\mathbf{36000}}{\mathbf{t}}$ désigné par **D** est appelé **diviseur fixe** attaché au taux t.

Application : Utiliser la méthode des nombres et diviseurs fixes pour calculer le montant de l'intérêt d'un capital de 500 000 FCFA, placé à 9% pendant 42 jours.

Solution : trouvons d'abord N et D

$N = 500\ 000 \times 42 = 21\ 000\ 000$

$D=\frac{36000}{9}=4000$ on a : $\mathbf{I}=\frac{\mathbf{21\ 000\ 000}}{\mathbf{4000}}=\mathbf{5250\ FCFA}$

Lorsque plusieurs placements sont effectués au même taux d'intérêt, le diviseur D a la même valeur pour tous ces placements. Ainsi l'intérêt global (**Ig**) fourni par ces différents capitaux au même taux est déterminé ainsi :

$$\mathbf{I}=\frac{\sum \boldsymbol{C_i n_i}}{\mathbf{D}}$$

Application : Utiliser la méthode des nombres et des diviseurs fixes pour calculer l'intérêt global fourni par les capitaux suivants au taux de 10%.

- Capital A : 300 000 FCFA ; durée 35 jours ;
- Capital B : 500 000 FCFA ; durée 52 jours ;

Solution : Trouvons d'abord le diviseur fixe attaché au taux de 10%.

$D=\frac{36000}{10}=3600$ on a : $\mathbf{I}=\frac{\mathbf{(300\ 000\times35)+(500\ 000\times52)}}{\mathbf{3600}}=\mathbf{10138,38\ FCFA}$

Leçon 8 : Représentation graphique de l'intérêt simple et de la valeur acquise

OPO : A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :
- Définir valeur acquise ;
- Représenter graphiquement l'intérêt simple ;
- Représenter graphiquement la valeur acquise.

I- REPRESENTATION GRAPHIQUE DE L'INTERET SIMPLE

1- Formule de représentation

Le calcul des intérêts simples a en principe deux variables à savoir **le montant de l'intérêt (I) et la durée de placement (n)**, c'est-à-dire que le montant des intérêts est fonction du temps. Les autres grandeurs sont en principe constates à savoir le capital (C) et le taux d'intérêt (t).
Sachant que l'intérêt produit par un placement est fonction linéaire croissante du capital placé, du taux et de la durée de placement, si le capital et le taux sont constants, on a :

$$\mathbf{I = a \times n} \qquad \text{avec} \qquad \mathbf{a = \frac{C \times t}{100}}$$

Remarque : la durée de placement n est un réel positif.

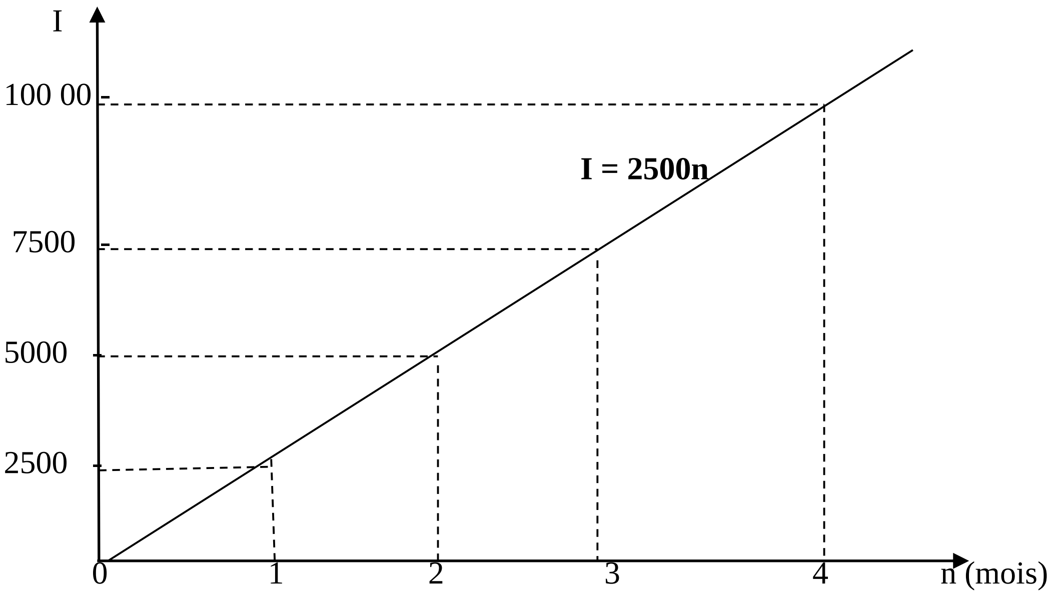
2- Application

Faites une représentation graphique de la variation en fonction de la durée de placement n exprimée en mois de l'intérêt produit par le placement d'un capital de 600 000 FCFA, au taux de 5% l'an.

Solution :

$$I = \frac{C \times t \times n}{1200} \quad \rightarrow \quad I = \frac{600\,000 \times 5 \times n}{1200} \quad \rightarrow \quad \mathbf{I = 2500n}$$

n	0	1	2	3
I	0	2500	5000	7500



II- REPRESENTATION GRAPHIQUE DE LA VALEUR ACQUISE

1- Définition de la valeur acquise (Va)

La valeur acquise (Va) est le montant reçu à l'échéance ou la somme du capital placé (C) et du montant de l'intérêt (I) produit par le capital pendant la durée de placement. On a la relation suivante :

$$\mathbf{Va = C + I}$$

Application :
Monsieur ONANA a fait un placement de 2500 000 FCFA au taux d'intérêt de 4,5% pour une durée d'un an. Quelle est la valeur acquise par le capital placé ?
Solution : Calculons la valeur acquise

$$\text{Va} = 2500\,000 + \frac{2500000 \times 4{,}5 \times 1}{100} = 2500000 + 112500 = \mathbf{2612\,500\ FCFA}$$

2- Représentation graphique de la valeur acquise

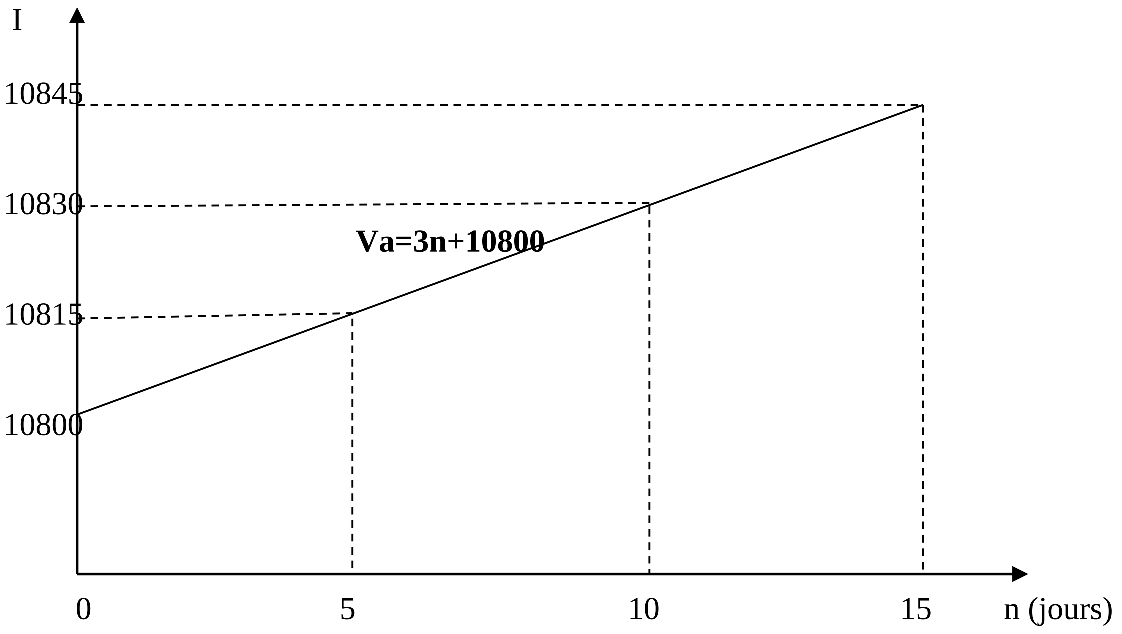
La formule de représentation graphique de la valeur acquise (Va) par un capital, montre que cette dernière est **fonction croissante** du capital placé (C), du taux d'intérêt (t) et de la durée de placement (n). **n** peut être exprimée en jours, mois ou années. Il s'agit d'une équation de droite passant par deux points, de la forme y = ax+b :

$$\mathbf{Va = a.n + C} \qquad \mathbf{avec} \qquad \mathbf{a = \frac{C \times t}{100}}$$

Application :
Faites la représentation graphique de la variation en fonction de la durée de placement n exprimée en jours, de la valeur acquise par un capital de 10800 FCFA au taux de 10% l'an.
Solution :

$$\text{Va} = 10800 + \frac{10800 \times 10 \times n}{36000} \rightarrow \mathbf{Va = 3n + 10800}$$

n	0	5	10	15	20
Va	10800	10815	10830	10845	10860



III- TAUX MOYEN ET TAUX EFFECTIF DE PLACEMENT

1- Taux moyen de placement

Le taux moyen d'une série de placements ($t_1,t_2,\ldots t_k$) est le taux unique (**T**) qui appliqué aux capitaux placés et pour leurs durées respectives, conduirait au même intérêt total.

$$\mathbf{T} = \frac{\sum \mathbf{C_i} \times \mathbf{t_i} \times \mathbf{n_i}}{\sum \mathbf{C_i} \times \mathbf{n_i}}$$

<u>Application</u> :
Soient trois placements effectués le 25 mars 2017. Déterminer le taux moyen de ces trois placements

Capitaux (Ci)	Durées (ni)	Taux d'intérêt (ti)
150 000	51	8%
100 000	68	7,5%
80 000	98	8,2%

<u>Solution :</u> Déterminons le taux moyen des trois placements

$$\mathrm{T} = \frac{(150\,000 \times 8 \times 51) + (100\,000 \times 7{,}5 \times 68) + (80\,000 \times 8{,}2 \times 98)}{(150\,000 \times 51) + (100\,000 \times 68) + (80\,000 \times 98)} = \mathbf{7{,}91}\%$$

2- Taux effectif de placement

On appelle **taux effectif d'un placement**, le taux T qui résulte du précompte de l'intérêt. Pour parler du taux effectif d'un placement, il faut que l'intérêt soit précompté. Le taux effectif qui résulte du précompte de l'intérêt est exprimé de la manière suivante :

Durées (n)	Taux effectif (T)
Années	$\mathrm{T} = \frac{100 \times \mathrm{t}}{100 - \mathrm{t} \times \mathrm{n}}$
Mois	$\mathrm{T} = \frac{1200 \times \mathrm{t}}{1200 - \mathrm{t} \times \mathrm{n}}$
Jours	$\mathrm{T} = \frac{36000 \times \mathrm{t}}{36000 - \mathrm{t} \times \mathrm{n}}$

<u>Application :</u>
Quel est le taux effectif d'un placement de 100 000 FCFA à intérêt précompté au taux de 5% l'an, pour une durée d'un an.

<u>Solution :</u> Calcul du taux effectif de placement (T) :

$$\mathrm{T} = \frac{100 \times 5}{100 - 5 \times 1} = \frac{500}{95} = \mathbf{5{,}26}\%$$

THEME 5 : ESCOMPTE COMMERCIAL

Leçon 9 : Généralités sur l'escompte commercial

OPO : A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :
- Définir la notion d'escompte ;
- Calculer l'escompte commercial ;
- Résoudre les problèmes liés au calcul de l'escompte commercial.

I- ESCOMPTE COMMERCIAL ET VALEUR ACTUELLE COMMERCIALE

Situation de vie : Mr ONDO acheté le 15/11/2017 des sacs de riz pour 250.000FCFA à Mr OUMAR. ONDO ne paye pas immédiatement mais après un certain délai (**crédit**).
ONDO reconnait sa dette envers OUMAR par un document appelé **effet de commerce** sur lequel est indiqué le montant de sa dette de 250.000FCFA (**valeur nominale**) et la date convenue pour le paiement le 31/12/2017 (**échéance**).
Si Mr OUMAR a besoin d'argent avant le 31/12/2017 il peut vendre (**négocier**) l'effet de commerce à sa banque cette opération s'appelle **l'escompte**.
La banque se substitue à Mr OUMAR pour se faire payer la dette. La date de présentation de l'effet en banque est appelée **date de négociation** et la somme d'argent remis au fournisseur est appelée **valeur actuelle**.

1- Escompte commercial

C'est le montant de l'intérêt de la valeur nominale d'un effet de commerce pour la durée séparant le jour de la négociation et l'échéance de l'effet.
Désignons par (**e**) l'escompte commercial ; (**t**) le taux d'escompte ; (**Vn**) la valeur nominale de l'effet ; (**n**) la durée de la dette exprimée en nombre de jours (nombre de jour de la date de remise à l'escompte à la date d'échéance). On a la formule de calcul suivante :

$$\mathbf{e = \frac{V_n \times t \times n}{36000}}$$

Application : Un effet de commerce de valeur nominale 2 000 000 FCFA, échéance le 20 mai 2018 a été négocié le 28 avril de la même année au taux d'escompte de 9%. Calculer le montant de l'escompte.

Solution :

Décompte :
Avril : 30-28 = 2 jours
Mai : 30 jours
Total : n = 32 jours

la valeur de l'escompte est :

$$e = \frac{2000\,000 \times 9 \times 32}{36000} = \mathbf{16\,000\ FCFA}$$

2- Valeur actuelle commerciale

Encore appelée **valeur escomptée**, c'est la somme effectivement mise par le banquier à la disposition du bénéficiaire de l'effet suite à une remise à l'escompte.
Désignons par (**Va**) la valeur actuelle, (**Vn**) la valeur nominale et (**e**) l'escompte commercial. La valeur actuelle s'écrit de la manière suivante :

$$\mathbf{V_a = V_n - e}$$

En remplaçant (e) par sa valeur dans cette formule on a :

$$\mathbf{V_a = V_n - \frac{V_n \times t \times n}{36000}} \text{ ou encore } \mathbf{V_a = \frac{V_n(36000 - t \times n)}{36000}}$$

Application : Déterminer la valeur actuelle d'un effet de valeur nominale 1 000 000 FCFA, taux d'escompte 8%, durée 60 jours.

Solution : $V_a = \frac{1000\,000(36000-8\times60)}{36000} = \mathbf{986\,666,67\ FCFA}$

II- PROBLEMES LIES AU CALCUL DE L'ESCOMPTE COMMERCIAL

1- Calcul de la valeur nominale (Vn) connaissant l'escompte (e)

$$\mathbf{V_n = \frac{36000 \times e}{t \times n}}$$

Application : Calculer la valeur nominale d'un effet dont l'escompte à 5 jours de son échéance s'élève à 420 FCFA, au taux d'escompte de 4,5%.

Solution : $V_n = \frac{36000\times420}{4,5\times5} = \mathbf{60\,000\ FCFA}$

2- Calcul de la valeur nominale (Vn) connaissant la valeur actuelle (Va)

$$\mathbf{V_n = \frac{36000 \times V_a}{36000 - t \times n}}$$

Application : Calculer la valeur nominale d'un effet à 40 jours de son échéance dont la valeur actuelle est 125 615 FCFA, au taux de 2,75%.

Solution : $V_n = \frac{36000\times125\,615}{36000-2,75\times40} = \frac{4\,522\,140\,000}{36000-110} = \frac{4\,522\,140\,000}{35\,890} = \mathbf{126\,000\ FCFA}$

3- Calcul de l'escompte connaissant la valeur actuelle (e)

$$\mathbf{V_n = \frac{V_a \times t \times n}{36000 - t \times n}}$$

Application : Calculer l'escompte d'un effet à 54 jours de son échéance dont la valeur actuelle est 876 708 FCFA, au taux de 4%.

Solution : $e = \frac{876\,708\times4\times54}{36000-(4\times54)} = \frac{189\,368\,928}{35\,784} = \mathbf{5\,292\ FCFA}$

4- Calcul de la durée (n) et du taux d'escompte (t)

$$\mathbf{n = \frac{36000 \times e}{V_n \times t} \quad et \quad t = \frac{36000 \times e}{V_n \times n}}$$

Application : Calculer le taux d'un effet de 126 000 FCFA, escompté à 36 jours de son échéance ayant supporté 680 FCFA d'escompte.

Solution : $t = \frac{36000\times680}{126\,000\times36} = \mathbf{5,4}\%$

Leçon 10 : Le bordereau d'escompte

OPO : A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :
- Définir le bordereau d'escompte ;
- Etablir le bordereau d'escompte ;
- Calculer l'agio sur bordereau.

I- NOTION DE BORDEREAU D'ESCOMPTE ET CALCUL DE L'AGIO

1- Définition du bordereau d'escompte

Le bordereau de remise est un tableau ou sont inscrites les caractéristiques des effets négocié. Le banquier possède alors au calcul de **l'agio** et porte le montant net de la négociation au crédit du compte de son client.

2- L'agio sur bordereau d'escompte

On peut citer comme composantes de l'agio sur bordereau :
- L'escompte ;
- La commission d'endossement ;
- La commission d'encaissement ;
- La commission de service ;
- La commission de manipulation ;
- La commission de bordereau (elle est un pourcentage de la valeur nominale de chaque effet)
- La commission fixe ou frais fixes ;
- Les commissions spéciales ;
- La TVA sur agio (Elle s'applique sur le montant de l'agio hors taxe c'est-à-dire la somme de l'escompte et des commissions).

Remarques : En général, seule la commission d'endossement est proportionnelle au temps. La commission d'encaissement n'existe pas dans certaines grandes villes. Les effets négociés dans ces villes sont dits au pair ; Ainsi donc, les effets négociés au pair ne supportent pas de commission d'encaissement.

Application : Soient les effets suivants négociés auprès de la banque Société Générale Cameroun (SGC) de Yaoundé au 20 avril 2017 par la société X :
- 300 000 FCFA, Bertoua au 24/04, commission d'encaissement 2% ;
- 360 000 FCFA, Yaoundé au 28/05, commission d'encaissement 2% ;
- 300 000 FCFA, Douala au 17/06, commission d'encaissement 4 ;
- 270 000 FCFA, Edéa au 27/06, commission d'encaissement 2%.

Autres conditions d'escompte : taux d'escompte 6% ; commission d'endossement 1% par effet ; commission de service 1,5% pour les effets de Douala et Yaoundé ; commission de bordereau 500 FCFA par effet ; minimum de 8 jours par effet ; deux jours de banque ; TVA 19,25% sur agio HT.

Travail à faire : Etablir le bordereau d'escompte : date de valeur 20/04/2017.

N.B : Seule la commission d'endossement est proportionnelle au temps. Arrondir tous les résultats décimaux au franc inférieur.

Solution : Calculs annexes
- Les escomptes sont :

Effet 1 : $e_1 = \frac{300\,000 \times 6 \times 10}{36000} = \mathbf{500\ FCFA}$; Effet 2: $e_2 = \frac{360\,000 \times 6 \times 40}{36000} = \mathbf{2400\ FCFA}$

Effet 3 : $e_3 = \frac{300\,000 \times 6 \times 60}{36000} = \mathbf{3000\ FCFA}$; Effet 4: $e_4 = \frac{270\,000 \times 6 \times 70}{36000} = \mathbf{3150\ FCFA}$

- Les commissions d'encaissement sont :

$300\,000 \times 2\% + 360\,000 \times 2\% + 300\,000 \times 4\% + 270\,000 \times 2\% = \mathbf{30600\ FCFA}$

- La commission de service : $360\,000 + 300\,000 = 660\,000 \times 1{,}5\% = \mathbf{9900\ FCFA}$
- Les commissions d'endossement sont :

Effet 1 : $e_1 = \frac{300\,000 \times 1 \times 10}{36000} = \mathbf{83\ FCFA}$; Effet 2: $e_2 = \frac{360\,000 \times 1 \times 40}{36000} = \mathbf{400\ FCFA}$

Effet 3 : $e_3 = \frac{300\,000 \times 1 \times 60}{36000} = \mathbf{500\ FCFA}$; Effet 4: $e_4 = \frac{270\,000 \times 1 \times 70}{36000} = \mathbf{525\ FCFA}$

- Les commissions de bordereau total : 500 x 4 = **2000 FCFA**
- Agio HT sur bordereau :

$$\text{Agio HT} = \text{e} + \text{commissions} \quad \text{soit agio HT} = 9050 + 44008 = \mathbf{53\ 058\ FCFA}$$

Société Générale Cameroun Yaoundé (SGC)						
Effet à l'escompte					Destinataire	
Remise du 20 avril 2017					Compte N°…….	
N°	Montant effet	Lieu de paiement	Echéances	Durées	Escompte	Endos.
1	300 000	Bertoua	25/04	10	500	83
2	360 000	Yaoundé	28/05	40	2400	400
3	300 000	Douala	17/06	60	3000	500
4	270 000	Edéa	27/06	70	3150	525
Totaux	**1230 000**	-	-	-	9050	1508
Valeur nominale :						**1230 000**
Escompte :					9050	
Endossement :					1508	
Encaissement :					30600	
Bordereau :					2000	
Service :					9900	
Agio HT :					**53 058**	
TVA 19,25% :					10 213	
Agio TTC :					**63 271**	
Net d'escompte						**1166 729**

N.B : le net d'escompte est le montant net porté au crédit du compte client dans la banque après une négociation complète d'un effet ou d'un groupe d'effets.

$$\mathbf{net\ d'escompte = V_n - agios\ pour\ un\ groupe\ d'effets}$$
$$\text{net d'escompte} = 1230\,000 - 63\,271 = \mathbf{1\ 166\ 729\ FCFA}$$

II- TAUX REEL ET TAUX DE REVIENT D'ESCOMPTE

1- Taux réel d'escompte

Le taux réel d'escompte est le taux (**T**) qui, appliqué à la valeur nominale (**Vn**), pour une durée de la période restant à courir exprimée en jours (**n**), permet d'obtenir l'agio hors taxes de sorte que :

$$\mathbf{T = \frac{36000 \times agio\ HT}{V_n \times n}}$$

Application : Un effet de 60000 FCFA ayant 60 jours à courir a supporté un agio HT de 1642,4. **Travail à faire** : Calculer le taux unique qu'il faut appliquer à la valeur nominale pour obtenir le montant total de l'agio HT.

Solution : T = (36000*1642,4)/60000*60 = **16,12%**

Le taux réel d'escompte permet de faire une comparaison des conditions d'escompte faites par deux ou plusieurs banques. Il est question de déterminer la banque qui présente les meilleures conditions pour une négociation des effets de commerce.

2- Taux de revient du Banquier (Tr)

C'est le taux qu'il faut appliquer sur la valeur actuelle HT ou TTC d'un effet pour avoir directement le montant de l'agio HT ou Agios TTC.

$$\mathbf{Tr_{HT} = \frac{36000 \times agioHT}{Va_{HT} \times n}} \quad \text{ou} \quad \mathbf{Tr_{TTC} = \frac{36000 \times agioTTC}{Va_{TTC} \times n}}$$

Application : Calculer le taux de revient HT et le taux de revient TTC d'un effet de valeur nominale 70000 FCFA escompté dans les conditions suivantes : taux d'escompte 8%, taux d'endossement 0,4%, commission de bordereau 0,2% de la valeur nominal de l'effet, commission d'encaissement 150 FCFA minimum de jour à courir 76 jours.

Solution :

Solution :

- **Tr_{HT} = (36000 *Agio HT) / (Va HT *n)**

Escompte = **(Vn *t*n) / 36000 ;**

AN : Escompte = (70000 *8*76) / 36000 **= 1182,2**

Commission d'endossement = (70000 *0,4*76) / 36000**= 59,1**

Commission de bordereau = 70000*0,2 / 100 **= 140**

Commission d'encaissement = **150**

Agios HT = **1531,3**

TVA= **294,77**

Agios TTC = **1826,07**

Net a votre au crédit de votre compte= **68173,93**

TR_{HT}= (36000 *1531,3) / (68468,7 *76) = **10,59%**

- **Tr_{TTC} = (36000*Agio TTC) / (Va TTC*n) ;**

Va TTC = 1531,3*1,1925 = 81648,62

Tr_{TTC} = (36000*1826,07) / (81648,62*76) = **10,59%.**

THEME 6 : EQUIVALENCE DES EFFETS

Leçon 11 : Equivalence des effets

OPO : A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :
- Expliquer la notion d'équivalence des effets ;
- Résoudre les problèmes liés aux équivalences des effets.

I- DATE D'EQUIVALENCE ET TAUX D'EQUIVALENCE

1- Définition

On dit que **deux ou plusieurs effets sont équivalents** lorsqu'ils ont la même valeur actuelle, à une date donnée, appelée **date d'équivalence.**

2- Calcul de la date d'équivalence de deux effets

Application 1 : Deux effets de commerce de valeurs nominales respectives **98 400F** échéant le 31 octobre et **99 000F** échéant le 30 novembre sont négociés au taux d'escompte de 7,2%. Déterminer la date d'équivalence.

Solution :

31/10 ——————————— 30/11 Novembre : 30 jours

30 jours

Désignons par **n** le nombre de jours séparant la date d'équivalence du 31 octobre et par **(n+30)** le nombre de jours séparant la date d'équivalence du 30 novembre.

Ces deux effets sont équivalents si à la date d'équivalence que nous cherchons, leurs valeurs actuelles sont égales :

$$98\,400 - \frac{(98400 \times 7{,}2 \times n)}{36000} = 99000 - \frac{(99000(n + 30) \times 7{,}2)}{36000}$$

$$\mathbf{n = 50\ jours}$$

La date d'équivalence cherchée se situe donc 50 jours avant le 31 octobre soit **le 11 septembre**

Application 2 : Trouver la date à laquelle les effets suivants sont équivalents au taux de 6% l'an.
- 2985 FCFA, échéant au 15/01 ;
- 3010 FCFA, échéant au 6/03.

Solution :

15/1 ——————————— 16/3

50 jours

Janvier : 31-15 = 16 jours
Février : 28 jours
Mars : 6 jours

Si **n** le nombre de jours séparant la date d'équivalence du 15 janvier et par (**n+50**) le nombre de jours séparant la date d'équivalence du 16 mars. On aura :

$$2985 - \frac{(2985 \times n \times 6)}{36000} = 3010 - \frac{(3010(n + 50) \times 6)}{36000}$$

$$\mathbf{n = \frac{-500}{25} = -20\ jours}$$

La date d'équivalence cherchée se situe 20 jours après le 15 janvier soit **au 4 février**.

Remarques :
- La date d'équivalence est unique ;
- Le calcul d'un nombre de jours positifs correspond à une date d'équivalence antérieur à la date d'échéance la plus proche ;
- Le calcul d'un nombre de jours négatifs correspond à une date située entre les deux échéances.

3- Calcul du taux d'équivalence

Application : Deux effets l'un de 90 000 FCFA, échéant au 18/2 et l'autre 90 150 FCFA échéant au 10/3, sont équivalents le 9/1. Trouver le taux équivalent.

Solution :

9/1 18/2 10/3

40 jours

60 jours

si **t** est le taux recherché, on aura :

$$90\,000 - \frac{(90\,000 \times t \times 40)}{36000} = 90\,150 - \frac{(90\,150 \times t \times 60)}{36000}$$

on trouve $\mathbf{t = 2,98\% \approx 3\%}$

II- EQUIVALENCE DE DEUX GROUPES D'EFFETS

1- Echéance commune

On appelle **échéance commune**, la date à laquelle la valeur actuelle de l'effet remplaçant est égale à la somme des valeurs actuelles des effets remplacés.

Application : on veut remplacer trois effets :
- 4500 FCFA au 10/2 ;
- 2300 FCFA au 15/3 ;
- 3700 FCFA au 14/4.

Par un effet unique de 10 470 FCFA au taux de 6% l'an.

Travail à faire : Déterminer la date de l'échéance commune

Solution :

Considérons la date d'échéance de l'effet le plus ancien comme origine (date d'équivalence). Le tableau de calcul se présente ainsi :

Valeurs des effets (V_i)	Echéance (e_i)	Nombres de jours ou durées (n_i)	Nombre (V_i*n_i)
4500	10/2	0	0
2300	15/3	33	75 900
3700	14/4	63	233 100
Total = 10500	-	-	309 000

Si le diviseur fixe est 36000/6 = 6000, on aura donc l'équation :

$$10500 - \frac{309\,000}{6000} = 10\,470 - \frac{(10470 \times n)}{6000}$$

$$\mathbf{n} = \frac{21,5}{1,745} = \mathbf{12,32\ soit\ 12\ jours}$$

La date d'échéance commune est le **22 février** c'est-à-dire 12 jours à partir du 10 février.

2- Echéance moyenne

On appelle **échéance moyenne de plusieurs effets**, l'échéance commune de ces effets lorsque la valeur nominale de l'effet unique est égale à la somme des valeurs nominales des effets remplacés.

Si n est le nombre de jours à courir jusqu'à l'échéance moyenne cherchée, on aura :

$$\mathbf{n} = \frac{\sum \mathbf{N}}{\sum \mathbf{V_i}} \quad \textbf{avec N (nombre)} = \mathbf{V_i \times n_i} \textbf{ et } \mathbf{V_i} \textbf{ est la somme des valeurs des effets}$$

Application : Déterminer l'échéance moyenne des effets suivants
- 4000 FCFA au 30/4 ;
- 6000 FCFA au 30/5 ;
- 10 000 FCFA au 19/6.

Date d'équivalence le 31/3 ; taux annuel 6%.

Solution :

Valeurs des effets (V_i)	Echéance (e_i)	Nombres de jours ou durées (n_i)	Nombre (V_i*n_i)
4 000	30/4	30	120 000
6 000	30/5	60	360 000
10 000	19/6	80	800 000
Total = 20 000	-	-	1280 000

$$\mathbf{n} = \frac{1280\ 000}{20\ 000} = \mathbf{64\ jours}$$

Soit une **date d'échéance moyenne du 3 juin**, c'est-à-dire 64 jours à partir de la date du 31 mars (date d'échéance).

Remarque : l'échéance moyenne est indépendante du taux d'équivalence.

THEME 7 : LES SUITES NUMERIQUES

Introduction :

On appelle **progressions** une suite mathématique qui est bien évidement logique. On distingue deux types de progressions qui sont :

- La progression arithmétique ;
- La progression géométrique.

Leçon 12 : La progression arithmétique

OPO : A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

- Définir la suite ou progression arithmétique ;
- Calculer une suite arithmétique (le terme, la raison, la somme).

I- DEFINITION, DETERMINATION DE LA RAISON D'UNE SUITE ARITHMETIQUE

1- Définition

C'est une suite de nombre réel tel que chacun de ses nombres autres que le premier s'obtient en ajoutant au nombre précédent un même nombre appelé **raison.**

Une suite arithmétique de raison r (r étant un nombre donné) est une suite de nombres U_1, U_2, U_3, … U_n tels que : $\mathbf{U_n = U_1 + (n-1)\, r}$ avec pour premier terme $\mathbf{U_1}$.

Si au contraire le premier terme est $\mathbf{U_0}$ et la raison r, on a l'égalité suivante :

$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \ldots + U_n = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_{n-1} + nr$

D'où $U_n = U_0 + nr$

2- Détermination de la raison d'une progression arithmétique

Si on extrait deux termes consécutifs, U_n et U_{n+1}, la raison r sera : $\mathbf{r = U_{n+1} - U_n}$.

Ainsi on peut avoir :

- r positif : il s'agit d'une progression arithmétique croissante $U_1 < U_2 < U_3 < U_4$;
- r négatif : il s'agit d'une progression arithmétique décroissante $U_1 > U_2 > U_3 > U_4$.
- r nulle : il s'agit d'une progression arithmétique constante $U_1 = U_2 = U_3 = U_4$

Si le premier terme est U_1, la raison est : $\mathbf{r = \frac{U_n - U_1}{n-1}}$

Si on extrait deux termes U_n et U_{n+1}séparer de quelques termes, on procède de la manière suivante :

$$U_{n+k} = U_n + (n+k-n)r = U_n + kr = U_{n+k} - U_n = kr$$

$$\mathbf{r = (U_{n+k} - U_n) / k}$$

Application : Un expert a reçu une somme forfaitaire de 100 000 FCFA. En plus de ce montant il reçoit chaque jour de travail une somme de 20 000 FCFA.

Travail à faire :

- Quelle est sa rémunération après un jour de travail ?
- Déterminer cette rémunération après 3 jours de travail
- Donner l'expression qui permet de trouver cette rémunération après n jours de travail, puis conclure.

Solution : Soit U la rémunération de l'expert et U_0 sa rémunération initiale avant le travail :

Rémunération de l'expert après un jour de travail (U1) est :

$$U_1 = 100\,000 + 20\,000 = 120\,000 \text{ FCFA}$$

Rémunération de l'expert après 3 jours de travail (U3) est :

$$U_3 = 100\,000 + 20\,000 \times 3 = 160\,000 \text{ FCFA}$$

Expression de la rémunération de l'expert après n jours de travail (Un) :

$$U_n = 100\,000 + 20\,000 \times n$$

Conclusion : cette expression est sous la forme $\mathbf{U_n = U_0 + nr}$. Par conséquent la rémunération de l'expert suit une progression arithmétique de raison **r = 20 000 FCFA** et de premier terme **U_0 = 100 000 FCFA**.

II- SOMME DE n PREMIERS TERMES D'UNE SUITE ARITHMETIQUE

1- Formules de calcul

Si U_1 désigne le premier terme et U_n le dernier terme, on a pour tout entier naturel n :

$$S= \frac{n(U_1+U_n)}{2}$$

Si le premier terme est U_0 et le dernier terme Un, on a pour tout entier naturel n :

$$S= (n+1)\frac{(U_0+U_n)}{2}$$

2- Applications

Application 1 : Calculer la somme des 100 premiers nombres pairs.

Solution : S= [(2 + 200) / 2] *100 = 10100

Application 2 : Pendant une semaine, WAFO cotise tous les jours les sommes d'argent en progression arithmétique, le premier terme étant 5000F (versement de Lundi) et de raison 400F.

Travail à faire : Calculer la somme totale que WAFO aura constitué au soir du dimanche après le dernier versement.

Solution :

Calcul de la somme totale constituée au soir du dimanche (Sn) :

U_1= 5000, r = 400, U_7 = ?

$U_7 = U_1 + (n-1)r \rightarrow U_7 = 5000 + (7-1)400 = 7400$

On a : $\mathbf{S = 7\frac{(5000+7400)}{2} = 43\ 400F}$

Leçon 13 : La progression géométrique

OPO : A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

- Définir la suite ou progression géométrique ;
- Calculer une suite géométrique (le terme, la somme).

I- DEFINITION ET DETERMINATION DU TERME D'UNE SUITE GEOMETRIQUE

1- Définition

On appelle **suite géométrique** une suite de nombres tels que : 02 nombres consécutifs soient dans un rapport constant appelé raison que l'on note **q**. Soient U_1, U_2, U_3, … U_n les termes d'une suite géométrique alors : $U_2=U_1q$; $U_3=U_2q=U_1q^2$…etc Si le premier terme est U_0 et la raison q, on a : $\mathbf{U_n = U_0.q^n}$ **.** Si le premier terme de la suite est U_1 et la raison q, on a : $\mathbf{U_n = U_1.q^{n-1}}$. Si Un est le terme de rang n d'une progression géométrique et Un+1 celui de rang n+1 , on a : $\mathbf{U_{n+1}= U_n.q}$

2- Détermination de la raison d'une suite géométrique

Si Un est le terme de rang n d'une progression géométrique et Un+1 celui de rang n+1 , on a : $U_{n+1}= U_n.q$ alors : $\mathbf{q = \frac{U_{n+1}}{U_n}}$

Remarque :

- Si q>1, il s'agit d'une suite géométrique croissante ;
- Si 0<q<1, il s'agit d'une suite décroissante ;
- Si q=1, il s'agit d'une suite géométrique constante.

Application 1 : Soit la progression suivante : 8, 32, 128,….etc

Travail à faire :

1- Déterminer le terme de rang 12
2- Démontrer qu'il s'agit d'une suite géométrique

Solution :

1- Calcul de la raison (q)

$$q = \frac{U_2}{U_1} \rightarrow q = \frac{32}{8} = \mathbf{4}$$

2- Montrons qu'il s'agit d'une suite géométrique, calculons à cet effet U_{12}

$$U_{12} = U_1q^{12-1} \rightarrow U_{12} = 8 \times (4)^{11} = \mathbf{33\ 554\ 432}$$

Application 2 : une suite géométrique de premier terme $U_0 = 464$ et de raison 2 est constituée de plusieurs termes dont $U_n = 475136$.

Travail à faire : Calculer U_1 à U_8

Solution : Calculons U1 à U8

$$U_1 = 464 \times (2) = 928$$
$$U_2 = 464 \times (2)^2 = 1856$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$U_8 = 464 \times (2)^8 = 11\ 87\ 84$$

II- SOMME D'UNE SUITE GEOMETRIQUE

1- Somme de n premiers termes d'une suite arithmétique

Considérons une suite géométrique de premier terme de raison q, on a :

$$S = U_1 + U_2 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots + U_{n-1} + U_n \quad \text{avec} \quad U_n = U_1 \times q^{n-1}$$

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{U_1(1 - q^n)}}{\mathbf{1 - q}} \text{ avec } \mathbf{q \neq 1}$$

Application : Calculer la somme des termes de la progression de 5 termes de raison 3 et de premier terme 8.

Solution : Calculons la somme, soit : n = 5 et U_1= 8 on a : $S = \frac{8(1-3^5)}{1-3} = \mathbf{968}$

DEUXIEME PARTIE : STATISTIQUES

THEME 8 : DESCRIPTION STATISTIQUE D'UNE POPULATION

Leçon 14 : Généralités sur la statistique

OPO : A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

- Maitriser les notions de base en statistique ;
- Observer et dépouiller.

I- NOTIONS DE BASE

1- Définitions

Statistique : C'est une technique qui permet de rassembler et d'étudier tous les renseignements susceptibles de mesurer l'évolution d'un phénomène.

Les statistiques : Ensemble des données numériques qui concernent l'évolution d'un phénomène étudié au moyen de la statistique.

La population statistique : C'est l'ensemble de personne ou d'éléments soumis à une étude statistique.

Individus ou unité statistique : C'est un élément de la population statistique.

Echantillon de la population : C'est une partie de la population sur laquelle porte l'étude.

Effectif total (N) : C'est le nombre de personne qui constitue une population statistique.

2- Les types de caractères

Caractère statistique : C'est l'aspect particulier de l'individu auquel on s'intéresse. il peut être quantitatif ou qualitatif.

2-1- Caractère qualitatif

C'est un caractère dont les variables ne sont pas mesurables. Exemple la couleur, le sexe…

2-2- Caractère quantitatif

C'est un caractère dont les variables sont mesurables. Exemple la taille, le poids… Le caractère quantitatif peut être **discret** et **continu**. **Le caractère quantitatif est discret** lorsque les valeurs observées sont isolées. Tandis que **le caractère quantitatif est continu** lorsque les valeurs peuvent être présentées sous forme d'intervalle (Etant appelé **la classe**).

Classe = **[b1 ; b2 [;** L'amplitude d'une classe = **b2-b1** ; Le centre d'une classe = $\frac{(\mathbf{b1+b2})}{\mathbf{2}}$

Modalité (xi) : C'est une rubrique associée à un caractère. C'est l'ensemble de valeur que peut prendre un caractère statistique. Exemple le caractère sexe comporte deux modalités.

Effectif d'une modalité (n): C'est le nombre de fois qu'une modalité est observée.

Fréquence (fi) : C'est le quotient de l'effectif d'une modalité par l'effectif total.

$$\mathbf{f_i = \frac{n}{N} \times 100 \text{ ou } f_i = \frac{n}{100}}$$

La collecte des renseignements : elle se fait relativement à un ensemble soit aux moyens du recensement impliquant tous les éléments de l'ensemble (**enquête exhaustive**) soit aux moyens d'un sondage ne portant que sur les éléments d'un échantillon (**enquête partielle).**

II- LE DEPOUILLEMENT

1- Définition

C’est une méthode qui consiste à regrouper, à trier, à dénombrer et à totaliser les séries statistiques de manière à les rendre utilisable dans une analyse.

2- Les types de dépouillement

Le dépouillement peut se faire par :

- Des pointages carrés (⧅)
- Des pointages en bâtonnets (~~IIII~~)

Application :

Les jets d’un dé de manière successif ont donné les résultats suivants

4	3	6	2	1	4	1	5
5	3	4	5	6	4	2	4
3	2	5	6	4	6	2	6
6	1	5	3	1	4	1	4

TRAVAIL A FAIRE :

1- Combien de fois a-t-on jeté ce dé ?
2- Procéder au dépouillement.

Solution :

1- Le dé a été jeté 32 fois
2- Dépouillement

Modalités	1	2	3	4	5	6	Total
Pointages	~~IIII~~	IIII	IIII	~~IIII~~ III	~~IIII~~	~~IIII~~	31

Leçon 15 : Les tableaux statistiques

OPO : A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

- Observer, enregistrer et regrouper les données d'une population ;
- Calculer les fréquences relatives ; les effectifs et fréquences cumulées.

Introduction : Les tableaux statistiques sont des tableaux à 02 ou plusieurs colonnes dans lesquelles figures les modalités, les pointages, les effectifs des modalités. On peut parfois ajouter les fréquences. Chaque tableau sera fait en fonction du caractère étudier.

I- CAS D'UN CARACTERE QUALITATIF

1- Tableau d'effectifs et Fréquences

Application : Au cours d'une enquête réaliser dans une région portant sur les couleurs des véhicules, l'on a observé les renseignements suivants : Grise ; grise ; noire ; bleue ; bleue ; blanche ; blanche ; blanche ; noire ; jaune ; grise ; grise ; noire ; noire ; blanche ; noire ; noire ; bleue ; grise et grise.

Travail à faire : Présenter les résultats dans un tableau statistique et calculer les fréquences relatives.

Solution :

Modalités	Grise	Noire	Bleue	Blanche	Jaune	Total
Effectifs	**6**	**6**	**3**	**4**	**1**	**20**
Fréquences	**30%**	**30%**	**15%**	**20%**	**5%**	**100%**

2- Tableau effectifs et fréquences cumulées

Application : Reprenons l'application précédente, puis calculons les effectifs cumulés et les fréquences cumulées

Solution :

Modalités	Grise	Noire	Bleue	Blanche	Jaune	Total
Effectifs	6	6	3	4	1	20
ECC	**6**	**12**	**15**	**19**	**20**	**-**
ECD	**20**	**14**	**8**	**5**	**1**	**-**
Fréquences	30%	30%	15%	20%	5%	100%
FCC	**30%**	**60%**	**75%**	**95%**	**100%**	**-**
FCD	**100%**	**70%**	**40%**	**25**	**5%**	**-**

II- CAS D'UN CARACTERE QUANTITATIF

1- Caractère quantitatif discret

a- Tableau des effectifs et des fréquences

Application : Dans la ville d'Ambam une enquête a été menée auprès de 30 familles afin de savoir le nombre d'enfants par familles. Les personnes interrogées ont fourni les résultats suivants : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 0 ; 0 ; 1 ; 2 ; 1 ; 0 ; 0 ; 4 ; 3 ; 0 ; 3 ; 3 ; 2 ; 3 ; 4 ; 1 ; 3 ; 3 ; 4 ; 3 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 2.

Travail à faire : Présenter le tableau des effectifs, puis calculer les fréquences relatives.

Solution :

Modalités	0	1	2	3	4	Total
Pointages	~~IIII~~ II	~~IIII~~	~~IIII~~	~~IIII~~ IIII	IIII	-
Effectifs	**7**	**5**	**5**	**9**	**4**	**30**
Fréquences (%)	**23,33%**	**16,67%**	**16,67%**	**30%**	**13,33%**	**100%**

b- Tableau des effectifs et fréquences cumulées

Reprenons l'application ci-dessus, calculons les effectifs cumulées croissants et décroissants.

Solution :

Modalités	0	1	2	3	4	Total
Effectifs	7	5	5	9	4	30
ECC	**7**	**12**	**17**	**26**	**30**	**-**
ECD	**30**	**23**	**18**	**13**	**4**	**-**
Fréquences (%)	23,33%	16,67%	16,67%	30%	13,33%	100%
FCC	**23,33%**	**40%**	**56,67%**	**86,67%**	**100%**	**-**
FCD	**100%**	**76,67%**	**60%**	**43,33%**	**13,33%**	**-**

2- Caractère quantitatif continu

a- Tableau des effectifs et des fréquences

Application :

Le gérant du magasin JOJO récapitule les encaissements réalisés par son magasin à la veille des fêtes de fin d'année (en millier de FCFA).

20	60	56	110	52	62	140	110
25	13	22	36	29	45	95	22
118	37	85	35	43	12	80	45

Travail à faire :

1- Regrouper les données du tableau ci-dessus dans les classes correspondantes ci-après : [10 000 ; 50 000[; [50 000 ; 90 000[; [90 000 ; 130 000[; [130 000 ; 170 000[.

2- Effectuer le dépouillement.

3- Calculer les fréquences relatives.

Solution :

Modalités x10^3	[10 ; 50 [	[50 ; 90[	[90 ; 130[	[130; 170[.	Total
Pointages	~~IIII~~ ~~IIII~~ III	~~IIII~~ I	IIII	I	-
Effectifs	**13**	**6**	**4**	**1**	**24**
Fréquences	**54,2%**	**25%**	**16,7%**	**4,1%**	**100%**

b- Tableau des effectifs et fréquences cumulées

Reprenons l'application ci-dessus et calculons les effectifs cumulés croissants et décroissants, les fréquences cumulées croissantes et décroissantes, les centres et les amplitudes des classes.

Solution :

Modalités x10^3	[10 ; 50 [	[50 ; 90[	[90 ; 130[	[130; 170[.	Total
Effectifs	13	6	4	1	24
ECC	**13**	**19**	**23**	**24**	**-**
ECD	**24**	**11**	**5**	**1**	**-**
Fréquences (%)	54,2	25	16,7	4,1	100
FCC	**54,2**	**79,2**	**95,9**	**100**	**-**
FCD	**100**	**45,8**	**20,8**	**4,1**	**-**
Centres de classes (c_i)	**30**	**70**	**110**	**150**	**-**
Amplitudes de classes (a_i)	**40**	**40**	**40**	**40**	**-**

THEME 9 : REPRESENTATION GRAPHIQUE DES SERIES STATISTIQUES

Introduction : les représentations graphiques sont utilisées pour synthétiser de façon visuelle les informations contenues dans les tableaux statistiques. Ces représentations diffèrent selon que le caractère est soit **qualitatif** ou **quantitatif.**

Leçon 16 : Cas d'un caractère qualitatif

OPO : A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

- Présenter un diagramme circulaire, à bandes, en tuyaux d'orgue ;
- Représenter un diagramme circulaire, à bandes, en tuyaux d'orgue.

Introduction : Trois modes de représentations sont généralement utilisés lorsque le caractère étudié est qualitatif à savoir : Le diagramme circulaire (semi-circulaire ou en secteurs circulaires) ; Le diagramme à bandes ; Le diagramme à tuyaux d'orgue.

I- DIAGRAMME CIRCULAIRE

1- Présentation

Ici, la surface totale est identifiée à celle d'un cercle et les parts relatives aux rubriques correspondant aux surfaces des cercles.

2- Application

Application : A l'aide du tableau statistique ci-dessous.

Modalités	Gris	Orange	Bleue	Blanche	Jaune	Total
Effectifs	**6**	**6**	**3**	**4**	**1**	**20**

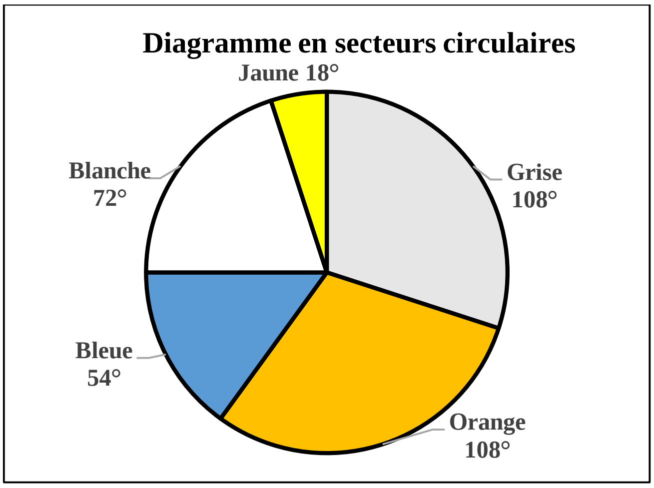
Travail à faire : Calculer les fréquences et les angles au centre par rapport à chaque modalité, dans le cas d'un diagramme semi-circulaire et d'un diagramme en secteurs circulaires.

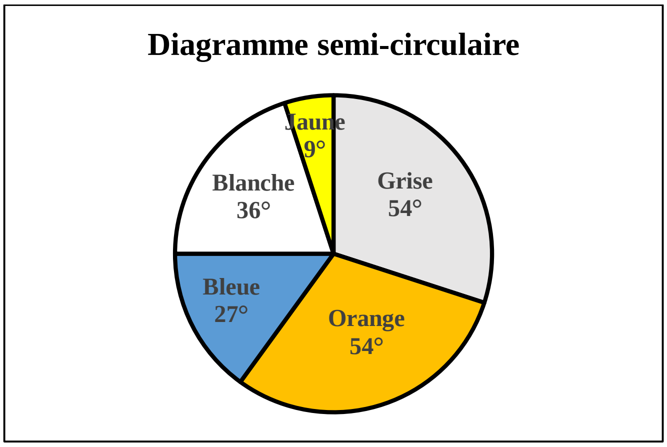
Solution :

Angle au centre $(O_i) = f_i \times 180^0$ (diagramme semi-circulaire)

Angle au centre $(O_i) = f_i \times 360^0$ (diagramme en secteurs circulaires)

Modalités	Grise	Orange	Bleue	Blanche	Jaune	Total
Effectifs	**6**	**6**	**3**	**4**	**1**	**20**
Fréquences	**30%**	**30%**	**15%**	**20%**	**5%**	**100%**
Angles circulaire (360°)	**108°**	**108°**	**54°**	**72°**	**18°**	**360°**
Angles semi-circulaire (180°)	**54°**	**54°**	**27°**	**36°**	**9°**	**180°**





II- DIAGRAMME A BANDES

1- Présentation

Cette représentation est un grand tuyau qui est divisé en rectangle dont la longueur est proportionnelle à la fréquence ou à l'effectif de la modalité.

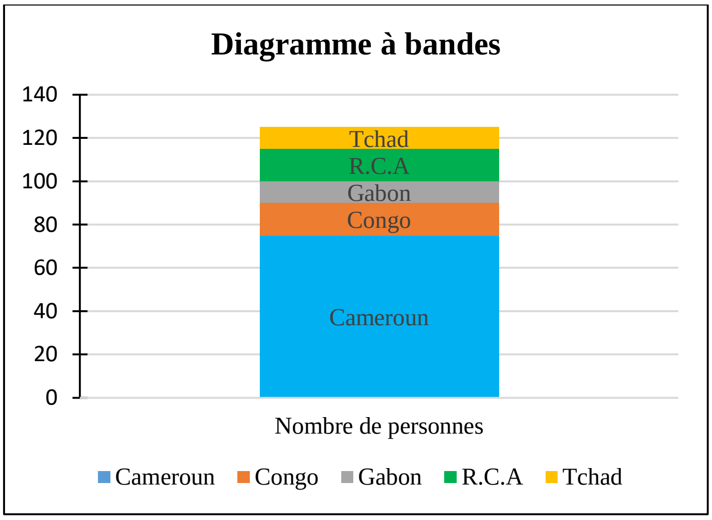
2- Application

Application : Une étude portant sur le pays d'origine de 125 personnes a donné le résultat suivant :

Pays d'origine	Nombre de personnes
Cameroun	75
Congo	15
Gabon	10
R.C.A	15
Tchad	10
Total	125

Travail à faire : Faite une représentation à bandes de cette série statistique

Solution :



III- DIAGRAMME EN TUYAUX D'ORGUE

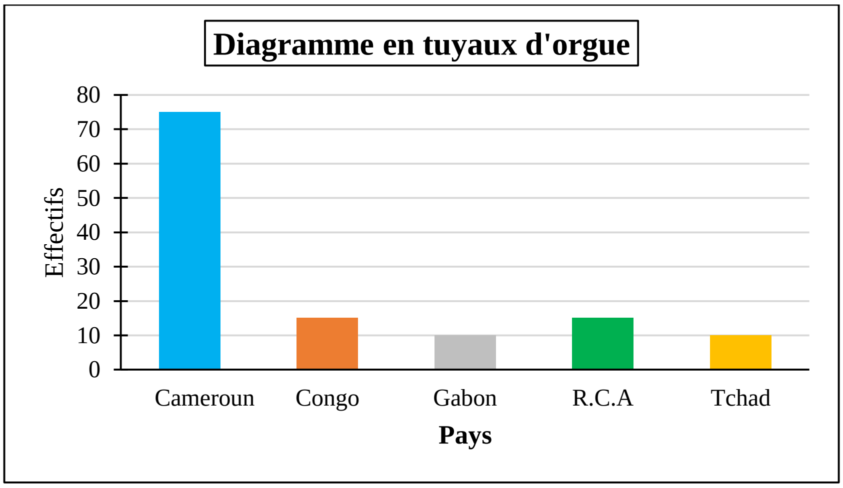
1- Présentation

Chaque tuyau correspond à une modalité. Les bases des tuyaux sont constantes, et leurs hauteurs proportionnelles à leurs effectifs ou à leurs fréquences.

2- Application

Application : A partir de l'application précédente, faisons une représentation en tuyaux d'orgue de le série statistique.

Solution :



Leçon 17 : Cas d'un caractère quantitatif

OPO : A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

- Représenter les séries statistiques dont les caractères quantitatifs sont discrets ;
- Représenter les séries statistiques dont les caractères quantitatifs sont continus.

I- CAS D'UN CARACTERE QUANTITATIF DISCRET

Dans ce cas, il existe deux représentations possibles : **le diagramme en bâtons et le diagramme en escalier.**

1- Diagramme en bâtons

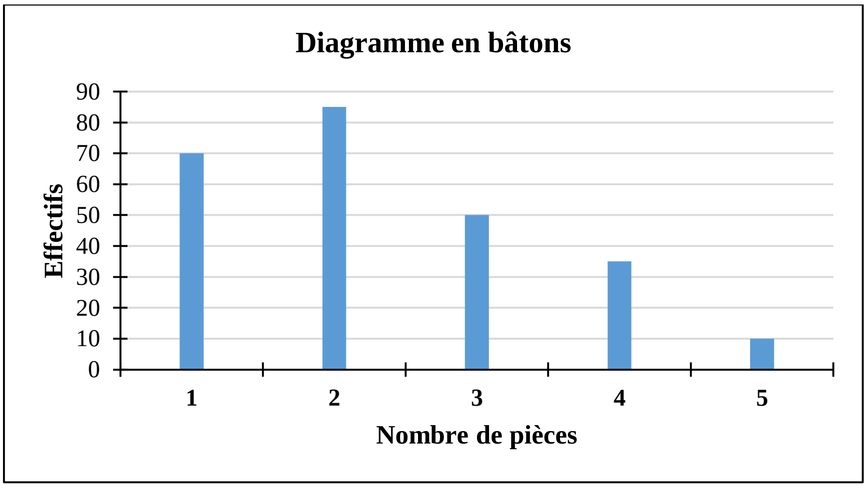
Dans ce diagramme, chaque bâton représente une modalité. La longueur d'un bâton est proportionnelle à l'effectif ou à la fréquence de la modalité.

Application : Soit le tableau suivant représentant la distribution de 250 personnes selon le nombre de pièces de leur logement.

Nombre de pièces	Effectif
1	70
2	85
3	50
4	35
5	10
Total	250

Travail à faire : Faite une représentation en diagramme en bâtons de cette série statistique.

Solution :



2- Diagramme en escalier

Il est représenté sur la base des effectifs cumulés ou des fréquences cumulées. La courbe obtenue est une courbe en escalier **ascendante** ou **descendante**.

II- CAS D'UN CARACTERE QUANTITATIF CONTINU

A ce niveau nous verrons les histogrammes, le polygone des effectifs ou des fréquences, les courbes cumulatives.

1- Les histogrammes

Dans le cas d'un caractère continu où les variables sont regroupées en classes de valeurs, le diagramme de référence est **l'histogramme**. A chaque classe de variable on fait correspondre la surface d'un rectangle ayant pour base l'amplitude des classes, deux cas peuvent se présenter.

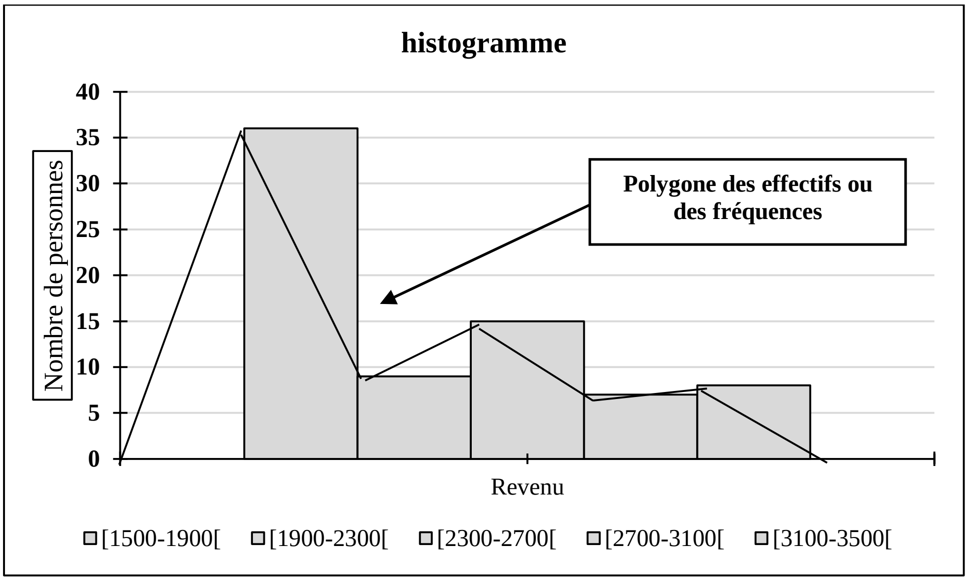
a- Cas où les amplitudes des classes sont égales

Application : Soit la répartition de 75 personnes selon le revenu net hebdomadaires.

Revenu	[1500-1900[	[1900-2300[	[2300-2700[	[2700-3100[	[3100-3500[	Total
Nombre de personnes	36	9	15	7	8	75

Travail à faire : Construire l'histogramme de cette série statistique ainsi que le polygone des effectifs.

Solution : Construction de l'histogramme de la série statistique



Remarque : le polygone des effectifs ou des fréquences est une courbe qui relie les sommets de l'histogramme.

b- Cas où les amplitudes des classes sont inégales

Dans ce cas on corrige les effectifs de la manière suivante :

$$\textbf{Effectif corrigé} = \frac{\textbf{Effectif de la modalité}}{\textbf{amplitude de la classe correspondante}} \times \textbf{amplitude la plus petite}$$

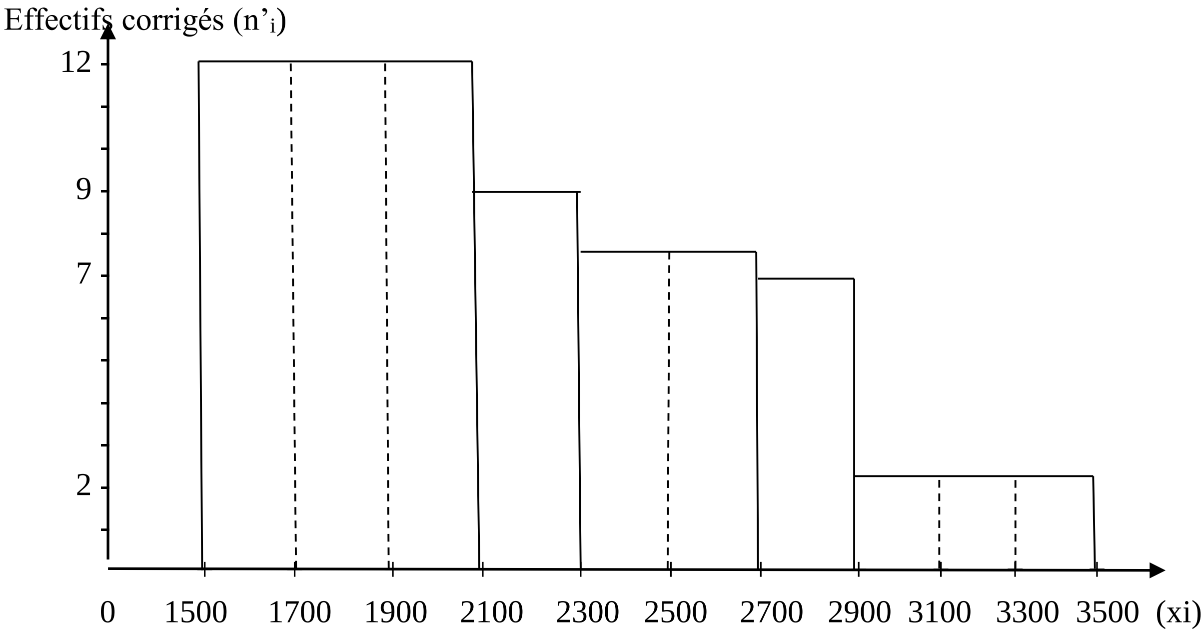
Application : Reprenons l'application précédente en supposant que les classes sont ainsi :

Revenu	[1500-2100[	[2100-2300[	[2300-2700[	[2700-2900[	[2900-3500[	Total
Nombre de personnes	36	9	15	7	8	75

Travail à faire : Construire l'histogramme

Solution : Construction de l'histogramme de la série statistique

Revenu (xi)	[1500-2100[	[2100-2300[	[2300-2700[	[2700-2900[	[2900-3500[	Total
Nombre de personnes (ni)	36	9	15	7	8	75
Amplitudes	600	200	400	200	600	-
Eff. Corrigés	12	9	7,5	7	2,67	-



2- Les courbes cumulatives

Il s'agit ici de tracer le polygone des effectifs cumulés croissant et polygone des effectifs décroissant On peut également tracer le polygone des fréquences cumulées croissantes et décroissantes.

Application :

Une compagnie de transport s'intéresse au kilométrage effectué par ses véhicules. Les statistiques recueillies sont représentées dans le tableau suivant :

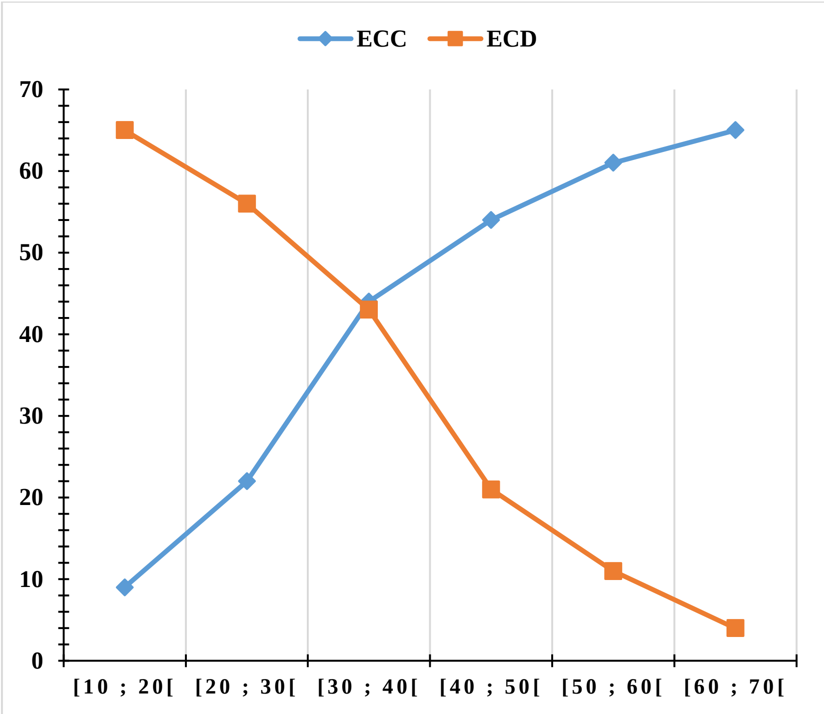
Trajet en Km	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[	[50 ; 60[	[60 ; 70[	Total
Effectifs (ni)	09	13	22	10	07	04	65

Travail à faire : Tracer les polygones des effectifs cumulés croissant et décroissant, ainsi que le polygone des fréquences cumulées croissantes et décroissantes.

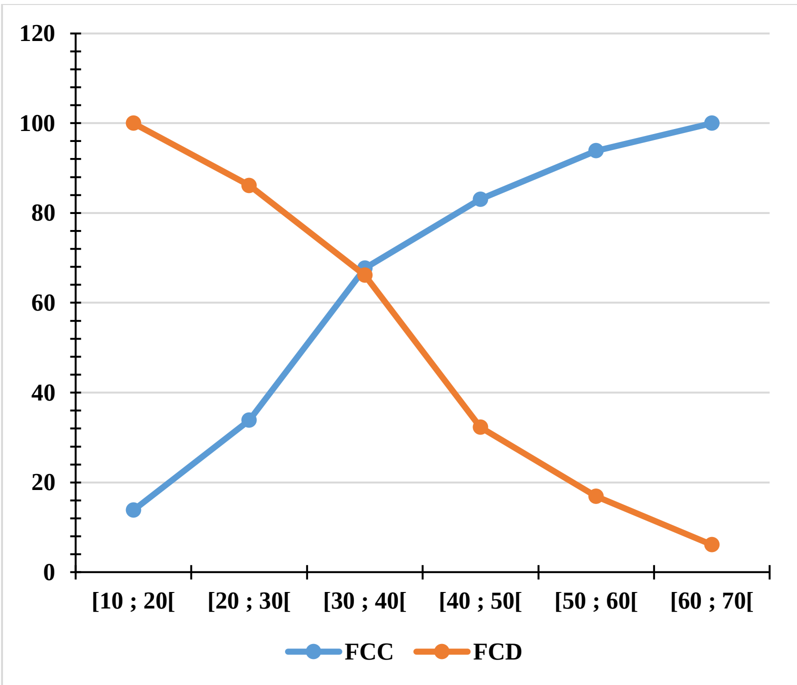
Solution :

Trajet en Km	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[	[50 ; 60[	[60 ; 70[	Total
Effectif (ni)	9	13	22	10	07	04	65
ECC	9	22	44	54	61	65	-
ECD	65	56	43	21	11	4	-
Fréquence (fi)	13,85	20	33,85	15,38	10,77	6,15	100
FCC	13,85	33,85	67,7	83,08	93,85	100	-
FCD	100	86,15	66,15	32,3	16,92	6,15	-

- Courbes cumulative à partir des ECC et ECD



- Courbes cumulative à partir des FCC et FCD



THEME 10 : CARACTERISTIQUES DE POSITION D'UNE SERIE STATISTIQUE

Introduction : Encore appelées **caractéristiques de tendance centrale**, elles renseignent sur l'ordre de grandeur de la série statistique étudiée. Elles permettent de savoir autour de quelles valeurs se situe la variable d'une série statistique. Parmi les caractéristiques de position, on distingue : **le mode, la médiane et la moyenne**.

Leçon 18 : Le mode (Mo)

OPO : A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

- Définir le mode ;
- Déterminer le mode d'une série statistique à caractère qualitatif et quantitatif.

Introduction :

Le mode (Mo) encore appelé **valeur dominante**, c'est la valeur de la variable statistique la plus fréquemment observée ; c'est-à-dire la valeur de la modalité qui correspond à l'effectif le plus élevé. Autrement dit, le mode noté **Mo** est la modalité qui admet la plus grande fréquence.

I- MODE D'UNE SERIE STATISTIQUE A CARACTERE QUALITATIF

Le mode dans une série statistique qualitative est toute modalité qui a le plus grand effectif.

Application : Une entreprise commerciale spécialisée dans la vente des peintures pour automobile, veut s'approvisionner en stock de peintures différentes. Mais avant de passer commandes, elle aimerait savoir les couleurs les utilisées. Le résultat du dépouillement permet d'avoir le tableau suivant :

Couleurs	Jaune	Bleue	Rouge	Noire	Grise	Blanche	Total
Effectifs	22	9	14	12	17	11	85

Travail à faire : Déterminer le mode de cette série statistique.

Solution : la modalité (couleur) jaune a le plus grand effectif. L'interprétation qui en résulte est que l'on retrouve plusieurs véhicules de couleurs jaune. On pourra commander plus de peintures de couleurs jaunes.

II- MODE D'UNE SERIE STATISTIQUE A CARACTERE QUANTITATIF

1- Mode d'une série discrète

Le mode dans une série statistique discrète est toute modalité qui a le plus grand effectif.

Application : les notes sur 20 de la première séquence en mathématiques appliquées des élèves de la classe de première STT sont regroupées dans le tableau ci-dessous :

Notes	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	Total
ni	3	6	6	12	9	14	5	5	7	3	70

Travail à faire : Quelle est la note obtenue par le plus grand nombre d'élèves (le mode) ?

Solution : La modalité 12 a le plus grand effectif. Le mode est donc 12. L'interprétation qui résulte est que la note 12/20 est celle qui a été obtenue par le plus grand nombre d'élèves.

2- Mode d'une série continue d'amplitude égale

Ici le mode est le centre de la classe modale. La classe modale est celle qui a l'effectif le plus élevé. Désignons par $\mathbf{a_i}$ et $\mathbf{b_i}$ respectivement les bornes inférieures et supérieures de la classe modale, et par **Mo** le mode. On a :

$$\mathbf{M_o = \frac{a_i + b_i}{2}}$$

Application : considérons la série statistique suivante

Classes	[10-20[	[20-30[	[30-40[	[40-50[	[50-60[
Effectif (ni)	10	25	18	15	9

Travail à faire : Déterminer le mode de cette série

Solution :

La classe modale est : [20-30[

le mode est le centre de la classe modale $M_o = \frac{20+30}{2} = \mathbf{25}$

3- Mode d'une série continue d'amplitude inégale

Le mode est égal également le centre de la classe modale, sauf que la classe modale est celle dont l'effectif corrigé est le plus élevé ou la densité la plus élevée.

Désignons par $\mathbf{n_i}$ l'effectif réel, $\mathbf{a_i}$ l'amplitude de la classe, l'effectif corrigé n_i' s'obtient de la manière suivante :

$$\mathbf{n_i' = \frac{n_i}{a_i} \times amplitude\ la\ plus\ petite}$$

Et le mode Mo par la formule suivante, où $\mathbf{a_i}$ **et** $\mathbf{b_i}$ sont respectivement les bornes inférieures et supérieures de la classe modale : $\mathbf{M_o = \frac{a_i+b_i}{2}}$

Application : Déterminer le mode de la série statistique suivante :

Classes	[20-25[	[25-35[	[35-50[	[50-55[	[55-65[
Effectif (ni)	3	10	12	8	6

Solution : trouvons l'amplitude $\mathbf{a_i}$, l'effectif corrigé $\mathbf{n_i'}$ et le centre de classes $\mathbf{c_i}$

Classes	$\mathbf{n_i}$	$\mathbf{a_i}$	$\mathbf{n_i'}$	$\mathbf{c_i}$
[20-25[	3	5	3	22,5
[25-35[	10	10	5	30
[35-50[	12	15	4	42,5
[50-55[	8	5	8	52,5
[55-65[	6	10	3	60
Total	39	-	-	-

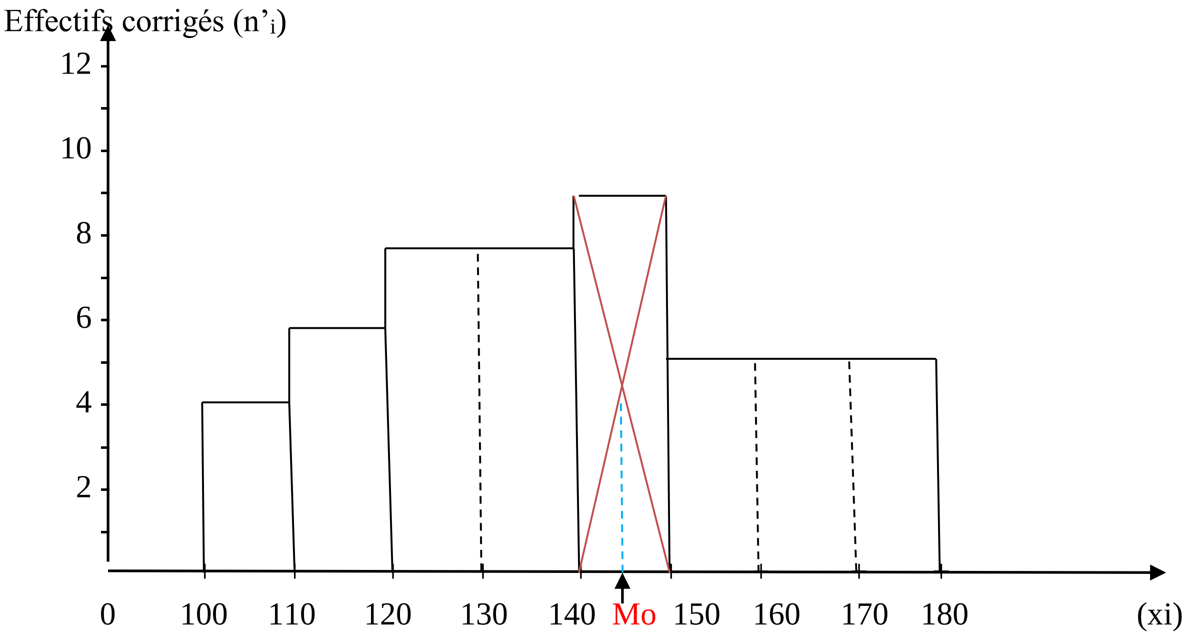
On se rend compte que, d'après l'effectif corrigé, la classe modale est [50-55[, le mode est le centre de cette classe, soit : $M_o = \frac{50+55}{2} = \mathbf{52,5}$

4- Détermination graphique du mode d'une série continue

Le mode d'une série continue peut-être déterminer graphiquement par l'utilisation de la méthode des diagonales de la classe modale sur l'histogramme.

Application : Considérons la série statistique suivante et déterminons graphiquement le mode.

Classes	$\mathbf{n_i}$	$\mathbf{a_i}$	$\mathbf{n_i'}$
[100-110[	4	10	4
[110-120[	6	10	6
[120-140[	16	20	8
[140-150[	9	10	9
[150-180[	15	30	5
Total	50	-	-



Histogramme

A partir de l'histogramme, on se rend compte que la classe modale est **[140-150**[, puisqu'elle est celle qui a le plus grand effectif. A partir de cette observation, on trace des diagonales à l'intérieur du rectangle de la classe modale. Ces deux diagonales se croisent en un point. La projection de ce point sur l'axe des abscisses donne le mode. Le mode est donc : **Mo = 145**.

Leçon 19 : La médiane (Me)

OPO : A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

- Définir la médiane ;
- Déterminer la médiane d'une série statistique discrète et celle d'une série continue.

Introduction : **La médiane** d'une série statistique est le nombre, noté **Me** tel que **50%** des modalités sont inférieures ou égales à **Me** et **50%** supérieures ou égales à **Me**. En d'autres termes, c'est la valeur de la variable qui partage une série statistique **préalablement rangée** (ordre croissant ou ordre décroissant) en deux parties égales

I- MEDIANE D'UNE SERIE STATISTIQUE DISCRETE

1- Cas d'une série discrète simple

Pour calculer la médiane d'une série statistique discrète simple ou individualisée, il faut :

- Ordonner la série discrète, de manière croissante ou décroissante ;
- Calculer **le rang de la médiane** (**P**) :
  - ❖ Si le nombre d'observations (**N**) de la série est pair, le rang médian est : $\mathbf{P = \frac{N}{2}}$
  - ❖ Si le nombre d'observations de la série est impair, le rang médian est : $\mathbf{P = \frac{N+1}{2}}$
- Puis déterminer la médiane (**Me**) :
  - ❖ Si le nombre d'observations (**N**) de la série est pair : $\mathbf{M_e = \frac{X_p + X_{P+1}}{2}}$
  - ❖ Si le nombre d'observations (**N**) de la série est impair, la médiane : $\mathbf{M_e = X_P}$

Application 1 :

Déterminer la médiane de la série statistique suivante : 6 ;11 ;4 ;12 ;5 ;6 ;10 ;9 ;8.

Solution 1 :

Le nombre d'observations (N) est impaire, soit : **N = 9.**

- Ordonnons cette série de manière croissante : 4 ; 5 ; 6 ; 6 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12
- Déterminons le rang médian (P) : **P = 9+1/2= 5^e**
- La médiane occupe la cinquième position (X_5), d'où : **Me = 8.**

Application 2 :

Déterminer la médiane (Me) de la série statistique suivante : 12 ; 6 ;10 ; 15 ; 7 ; 5 ; 8 ; 11

Solution 2 :

Le nombre d'observations (N) est paire, soit : **N = 8.**

- Ordonnons cette série de manière croissante : 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 10 ; 11 ; 12 ; 15
- Déterminons le rang médian (P) : **P = 8/2= 4^e**
- La médiane occupe la cinquième position (X_5), d'où : **Me = 8+10/2 = 9.**

Ce résultat n'a aucune signification statistique, car la médiane d'une série discrète doit être une valeur de la série statistique ordonnée. Cette valeur est le nombre le plus proche du résultat obtenu. D'où, on a : **Me = 8** ou **Me = 10.**

2- Cas d'une série discrète groupée

Pour calculer la médiane d'une série discrète groupée, il faut :

- Calculer l'effectif cumulé croissant ;
- Calculer le rang médian (**P**) en tenant compte si l'effectif est pair ou impair ;
- Déterminer par interpolation linéaire la médiane.

Désignons par **Me** la médiane ; **X_1** la modalité avant le rang médian ; **X_2** la modalité après le rang médian ; **ECC_1** l'effectif cumulé croissant avant le rang médian et **ECC_2** l'effectif cumulé croissant après le rang médian. Pour déterminer la médiane par interpolation linéaire, on part du principe que :

$$\begin{cases} \mathbf{ECC_1 < P < ECC_2} \\ \mathbf{X_1 < M_e < X_2} \end{cases}$$

A partir des encadrements ci-dessus, on pose l'égalité suivante :

$$\frac{P - ECC_1}{ECC_2 - ECC_1} = \frac{M_e - X_1}{X_2 - X_1}$$

De cette égalité, on obtient la médiane par la formule :

$$\mathbf{M_e = X_1 + (X_2 - X_1)\left(\frac{P - ECC_1)}{ECC_2 - ECC_1}\right)}$$

Application : soit la série statistique ci-dessous, déterminer sa médiane.

Modalités (Xi)	4	8	10	14	Total
Effectifs (ni)	8	9	5	6	28

Solution : Déterminons la médiane de la série statistique

Modalités (Xi)	**Effectifs (ni)**	**ECC**
4	8	8
8	9	17
19	5	22
14	6	28
Total	28	-

Le rang médian (P) : P = 28/2 = 14

L'interpolation linéaire donne les relations suivantes :

$$\begin{cases} 8 < 14 < 17 \\ 4 < M_e < 8 \end{cases}$$

D'où : $\frac{14-8}{17-8} = \frac{M_e-4}{8-4}$ → $\mathbf{M_e = 4 + (8-4)\left(\frac{14-8}{17-8}\right) = 6,67}$

II- MEDIANE D'UNE SERIE CONTINUE

1- Détermination algébrique ou par calcul de la médiane

Elle se détermine également par interpolation linéaire, à partir de la formule suivante :

$$\mathbf{M_e = L_i + (L_s - L_i)\left(\frac{P - ECC_1)}{ECC_2 - ECC_1}\right)}$$

Où $\mathbf{L_i}$ est la borne avant le rang médian (ou limite inférieure) ; $\mathbf{L_s}$ la borne après le rang médian (ou limite supérieure) ; **ECC_1** l'effectif cumulé croissant avant le rang médian et **ECC_2** l'effectif cumulé croissant après le rang médian.

Remarque : lorsque le rang médian correspond à une valeur des effectifs cumulées croissants, la médiane (Me) est la borne supérieure de la classe correspondante (classe médiane).

Application 1 : soit la série statistique ci-dessous, déterminons sa médiane

Classes	$\mathbf{n_i}$	**ECC**
[50-60[	5	5
[60-**70**[	7	**12**
[70-80[	6	18
[80-90[	5	23
Total	23	-

Le rang médian (P) : P = 23+1/2 = **12** d'où **Me = 70**

Application 2 : soit la série statistique ci-dessous, déterminons la médiane

Classes	$\mathbf{n_i}$	**ECC**
[20-30[	4	4
[30-40[	12	**16**
[40-60[	8	**24**
[60-70[	7	31
[70-100[	13	44
Total	44	-

Le rang médian (P) : P = 44/2 = **22**

L'interpolation linéaire donne les relations suivantes :

$$\begin{cases} 16 < 22 < 24 \\ 40 < M_e < 60 \end{cases}$$

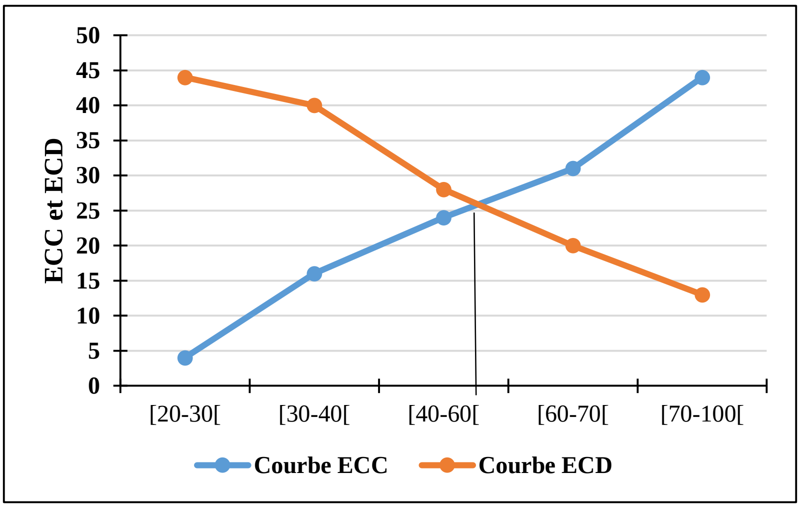
D'où : $$\mathbf{M_e = 40 + (60 - 40)\left(\frac{22-16}{24-16}\right) = 55}$$

2- Détermination graphique de la médiane

Sur le graphique des courbes cumulatives des fréquences ou des effectifs, la médiane (**Me)** est **le point de rencontre des deux courbes** (courbes des effectifs cumulés ou fréquences cumulées), par projection sur l'axe des abscisses (valeurs du caractère).

Application : Déterminons graphiquement la médiane de cette série

Classes	$\mathbf{n_i}$	**ECC**	**ECD**
[20-30[	4	4	44
[30-40[	12	16	40
[40-60[	8	24	28
[60-70[	7	31	20
[70-100[	13	44	13
Total	44	-	-



Leçon 20 : La moyenne

OPO : A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

- Définir la moyenne arithmétique, harmonique, géométrique et quadratique ;
- Déterminer les différentes moyennes.

Introduction : La moyenne est la caractéristique la plus représentative d'une série statistique dans la mesure où son calcul intègre toutes les valeurs de la variable étudiée.

I- LES DIFFERENTES MOYENNES

On distingue :

- La moyenne arithmétique ($\overline{\mathbf{X}}$) ;
- La moyenne harmonique **(H) ;**
- La moyenne géométrique (**G**) ;
- La moyenne quadratique (**Q**)

1- Formules de calcul

Lors du calcul de la moyenne, l'on fait une distinction entre la moyenne **simple** (série individuelle) et la moyenne **pondérée** (série non individuelle). Le tableau ci-dessous présente les formules de calculs des différentes moyennes :

Types de moyenne	Simple	Pondérée	
		Discret	Continu
Arithmétique ($\overline{\mathbf{X}}$)	$\overline{X}=\frac{1\sum x_i}{N}$	$\overline{X}=\frac{1\sum x_i n_i}{N}$ ou $\overline{X}=\sum f_i x_i$	$\overline{X}=\frac{1\sum n_i c_i}{N}$
Harmonique (H)	$H=\frac{N}{\sum\frac{1}{x_i}}$	$H=\frac{N}{\sum\frac{n_i}{x_i}}$	$H=\frac{N}{\sum\frac{n_i}{c_i}}$
Géométrique (G)	$G=\sqrt{X.H}$	$G=\sqrt{X.H}$	$G=\sqrt{X.H}$
Quadratique (Q)	$Q=\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N}}$	$Q=\sqrt{\frac{\sum n_i x_i^2}{N}}$ ou $Q=\sqrt{f_i x_i^2}$	$Q=\sqrt{\frac{\sum n_i c_i^2}{N}}$

Remarque : la moyenne harmonique est toujours inférieure ou égale à la moyenne géométrique. Cette dernière est inférieure à la moyenne arithmétique. La moyenne arithmétique, à son tour est inférieure à la moyenne quadratique. D'où : $\mathbf{H < G < \overline{X} < Q}$

2- Applications

Application 1 : Une ménagère achète quatre biens dont les prix et quantités sont contenus dans le tableau ci-contre.

Biens	Cubes	Oignons	Savons	Stylos
Prix (xi)	25	75	250	100
Quantités (ni)	80	20	15	50

Travail à faire : Calculer les prix moyens arithmétique, harmonique, géométrique et quadratique de ces biens.

Solution : Elaborons d'abord le tableau statistique relatif à cette série statistique

Biens	Prix (xi)	ni	ni.xi	ni/xi	$ni.xi^2$
Cubes	25	80	2000	3,2	50 000
Oignons	75	20	1500	0,26	112 500
Savons	250	15	3750	0,06	937 500
Stylos	100	50	5000	0,5	500 000
Totaux	-	**165**	**12 250**	**4,02**	**1 600 000**

A partir de ce tableau, on peut calculer toutes les moyennes.

- Moyenne arithmétique : $\overline{X} = \frac{12\,250}{165} = \mathbf{74,24}$
- Moyenne harmonique : $H = \frac{165}{4{,}02} = \mathbf{41,04}$
- Moyenne géométrique : $G = \sqrt{74{,}24 \times 41{,}04} = \mathbf{55,19}$
- Moyenne quadratique : $Q = \sqrt{\frac{1\,600\,000}{165}} = \mathbf{98,47}$

Comparons ces moyennes : **41,04 < 55,19 < 74,24 < 98,47**

Application 2 : Soit la série statistiques suivante :

xi	[30-40[	[40-50[	[50-60[	[60-70[	[70-80[	Total
ni	26	33	64	07	10	140

Travail à faire : Calculer les moyennes de cette série statistique.

Solution : Elaborons d'abord le tableau statistique relatif à cette série

xi	[30-40[	[40-50[	[50-60[	[60-70[	[70-80[	Total
ni	26	33	64	7	10	**140**
ci	35	45	55	65	75	**-**
ni.ci	910	1 485	3 520	455	750	**7 120**
ni/ci	0,74	0,73	1,16	0,10	0,13	**2,86**
$ni.ci^2$	31 850	66 825	193 600	29 575	56 250	**378 100**

A partir du tableau, nous pouvons calculer les différentes moyennes.

- Moyenne arithmétique : $\overline{X}$ = 7120/140 = **50,85**
- Moyenne harmonique : H =140/2,86 = **48,95**
- Moyenne géométrique : G=$\sqrt{50{,}85\ x\ 48{,}95}$ = **49,89**
- Moyenne quadratique : Q = $\sqrt{\frac{378100}{140}}$= **51,96**

THEME 11 : CARACTERISTIQUES DE DISPERSION D'UNE SERIE STATISTIOUE

Introduction :

Les caractéristiques de dispersion permettent d'avoir une idée de la distribution des caractères à l'intérieur d'une série. Elles renseignent sur la dispersion des valeurs autour de la valeur centrale de référence. On distingue deux caractéristiques de dispersion : **les écarts et les quantiles.**

Leçon 21 : Les écarts

OPO : A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

- Définir les écarts (étendue ; écart absolu ; variance ; écart-type ; coefficient de variation) ;
- Déterminer les différents écarts.

I- L'ETENDUE (E)

1- Définition

Encore appelé **« intervalle de variation »,** c'est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur observée (de la modalité). Pour une variable continue, l'étendue est la différence entre la borne supérieure de la dernière classe et la borne inférieure de la première classe.

2- Formule de calcul

Désignons par **X** une variable statistique réelle. L'étendue (**E**) de **X** est la différence entre la plus grande valeur de **X** ($\mathbf{X_{max}}$) et la plus petite valeur de **X** ($\mathbf{X_{min}}$).

$$\mathbf{E = X_{max} - X_{min}}$$

Application 1 : trouver l'étendue de la série statistique suivante : 1, 3, 2, 8, 6.

Solution : classons la série par ordre croissant : 1, 2, 3, 6, 8 ; **E = 8 – 1 = 7**

Application 2 : Soit la série statistique suivante :

Classes	[3-6[	[6-9[	[9-12[	[12-15[
Effectifs	10	9	5	13

Travail à faire : Trouver l'étendue de la série statistique

Solution : l'étendue (E) : **E = 15 – 3 = 12**

II- L'ECART ABSOLU

1- L'écart absolu moyen ($\mathbf{E_{\overline{X}}}$)

C'est la moyenne arithmétique d'écart par rapport à une valeur centrale qui est la moyenne.

Désignons par $\mathbf{E_{\overline{X}}}$ L'écart absolu moyen. Cet écart se détermine de la manière suivante :

- Pour une série discrète simple : $\mathbf{E_{\overline{X}}} = \frac{\sum |\mathbf{x_i} - \overline{\mathbf{X}}|}{\mathbf{N}}$
- Pour une série discrète groupée : $\mathbf{E_{\overline{X}}} = \frac{\sum n_i |\mathbf{x_i} - \overline{\mathbf{X}}|}{\mathbf{N}}$
- Pour une série continue : $\mathbf{E_{\overline{X}}} = \frac{\sum n_i |\mathbf{c_i} - \overline{\mathbf{X}}|}{\mathbf{N}}$

Application : Soit la série statistique ci-dessous

xi	2	4	5	7
ni	5	4	7	6

Travail à faire : Déterminer la moyenne arithmétique et l'écart absolu moyen

Solution :

Les calculs intermédiaires sont effectués et les résultats portés dans le tableau statistique ci-dessous, ce qui permet de trouver la moyenne arithmétique et l'écart absolu moyen.

Xi	ni	ni.xi	$\|xi-\bar{X}\|$	ni$\|xi-\bar{X}\|$
2	5	10	2,68	13,4
4	4	16	0,68	2,72
5	7	35	0,32	2,24
7	6	42	2,32	13,92
Total	22	103	6	32,28

Moyenne arithmétique : $\bar{X} = \frac{103}{22} = \mathbf{4,68}$ et écart absolu moyen : $\mathbf{E_{\bar{X}}} = \frac{\mathbf{32,28}}{\mathbf{22}} = \mathbf{1,46}$

2- L'écart absolu médian (E_{Me})

C'est la moyenne arithmétique d'écart par rapport à une valeur centrale qui est la médiane. Désignons par $\mathbf{E_{Me}}$ l'écart absolu médian. Cet écart se détermine de la manière suivante :

- Pour une série discrète simple : $\mathbf{E_{Me}} = \frac{\sum |\mathbf{x_i - Me}}{\mathbf{N}}$
- Pour une série discrète groupée : $\mathbf{E_{Me}} = \frac{\sum n_i|\mathbf{x_i - Me}}{\mathbf{N}}$
- Pour une série continue : $\mathbf{E_{Me}} = \frac{\sum n_i|\mathbf{c_i - Me}}{\mathbf{N}}$

Application : soit la série statistique ci-dessous

Classes	[2-4[	[4-6[	[6-8[	[8-10[
Effectifs (ni)	6	9	8	7

Travail à faire : Déterminer la médiane et l'écart absolu médian

Solution : Les calculs intermédiaires sont effectués et les résultats portés dans le tableau statistique ci-dessous, ce qui permet de trouver la médiane et l'écart absolu médian.

Classes	ni	ECC	ci	$\|$ci-Me$\|$	ni$\|$ci-Me$\|$
[2-4[	6	6	2	3	18
[4-**6**[	9	**15**	5	1	9
[6-8[	8	23	7	1	8
[8-10[	7	30	9	3	21
Total	**30**	-	-	-	**56**

Rang médian (P) : P = 30/2 = 15 d'où **Me = 6** ; on a Ecart absolu médian : $\mathbf{E_{Me}} = \frac{\mathbf{56}}{\mathbf{30}} = \mathbf{1,86}$

III- LA VARIANCE, L'ECART-TYPE ET LE COEFFICIENT DE VARIATION

1- La variance (V(x))

C'est un indicateur de la dispersion d'une série par rapport à sa moyenne. Elle est toujours un nombre réel positif. Désignons par **V(x)** la variance des n valeurs associées à n unités statistiques de la population, la formule de calcul est la suivante :

- Pour une série discrète simple : $\mathbf{V(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{N}}\sum(\mathbf{x_i} - \bar{\mathbf{X}})^{\mathbf{2}}$
- Pour une série discrète groupée : $V(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{N}}\sum \mathbf{n_i}(\mathbf{x_i} - \bar{\mathbf{X}})^{\mathbf{2}}$
- Pour une série continue : $V(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{N}}\sum \mathbf{n_i}(\mathbf{c_i} - \bar{\mathbf{X}})^{\mathbf{2}}$

Remarque : En développant la formule de la définition de la variance, on aboutit à la formule suivante : $V(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{N}}\sum \mathbf{n_i x_i^2} - \bar{\mathbf{X}}^{\mathbf{2}}$

Application : Considérons la série statistique ci-dessous, déterminons la moyenne arithmétique et la variance.

xi	2	4	5	7
ni	5	4	7	6

Solution :

Xi	ni	ni.xi	$(xi-\overline{X})$	$(xi-\overline{X})^2$	$ni.(xi-\overline{X})^2$
2	5	10	-2,68	7,1824	35,912
4	4	16	-0,68	0,4624	1,8496
5	7	35	0,32	0,1024	0,7168
7	6	42	2,32	5,3824	32,2944
Total	**22**	**103**	-0,72	13,1296	**70,7728**

Moyenne arithmétique : $\overline{X} = \frac{103}{22} = \mathbf{4,68}$; la variance **:** $V(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{70,7728}}{\mathbf{22}} = \mathbf{3,21}$

2- L'écart-type ($\boldsymbol{\delta}$)

L'écart-type est la racine carrée de la variance. Il se calcule ainsi : $\boldsymbol{\delta} = \sqrt{\mathbf{V(x)}}$**.**

Lorsque l'écart-type est faible, cela signifie que les valeurs sont assez concentrées autour de la moyenne. Lorsque l'écart-type est élevé, cela voudrait dire au contraire que les valeurs sont plus dispersées autour de la moyenne.

Application : déterminons l'écart-type de l'application ci-dessus : $\boldsymbol{\delta} = \sqrt{\mathbf{3,21}} = \mathbf{1,79}$

3- Le coefficient de variation (CV) ou de dispersion

Le coefficient de variation est utilisé pour comparer la dispersion des séries statistiques exprimées avec des unités différentes.

Désignons par **CV** le coefficient de variation, $\boldsymbol{\delta}$ l'écart-type et $\overline{\mathbf{X}}$ la moyenne arithmétique, on a :

$$\mathbf{CV} = \frac{\boldsymbol{\delta}}{\overline{\mathbf{X}}} \text{ ou } \mathbf{CV} = \frac{\boldsymbol{\delta}}{\overline{\mathbf{X}}} \times \mathbf{100}$$

- Si CV= 50%, la dispersion est moyenne,
- Si CV < 50%, la dispersion est faible
- Si CV > 50%, la dispersion est forte
- Si CV= 0, la dispersion est très faible

Application : Déterminons le CV l'application ci-dessus : $\mathbf{CV} = \frac{\mathbf{1,79}}{\mathbf{4,68}} \times \mathbf{100} = \mathbf{38,25}\%$

Leçon 22 : Les quantiles

OPO : A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

- Définir les quantiles (quartiles ; déciles ; centiles) ;
- Déterminer les différents quantiles.

Introduction :

Les quantiles sont des indicateurs de position attachés à une variable aléatoire réelle, utilisée essentiellement en statistique. Concrètement, le quantile d'ordre **α** est la valeur ou une des valeurs qui partage la série des valeurs en deux parties de fractions **α** et **1- α** de l'effectif total. Comme quantiles, on peut citer : **Les quartiles ; Les déciles ; Les centiles**.

Pour déterminer un quantile, il faut d'abord trouver **le rang du quantile** recherché, puis par interpolation linéaire trouver la valeur de ce quantile. Il faut retenir que tous les quantiles se calculent par **interpolation linéaire**.

I- LES QUARTILES

Ce sont des valeurs qui partagent une série statistique préalablement rangée en quatre parties égales (même nombre d'observation).

Pour une série statistique, on a trois quartiles, notés **Q1**, **Q2** et **Q3** désignant respectivement **le premier**, **deuxième** et **troisième quartiles**.

1- Le premier quartile (Q1)

Encore appelé **quartile inférieur**, c'est la valeur qui partage la série statistique en **deux parties inégales**, telles que, **1/4** des observations rangées avant Q1 et **3/4** des observations rangées après Q1.

Son rang ($\mathbf{p_{Q_1}}$) s'obtient par la formule : $\mathbf{p_{Q_1} = \frac{N}{4}}$ où **N** est l'effectif total

$$\mathbf{Q_1 = X_1 + (X_2 - X_1)\left(\frac{p_{Q_1} - ECC_1}{ECC_2 - ECC_1}\right)}$$

2- Le deuxième quartile (Q2)

C'est la valeur qui partage la série statistique en **deux parties égales**, telles que, **1/2** des observations rangées avant Q2 et **1/2** des observations rangées après Q2. Le deuxième quartile (Q2) est encore **la médiane (Me)**. $\mathbf{Q_2 = M_e}$

3- Le troisième quartile (Q3)

Encore appelé **quartile supérieur**, il est la valeur qui partage la série statistique en **deux parties inégales**, telles que, **3/4** des observations rangées avant Q3 et **1/4** des observations rangées après Q3.

Son rang ($\mathbf{p_{Q_3}}$) s'obtient par la formule : $\mathbf{p_{Q_3} = \frac{3N}{4}}$

$$\mathbf{Q_3 = X_1 + (X_2 - X_1)\left(\frac{p_{Q_3} - ECC_1}{ECC_2 - ECC_1}\right)}$$

Remarques : on peut également calculer les éléments suivants :

- L'intervalle interquartile ($\mathbf{I_Q}$) qui est la différence entre Q3 et Q1 : $\mathbf{I_Q = Q_3 - Q_1}$
- L'intervalle semi-quartile ($\mathbf{I_S}$) qui est la moitié de $\mathbf{I_Q}$: $\mathbf{I_S = \frac{I_Q}{2}}$
- L'intervalle interquartile relatif ($\mathbf{I_r}$) : $\mathbf{I_r = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_2} = \frac{I_Q}{Q_2}}$

Application : soit la série statistique suivante

Classes	[4-9[	[8-12[	[12-16[	[16-20[	Total
ni	9	11	12	8	40

Travail à faire :

1- Calculer les quartiles Q1, Q2 et Q3.
2- Calculer les intervalles interquartile, semi-quartile et interquartile relatif.

Solution :

Trouvons d'abord les effectifs cumulés croissants et décroissants de cette série.

Classes		[4-9[	[8-12[	[12-16[	[16-20[	Total
ni		9	11	12	8	40
ECC		9	20	32	40	-

1- Les quartiles

- Pour le premier quartile (Q1), rang ($\mathbf{p_{Q_1}}$): $\mathbf{p_{Q_1}} = \frac{\mathbf{40}}{\mathbf{4}} = \mathbf{10}$

Par interpolation linéaire on a :

$$\begin{cases} 9 < 10 < 20 \\ 8 < Q1 < 12 \end{cases}$$

D'où : $$\mathbf{Q_1 = 8 + (12 - 8)\left(\frac{10-9}{20-9}\right) = 8,36}$$

- Pour le deuxième quartile (Q2) , rang ($\mathbf{p_{Q_2}}$) : $\mathbf{p_{Q_2}} = \frac{\mathbf{40}}{\mathbf{2}} = \mathbf{20}$ D'où : **Q2 = Me =12**
- Pour le troisième quartile (Q3), rang ($\mathbf{p_{Q_3}}$) : $\mathbf{p_{Q_3}} = \frac{\mathbf{3\times40}}{\mathbf{4}} = \mathbf{30}$

Par interpolation linéaire on a :

$$\begin{cases} 20 < 30 < 32 \\ 12 < Q3 < 16 \end{cases}$$

D'où : $$\mathbf{Q_3 = 12 + (16 - 12)\left(\frac{30-20}{32-20}\right) = 15,33}$$

2- Calculs des intervalles

- Intervalle interquartile ($\mathbf{I_Q}$): $\mathbf{I_Q} = 15{,}33 - 8{,}36 = \mathbf{6,97}$
- Intervalle semi-quartile ($\mathbf{I_S}$): $\mathbf{I_S} = \frac{6{,}97}{2} = \mathbf{3,485}$
- Intervalle interquartile relatif ($\mathbf{I_r}$) : $\mathbf{I_r} = \frac{\mathbf{6,97}}{\mathbf{12}} = \mathbf{0,58}$

II- LES DECILES

Les déciles sont des valeurs qui partagent une série statistique préalablement rangée en dix parties égales (même nombre d'observation).

Pour une série statistique, on a neuf déciles, notés, $\mathbf{D_1}$ et $\mathbf{D_9}$. Le rang d'un décile s'obtient de la manière suivante :

$$\mathbf{D_k = \frac{k}{10}N}$$

Avec k qui est un entier naturel et k va de 1 à 9, N est l'effectif total. Les déciles se calculent par interpolation linéaire comme dans le cas du calcul des quartiles.

Remarques :

le cinquième décile (D5) est égal au deuxième quartile (Q2) : $\mathbf{D_5 = Q_2 = M_e}$

L'écart inter-décile (Id) : **Eid =** $\mathbf{D_9 - D_1}$

Intervalle semi-décile (Isd) : **Isd** $= \frac{\mathbf{(D_9-D_1)}}{\mathbf{2}}$

Intervalle inter-décile (Iid) : **Iid** $= \frac{\mathbf{(D_9-D_1)}}{\mathbf{D_5}}$

III- Les CENTILES

Les centiles encore appelés **percentiles**, sont des valeurs qui partagent une série statistique préalablement rangée en cent parties égales (même nombre d'observation).

Pour une série statistique, on a quatre-vingt-dix-neuf (99) centiles, notés $\mathbf{P_1}$ et $\mathbf{P_{99}}$. Le rang d'un centile s'obtient de la manière suivante :

$$\mathbf{P_k = \frac{k}{10}N}$$

Avec k qui est un entier naturel, k va de 1 à 99 et N est l'effectif total. Les centiles se calculent également par interpolation linéaire comme dans le calcul des quartiles.

Remarques :

Le deuxième centile est égal au premier décile ($\mathbf{P_{10} = D_1}$)
Le vingtième centile est égal au deuxième décile ($\mathbf{P_{20} = D_2}$)
Le trentième centile est égal au troisième décile ($\mathbf{P_{30} = D_3}$)
Le vingtième cinquième centile est égal au premier quartile ($\mathbf{P_{25} = Q_1}$)
Par ailleurs, $\mathbf{P_{50} = D_5 = Q_2 = M_e}$ **et** $\mathbf{P_{75} = Q_3}$

Application : soit la série statistique suivante

Classes	[14-18[	[18-22[	[22-26[	[26-30[	[30-34[
Ni	15	20	18	10	12

Travail à faire :

1- Calculer les déciles D1, D2, D3 et D4
2- Calculer les centiles P1, P10, P20, P30, P40 et P50
3- Vérifier les liens entre les déciles et les centiles calculés

THEME 12 : LES INDICES

Introduction :

Les indices sont des valeurs économiques qui permettent de mesurer la variation d'une grandeur (prix, quantité, chiffre d'affaires) dans l'espace (d'une région à une autre) et dans le temps (d'une période à une autre). On distingue à cet effet : **les indices simples** (l'étude porte sur une seule grandeur) et **les indices synthétiques** (l'étude porte sur plusieurs grandeurs).

Leçon 23 : Les indices simples

OPO : A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

- Définir les indices simples ;
- Déterminer et interpréter les indices simples.

I- DEFINITION ET FORMULE DE CALCUL DES INDICES SIMPLES

1- Définition

L'indice simple encore appelé **indice élémentaire** est un nombre qui caractérise la variation relative d'une grandeur mesurable en deux périodes (période de base ou période de référence et la période actuelle ou période courante) et entre deux lieux différents au même moment.

2- Formule de calcul

Soient $\mathbf{P_0}$ la valeur d'une grandeur à la période initiale (référence) et $\mathbf{P_t}$ la valeur à la période suivante **(t)**. L'indice simple noté **I** de la grandeur à la date **(t)** par rapport à la date **(0)** est égale :

$$\mathbf{I_{t/0} = \frac{P_t}{P_0} \times 100}$$

Remarque : lorsque l'indice est supérieur à 100, cela traduit une augmentation de $\mathbf{I_{t/0} - 100}$. Lorsque l'indice est inférieur à 100, cela traduit une diminution de $\mathbf{100 - I_{t/0}}$

Application : l'évolution du prix d'un kilogramme de lait en poudre au cours des trois dernières années a donné le tableau suivant :

Années	**2016**	**2017**	**2018**
Prix	3250	3000	2800

Travail à faire :

1- En prenant pour année de base ou de référence 2017, calculer l'indice simple du prix du kilogramme de lait en 2016 et en 2018.

2- Interpréter les résultats obtenus

Solution : 1- Calcul des indices simples des prix du kilogramme de lait en 2016 et 2018

Pour 2016, on a : $\mathrm{I}_{2016/2017} = \frac{3250}{3000} \times 100 = \mathbf{108,33}$

Pour 2018, on a : : $\mathrm{I}_{2018/2017} = \frac{2800}{3000} \times 100 = \mathbf{93,33}$

2-**Interprétation :** L'indice $\mathbf{I_{2016/2017}}$ étant supérieur à 100, cela traduit une augmentation du prix du kilogramme de lait de **8,33%** (soit 108,33-100) de 2017 à 2016. L'indice $\mathbf{I_{2018/2017}}$ étant inférieur à 100, cela traduit une diminution du prix du kilogramme de lait de **6,67%** (soit 100-93,33) de 2017 à 2018.

II- PROPRIETES DES INDICES

1- Identités

$$\mathrm{I}_{t/0} = \frac{\mathrm{P_t}}{\mathrm{P_0}} \times 100 = 100 \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{P_t} = \mathrm{P_0}$$

2- **Réversibilité**

$$I_{t/0} \times I_{0/t} = \frac{P_t}{P_0} \times \frac{P_0}{P_t} = 1$$

Exemple : vérifier si les valeurs ci-dessous sont réversibles

$$P_0 = 20 \text{ et } P_1 = 32$$

$$I_{1/0} \times I_{0/1} = \frac{32}{20} \times \frac{20}{32} = \frac{640}{640} = 1$$

3- **Transférabilité**

Soient $\mathbf{P_0}, \mathbf{P_1}$ et $\mathbf{P_2}$ les valeurs d'une grandeur aux dates 0, 1 et 2. On dit que les indices sont transférables si :

$$I_{2/0} = I_{2/1} \times I_{1/0}$$

Exemple : Si dans quelques temps (année 2), le prix du fromage passe à 40 F. On vous donne en outre $P_0 = 20\text{F}$ et $P_1 = 32\text{F}$. Vérifier la transférabilité.

$$I_{40/20} = \frac{I_{40}}{32} \times \frac{I_{32}}{20} \rightarrow \frac{40}{20} = \frac{1280}{640} \rightarrow 2 = 2$$

Leçon 24 : Les indices synthétiques

OPO : A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :
- Définir les indices synthétiques ;
- Déterminer les indices synthétiques (Laspeyres, Paasche et Fischer).

I- DEFINITION ET TYPES D'INDICES SYNTHETIQUES

1- Définition

Les indices synthétiques encore appelé **indices pondérés** ou **indices simples**, sont des indices donnant le sens de l'évolution des prix et des quantités vendues d'un ensemble de produits. Un indice de prix se conçoit à **quantités fixes** et un indice de quantités se conçoit à **prix constants**.

2- Les types d'indices synthétiques

On distingue plusieurs types d'indices synthétiques :
- L'indice synthétique de Laspeyres ;
- L'indice synthétique de Paasche ;
- L'indice synthétique de Fischer.

II- CALCUL DES INDICES SYNTHETIQUES

1- Indice des prix et des quantités de Laspeyres

Ils se conçoivent en prenant pour période de référence **la date de base**. Désignons par $\mathbf{L_{t/0}^{P}}$ l'indice des prix de Laspeyres entre une époque actuelle (t) et une époque de base ou de référence (0) ; et $\mathbf{L_{t/0}^{Q}}$ l'indice des quantités. On a :

$$\mathbf{L_{t/0}^{P} = \frac{\sum Q_0P_t}{\sum Q_0P_0} \times 100} \quad ; \quad \mathbf{L_{t/0}^{Q} = \frac{\sum Q_tP_0}{\sum Q_0P_0} \times 100}$$

2- Indice des prix et des quantités de Paasche

Ils se conçoivent en prenant pour référence **la date actuelle ou courante**. Désignons par $\mathbf{P_{t/0}^{P}}$ et $\mathbf{P_{t/0}^{Q}}$ les indices des prix et des quantités de Paasche respectivement entre une époque actuelle (t) et une époque de base (0). On a :

$$\mathbf{P_{t/0}^{P} = \frac{\sum Q_tP_t}{\sum Q_tP_0} \times 100} \quad ; \quad \mathbf{P_{t/0}^{Q} = \frac{\sum Q_tP_t}{\sum Q_0P_t} \times 100}$$

3- Indice des valeurs globales

$$\mathbf{IVG = \frac{\sum Q_tP_t}{\sum Q_0P_0} \times 100}$$

4- Indice de Fischer

C'est la moyenne géométrique simple des indices de Laspeyres et de Paasche. Désignons par $\mathbf{F_{t/0}^{P}}$ et $\mathbf{F_{t/0}^{Q}}$ l'indice des prix et des quantités de Fischer respectivement entre l'époque actuelle (t) et l'époque de base ou de référence (0). On a :

$$\mathbf{F_{t/0}^{P} = \sqrt{L_{t/0}^{P} \times P_{t/0}^{P}}} \quad \text{et} \quad \mathbf{F_{t/0}^{Q} = \sqrt{L_{t/0}^{Q} \times P_{t/0}^{Q}}}$$

Application : on vous donne le tableau ci-dessous

Eléments	Prix par Kg		Quantités	
	0	1	0	1
Viande	20	30	10	12
Pain	0,5	1	30	20

Travail à faire : Calculer les indices synthétiques des prix et des quantités de l'année (1) (base 100 année 0)

1- La pondération selon Laspeyres
2- La pondération selon Paasche
3- L'indice des valeurs globales
4- La pondération selon Fischer

Solution : Présentons dans un tableau les calculs suivants : Q_0P_0; Q_1P_1; Q_1P_0 et Q_0P_1

Eléments	Q_0P_0	Q_1P_1	Q_1P_0	Q_0P_1
Viande	200	360	240	300
Pain	15	20	10	30
Total	215	380	250	330

Calcul des indices synthétiques des prix et des quantités de l'année 1 (base 100 année 0)

1- La pondération selon Laspeyres

$$L^P_{1/0} = \frac{330}{215} \times 100 = \mathbf{153,48} \quad ; \quad L^Q_{1/0} = \frac{250}{215} \times 100 = \mathbf{116,27}$$

2- La pondération selon Paasche

$$P^P_{1/0} = \frac{380}{250} \times 100 = \mathbf{152} \quad ; \quad P^Q_{1/0} = \frac{380}{330} \times 100 = \mathbf{115,15}$$

3- Indice des valeurs globales (IVG)

$$IVG = \frac{380}{215} \times 100 = \mathbf{176,74}$$

4- La pondération selon Fischer

$$F^P_{1/0} = \sqrt{153{,}48 \times 152} = \mathbf{152,73} \quad ; \quad F^Q_{1/0} = \sqrt{116{,}27 \times 115{,}15} = \mathbf{115,70}$$