COURS HARMONISÉS
DE
MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

SERIES TERTIAIRES
(G2 & G3)

EDITION DE SEPTEMBRE 2022

PROGRAMME DES PREMIÈRES G2 ET G3

MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

04 HEURES PAR SEMAINE

Chapitre 0 : IMPORTANCE DES MATHÉMATIQUES

1. Définition des mathématiques
2. Quelques branches des mathématiques
3. Les mathématiques et quelques domaines de la connaissance

3.1. Mathématiques et les autres disciplines (*de la vie courante*)

3.2. Les mathématiques comme outils des matières enseignées à l'enseignement technique :

- Français : contraction de texte ; dissertation
- Anglais : feelings gaps ; flow −chart
- Comptabilité : principe de la comptabilité ; les amortissements ; l'enregistrement des factures
- Économie générale : cout moyen et marginal ; agrégats ; les indices
- Économie et organisation des entreprises
- Techniques commerciales : les taux ; les proportions ; …

CHAPITRE 1 : ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

1. Équations dans $\mathbb{R}$

1. 1. Équations du type : $x \in \mathbb{R}$, $ax + b = 0$

1.2. Équations Produit A(x).B(x) = 0

1.3. Équations du second degré à une inconnue

1. 3. 1. Définition

1. 3. 2. Résolution

1. 3. 2. 1. Identités remarquables

1. 3 .2. 2. Méthode du discriminant

1. 4. Somme et Produit des solutions de l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c = 0$ (a≠ 0)

- Trouver une solution d'une équation du second degré connaissant l'autre solution en utilisant la Somme ou le Produit.

- Former une équation du second degré dont on connait la somme et le produit des solutions.

1.5. Équations rationnelles de la forme : $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$

1.6. Équations de degré 3 (rappeler les deux méthodes vues en Seconde)

1.7. Équations bicarrées

1.8. Autres types d'équations : $|f(x)| = |g(x)|$; $|f(x)| = ax + b$.

2. Inéquations dans $\mathbb{R}$

2.1. Inéquations du premier degré à une inconnue

2.1.1. Présentation: $ax + b \geq 0,\ ax + b > 0,\ ax + b \leq 0,\ et\ ax + b < 0,$

2. 1.2. Résolution :

- méthode algébrique
- méthode du tableau de signe

2.2. Inéquations du second degré à une inconnue

2. 2.1. Présentation ($insister\ sur\ la\ non\ nullité\ du\ coefficient\ a$)

2.2.2. Résolution d'une équation du second degré

2.2.3. Signe d'un polynôme du second degré

2.2.4. Résolution

2.3. Inéquation produit

2.4. Inéquations du troisième degré à une inconnue

2.5. Inéquations simultanées ou système d'inéquations à une inconnue ($systeme\ d'inéquations\ dans\ IR$)

3. **ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS IRRATIONNELLES**

- Équations du type : $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$
- Équations du type : $x \in \mathbb{R}$ $\sqrt{f(x)} = ax + b$
- Inéquations du type : $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{f(x)} \leq ax + b$
- Inéquations du type : $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{f(x)} \geq k$ (où k est un réel)

NB : Quel que soit la méthode de résolution, préciser de façon claire, l'ensemble de validité

4. Équations du second degré à une inconnue comportant un paramètre ($cette\ partie\ ne\ fera\ pas\ l'objet\ d'une\ évaluation$)

CHAPITRE 2 : SYSTÈMES LINÉAIRES ET PROGRAMMATION LINÉAIRE

1. **Systèmes**

1.1. Systèmes d'équations linéaires dans IR^2 ou IR^3

1.1.1. Équations du type : $(x, y) \in IR^2$, $ax + by + c = 0$

1.1.2. Systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues

1.1.2.1. Présentation($forme\ générale$)

1.1.2.2. Méthodes de résolution (introduire aussi la méthode de Cramer)

NB : Pour un système paramétrique, le déterminant doit être de degré inférieur ou égal à 2.

1.1.3. Systèmes de trois équations linéaires à trois inconnues

1.1.3.1. Présentation

1.1.3.2. Méthodes de résolution (introduire aussi la méthode de Gauss)

1.2. Système d'inéquations linéaire dans IR^2

1.2.1 Résolution graphique d'une inéquation linéaire dans IR^2 (Régionnement du plan)

1.2.2. Résolution graphique d'un système d'inéquations linéaires à deux inconnues

2. Programmation linéaire

2.1. Problème de maximisation

2.2. Problème de minimisation

NB : Les variables (*les inconnues*) doivent être précisées dans l'énoncé ; de même que le système

CHAPITRE 3 : FONCTIONS NUMÉRIQUES D'UNE VARIABLE RÉELLE

1. Définition d'une fonction

2. Les différents modes de définition d'une fonction : expression explicite ; représentation graphique ; tableau de valeurs.

3. Ensemble de définition d'une fonction.

3.1. Définition

3.2. Recherche d'ensemble de définition

3.2.1. Cas d'une fonction polynôme

3.2.2. Cas d'une fonction rationnelle

3.2.3. Cas d'une fonction irrationnelle

NB : Utiliser les fonctions : polynômes, rationnelles, irrationnelles.

4. Parité d'une fonction

NB : Insister sur la notion d'ensemble symétrique

4.1. Fonctions paires ($définition\ et\ conséquence\ graphique$)

4.2. Fonctions impaires ($définition\ et\ conséquence\ graphique$)

5. Éléments de symétrie

5.1. Axe de symétrie

5.2. Centre de symétrie

NB : Les deux méthodes de démonstration sont à donner au cours

6. Fonctions associées et leurs représentations :$-f(x)$; $|f(x)|$; $f(-x)$; $f(x-a)+b$

CHAPITRE 4 : LIMITE ET CONTINUITÉ D'UNE FONCTION

1. Limites d'une fonction

1.1. Notion de limite d'une fonction

1.2. Théorème de l'unicité de la limite

1.3. Limite d'une fonction à l'infini

1.3.1. Limite d'une fonction polynôme

1.3.2. Limite d'une fonction rationnelle

1.4. Limite en un réel x_0

1.4.1. Limite en un réel x_0 d'une fonction polynôme

1.4.2. Limite en un réel x_0 d'une fonction rationnelle

1.4.2.1. Cas où $x_0 \in D_f$

1.4.2.2. Cas où x_0 n'appartient pas à D_f et est une borne de D_f

1.4.2.3. Cas des formes indéterminées

1.5. Notion d'asymptotes

1.5.1. Asymptote horizontale

1.5.2. Asymptote verticale

1.5.3. Asymptote oblique

<u>NB</u> : Les asymptotes doivent être mises en exergue sur le graphique ($flèchées$; $coloriées\ et\ autres$)

2. Continuité d'une fonction

2.1. Définition de la continuité en un point x_0

2.2. Continuité sur un intervalle

CHAPITRE 5 : DÉRIVATION D'UNE FONCTION

1. Dérivabilité d'une fonction en un point x_0
2. Équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse x_0
3. Fonction dérivée

3.1. Dérivées des fonctions usuelles

3.2. Dérivées et opérations sur les fonctions

4. Signe de la dérivée et sens de variations d'une fonction sur un intervalle

5. Application de la dérivée : ($détermination\ des\ coûts\ marginaux\ et\ autres \cdots\cdots\cdots$)

CHAPITRE 6 : ÉTUDE ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DES FONCTIONS

1. Plan d'étude d'une fonction

2. Étude de quelques exemples de fonctions

2.1. Fonctions polynômes

2.1.1. Étude de la fonction de type : $x \mapsto ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

2.1.2. Étude de la fonction de type : $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$

2.2. Fonctions rationnelles

2.2.1. Étude de la fonction de type : $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0)$

2.2.2. Étude de la fonction de type : $x \mapsto \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ $(a \neq 0\ et\ \ d \neq 0)$

2.2.3. Étude de la fonction de type : $x \mapsto \frac{ax+b}{cx^2+dx+e}$ $(a \neq 0\ ;\ b \neq 0\ ; c \neq 0)$

2.2.4. Étude de la fonction de type : $x \mapsto \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ $(a \neq 0\ ;\ a' \neq 0)$

CHAPITRE 7 : STATISTIQUES À UNE VARIABLE

1. **Vocabulaire statistique** ($\boldsymbol{Rappels\ de\ seconde\ G2\ et\ G3}$)
   1.1. Population statistique
   1.2. Unité statistique ou individu
   1.3. Caractère statistique
   1.4. Modalité statistique
   1.5. Variable statistique
   1.6. Classe
   1.7. Effectif

1.8. Fréquence

1.9. Distribution statistique ou série statistique

1.10. Echantillon

1.11. Recensement

2. Enquête et dépouillement

2.1. Enquête statistique

2.2. Dépouillement statistique

2.2.1. Dépouillement d’un caractère qualitatif

2.2.2. Dépouillement d’un caractère quantitatif

2.2.2.1. Dépouillement d’un caractère quantitatif discret

2.2.2.2. Dépouillement d’un caractère quantitatif continu

3. Tableaux statistiques et représentations graphiques

3.1. Tableaux statistiques

3.2. Représentations graphiques

4. Description numérique des séries à une variable

4.1. Les caractéristiques de tendance centrale

4.1.1. Le mode (cas d’amplitude égale et cas d’amplitude inégale)

4.1.2. La moyenne arithmétique

4.1.3. La médiane (interpolation linéaire et détermination graphique)

4.1.4. Les quartiles

4.2. Les caractéristiques de dispersion

4.2.1. L’étendue

4.2.2. La variance

4.2.3. L’écart type

4.2.4. Coefficient de variation

NB : Dans chaque cas sauf pour la variance : calculer et interpréter

CHAPITRE 8 : LES SUITES NUMÉRIQUES

1. Généralités

1.1. Définition

1.1.1. Suite définie par une formule explicite

1.1.2. Suite définie par une formule implicite ou récurrente

1.2. Sens de variation ou monotonie d'une suite

2. Suite arithmétique – suite géométrique

2.1. Suite arithmétique

2.1.1. Définition

2.1.2. Monotonie d'une suite arithmétique

2.1.3. Expression du terme général d'une suite arithmétique

2.1.4. Relation entre trois termes consécutifs d'une suite arithmétique

2.1.5. Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

2.1.6. Application des suites arithmétiques : intérêt simple ou amortissement linéaire

2.2. **Suite géométrique**

2.2.1. Définition

2.2.2. Monotonie d'une suite géométrique

2.2.3. Expression du terme général d'une suite géométrique

2.2.4. Relation entre trois termes consécutifs d'une suite géométrique

2.2.5. Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

2.2.6. Application des suites géométriques : intérêt composé ou amortissement dégressif

CHAPITRE 9 : NOTIONS DE TRIGONOMÉTRIE

1. Cercle trigonométrique
2. Sinus, cosinus et tangente d'un angle orienté (les sinusoïdes ne sont pas à représenter)

   2.1. Définition

2.2. Propriétés

2.2.1. Parité

2.2.2. Périodicité

2.3. Formules d'addition

2.4. Formules de duplication

3. Équations trigonométriques

3.1. Équation : $x \in \mathbb{R},\ cosx = m \quad (m \in IR)$

3.2. Équation : $x \in \mathbb{R},\ sin\,x = m \quad (m \in IR)$

<u>**NB**</u> **: La résolution se fera dans IR pour les équations et non sur des intervalles de IR**.

PREFACE

Si un poète tire son plaisir du seul fait d'écrire son œuvre, un auteur de manuel ne serait heureux que si son ouvrage est lu, compris et apprécié.

De nos jours, les mathématiques jouent un rôle de plus en plus important dans de nombreux secteurs de la vie économique et sociale notamment dans l'éducation, les assurances, les banques, …

Ce présent support de cours est écrit pour renforcer les acquis antérieurs de ses utilisateurs et respecte le nouveau programme de mathématiques générales des classes de premières G2 et G3.
Il vise un double objectif :

- D'une part, et surtout tenter de montrer aux apprenants, peu tournés vers les disciplines scientifiques, que la mathématique n'est pas une matière rebutante mais qu'elle fait partie de la vie de tous les jours au même titre que la philosophie, la comptabilité, les techniques commerciales, le français, …

- D'autre part, donner aux apprenants les éléments mathématiques, conformes au programme en vigueur, qui leur seront utiles ultérieurement.

Mais faire les mathématiques, ne signifie pas seulement apprendre les formules ; c'est aussi savoir les utiliser. Aussi, une bonne assimilation des cours de mathématiques passe nécessairement par la résolution des situations problèmes conformes aux notions apprises en classe. Il est donc important de faire de nombreux exercices. A ce titre, le présent support propose de nombreux exercices d'application et des exercices d'approfondissement par chapitre qui faciliteront l'assimilation des notions étudiées.

CHAPITRE 0 :
IMPORTANCE DES MATHEMATIQUES

1. Définition des mathématiques

Les mathématiques sont la science et la connaissance. Autrement dit, c'est l'ensemble des connaissances abstraites résultant de raisonnements logiques appliqués à des objets divers tels que les nombres, les formes, les structures et les transformations.
D'après le mathématicien Ronald Brown, les mathématiques sont une science de la description (on dit aussi modélisation), de la démonstration, et du calcul. On peut les étudier pour elles-mêmes, pour les appliquer à d'autres sciences, ou comme un exercice de l'esprit. Les principes fondamentaux de cette discipline remontent à l'antiquité (arithmétique et géométrie) ou au XVIIe siècle (mécanique et stochastique), mais la recherche mathématique n'a jamais été aussi vivante qu'aujourd'hui. Chaque réponse à un problème donné suscite en effet de nouvelles questions, et les applications de cette recherche sont de plus en plus variées.

2. Quelques branches des mathématiques

Les principales branches des mathématiques sont :

- L'*arithmétique* (ou *théorie des nombres*) est sans doute la branche la plus ancienne des mathématiques. Le calcul arithmétique est enseigné à l'école primaire; ppcm, pgcd et divisibilité et accentué en terminale C4.

- La géométrie est, à l'origine, une théorie de la mesure des longueurs, des aires, et des angles. Plus généralement, c'est la théorie du plan, de l'espace, et de toutes les formes qui peuvent se concevoir au-delà de notre espace à trois dimensions. En d'autres termes, c'est l'étude des figures comme les triangles et les parallélogrammes.

- La *mécanique* est la théorie des forces et des mouvements qu'elles induisent (*statique* et *dynamique*).

- La *stochastique* (prononcer "stokastique") est la théorie des phénomènes aléatoires. Elle s'appuie sur le *calcul des probabilités* pour modéliser les jeux de hasard.

Ces quatre branches partagent un corps de notions et de méthodes, que l'on découpe habituellement en deux grands chapitres :

- L'*algèbre* est la théorie générale des opérations qui apparaissent notamment en arithmétique et en géométrie. *On y trouve des équations, des inéquations, des structures, …*

- L'*analyse* est la théorie générale des suites, séries et fonctions (réelles ou complexes).

- La *combinatoire* est la théorie des structures finies (ou plus généralement, *discrètes*) telles que les graphes, les mots, ou les permutations. Le dénombrement de telles structures est d'ailleurs le fondement du calcul des probabilités.

- La *logique* (mathématique) est la théorie du langage mathématique et des démonstrations.

- L'*algorithmique* (mathématique) est la théorie des méthodes de calcul.

3. Mathématiques et quelques domaines de la connaissance

3.1 - Mathématiques et les autres disciplines (vie courante)

L'interaction entre mathématiques et autres sciences est maintenant un sujet d'intérêt constant. L'articulation avec la physique est encore plus visible et remarquable.

C'est une illusion de penser que les élèves ne savent que ce qu'on leur enseigne à l'école. En arrivant au cours préparatoire, ils savent parler, dessiner et compter. Les mathématiques sont surtout une manière de classer et d'organiser leurs connaissances, et les livres les plus remarquables partent de connaissances communes pour développer le sens de la géométrie et celui du calcul.

Les programmes de mathématiques incitent au rapprochement avec les autres disciplines. Actuellement on trouve des enseignements de mathématiques dans la plupart des formations universitaires ou d'écoles post-baccalauréat. C'est le cas en physique, en biologie, en économie, en gestion, en architecture, en ingénierie...

On remarquera la présence des mathématiques dans :

- La préparation de la sauce
- Les prêts bancaires
- La construction d'une maison
- Le sport (comment choisir le meilleur angle de tir ?)
- La traversée d'une route,…

3.2 - Les mathématiques comme outils des matières enseignées (enseignement technique)

Les disciplines comme l'anglais, le français, la comptabilité, l'économie et organisation des entreprises, l'économie générale, la technique commerciale, … n'évoluent pas loin des mathématiques.

En effet, l'anglais utilise les mathématiques pour les feelings gaps, le flow chart ; le français, pour la contraction de texte (il s'agit d'une réduction), la dissertation, (il s'agit du développement), le commentaire composé ; la comptabilité l'utilise pour le calcul des amortissements, le principe de la comptabilité, l'enregistrement des factures, … ; l'économie générale l'utilise pour les calculs des coûts moyens et marginaux, les agrégats, les indices de prix, les élasticités- prix ; l'économie et l'organisation de l'entreprise l'utilise pour la gestion des stocks (stock de sécurité, stock d'alerte), la détermination de la variation de stock, le seuil de rentabilité, … ; les techniques commerciales l'utilisent pour le calcul des taux, des proportions, …

Conclusion

En ces jours, aucune discipline ne peut évoluer sans les mathématiques et vice versa. Le monde est construit sur des calculs mathématiques aussi dirait – on du Dieu qu'il est le mathématicien par excellence. Un autre dira que **les mathématiques gouvernent le monde : «** tout se mathématise.»

CHAPITRE 1 :
EQUATIONS ET INEQUATIONS

De nombreux problèmes issus des diverses branches des mathématiques, des différentes sciences et du domaine technique conduisent à des équations et inéquations à une inconnue. Compte tenu des techniques de calcul nouvelles que nous avons apprises en seconde, nous pouvons aborder maintenant un plus large éventail de situations et apprendre à résoudre des équations et inéquations plus complexes.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

Au terme de ce cours, l'apprenant doit être capable de :
- résoudre dans ℝ une équation ou inéquation du 1er degré ;
- identifier une équation ou inéquation du second degré ;
- calculer le discriminant puis résoudre dans ℝ une équation ou inéquation du second degré ;
- calculer la somme et le produit des solutions d'une équation du second degré donnée sans la résoudre ;
- déterminer deux nombres réels dont on connaît la somme et le produit ;
- résoudre les équations ou inéquations bicarrées, irrationnelles ou avec valeurs absolues se ramenant au second degré ;
- résoudre une équation ou inéquation du 3ème degré connaissant une solution évidente ;
- résoudre un système d'inéquations dans ℝ.

NB : Tous les exercices non corrigés de ce cours doivent être systématiquement cherchés par l'élève avant toute éventuelle correction.

1. EQUATIONS DANS ℝ

1.1. Equation : $ax + b = 0$ (rappel)

Exemple

Résoudre dans ℝ les équations suivantes :

1) $-2x + 1 = 0$; 2) $3x + 4 = 0$; 3) $2(x + 1) = -3 + 2x$;

4) $4x + 12 = 2(2x + 3) + 6$; 5) $-3x - 2 = -5x + 6$.

1.2. Equation produit du type $A(x).B(x) = 0$

Propriété

$\boldsymbol{A(x).B(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A(x) = 0 \quad ou \quad B(x) = 0}$

Exemple 1

Résoudre dans ℝ :

1. $x(2 - x) = 0$; 2. $(5x - 3)(-2x + 7) = 0$; 3. $(1 - 5x)(3x - 7) = 0$.

Exemple 2

Résoudre dans IN, dans ℤ et dans [-1 ; 1] , $(4x - 2)(x - 2)(x + 3) = 0$.

1.3. Equation du second degré à une inconnue

1.3.1. Définition

C'est toute équation de la forme $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ $où\ a, b, c\ sont\ des\ réels\ avec\ a \neq 0$ $et\ \ x$ l'inconnue.

Exemples : $x^2 - 4x + 6 = 0$ avec $a = 1$; $b = -4$; $c = 6$
$-x^2 + 9 = 0$ on a a = … ; b = … ; c = …
$2x^2 + 5x = 0$ on a $a = \ldots$; $b = \ldots$; $c = \ldots$

1.3.2. Résolution : Méthode générale

1.3.2.1. Identités remarquables

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1). $9x^2 - 4 = 0$; 2) $9x^2 - 12x + 4 = 0$; 3) $4x^2 + 4x + 1 = 0$.

1.3.2.2. Méthode du discriminant

Soit (E) : $ax^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c} = 0$ $(a \neq 0)$ une équation du second degré.
On appelle discriminant de l'équation (E) le nombre réel noté Δ tel que : $\Delta = b^2 - 4ac$.

Suivant la valeur de Δ, on distingue trois cas :

- si $\Delta > 0$, alors l'équation (E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 telles que $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$;
- si $\Delta = 0$, alors l'équation (E) admet une solution double x_0 telle que $x_0 = \frac{-\mathrm{b}}{2a}$;
- si $\Delta < 0$, alors l'équation (E) n'admet pas de solution.

NB : - Lorsque a et c sont de signes contraires, alors $\Delta > 0$.

- Lorsque a et c sont de signes contraires, alors l'équation admet deux solutions distinctes .

- Lorsque a et c sont de signes contraires, alors l'équation admet deux solutions de signes contraires.

REMARQUE

Résoudre une équation du second degré, c'est trouver les racines ou encore les zéros du trinôme $ax^2 + bx + c \quad avec\ a \neq 0.$

Exemple 1

Résoudre les équations suivantes en utilisant la méthode du discriminant :

1) $-3x^2 - x + 4 = 0$; 2) $25x^2 - 90x + 81 = 0$; 3) $4x^2 + 3x + 9 = 0.$

Exemple 2

Soit (E) : $3x^2 - \left(1 + \sqrt{2}\right)x - 5 = 0.$

Sans calculer le discriminant, répondre aux questions et justifier les réponses :

1- (E) admet – elle deux solutions distinctes ?

2- Le discriminant est – il strictement supérieur à zéro?

3- Quels sont les signes de ces solutions ?

Exemple 3 : Quelques cas particuliers

Résoudre les équations suivantes :

1) $2x^2 + 5x = 0$; 2) $x^2 + 3 = 0.$

1.4. Somme et produit des solutions d'une équation du second degré à une inconnue

On peut calculer la somme et le produit des solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$ lorsque le discriminant est positif ou nul ($\Delta \geq 0$) .

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad et \quad P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}.$$

Remarques

- Si $\Delta < 0$ alors pas question de calculer la somme S ou le produit P.
- Si $a\ et\ c$ sont de signes contraires alors $P < 0$.

Exemple

Calculer si possible, la somme et le produit des racines de chacune des équations suivantes :

$a) - 3x^2 + 2x + 1 = 0$; $b)\ 2x^2 - 6x + 8 = 0$; $c)\ 4x^2 + 3x - 9 = 0.$

- Calculer l'autre solution connaissant S ou P et une des solutions

Exemple

$(E) : 3{,}4\, x^2 - 8{,}10x + 4{,}7 = 0.$

a) Vérifier que 1 est une solution de (E).

b) Sans calculer le discriminant trouver l'autre solution.

- <u>Former une équation du second degré à une inconnue connaissant la somme S et le produit P</u>

Deux nombres réels ont pour somme **S** et pour produit **P** si et seulement si ils sont solutions de l'équation $X \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{X^2 - SX + P = 0}$.

<u>Exemple</u>

On donne la somme S = 6 et le produit P = 8.

a. Former une équation du second degré.

b. Résoudre cette équation.

1.5. Equation rationnelle de la forme $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ avec f *et* g des polynômes de degré au plus 2.

<u>Exemple</u>

Résoudre les équation suivantes : a) $\frac{2x^2-8}{x^2-3x+2} = 0$; $b)$ $\frac{x^2-x-4}{2x^2-x-3} = 2$; $c)$ $\frac{x^2+x-2}{x+2} = 0$.

1.6. Equation de degré 3

La résolution algébrique de l'équation de type $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \ avec \ a \neq 0$ passe obligatoirement par la factorisation du polynôme. Deux méthodes sont à retenir pour la résolution de cette équation type :

- **méthode des coefficients indéterminés ;**
- **méthode de la division euclidienne.**

Remarques

Pour utiliser l'une des deux méthodes, on cherchera d'abord un zéro ou une racine éventuelle ou encore évidente. Le canevas à suivre est le suivant :

- si α est un zéro du polynôme P, demander à calculer $P(\alpha)$;
- factoriser $P(x)$ en utilisant l'une des deux méthodes ;
- …

Exemple

On donne $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$.

1- Calculer P(1). Que peux-tu conclure ?
2- Mettre P(x) sous la forme $P(x) = (x-1)Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme de degré 2 :
   a- par la méthode de division euclidienne ;
   b- par la méthode des coefficients indéterminés.
3- Donner la factorisation complète de P(x).
4- Résoudre l'équation P(x) = 0.

1.7. **Equation bicarrée**

C'est l'équation de la forme $ax^4 + bx^2 + c = 0$ où a, b, c *sont des réels* *avec* $a \neq 0$.

Pour résoudre cette équation, on procède par un changement de variable en posant par exemple : $X = x^2$.

NB : Ne jamais oublier de déduire les valeurs de x après avoir trouvé celles de X.

Exemple

Résoudre les équations : $x \in \mathbb{R}$, 1) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$; 2) $-x^4 + x^2 + 12 = 0$ 3) $x^4 + 3x^2 + 4 = 0$.

1.8. Autres types d'équations $|f(x)| = |g(x)|$ et $|f(x)| = ax + b$

1.8.1. Résolution de $|f(x)| = |g(x)|$

Pour résoudre une équation de type $|f(x)| = |g(x)|$ **,** on peut procéder comme suit :

i. $|f(x)| = |g(x)| \iff$ **$f(x) = g(x)$ ou $f(x) = -g(x)$**

ii. ***ou* résoudre** $|f(x)|^2 = |g(x)|^2$

Exemple

Résoudre : $|-3x + 5| = |2x - 3|$.

1.8.2. Résolution de $|f(x)| = ax + b$

$$|f(x)| = ax + b \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{E_V} = \mathbb{R} & (1) \\ ax + b \geq 0 & (2) \rightarrow \boldsymbol{S_1} \\ [\,f(x)]^2 = [\,ax + b\,]^2 & (3) \rightarrow \boldsymbol{S_2} \end{cases}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E_V} \cap \boldsymbol{S_1} \cap \boldsymbol{S_2}$$

Exemple

Résoudre l'équation suivante $|x + 5| = 2x + 3$.

2- INEQUATIONS DANS $\mathbb{R}$

2.1. Inéquation du premier degré à une inconnue

2.1.1 . Présentation

C'est toute inéquation de la forme $ax + b < 0$ *ou* $ax + b \leq 0$ *ou* $ax + b > 0$ *ou encore* $ax + b \geq 0$ **, avec** $\boldsymbol{a, b}$ ***des réels et*** $\boldsymbol{a \neq 0}$.

2.1.2. Résolution

- **Méthode algébrique**

$ax + b \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax \geq -b$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} si \quad a > 0 \; alors \quad x \geq -\dfrac{b}{a} \qquad et \qquad S = [-\dfrac{b}{a} \; ; \; +\infty[\\ si \quad a < 0 \; alors \quad x \leq -\dfrac{b}{a} \qquad et \qquad S =]-\infty \; ; -\dfrac{b}{a}] \end{cases}$$

- **<u>Méthode du tableau de signe</u>**

Soit $ax + b \geq 0$ une inéquation à résoudre.

On pose d'abord $ax + b = 0$ qui donne $x = \frac{-b}{a}$. On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	signe de $-a$	0	signe de a

<u>Exemple</u>
En utilisant les deux méthodes, résoudre les inéquations suivantes :
a) $-3x - 5 \leq 0$; $b)$ $4x + 1 > 0$

2.2. <u>Inéquation du second degré à une inconnue</u>

2.2.1. <u>Présentation</u>

C'est toute inéquation de la forme $ax^2 + bx + c \leq 0$ *ou* $ax^2 + bx + c < 0$ *ou* $ax^2 + bx + c > 0$ *ou* $ax^2 + bx + c \geq 0$ avec $\boldsymbol{a \neq 0}$.

2.2.2. <u>Signe d'un polynôme du second degré</u>

Pour étudier le signe d'un trinôme du second degré :

- On calcule d'abord le discriminant de ax^2+bx+c qui est : $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Suivant le signe de Δ, on distingue trois cas :

- si $\Delta > 0$, alors ax^2+bx+c admet deux racines distincts x_1 et x_2 et le signe de ax^2+bx+c est donné par le tableau suivant (supposons $x_1 < x_2$).

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de « a »	0	signe de « $-a$ »	0	signe de « a »	

(signe de « a » à l'extérieur des racines et le signe de « $-a$ » à l'intérieur des racines).

- si $\Delta = 0$, alors ax^2+bx+c admet un zéro double x_0 tel que $x_0 = \frac{-b}{2a}$ et le signe de ax^2+bx+c est est donné par le tableau suivant : (signe de « a » sauf pour la racine double).

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de « a »	0	signe de « a »	

- si $\Delta < 0$, alors ax^2+bx+c n'admet pas de zéro. Le signe de ax^2+bx+c est strictement celui de a comme l'indique le tableau suivant : (signe de « a » partout).

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de « a »	

Exemple

Etudier, suivant les valeurs de x, le signe des trinômes suivants :

$a)$ $p(x) = 3x^2+4x-7$; $b)$ $Q(x) = 4x^2 - 20x + 25$; c) $R(x) = 3x^2 - 4x + 5$

2.2.3. Résolution d'une inéquation du second degré

Résoudre une inéquation du second degré en x, c'est dresser un tableau de signe et lire les valeurs de x pour lesquelles l'inégalité est vérifiée.

Exemple

Résoudre :

a) $3x^2 + 4x - 7 \geq 0$; b) $-x^2 + 3x - 2 < 0$;

c) $4x^2 - 20x + 25 \leq 0$; d) $3x^2 - 4x + 5 \geq 0$

2.3. Inéquation produit ou signe d'un produit

Exemple

Résoudre les inéquations suivantes : $x \in \mathbb{R}$, 1) $(-x+4)(2x+4) \geq 0$; 2) $2x(x^2+2) < 0$.

2.4. Inéquation rationnelle : $\frac{A}{B}\begin{pmatrix} < \\ > \\ \leq \\ \geq \end{pmatrix} 0$

Exemple

Résoudre les inéquations suivantes : a) $\frac{x-4}{x-1} > 0$; b) $\frac{2x+6}{2x+3} \leq 1$; c) $\frac{2x^2-7x+6}{-x^2+2x} \geq 0$.

2.5. <u>Inéquation du troisième degré</u>

<u>Exemple</u>

On donne $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$

1- Vérifier que 1 est un zéro de P(x).
2- Mettre P(x) sous la forme d'un produit de trois facteurs de degré 1.
3- Résoudre l'équation P(x) = 0.
4- Etudier le signe de P(x) suivant les valeurs de x.
5- Déduire les solutions de l'inéquation $P(x) \leq 0$.

2.6. Inéquations simultanées ou système d'inéquations à une inconnue

Exemple

Résoudre dans ℝ les systèmes suivants : $(S_1) : \begin{cases} -x+1<0 \\ x+2>5 \end{cases}$; $(S_2) : \begin{cases} -2x+1<1 \\ 4x+2>6 \end{cases}$;

$(S_3) : \begin{cases} 2x^2-3x+1 \geq 0 \\ x^2 \leq 4 \end{cases}$

----

3. Equations et inéquations irrationnelles

- **Equation du type** $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R},\ \sqrt{\mathrm{f}(x)} = \sqrt{\mathrm{g}(x)}$

1ère méthode

- Déterminer l'ensemble de validité : $\mathrm{E_V} = \{x \in \mathbb{R}/f(x) \geq 0 \ \text{ et } \ \mathrm{g}(x) \geq 0\}$.
- Résoudre l'équation $x \in \mathrm{E_V}, \sqrt{f(x)} = \sqrt{\mathrm{g}(x)} \iff \sqrt{f(x)}^2 = \sqrt{g(x)}^2 \to S_1$.
- Donner **l'ensemble des solutions S ; S =** $\boldsymbol{E_V \cap S_1}$**.**

2ème méthode : Méthode d'équivalence

Résolution : $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \iff \begin{cases} f(x) \geq 0 & (1) \to S_1 \\ \sqrt{f(x)}^2 = \sqrt{g(x)}^2 & (2) \to S_2 \end{cases}$

$$\left(ou \ \begin{cases} g(x) \geq 0 & (1) \to S_1 \\ \sqrt{f(x)}^2 = \sqrt{g(x)}^2 & (2) \to S_2 \end{cases} \right)$$

La solution est donnée par S = $\boldsymbol{S_1 \cap S_2}$

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1). $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x+3}$; 2). $\sqrt{2x^2+5x-7} = \sqrt{x^2-x-2}$

- **Equation du type :** $\boldsymbol{x \in \mathbb{R},\ \sqrt{f(x)} = ax + b}$

1ère méthode

- Déterminer l'ensemble de validité : $E_V = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \geq 0\}$.
- Résoudre : $ax + \mathrm{b} \geq 0$ (1) $\rightarrow$ $\boldsymbol{S_1}$.
- Résoudre : $\sqrt{f(x)}^2 = (ax + \mathrm{b})^2$ (2) $\rightarrow$ $\boldsymbol{S_2}$.
- **Donner l'ensemble solution S, S =** $\boldsymbol{E_V \cap S_1 \cap S_2}$ **.**

2ème méthode : Méthode d'équivalence

$$\sqrt{f(x)} = ax + b \Leftrightarrow \begin{cases} ax + \mathrm{b} \geq 0 & (1) \rightarrow \boldsymbol{S_1}. \\ \sqrt{f(x)}^2 = (ax + b)^2 & (2) \rightarrow \boldsymbol{S_2}. \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donné par S, S = $\boldsymbol{S_1 \cap S_2}$**.**

(ou $\sqrt{f(x)} = ax + b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 & (1) \rightarrow \boldsymbol{S_1}. \\ ax + \mathrm{b} \geq 0 & (2) \rightarrow \boldsymbol{S_2}. \\ \sqrt{f(x)}^2 = (ax + b)^2 & (3) \rightarrow \boldsymbol{S_3}. \end{cases}$)

L'ensemble des solutions est donné par S, S = $\boldsymbol{S_1 \cap S_2 \cap S_3}$**.**

Exemple

1). $\sqrt{x + 2} = 3x - 4$; 2). $\sqrt{x - 1} = -x + 3$

- **<u>Inéquation irrationnelle</u>** du type : $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$, $\sqrt{f(x)} \leq ax + b$

<u>1ère méthode</u>

- Déterminer l'ensemble de validité : $E_V = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \geq 0\}$.
- Résoudre : $ax + b \geq 0$. (1) $\rightarrow \boldsymbol{S_1}$
- Résoudre : $\sqrt{f(x)}^2 \leq (ax + b)^2$. (2) $\rightarrow \boldsymbol{S_2}$
- **Donner l'ensemble solution S, S = $\boldsymbol{E_V} \cap \boldsymbol{S_1} \cap \boldsymbol{S_2}$.**

<u>2ème méthode</u> : méthode d'équivalence

Résolution : $\sqrt{f(x)} \leq ax + \mathrm{b} \iff \begin{cases} f(x) \geq 0 & (1) \rightarrow \boldsymbol{S_1} \\ ax + \mathrm{b} \geq 0 & (2) \rightarrow \boldsymbol{S_2} \\ \sqrt{f(x)}^2 \leq (ax + \mathrm{b})^2 & (3) \rightarrow \boldsymbol{S_3} \end{cases}$

L'ensemble des solutions est donné par S = $\boldsymbol{S_1} \cap \boldsymbol{S_2} \cap \boldsymbol{S_3}$.

<u>Exemple</u>

Résoudre : $a)$ $\sqrt{3 - x} < x - 1$; $b)$ $\sqrt{-2x^2 + 5x + 3} \leq 2x + 1$

- **<u>Inéquation irrationnelle du type</u>** $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$, $\sqrt{f(x)} \geq \mathrm{k}$; $\mathrm{k} \in \mathbb{R}$

- Si $k < 0$ alors $S =$ ensemble de validité.
- Si $k \geq 0$ alors résoudre $\begin{cases} f(x) & \geq 0 \\ [\sqrt{f(x)}\,]^2 & \geq k^2 \end{cases}$ (ou $[\sqrt{f(x)}\,]^2 \geq k^2$)

<u>Exemple</u>

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$a)\ \sqrt{2x^2 - 9x - 1} \geq 2$; $b)\ \sqrt{(x-3)(4-x)} \geq -1$

4. Equations du second degré à une inconnue comportant un paramètre

Exemple

On donne l'équation suivante : (E): $x \in \mathbb{R}$, $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m - 2 = 0$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de m, l'équation (E) est – elle :
   - a. Du premier degré ? Pour cette valeur de m, résoudre l'équation (E).
   - b. Du second degré ?
2. On s'intéresse au cas où l'équation (E) est du second degré.

2.1. Calculer en fonction de m, le discriminant.

2.2. Pour quelles valeurs de m, l'équation (E) admet :

- a. Aucune solution ;
- b. Une solution ;
- c. Deux solutions distinctes.

3. Dans le cas où l'équation (E) admet deux solutions distinctes, calculer la somme S et le produit P de ces solutions en fonction de m.

NB : Le paragraphe 4 ne fera pas l'objet d'une évaluation

A VOUS DE JOUER…

Exercice 1 (QCM)

Parmi les réponses proposées aux questions suivantes, une seule est juste. Choisir la bonne réponse.

1/ L'équation $-2x^2 - 2x + 4 = 0$ a pour solutions :

A.-1 et 1 B. 1 et -2 C.1 et 4 D.0 et 3

2/ L'équation $-2x^2 - 2x + 4 = 0$ a pour discriminant :

A. 36 ; B. 20 C. 26 D. -36

3/ Le nombre des racines de l'équation $2x^2 - 2x + 4 = 0$ est :

A. 0 B. 1 C. 2 D. une infinité

4/ L'équation $2x^2 - 2x + 4 = 0$ a respectivement pour somme et produit :

A. 0 et 4 B. 1 et 2 C. -1 et 2 D. 1 et -2

Exercice 2 : Résoudre les équations suivantes :

1) $a) - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ b) $-2x^2 + 3x - 1 > 0$
2) $a) - 3x^2 + 4x + 7 = 0$ b) $-3x^2 + 4x + 7 \leq 0$
3) $a)\ x^2 + x + 3 = 0$ b) $x^2 + x + 3 > 0$
4) a) $4x^2 - 28x + 49 = 0$ b) $4x^2 - 28x + 49 > 0$
5) $q \in IR , -q^4 - 3q^2 + 4 = 0$
6) $\sqrt{2}x^2 + (1 - \sqrt{2})x - 1 = 0$

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes : 1)$\sqrt{x+2} = 3x - 4$; 2) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x-4}$; $\sqrt{x-1} = \sqrt{-x+3}$.

Exercice 4 : Résoudre :

1) $x \in IR$; $\frac{x(x+1)}{x-1} = 2x$ 2) $x \in IR$; $\frac{x(x+1)}{x-1} \leq 2x$

Exercice 5

$$P(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 4x^2 + 8x - 64$$

1) Calculer P(8). Que peut – on conclure ?
2) a – Mettre $P(x)$ sous la forme $P(x) = (x-8)Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme du second degré.

   b – Factoriser $Q(x)$ *puis* $P(x)$.

c - Résoudre dans IR l'équation $P(x) = 0$.

3) a- Etudier le signe de P(x) suivant les valeurs de x.

   b- Résoudre dans IR l'inéquation $P(x) \geq 0$.

4) Résoudre dans IR l'inéquation $\frac{P(x)}{x+1} \leq 0$.

Exercice 6 : Résoudre :

a) $\sqrt{x+3} = \sqrt{7-2x}$
b) $\sqrt{x^2-2x+2} = \sqrt{-2x^2-2x+4}$
c) $\sqrt{x-9} = x+11$
d) $\sqrt{x-1} = -3$

Exercice 7
Résoudre les inéquations suivantes : $\sqrt{2x+1} \leq x+3$; $\sqrt{2x-2} \geq -4$; $\sqrt{-3x-1} \geq 3$.

Exercice 8 : Etudier le signe de :

a) $f(x) = 2x - 3$
b) $g(x) = -2x^2 + 3x - 1$
c) $h(x) = -x^2 + x - 7$
d) $p(x) = 4x^2 - 28x + 49$

Exercice 9 : Résoudre :

1) $x \in \mathbb{Z}$, $-2x^2 + x + 2 > 0$
2) $x \in IR$, $-x^2 + 2x - 1 \geq 0$
3) $x \in IR$, $\frac{x^2-x-6}{x^2+3x-4} \leq 0$
4) $x \in IN$, $\frac{2x^2-7x+6}{-x^2+2x} \geq 0$
5) $x \in IR$, $\frac{3}{x^2+2x-3} < \frac{2}{x^2-x-2}$
6) $x \in IR$, $1 \leq x^2 \leq 5$
7) $x \in IR$, $\begin{cases} x^2 \leq 9 \\ -x(x-5) \geq 0 \end{cases}$

CHAPITRE 2 : SYSTEMES LINEAIRES ET PROGRAMMATION LINEAIRE

Dans ce chapitre nous nous proposons de conjuguer études numérique et graphique pour résoudre des systèmes d'équations et d'inéquations du premier degré à deux inconnues réelles. On révisera les méthodes vues en classe de seconde. On apprendra à mettre en équations un problème concret ou historique, issu de l'économie ou de la géométrie et à trouver le maximum et le minimum d'une fonction.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

Au terme de ce chapitre, chaque apprenant, doit être capable, en exploitant les acquis de ce cours, de :

- résoudre des systèmes d'équations à deux inconnues suivant la méthode exigée ;
- résoudre un système de plus de deux équations à plus de deux inconnues de manière guidée ;
- résoudre tout système d'inéquations à deux inconnues en suivant les propriétés apprises ;
- résoudre graphiquement une inéquation, un système d'inéquations du 1er degré dans $\mathbb{R}^2$;
- déterminer les intrants qui permettront à l'entrepreneur de maximiser les bénéfices ou de minimiser les coûts de production en tenant compte des contraintes de l'entreprise.

1. Systèmes linéaires

1.1. Systèmes d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^2$ *ou* $\mathbb{R}^3$

1.1.1. Equation du *type* $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ ax + by + c = 0$

Il existe deux méthodes pour résoudre une telle équation :

- la méthode algébrique

$a\,x + by + c = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-ax-c}{b}$, $a \neq 0$. D'où l'ensemble solution est S = $\left\{\left(x\,;\frac{-ax-c}{b},\right), x \in \mathbb{R}\right\}$

- la méthode graphique

  Elle consiste à représenter la droite d'équation $ax + by + c = 0$ dans le plan muni d'un repère.

Exemple

Résoudre par les méthodes algébrique et graphique l'équation suivante : $-2x + y + 3 = 0$, *où* x *et* y sont des nombres réels.

1.1.2. Système de deux équations linéaires à deux inconnues

1.1.2.1. Présentation (forme générale)

On appelle **système d'équations du premier degré à deux inconnues x et y,** tout système se présentant sous la forme $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ où a, b, a', b' sont des nombres réels et, x et y des inconnues.

1.1.2.2. Méthodes de résolution

– **Résolution par substitution**

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, les systèmes suivants a) $\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x - 3y + 5 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 4y = 5 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 2x - 4y = -6 \end{cases}$

– **Résolution par addition ou combinaison**

On effectue une combinaison linéaire des deux équations en éliminant l'une des inconnues puis une combinaison linéaire éliminant l'autre inconnue.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}\times\ \mathbb{R}$, les systèmes suivants a) $\begin{cases}2x+y-4=0\\x-3y+5=0\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x+4y=5\\x+2y=1\end{cases}$

c) $\begin{cases}-x+2y=3\\2x-4y=-6\end{cases}$

– **Résolution par comparaison**

On tire la même inconnue dans les deux équations puis on les égale.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}\times\ \mathbb{R}$, les systèmes suivants a) $\begin{cases}2x+y-4=0\\x-3y+5=0\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x+4y=5\\x+2y=1\end{cases}$

c) $\begin{cases}-x+2y=3\\2x-4y=-6\end{cases}$

– **Résolution graphique**

On pose (D1) : $ax + by + c = 0$ puis (D2) : $a'x + b'y + c' = 0$. On représente graphiquement les droites (d1) et (d2).

- La solution est le point d'intersection des deux droites (si les deux droites se coupent);
- La solution est l'ensemble vide (si les deux droites sont parallèles) ;
- La solution est représentée par l'une des droites si les deux droites sont confondues.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, les systèmes suivants : a) $\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x - 3y + 5 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 4y = 5 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 2x - 4y = -6 \end{cases}$

– Résolution par la méthode de déterminant ou de CRAMER

Le déterminant est noté D ou det.

Elle consiste à calculer les trois déterminants :

- le déterminant du système $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ noté $D_S = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$;

- le déterminant lié à x noté $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$;

- le déterminant lié à y noté $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c.$

➢ Si $D_S \neq 0$ alors le système admet une unique solution $(x_0 \,;\, y_0)$ telle que $x_0 = \frac{D_x}{D_S}$ et $y_0 = \frac{D_y}{D_S}$, $donc$ $S = \{(x_0 \,;\, y_0)\}$.

➢ Si $D_S = 0$ et $D_x \neq 0$ $(ou$ $D_y \neq 0)$ le système n'admet pas de solution, alors $S = \emptyset$.

➢ Si $D_S = 0$, $D_x = 0$ et $D_y = 0$ $alors$ le système admet une infinité de solutions donnée par l'une des équations : $ax + by = c$. S = $\left\{\left(\frac{-\text{by} - \text{c}}{a} \,;\, \text{y}\right),\ \text{y} \in \mathbb{R}\right\}$.

Remarque

Si $D_S \neq 0$ alors le système est dit de CRAMER.

Exemple 1

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, les systèmes suivants : a) $\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x - 3y + 5 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 4y = 5 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 2x - 4y = -6 \end{cases}$

Exemple 2

On considère le système suivant :

$\begin{cases} -2x + \text{m}^2\text{y} = \text{m} \\ x - \text{my} = 1 - \text{m} \end{cases}$; où m est un paramètre réel

1. Calculer les déterminants D_S ; D_x et D_y.

2. Pour quelles valeurs de m le système admet :
   a. une solution unique ;
   b. une infinité de solutions ;
   c. zéro solution.

1.1.3 -<u>Système de trois équations linéaires à trois inconnues</u>

1.1.3.1. **<u>Présentation</u>**

C'est le système de type $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases}$ où

$a, b, c, d, a', b', c', d', a'', b'', c'', d''$ *des réels et* x, y, z sont des inconnues.

1.1.3.2- <u>Méthodes de résolution</u>

– <u>Méthode de substitution</u>

Elle consiste à tirer l'une des inconnues et à la remplacer dans les deux autres équations restantes. On obtient alors un système de deux équations à deux inconnues que l'on sait résoudre.

Exemple

Résoudre le système suivant : $\begin{cases} x - 2y + 5z = 10 \\ 2x - 3y + 8z = 16 \\ -3x + y - 2z = -1 \end{cases}$

- Méthode de GAUSS (ou de pivot de GAUSS)

- On fixe par exemple la ligne L_1 comme pivot (on s'assure que toutes les inconnues de cette ligne soient non nulles) et on élimine x dans les lignes L_2 et L_3 par rapport à L_1. Puis on obtient de nouvelles lignes $L_{2'}$ et $L_{3'}$.
- On fixe la ligne L_2' et on élimine y dans $L_{3'}$ par rapport à $L_{2'}$. Puis on obtient une nouvelle ligne $L_{3''}$.
  Ainsi le système final prend la forme d'un triangle. On dit qu'on a triangularisé ou échelonné ce système.

Exemple

Résoudre le système suivant $\begin{cases} x - 2y + 5z = 10 \\ 2x - 3y + 8z = 16 \\ -3x + y - 2z = -1 \end{cases}$

1.2. Système d'inéquations linéaires dans $\mathbb{R}^2$

1.2.1. Résolution graphique d'une inéquation linéaire $\boldsymbol{ax + by + c} > 0$ dans $\mathbb{R}^2$ (Régionnement du plan)

Elle se résout graphiquement à partir du tracé de la droite (D) d'équation : $ax + by + c = 0$ dans le plan muni d'un repère orthogonal.

Exemple

Résoudre graphiquement chacune des inéquations suivantes :

$a)\ x \leq 1$; $b)\ y > -2$; $c)\ -x + 2y - 1 > 0$; $d)\ 2x - y + 3 \leq 0$.

1.2.2. Résolution graphique d'un système d'inéquations linéaires à deux inconnues

Soit le système (S) de la forme $\begin{cases} ax + by + c \geq 0 \\ a'x + b'y + c' \leq 0 \end{cases}$

Pour résoudre un tel système :

- on trace d'abords les droites (d1) et (d2) d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$;
- chacune des droites partage le plan en deux demi-plans ;
- on choisit un point quelconque dans l'un des demi-plans obtenus et on remplace ses coordonnées dans l'inéquation donnée ;
- on hachure la partie non-solution ;
- la solution S est la partie du plan non hachurée y compris les bords.

<u>Exemple</u>

Résoudre graphiquement le système suivant : $\begin{cases} 2y + 3x \leq 14 \\ y - x \leq 2 \\ y + 6x \leq 16 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$.

2. **Programmation linéaire**

La programmation linéaire consiste à maximiser ou à minimiser une fonction linéaire par rapport à ses variables sous des contraintes linéaires. Elle comprend deux parties :

- ***la fonction économique*** (fonction objectif ou, fonction à maximiser ou fonction à minimiser) ;
  Exemple de fonction à maximiser : la production, le bénéfice, le profit, le solde, la recette, la vente, le chiffre d'affaires, le revenu, la rente...
  Exemple de fonction à minimiser : les coûts, les dépenses, les achats, la perte, le salaire, le temps...
- les contraintes : ce sont les inégalités traduisant par exemple les disponibilités.

- **Etapes de la résolution**

- On représente graphiquement le système d'inéquations (domaine des contraintes).
- On trace la fonction économique (en posant fonction économique égale à 0).
- On déplace la droite fonction économique parallèlement à elle – même sur le domaine des contraintes.
- Dans le cas de maximisation, le dernier point obtenu est le point maximum.
- Dans le cas de minimisation, le premier point obtenu est le point minimum.

2.1. Problème de maximisation

Exemple

Un atelier de confection fabrique en série deux modèles de chemises de luxe :

- Une chemise du premier modèle nécessite 1 m de tissu ; 4 heures de travail et rapporte 24 F
- Une chemise du deuxième modèle exige (nécessite) $1,5$ m de tissu ; 2 heures de travail et rapporte 16 F. On suppose que l'atelier dispose quotidiennement de 150 m de tissu et de 400 heures de travail et qui peut vendre toute sa fabrication. On cherche à calculer le nombre de chemises de chaque modèle qu'il faut fabriquer pour obtenir un bénéfice maximal.

1. Compléter à l'aide des données de l'énoncé le tableau suivant :

	Mètre de tissu	Heures de travail	Bénéfice
1er modèle			
2e modèle			
Maximum			

2. On note x et y les nombres respectifs de chemises du premier modèle et du deuxième modèle fabriqués en un jour (quotidiennement).
   a) De quel signe sont les nombres x et y ?
   b) Par quelle inéquation traduit on le fait que l'atelier dispose de 150 m de tissu par jour ?
   c) Par quelle inéquation traduit on le fait que l'atelier dispose de 400 heures de travail par jour ?
3. Donner l'expression du bénéfice total en fonction de x et y.
4. a) Résoudre graphiquement le système (S) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 3y \leq 300 \\ 2x + y \leq 200 \end{cases}$.

   b) Montrer que le système des contraintes (S_1) du problème est équivalent au système (S).

   c) Déterminer graphiquement le nombre de chemises de chaque modèle permettant de maximiser le bénéfice.
5. Déterminer le bénéfice maximal.

2.2. Problème de minimisation

Exemple :

L'office du tourisme d'une ville décide de renouveler les mobiliers d'un jardin public. Pour cela il est nécessaire d'acheter au moins 600 tables de pique-nique, 1200 bancs publics et 900 poubelles. Les deux fournisseurs contactés proposent chacun un type de lot

	Tables	Bancs	Poubelles	Coût d'un lot en F
Lot A	10	30	30	200 000
Lot B	20	20	10	100 000

On désigne par x et y les nombres respectifs de lots A et de lots B à acheter pour que la dépense soit minimale.

1. Montrer que le système des contraintes est équivalent à $\begin{cases} x + 2y \geq 60 \\ 3x + 2y \geq 120 \\ 3x + y \geq 90 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$.
2. Exprimer en fonction de x et y la dépense Z occasionnée par l'achat de x lots A et y lots B.
3. a) Déterminer graphiquement le nombre de lots de chaque type à acheter pour obtenir une dépense minimale Z_m.
   b) Calculer la dépense minimale Z_m

REMARQUES

- Les expressions : **a en stock, dispose, ne dispose que, …sont limités à, au plus, ne peut offrir que, au maximum, sont (est) disponibles, à la limite de, ne peut produire que, ne …plus de, ne pas dépasser,………** expriment le maximum **et le symbole à utiliser est $\leq$;**
- Les expressions : **au moins, au minimum, ne …moins de, peut dépasser, …** expriment le minimum **et le symbole à utiliser est $\geq$.**

A VOUS DE JOUER …

Exercice 1

A/ Répondre par Vrai ou Faux

1/ La méthode de Cramer permet de résoudre une équation de la forme $(x\,;\,y) \in IR^2$; $ax + by + c = 0$

2/ La méthode de Cramer permet de résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues

B/ QCM

Choisir la bonne réponse sans la justifier ; une seule proposition est correcte.

3/ Le système d'équations linéaires $\begin{cases} x - y = 10 \\ x + y = 8 \end{cases}$; a pour solution :

A/ ID ; B/ IR² ; C/ $\{9; -1\}$; D/ $\{(9; -1)\}$

4/ Le système d'équations linéaires $\begin{cases} 2x - y = 10 \\ 4x - 2y = 20 \end{cases}$; a pour solution :

A/ IR ; B/ IR² ; C / $\{(5; 0)\}$; D/ $\{(x; y) \in IR^2 / \, 2x - y = 10\}$

5/ Le système d'équations linéaires $\begin{cases} 2x + y - 3z = 10 \\ -y + z = 8 \\ 3z = 12 \end{cases}$

A / $\{13; -4;\ 4\}$; B / IR ; C/ IR² ; D / $\{(13; -4; 4)\}$

Exercice 2

Résoudre :

1) $\begin{cases} 7x - 5y = 2 \\ 6x + 6y = -8 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - 2y = -9 \\ -7x + y = 10 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ 2x + \frac{3}{2}y = 3 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y - 3x = 2 \\ 9x - 3y = -6 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x + 2y - 2 = 0 \\ 2x - y - 6 = 0 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 4x - 2y + 7z = 20 \\ 3x - y + 3z = 10 \\ 2x - 3y - z = 3 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 2y - 3x = 4 \\ 2x + y = -3 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ x + 4y + z = 0 \\ 2x + y - 2z + 6 = 0 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7} \\ 5x - 3y + 2z = 6 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} -2x + y + 4z = 7 \\ 4x - 5y - 6z = -5 \\ 3x - 4y + z = 13 \end{cases}$ $(S = \{(2; -1; 3)\})$

11) $\begin{cases} 2x + y - 3z = -5 \\ -x + 2y + z = 6 \\ 3x - y + 2z = 7 \end{cases}$ $(S = \{(1; 2; 3)\})$ 12) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x - 2y = -1 \\ x + y = -2 \end{cases}$ $S = \{(-1; -1)\}$;

13) $\begin{cases} x + y = 5 \\ y + z = 1 \\ x + z = -8 \end{cases}$ $S = \{(-2; 7; -6)\}$

Exercice 3

1) Trouver deux nombres dont la somme est égale à 3 et le produit égal à 2.

2) Trouver deux nombres dont la somme est égale à 6 et le produit est égal à 8.

Exercice 4

On se propose de résoudre par la méthode de CRAMER le système $\begin{cases} mx + y = 1 \\ x + my = 3 - 2m \end{cases}$

1. Montrer que les déterminants du système, lié à x et lié à y sont respectivement
2. $D = m^2 - 1$; $D_x = 3m - 3$; $D_y = -2m^2 + 3m - 1$
3. Pour quelles valeurs de m le système admet :
   a. 0 couple solution ?
   b. Une infinité de couples solutions ?
   c. Un couple solution ?

On suppose que $m = 3$. Donner le couple solution correspondant.

Exercice 5

Résoudre graphiquement :

1) $\begin{cases} x - y \geq -2 \\ x - y < 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y \geq 0 \\ x + 2y \leq 6 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x + y + 2 \geq 0 \\ x - 2y + 2 \geq 0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x + 5 \geq 0 \\ 2x - 8 < 0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x^2 - 5x + 2 \geq 0 \\ 2x^2 - 3x + 1 < 0 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} y - 3x \leq 1 \\ 2y + 3x \leq 16 \\ 3x + 7y \geq -21 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y - 1 \leq 3 \end{cases}$

8) $\begin{cases} -3 \leq -x + 6 \leq 3 \\ -2 \leq y - 3 \leq 2 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x \geq 200 \\ \mathrm{y} \geq 300 \\ x + \mathrm{y} \geq 1000 \\ 2x + \mathrm{y} \leq 2100 \\ 5x + 4\mathrm{y} \leq 6600 \end{cases}$

Exercice 6

Un atelier produit deux types de pièces, A et B, à l'aide de deux machines M_1 et M_2. Chaque pièce en cours de fabrication doit passer successivement sur les deux machines dans un ordre indifférent.

Durée de passage d'une pièce de type A	**Durée de passage d'une pièce de type B**
-dans la machine M_1: 30 minutes	-dans la machine M_1: 20 minutes
-dans la machine M_2 : 40 minutes	-dans la machines M_2 : 10 minutes
Bénéfice sur une pièce de type A : 400F ;	Bénéfice sur une pièce de type B : 200F

La machines M_1 est disponible 3000 minutes par mois, la machine M_2 2000 minutes.

1/ Soient x une pièce de type A et y une pièce de type B. Montrer que le système de contraintes de l'énoncé est $\begin{cases} x \geq 0 \\ \mathrm{y} \geq 0 \\ 3x + 2\mathrm{y} \leq 300 \\ 4x + \mathrm{y} \leq 200 \end{cases}$

2/ Tracer les droites $(D_1): x = 0$; $(D_2): y = 0$; $(D_3): 3x + 2y = 300$; $(D_4): 4x + y = 200$.

En déduire la région solution du système de contraintes précédent.

3/ On note par F la fonction bénéfice. Ecrire F en fonction de x et y.

4/ Déterminer graphiquement le nombre de pièces de type A et de pièces de type B que l'on doit fabriquer par mois pour avoir un bénéfice maximal.

Exercice 7

Un artisan fabrique deux types d'objets A et B. La réalisation d'un objet A demande 30f de matières premières et 125f de main d'œuvre ; celle de l'objet B demande 70f de matières premières et 75f de main d'œuvre. Pour une bonne gestion de l'entreprise, les dépenses journalières en matières premières et en main d'œuvre ne doivent pas dépasser respectivement 560f et 1250f. Les profits réalisés sont de 1250f pour l'objet A et 45f pour l'objet B.

On désignant par x le nombre d'objet A et par y le nombre d'objet B fabriqués par jour :

1) Calculer en fonction de x et de y, la dépense journalière en matière première et la dépense journalière en main d'œuvre.

2) Résoudre graphiquement le système suivant : $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 30x + 70y \leq 560 \\ 125x + 75y \leq 1250 \end{cases}$

3) a) Calculer en fonction de x et y le profit journalier P réalisé.

b) Sachant que le système des contraintes du problème est celui de la question 2), déterminer graphiquement le nombre d'objets A et B que l'entreprise doit produire pour réaliser un profit maximum.

Exercice 8

Un collège commande à un libraire au moins 1600 feutres, 1800 stylos et 1550 crayons. Le libraire propose deux sortes de lots (A et B) définis comme :

	Feutres	Stylos	Crayons
Lot A	2	1	1
Lot B	1	3	2

1- On notera x le nombre de lots A et y celui de lots B. Montrer que le système des contraintes est $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \geq 1600 \\ x + 3y \geq 1800 \\ x + 2y \geq 1550 \end{cases}$

2- Représenter graphiquement ces contraintes.

3- Le libraire vend 800f chacun des lots A et B. Exprimer en fonction de x et y le prix P à payer par le collège.

4 -Déterminer graphiquement le prix minimal à payer par le collège.

CHAPITRE 3 :

FONCTION NUMERIQUE D'UNE VARIABLE REELLE

Les mathématiques doivent leur évolution récente aux nombreux développements et généralisations de la notion de fonction et à ses utilisations dans des domaines variés. L'objet de ce chapitre consiste à outiller suffisamment l'apprenant sur l'étude des fonctions numériques notamment, l'ensemble de définition, la parité, les éléments de symétrie.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

Au terme de ce chapitre, l'apprenant doit être capable, en exploitant les acquis de ce cours, de :

- déterminer l'ensemble de définition d'une fonction donnée en se référant aux propriétés ;
- étudier la parité d'une fonction donnée ;
- montrer qu'une droite donnée est un axe de symétrie de la courbe représentative d'une fonction donnée ;
- montrer qu'un point donné est un centre de symétrie de la courbe représentative d'une fonction donnée ;
- étudier la parité d'une fonction donnée sur la base des propriétés ;
- déduire le tracé d'une courbe d'une fonction donnée à partir d'une autre.

1. Définition d'une fonction

On appelle fonction de A vers B toute relation qui à tout élément de A associe zéro ou un élément de B.

2. Les différents modes de définition d'une fonction

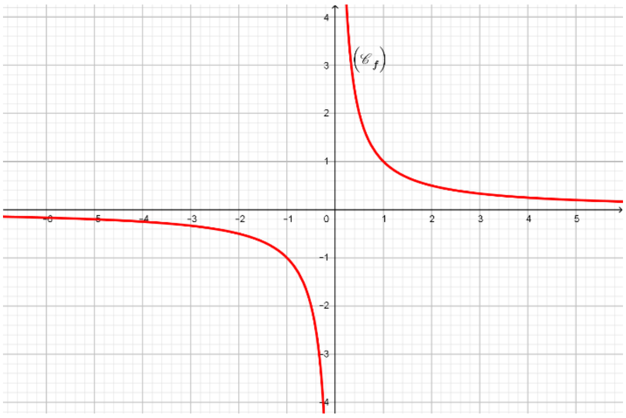
Une fonction peut être définie par :

- Une expression explicite :

Exemple : $f(x) = 2x^2 + 1$; $g(x) = \frac{x+2}{-x^2+5}$; $h(x) = \frac{2x-3}{-x+1}$; $j(x) = \frac{3x^2+2x-1}{x-1}$

- Une représentation graphique :

Exemple



- Un tableau de valeurs :

Exemple

x	-3	-2	-1	0	1	$\frac{3}{2}$	3
$f(x)$	$\frac{-8}{5}$	$\frac{-3}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	8

3. Ensemble de définition d'une fonction

3.1 Définition

L'ensemble de définition, c'est l'ensemble des valeurs de l'ensemble de départ pour lesquelles la fonction existe ou est définie ou encore a un sens. L'ensemble de définition d'une fonction f est noté D_f.

3.2. Recherche de l'ensemble de définition

3.2.1. Cas d'une fonction polynôme

- Lorsque l'ensemble de départ d'une fonction polynôme n'est pas précisé, alors l'ensemble de définition de cette fonction est $\mathbb{R}$.

  Exemple :

  $f(x) = -4$; $g(x) = 3x^5 + 47x^3 - x - 107$. Déterminer les ensembles de définition D_f et D_g.

- L'ensemble de définition d'une fonction polynôme, lorsque l'ensemble de départ est précisé est l'ensemble de départ.

$f\ :\ A\ \longrightarrow B$

$x \longmapsto y = f(x) = fonction\ polynôme$

$$\boldsymbol{D_f = A}$$

<u>Exemple</u> :

$f\ :[-3;3[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto 2x^3 - 5x^2 + x - 9$. Déterminer l'ensemble D_f de f.

3.2.2. <u>Cas d'une fonction rationnelle</u>

- Une fonction rationnelle est le quotient de deux fonctions polynômes.

Soit f une fonction rationnelle.

- $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ où $p(x)$ et $q(x)$ sont des polynômes : $\boldsymbol{Df} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}\ /\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}\}$.
- $f: A \longrightarrow B$

  $x \longmapsto f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ avec $p(x)\ et\ q(x)$ des polynômes : $\boldsymbol{Df} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}/\ \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}\}$

<u>Exemple 1</u>:

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$f_1(x) = \dfrac{2x+3}{1-x}$; $f_2(x) = \dfrac{1+x}{-3x^2+4x-1}$; $f_3(x) = \dfrac{5-x}{x^2+5}$; $f_4(x) = \dfrac{1+x}{1+x+x^2}$

<u>Exemple 2</u> : Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction f définie par

$$f\ :\ [0;3[\ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{2x-4}{3x^2+x-4}.$$

3.2.3. Cas d'une fonction irrationnelle

$f(x) = \sqrt{A(x)}$: $\boldsymbol{D_f = \{x \in D_A \ /\ A(x) \geq 0\}}$

On peut établir le tableau de signe de $A(x)$ avant de donner D_f.

<u>Exemple</u> :

Déterminer l'ensemble de définition de $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = \sqrt{2-x}$; $h(x) = \sqrt{x^2-16}$.

----

4. Parité d'une fonction

4.1. Fonction paire

f est une fonction paire si et seulement si, $\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D_f}\ ;\ \ -\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D_f}\ \ \boldsymbol{et}\ \ \boldsymbol{f(-x) = f(x)}$.

Conséquence graphique

Lorsqu'une fonction f est paire, alors sa courbe (C_f) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (OJ) d'équation $x = 0$.

4.2. Fonction impaire

f est une fonction impaire si et seulement si, $\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D_f},\ \ -\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D_f}\ \ \ \boldsymbol{et}\ \ \boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$**.**

Conséquence graphique

Lorsqu'une fonction f est impaire, alors sa courbe (C_f) est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

NB : Etudier la parité d'une fonction, c'est dire si la fonction est paire ou impaire ou n'est ni paire ni impaire.

Exemple :

1. $f(x) = -\frac{2x^4}{x^2+1}$
   a. Montrer que f est paire.
   b. Donner la conséquence graphique de ce résultat.

----

2. $g(x) = \frac{-x^3+2x}{x^2-1}$

   a. Montrer que g est impaire.

   b. Quelle conséquence graphique peut-on déduire du résultat précédent ?

3. $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

   $x \longmapsto \frac{1-2x^2}{3+x^2}$

Etudier la parité de h.

----

4. $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x^2 - 6x + 5 \ .$$

Etudier la parité de P.

Remarques

- L'ensemble de définition d'une fonction paire ou impaire est un ensemble centré en zéro.
- IR est un ensemble symétrique par rapport à zéro. On peut aussi citer [-2 ; 2].

5. Les éléments de symétrie

5.1. Axe de symétrie (Δ) : $x = a$

La droite (Δ) $d'équation\ x = a$ est axe de symétrie à (C_f) si et seulement si :

Méthode 1 :

$$\boxed{\forall\, x \in D_f\ ;\ (2a - x) \in D_f\ et\ f(2a - x) = f(x)}$$

Méthode 2 :

La nouvelle fonction g $définie\ par\ g(x) = f(x + a)\ est\ paire$

(Méthode de changement de variable)

5.2. Centre de symétrie $I(a\,;b)$

Le point $I(a\,;b)$ est centre de symétrie à (C_f) si et seulement si :

Méthode 1 :

$$\boxed{\forall\, x \in D_f; (2a - x) \in D_f\quad et\quad f(2a - x) + f(x) = 2b}$$

Méthode 2 :

La nouvelle fonction g définie par $g(x) = f(x + a) - b$ est impaire

Exemple :

1. $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Montrer que la courbe de f admet la droite $(\Delta) : x = 3$ comme axe de symétrie.

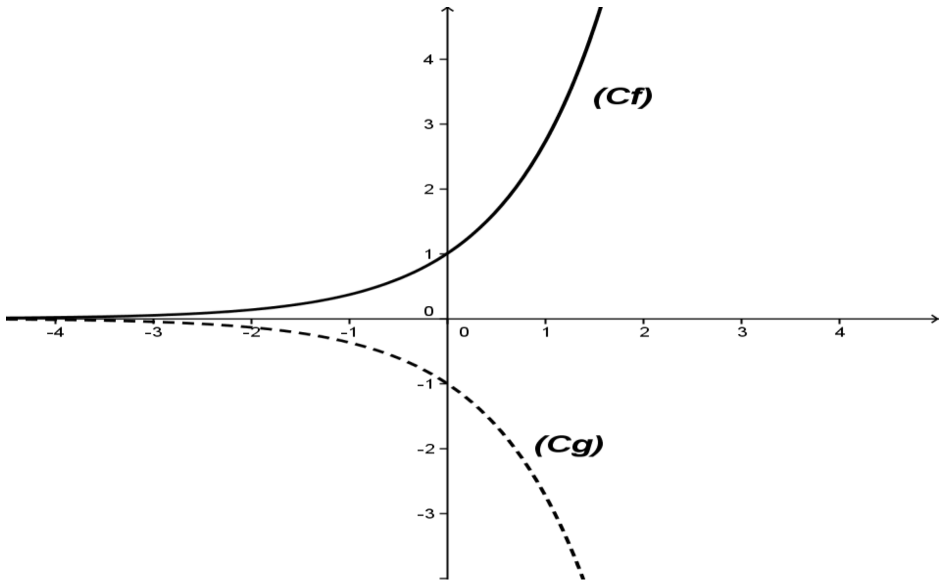
2. On donne $g(x) = \frac{2x}{1-x}$. Montrer que le point A$(1\,; -2)$ est un centre de symétrie de (C_g) .

6. Fonctions associées

Le but de ce paragraphe est d'identifier les fonctions associées et d'expliquer comment on peut tracer la courbe de ces fonctions à partir de la courbe de f sans aucune étude préalable.

6.1. $\boldsymbol{g(x) = -f(x)}$

Pour tracer (C_g), on prend la symétrie orthogonale d'axe (OI) de tous les points de (C_f). $(\boldsymbol{C_g}) = \boldsymbol{S_{(OI)}}(\boldsymbol{C_f})$ $M\binom{a}{b} \in (C_f) \Leftrightarrow M'\binom{a}{-b} \in (C_g)$

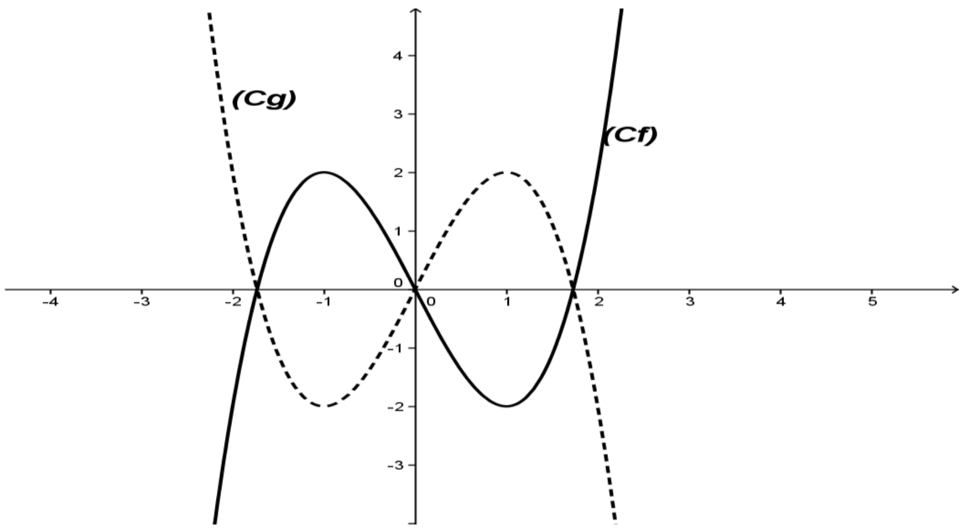


6.2. $\boldsymbol{g(x) = f(-x)}$

Pour tracer (C_g) , on prend la symétrie orthogonale d'axe (OJ) de tous les points de (C_f).

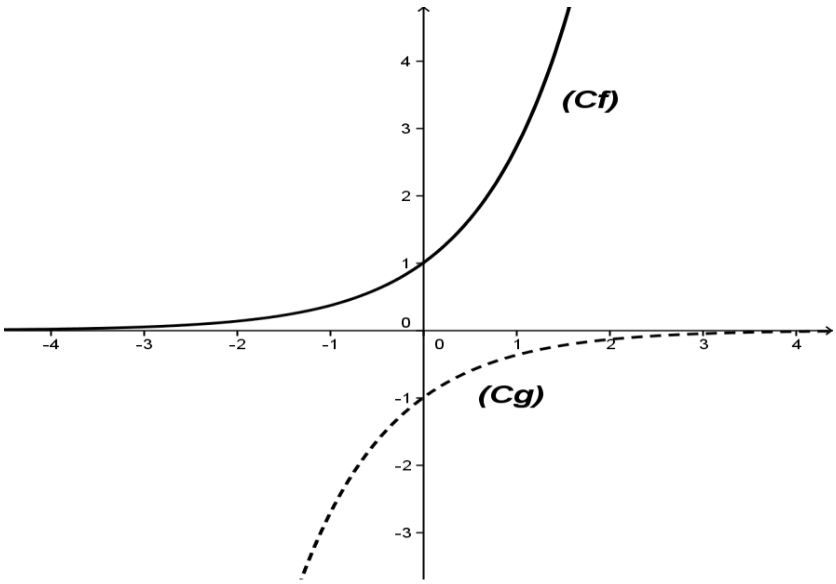
$$(\boldsymbol{C_g}) = \boldsymbol{S_{(OJ)}}(\boldsymbol{C_f})$$

$$M\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in (C_f) \Leftrightarrow M'\begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix} \in (C_g)$$



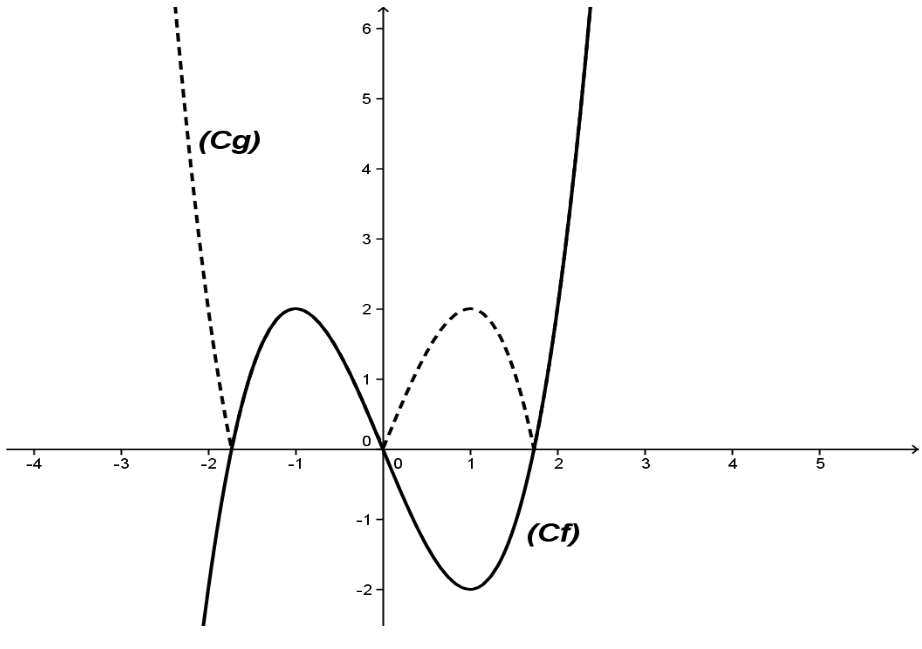
6.3. $\boldsymbol{g(x) = -f(-x)}$

Pour tracer (C_g) , on prend la symétrie centrale du point O de tous les points de (C_f). $(\boldsymbol{C_g}) = \boldsymbol{S_O}(\boldsymbol{C_f})$ $M\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in (C_f) \Leftrightarrow M'\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix} \in (C_g)$



6.4. $\boldsymbol{g(x) = |f(x)|}$

Pour tracer (C_g) , on conserve la partie de (C_f) qui est située au dessus de (OI) et on prend la symétrie orthogonale d'axe (OI) de la partie de (C_f) située en dessous de (OI). Soit (C_1) la partie de (C_f) située au dessus de (OI) et (C_2) la partie de (C_f) située en dessous de (OI). $\boldsymbol{(C_g) = (C_1) \cup S_{(OI)}(C_2)}$



A VOUS DE JOUER…

Exercice 1 : QCM

Parmi les réponses proposées aux questions suivantes, une seule est juste. Choisir la bonne réponse.

1) Une fonction f d'ensemble de définition D_f est paire si et seulement si :

A) $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(x) = -f(x)$; B) $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $-f(x) = f(-x)$.

C) $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$; D) Aucune réponse.

2) Le point $\Omega(a, b)$ est centre de symétrie à (C_f) si et seulement si :

A) $\forall\, x \in D_f, (2a - x) \in D_f$ et $f(a - x) + f(x) = 2b$.

B) $\forall\, x \in D_f, (2a - x) \in D_f$ et $f(x + 2a) + f(x) = 2b$.

C) $\forall\, x \in D_f, (a - x) \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$.

D) $\forall\, x \in D_f, (2a - x) \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$.

3) L'ensemble de définition de la fonction f définie de $]0\,;\,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ est :

A) $]0\,;\,+\infty[$; B) $\{-1\,;1\}$; C) $]0\,;\,+\infty[\backslash\{1\}$; D) $\mathbb{R}\backslash\{-1\,;1\}$.

4) La droite d'équation $x = a$ est axe de symétrie à (C_f) si et seulement si :

A) $\forall\, x \in D_f, (2a - x) \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 0$.

B) $\forall\, x \in D_f, (2a - x) \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2a$.

C) $\forall\, x \in D_f, (2a - x) \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$.

D) $\forall\, x \in D_f, (a - x) \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$.

Exercice 2 : Soient les fonctions suivantes :

$f : [0\,;10] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x+1}{x-3}$; $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$; $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{2}{x(x^2-2)}$.

1) Montrer que l'ensemble de définition de f est $[0\,;3[\cup]3\,;10]$.

2) Montrer que l'ensemble de définition de g est $[-1\,;1]$

3) Montrer que l'ensemble de définition de h est $\mathbb{N}^*$.

Exercice 3 : Etudier la parité des fonctions suivantes :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^3}{x^2+1}$; $g : [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$; $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x^4 - 5x^2 + 2$.

Exercice 4 : Soit $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+5}$; $g(x) = x + 2 + \frac{3}{x-1}$.

1) Montrer que la droite d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie de (C_f).

2) Montrer que le point $\Omega(1\,;\,3)$ est un centre de symétrie de (C_g).

CHAPITRE 4 :

LIMITE ET CONTINUITE D'UNE FONCTION

Les mathématiques doivent leur évolution récente aux nombreux développements et généralisations de la notion de fonction et à ses utilisations dans des domaines variés.
L'objet de ce chapitre consiste à compléter les savoirs et savoir-faire de l'apprenant sur l'étude des fonctions numériques notamment, le calcul des limites d'une fonction donnée, la détermination des asymptotes éventuelles, l'étude de la continuité d'une fonction.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

A la fin de ce chapitre, chacun des apprenants, en exploitant les acquis de ce cours, devra être capable de :

- déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition d'une fonction ;
- écrire les équations d'éventuelles asymptotes à une courbe représentative ;
- étudier la continuité d'une fonction donnée en un point x_0 ou sur un intervalle donné.

1. LIMITES D'UNE FONCTION

Activité

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$.

a) Calculer $f(10^7)$; $f(10^8)$; $f(10^9)$; $f(10^{-7})$; $f(10^{-8})$; $f(10^{-9})$.

b) Que devient $f(x)$ lorsque x prend des valeurs positives de plus en plus grandes ?

c) Etudier le comportement de $f(x)$ lorsque x prend des valeurs positives de plus en plus petites.

1.1. Notion de limite d'une fonction

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f , a et l des nombres réels.
Le réel l est la limite de f en a ou encore l est la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a signifie que lorsque x se rapproche de plus en plus de a , $f(x)$ se rapproche aussi proche que l'on veut de l.

On écrit : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et on lit : « la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a est égale à l ».

Propriété

Lorsqu'une fonction f est définie en a et admet une limite en a, alors on a :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Exemple : On donne $f(x) = 2x - 1$.

Calculer : $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$.

1.2. Théorème de l'unicité

Lorsqu'une fonction f admet une limite en a, alors cette limite est unique.

1.3. Limite d'une fonction à l'infini

1.3.1. Limite d'une fonction polynôme

Règle n°1 : La limite d'une constante est cette même constante.

Exemple : $f(x) = -6$. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Limites usuelles ou référentielles ou encore remarquables

$$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty \;;\quad \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \;;\quad \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty \;;\quad \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si est impair} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$$

NB : $\lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = a \times \lim\limits_{x \to -\infty} x^n$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} a\,x^n = a \times \lim\limits_{x \to +\infty} x^n$

Règle n°2 : A l' infini, la limite d'une fonction polynôme est égale à la limite de son monôme du plus haut degré.

Exemple : Etudier le comportement de ces fonctions en $-\infty$ *et en* $+\infty$.

$$f(x) = -2x \;;\quad g(x) = -4x^2 + 2x + 7\;;\quad h(x) = 2x^3 + 7x^2 + x - 2.$$

1.3.2. <u>Limite d'une fonction rationnelle</u>

Limites référentielles

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}=\mathbf{0}\quad;\qquad\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}=\mathbf{0}$$

$$\forall\,\boldsymbol{k}\in\mathbb{R};\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{x}}=\mathbf{0}\quad;\qquad\lim_{x\to+\infty}\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{x}}=\mathbf{0};$$

$$\forall\,\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}^*;\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}}=\mathbf{0}\quad;\qquad\lim_{x\to+\infty}\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}}=\mathbf{0}$$

<u>Règle n°</u>3 : A l′ infini, la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du rapport des monômes du plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

<u>Exemple</u> : Calculer la limite en $-\infty$ et en $+\infty$ de :

i. $f(x)=\frac{x+3}{7-2x}$;

ii. $g(x)=\frac{-4x^2-8x+5}{3+x}$;

iii. $h(x)=\frac{2x^2-x+3}{1-x^2}$;

iv. $p(x)=\frac{x+1}{2x^2+x+2}$;

1.4. Limite en un réel x_0

1.4.1. Limite en un réel x_0 d'une fonction polynôme

La limite d'une fonction polynôme f en un réel x_0 est l'image de x_0 par f :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Exemple : $f(x) = -3$; $g(x) = 2x^2 - 3x + 1$

$$Calculer \lim_{x \to 10^6} f(x) \quad ; \quad \lim_{x \to -1} g(x).$$

1.4.2. Limite en un réel x_0 d'une fonction rationnelle

1.4.2.1. Cas où $\boldsymbol{x_0 \in D_f}$

$$\lim_{x \to x_0} \boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{f(x_0)}$$

Exemple : Soient $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$; $g(x) = \frac{5}{x^2-3x+3}$. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 4} g(x)$.

1.4.2.2. Cas où $x_0 \notin D_f$ et est une borne de D_f « $\frac{réel\ non\ nul}{0}$ »

Dans ce cas, il faut étudier le signe du dénominateur et calculer la limite au voisinage de x_0 c'est-à-dire la limite à gauche de x_0 (ou limite quand x tend vers x_0 par valeur négative ou par valeur inférieure) et on note :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x<x_0}} \boldsymbol{f(x)} \qquad \boldsymbol{ou} \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \boldsymbol{f(x)}$$

et la limite à droite de x_0 (ou limite quand x tend vers x_0 par valeur positive ou par valeur supérieure) et on note

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x>x_0}} \boldsymbol{f(x)} \qquad \boldsymbol{ou} \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \boldsymbol{f(x)}$$

Exemple 1 :

On donne : $f(x) = \frac{x^2+x}{1-x}$ et $g(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$

1.Montrer que l'ensemble de définition de f est $D_f =]-\infty\,;1[\cup]1\,;\,+\infty[$ et celui de g est $D_g =]-\infty\,;-2[\cup]-2\,;2[\cup]2\,;\,+\infty[$.

2.a) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)$

b) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ <}} g(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} g(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} g(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} g(x)$

1.4.2.3. <u>Cas des formes indéterminées</u> « $\frac{0}{0}$ »

Ici il faut **impérativement** simplifier la fonction rationnelle par $\ll x - x_0 \gg$ avant de calculer la limite en x_0.

<u>Exemple 1</u> : Soient $f(x) = \frac{1-x}{x^2-1}$; $g(x) = \frac{x^2+x-2}{-x^2+4x+12}$.

Calculer la limite de $f(x)\ en\ x_0 = 1\ \ et\ \ de\ g(x)\ en\ x_0 = -2$.

Remarque : Les 4 formes indéterminées sont :$\ll +\infty - \infty \gg$; $\ll \frac{0}{0} \gg$; $\ll 0 \times \infty \gg$; $\ll \frac{\infty}{\infty} \gg$.

Exemple 2 .

Soit $f(x) = \frac{2x+5}{x^2-x-2}$.

1) Montrer que l'ensemble de définition de f est

$D_f =]-\infty\,;\,-1[\cup]-1\,;2[\cup]2\,;\,+\infty[$.

2) Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ <}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to2\\ <}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to2\\ >}} f(x)$

1.5. Notion d'asymptotes (Intérêt de la limite)

1.5.1. *Asymptote horizontale d'équation $y = b$*

$$\boldsymbol{Si} \quad \lim_{x \to -\infty} \boldsymbol{f(x) = b} \quad \boldsymbol{avec\ b} \in \mathbb{R},$$

alors la courbe de f (C_f) *admet une asymptote horizontale d'*équation $y = b$ en $-\infty$ (ou la droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale à la courbe de f -∞).

$$\boldsymbol{Si} \quad \lim_{x \to +\infty} \boldsymbol{f(x) = b} \quad \boldsymbol{avec\ b} \in \mathbb{R},$$

alors la courbe de f (C_f) *admet une asymptote horizontale d'*équation $y = b$ en $+\infty$ (ou la droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale à la courbe de f +∞).

Exemple : $f(x) = \frac{5-4x}{x+2}$.

Montrer que la courbe de f admet une asymptote horizontale $-\infty$ et en $+\infty$ dont on précisera l'équation.

1.5.2. *Asymptote verticale d'équation $x = a$*

$$\boldsymbol{Si} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ <}} \boldsymbol{f(x)} = -\infty\ (\boldsymbol{ou}\ +\infty) \qquad \boldsymbol{ou} \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ >}} \boldsymbol{f(x)} = -\infty\ (\boldsymbol{ou}\ +\infty)$$

alors (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x = a$ (ou bien la droite d'équation

$x = a$ est asymptote verticale à la courbe de f).

<u>Exemple</u> : Soit $h(x) = \frac{1+x}{x+3}$

a) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ >}} h(x)$

b) Montrer que la courbe de h (C_h) admet une asymptote verticale dont on précisera l'équation.

1.5.3. <u>Asymptote oblique d'équation $y = ax + b$</u>

La droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe de f (C_f) si et seulement **si** $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ ***et*** $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)]$ ***avec*** $\boldsymbol{a \neq 0}$.

<u>Remarque 1</u> : Etudier la position de la courbe (C_f) de f par rapport à son asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ revient à étudier le signe de $[f(x) - (ax + b)]$ sur l'ensemble de définition D_f de f.

<u>Exemple</u> : Soit $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$.

a. Mettre $f(x)$ sous la forme $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$.

b. Montrer que la courbe (C_f) de f admet une asymptote oblique d'équation $y = x - 3$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

c. Etudier la position de (C_f) par rapport à son asymptote oblique.

Remarque 2 : Si le degré du numérateur d'une fonction rationnelle f est supérieur de 1 au degré du dénominateur alors la courbe (C_f) admet toujours une asymptote oblique.

2. CONTINUITE D'UNE FONCTION

2.1. Continuité d'une fonction en un réel x_0

Définition

Soit f une fonction et x_0 un réel. On dit que f est continue en x_0 lorsque f est définie en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Théorème : La fonction f est continue en x_0 si et seulement si :

- $\boldsymbol{x_0 \in D_f}$ ou bien f est définie en $\boldsymbol{x_0}$

et

- $\lim\limits_{x \to x_0} \boldsymbol{f(x) = f(x_0)} \in \mathbb{R}$.

Ou bien

- $\boldsymbol{x_0 \in D_f}$

et

- $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \boldsymbol{f(x)} = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{f(x_0)} \in \mathbb{R}$.

2.2. Continuité d'une fonction sur un intervalle

- **Définition**

On dit que f est continue sur un intervalle J lorsqu'elle est continue en tout point d'abscisse x_0 de J.

- **Propriétés**

✓ Toute fonction polynôme est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

✓ Toute fonction rationnelle est continue en tout point d'un intervalle sur lequel elle est définie.

A VOUS DE JOUER …

Exercice 1 : (QCM)

On donne la fonction numérique définie par $u(x) = \frac{-2x^2-x+2}{x+1}$.

Pour chaque question, choisir l'unique bonne réponse parmi les propositions données.

1/ L'ensemble de définition de la fonction u est :

A) $D_u = \mathbb{R}$ B) $D_u = \mathbb{R} - \{1\}$ C) $D_u = \mathbb{R} - \{-1\}$ D) $D_u = \{-1\}$.

2/ $\lim_{x \to -\infty} u(x)$ vaut : A) $-\infty$ B) $+\infty$ C) -2 D) 0.

3/ $\lim_{x \to +\infty} u(x)$ vaut : A) $-\infty$ B) $+\infty$ C) -2 D) 0.

4/ La courbe (C_u) admet comme asymptote verticale, la droite d'équation :

A) $(D): y = -1$ B) $(D): x = -1$ C) $(D): x = 1$ D) $(D): y = 1$.

5/ La courbe (C_u) n'admet pas d'asymptote :

A) verticale B) oblique C) horizontale D) Aucune réponse.

6/ La courbe (C_u) admet comme asymptote oblique, la droite d'équation :

A) $(D): y = -2x$ B) $(D): y = -2x + 1$ C) $(D): y = -2x - 1$ D) $(D): x = 2y$.

Exercice 2

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$.

1/ Montrer que l'ensemble de définition D_f de f est $]-\infty\,;\,-1[\cup]-1\,;\,+\infty[$.

2/ Calculer :

a / les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de f.

b / $\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x)$; $\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)$.

3/ Monter que la courbe de f admet deux asymptotes dont on précisera pour chacune, sa nature et son équation.

<u>Exercice</u> 3 **:** Répondre aux mêmes questions comme dans l'exercice 2 pour chacune des fonctions numériques suivantes : $g(x) = \frac{-x+3}{x^2+2x+1}$ et $h(x) = \frac{x^2-2x+2}{2x+2}$.

<u>Exercice 4</u>

Calculer les limites de chacune des fonctions suivantes à gauche et à droite pour les valeurs indiquées :

$$f(x) = \frac{5+2x}{x+3} \; en \; -3 \qquad ; \qquad g(x) = \frac{x-2}{-3x^2+x+4} \; en \; -1;$$

$$p(x) = \left(\frac{1-x}{x+3}\right)^2 \; en \; -3 \qquad ; \qquad h(x) = \left(\frac{1+x}{x+3}\right)^3 \; en \; -3.$$

CHAPITRE **5 :**

DERIVATION D'UNE FONCTION

Les mathématiques doivent leur évolution récente aux nombreux développements et généralisations de la notion de fonction et à ses utilisations dans des domaines variés.
L'objet de ce chapitre consiste à compléter les acquis de l'apprenant sur l'étude des fonctions numériques notamment, la dérivabilité, l'équation de la tangente en x_0, application de la dérivée.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

Au terme de ce chapitre, chaque apprenant devra être capable, en exploitant les acquis de ce cours, de :

- dériver une fonction donnée sur la base des formules ;
- montrer qu'une fonction est dérivable en un point ;
- écrire l'équation de la tangente à une courbe en un point x_0 connaissant sa fonction ;
- donner le sens de variation d'une fonction à partir d'un tableau de variation.

1- Dérivabilité d'une fonction en x_0

La fonction f, définie en x_0 , est dérivable en x_0 si et seulement si

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ **existe et est finie .** Elle est alors notée $f'(x_0)$.

L'expression $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est appelée taux de variation de f en x_0.

$f'(x_0)$ est le nombre dérivé de f en x_0.

$f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente (T) au point d'abscisse x_0 à (C_f).

$f'(x_0)$ est la pente de la tangente (T) au point d'abscisse x_0 à (C_f).

$f'(x_0)$ est la limite du taux de variation de f en x_0.

Remarque : Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

- ✓ Toute fonction polynôme est dérivable en tout point de ℝ.
- ✓ Toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle sur lequel elle est définie.

2. Equation de la Tangente (T) au point d'abscisse x_0 à (C_f)

$$\boxed{(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

Exemple : $f(x) = 2x - 3$

1. Montrer que f est dérivable au point d'abscisse $x_0 = -2$.
2. Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse $x_0 = -2$ à (C_f).

----

3. Fonction dérivée

- La fonction dérivée de f est notée f'.
- La dérivée seconde de f est notée f'' ou $f^{(2)}$.
- La dérivée $n - ieme$ de f est notée $f^{(n)}$.

3.1. Dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
$c, c \in \mathbb{R}$	0
x	1
$x^n, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

3.2. Dérivées et opérations sur les fonctions

Fonction	**Dérivée**
$f = U^n$	$f' = nU^{n-1}U'$

$f = \dfrac{U}{V}$	$f' = \dfrac{U'V - V'U}{V^2}$
$f = \dfrac{1}{V}$	$f' = -\dfrac{1}{V^2}$
$f = U + V$	$f' = U' + V'$
$f = UV$	$f' = U'V + V'U$
$f = mV, m \in \mathbb{R}^*$	$f' = mV',\ m \in \mathbb{R}^*$
$f = \sqrt{U}$	$f' = \dfrac{U'}{2\sqrt{U}}$

<u>Exemple 1</u> : Calculer la dérivée de $f(x) = \frac{2}{3}x - x^3$; $g(x) = -2x^3 + 7x^2 - x + 1$.

<u>Exemple</u> 2 : Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$; $g(x) = \dfrac{1}{2x+3}$; $h(x) = (3x^2 + x + 2)^{2023}$; $k(x) = \sqrt{x^2+5}$;

$p(x) = \frac{x+2}{x-3} + 3$; $q(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2-x+1}$.

----

4. Signe de la dérivée et sens de variation d'une fonction sur un intervalle

Etudier le sens de variation d'une fonction f revient à étudier le signe de la dérivée $f' sur\ D_f$. En effet :

- si $f'(x) > 0$ sur un intervalle I_1 alors f est strictement croissante sur I_1 ;
- si $f'(x) < 0$ sur un intervalle I_2 alors f est strictement décroissante sur I_2 ;
- si $f'(x) = 0$ sur un intervalle I_3 alors f est constante sur I_3.

NB : A partir du sens de variation et des limites d'une fonction, on dresse un tableau de synthèse appelé tableau de variation de cette fonction.

Exemple

On donne la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

1) Justifier que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

2) Montrer que la dérivée de f est $f'(x) = 3x(x-2)$.

3) Etudier le signe de $f'(x)$.

4) En déduire le sens de variation de f.

5)a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

----

5. Application de la dérivée

En économie, pour un produit donné, q étant la quantité produite, on désigne par :

$\mathcal{C}(\mathrm{q})$ ou CT le coût de production ;

$\mathcal{C}$ la fonction coût ;

$\mathcal{C}_{\mathrm{m}}(\mathrm{q})$ ou $\mathcal{C}_{m}$ le coût marginal au niveau q ($\mathcal{C}_{\mathrm{m}}(\mathrm{q}) = \mathrm{C}'(\mathrm{q})$;

$\mathcal{C}_{\mathrm{M}}(\mathrm{q})$ ou $\mathcal{C}_{\mathrm{M}}$ le coût unitaire ou le coût moyen ($\mathcal{C}_{\mathrm{M}}(\mathrm{q}) = \frac{\mathcal{C}(\mathrm{q})}{\mathrm{q}}$) ;

La production est optimale lorsque $\mathcal{C}_{m} = \mathcal{C}_{\mathrm{M}}$.

Exemple

L'entreprise YIYA fabrique et vend un produit A. La fonction de coûts prévisionnels est

$$CT = 5Q^2 + 7Q + 20$$

1. Calculer la fonction de coûts moyens (C_{M}).
2. Calculer la fonction de coûts marginaux (C_{m}).
3. Déduire le volume de la production optimale.

Réponses : **1)** $\mathbf{C_M = \frac{CT}{Q}}$ **2)** $\mathbf{C_m = 10Q + 7}$ **3)** $\boldsymbol{\mathcal{C}_m = \mathcal{C}_M}$

A VOUS DE JOUER …

<u>Exercice 1</u> : QCM

1) L'équation de la tangente (T) au point d'abscisse x_0 à (C_f) est :

A) $y = f(x_0)(x - x_0) + f'(x_0)$.

B) $y = f(x_0)(x_0 - x) - f'(x_0)$.

C) $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

D) $y = f'(x_0)(x_0 - x) - f(x_0)$.

2) Le coefficient directeur de la tangente (T) d'équation $4y + 8x + 1 = 0$ à (C_f) est :

A) 2 ; B) -2 ; C) 4 ; D) 8.

3) On donne $f(x) = (2x+3)^{2022}$. $f'(x) =$

A) $(2x+3)^{2021}$ B) $2022(2x+3)^{2021}$ C) $4044(x+3)^{2021}$ D) $4044(2x+3)^{2021}$

4) Soit $f(x) = \frac{2}{x}$. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x_0 = 1$ est :

A) -2 B) 2 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{-1}{2}$

Exercice 2 : Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes définies par :

1) $f(x) = 4x^3 - 2x^2 - 5x + 8$;
2) $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$;
3) $f(x) = \frac{2}{5x+3}$;
4) $f(x) = (2x^2 + 7)^8$;
5) $f(x) = \frac{x^2+5x+7}{x-1}$;
6) $f(x) = \sqrt{3x^2 + x + 7}$.

Exercice 3 : Déterminer le nombre dérivé de f en $x_0 = 1$ des fonctions définies par :

1) $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$; 2) $f(x) = \frac{2}{5x+3}$; 3) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$.

Exercice 4 : Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x + 5$.

1) Justifier que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

2) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

3) Montrer que la dérivée de f est $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$.

4) Etudier le signe de $f'(x)$.

5) En déduire le sens de variation de f.

6) Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 5 : Soit $f(x) = x^2 - x + 2$.

Déterminer l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse $x_0 = 0$ à (C_f).

CHAPITRE 6 :

ETUDE ET REPRESENTATION GRAPHIQUE DES FONCTIONS

Les mathématiques doivent leur évolution récente aux nombreux développements et généralisations de la notion de fonction et à ses utilisations dans des domaines variés.
L'objet de ce chapitre consiste à initier l'apprenant au tracé des fonctions numériques notamment les variations et les études graphiques.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

Au terme de ce chapitre, chacun des apprenants, après avoir exploité les acquis de ce cours, devra être capable de :

- énumérer dans l'ordre les éléments du plan d'étude d'une fonction en se référant au cours ;
- étudier les variations d'une fonction donnée (polynôme ou rationnelle) ;
- tracer une fonction donnée en se référant à son tableau de variation ;
- déterminer graphiquement le nombre de solutions d'une équation du type $f(x) = m$.

NB : L'interprétation d'une courbe ne fera pas l'objet d'une évaluation.

1. Plan d'étude d'une fonction

Pour étudier et représenter graphiquement une fonction il faut :

1.1. Variations de la fonction

$$\left.\begin{array}{l} *\ ensemble\ de\ définition\ de\ la\ fonction \\ *\ dérivée\ de\ la\ fonction \\ *\ signe\ de\ \ la\ dérivée\ de\ la\ fonction \\ *\ sens\ de\ variation\ de\ la\ fonction \end{array}\right\} \textbf{Sens de variation de la fonction}$$

∗Limites aux bornes de l'ensemble de définition de f.
∗Tableau de variation de f.

1.2. Tracé de la courbe de la fonction

- Les droites particulières (asymptotes, tangentes).
- Les éventuels extrémums.
- Points remarquables (points d'intersection de la courbe avec les axes).

  - Intersection de la courbe de $\boldsymbol{f}$ avec l'axe des abscisses $(\boldsymbol{OI})$: $\boldsymbol{y = 0}$ $((\boldsymbol{Cf}) \cap (\boldsymbol{OI}))$
    On pose $y = 0$ et on tire x en résolvant l'équation $f(x) = 0$.
  - Intersection de la courbe de $\boldsymbol{f}$ avec l'axe des ordonnées $(\boldsymbol{OJ})$: $\boldsymbol{x = 0}$ $(\boldsymbol{Cf}) \cap (\boldsymbol{OJ})$

On pose $x = 0$ et on calcule $y = f\ (0)$.

- Tableau de valeurs.
- Tracé de la courbe.

2- ETUDE DE QUELQUES FONCTIONS

2.1. Fonctions polynômes

2.1.1- Etude de la fonction de type : $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

Sa courbe est appelée une parabole**.**

Exemple : $f(x) = -x^2 + 2x - 3$

1. Pourquoi l'ensemble de définition est $\mathbb{R}$?
2. Calculer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de f.
3. Montrer que la dérivée de f est $f'(x) = -2(x-1)$.
4. Etudier le sens de variation de f.
5. Etablir le tableau de variation de f.
6. Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes de coordonnées.
7. Tracer (C_f).

2.1.2- Etude de la fonction de type $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad avec \;\; a \neq 0$

Exemple

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + ax + b$ où a et b sont des nombres réels.

1) Déterminer a et b pour que f admette en -1 un extrémum égal à 4.
2) On donne $f(x) = x^3 - 3x + 2$.
   a) Pourquoi l'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R}$?
   b) Calculer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de f.
   c) Montrer que $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$; f' étant la dérivée de f. Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f .
   d) Etablir le tableau de variation de f et tracer sa courbe représentative.
   e) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m, m \in \mathbb{R}$.

2.2. <u>Fonctions rationnelles</u>

2.2.1- <u>Etude de la fonction de type :</u> $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ (fonction homographique)

Sa courbe est appelée une hyperbole.

<u>Exemple</u> :

On donne la fonction f définie par $f(x) = \frac{-2x+3}{x-1}$.

1) Montrer que l'ensemble de définition de f est $D_f =]-\infty\,;1[\cup]1\,;\,+\infty[$.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ <}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ >}} f(x)$.

En déduire les équations des éventuelles asymptotes à la courbe représentative de f.

3) Montrer que la dérivée f' de f est donnée par $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$ et en déduire le sens de variation de f.

4) Dresser le tableau de variation de f.

5) Tracer la courbe représentative de f après avoir tracé les asymptotes dans le même repère.

6) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = m, m \in \mathbb{R}$.

2.2.2- <u>Etude de la fonction de type</u> : $\boldsymbol{f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}}$ *avec* $a \neq \mathbf{0}$ $\boldsymbol{et\ d \neq 0}$

<u>Exemple</u> :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x}$

1) Montrer que l'ensemble de définition D de f est $\mathbb{R}^*$.

2) a) Montrer que $f'(x) = \frac{x^2+2}{x^2}$.

b) Quel est le signe de $f'(x)$ sur D. En déduire le sens de variation de f.

3)a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$.

4) Dresser le tableau de variation de f.

5) Soit (C) la courbe représentative de f dans un plan orthonormé (O, I, J).

a) Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x}$.

b) Montrer que la droite (Δ) $d'équation$ $y = x + 1$ est une asymptote à la courbe (C) de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

c) Préciser l'équation de l'autre asymptote.

6) Tracer les asymptotes et la courbe (C) dans un même repère.

2.2.3. <u>Etude de la fonction de type</u> : $\dfrac{\boldsymbol{ax+b}}{\boldsymbol{cx^2+dx+e}}$ $(\boldsymbol{a \neq 0}\ ;\ \boldsymbol{c \neq 0})$

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x}{x^2+3x+2}$, (C) sa courbe représentative.

1) Montrer que l'ensemble de définition de f est $D_f =]-\infty\,;\,-2[\cup]-2\,;-1[\cup]-1\,;\,+\infty[$.

2)a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Quelle conséquence graphique peut-on en déduire.

b) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)$

Quelles conséquences graphiques peut-on en déduire.

c) Démontrer que la dérivée de f est $f'(x) = \frac{2-x^2}{(x^2+3x+2)^2}$ puis dresser son tableau signe.

d) Dresser le tableau de variation de f sachant que $f(-\sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2} \approx 5,83$

et $f(\sqrt{2}) = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0,17$.

3) Construire (C) et ses asymptotes.

2.2.4 - Etude de la fonction de type : $\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$, $(a \neq 0\ ;\ d \neq 0)$

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2}{x^2+3x+3}$ et (C) sa courbe représentative.

1) Expliquer pourquoi l'ensemble de définition de f $D_f = \mathbb{R}$.

2)a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Montrer que la dérivée de f est $f'(x) = \frac{3x(x+2)}{(x^2+3x+3)^2}$.

c) Dresser le tableau de signe de $f'(x)$.

d) Etablir le tableau de variation de f.

3)a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 1$ est asymptote à (C).

b) Etudier la position relative de (C) et (D).

4) Tracer (C) et son asymptote.

Compléments sur l'étude des fonctions

1. La courbe (C_f) passe par $A(x_A; y_A)$ si et seulement si $f(x_A) = y_A$
2. La tangente au point A à (C_f) est parallèle à la droite (D) de coefficient directeur m si et seulement si $f'(x_A) = m$
3. La tangente au point A à (C_f) est parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si $f'(x_A) = 0$
4. La tangente au point A à (C_f) est perpendiculaire à la droite (D) de coefficient directeur m ($(D): y = mx + b$) si et seulement si $f'(x_A) \times m = -1$.
5. La courbe (C_f) est tangente à l'axe des abscisses si et seulement si $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f(x_0) = 0 \end{cases}$
6. La courbe (C_f) admet au point $A(x_A; y_A)$ une tangente de coefficient directeur m si et seulement si $\begin{cases} f'(x_A) = m \\ f(x_A) = y_A \end{cases}$
7. Pour trouver le point M où la tangente à la courbe au point M a pour coefficient directeur m on résout l'équation $f'(x) = m$.
8. Soit f une fonction polynôme du second degré. Pour trouver le point M où la tangente à la courbe au point M a pour équation $y = mx + b$, on résout l'équation :
   a) $f'(x) = m$
   b) L'équation du second degré $f(x) = mx + b$ admet la racine double c'est-à- dire $\Delta = 0$.
9. Pour résoudre graphiquement l'équation $f(x) = m, m \in \mathbb{R}$, il suffit de trouver le nombre de points d'intersections de la courbe (C_f) avec les droites parallèles à l'axe des abscisses.

A VOUS DE JOUER …

Exercice 1 QCM

Parmi les réponses proposées aux questions suivantes, une seule est juste. Choisir la bonne réponse.

1/ Le point $A(-1; 3)$ appartient à la courbe (C) de f si:

A. $f(-1) = 3$ B. $f'(-1) = 0$ C. $f(-1) = 0$ D. $f'(-1) = 3$

2/ La courbe d'une fonction polynôme du second degré est appelée :

A. $parabole$ B. $hyperbole$ C. $cercle$ D. $droite$

3/ La courbe de la fonction rationnelle $\frac{2x-1}{x+2}$ est appelée :

A. $parabole$ B. $hyperbole$ C. $cercle$ D. $droite$

4/ La fonction f définie par $f(x) = x^2 - 5$ est croissante sur :

A. $\mathbb{R}$ B. $[0\,;\,+\infty[$; C. $]-\infty\,;\,0]$ D. $[-5\,;\,+\infty[$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 + 5x - 8$

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
3. Vérifier que la dérivée de f est $f'(x) = 5(2x + 1)$.
4. Etablir le tableau de signe de la dérivée de f.
5. En déduire le tableau de variation de f.
6. Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes de coordonnées.
7. Tracer (C_f) dans un repère.

Exercice 3

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 12x + a$, où a est un nombre réel.

1. Déterminer a pour que la courbe de f passe par le point A(0 ; 2).
2. On admet pour la suite que $f(x) = -x^3 + 12x + 2$.
   a. Justifier que l'ensemble de définition D_f de f est $\mathbb{R}$.
   b. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   c. Montrer que $f'(x) = -3(x-2)(x+2)$, f' étant la dérivée de f.
   d. Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le sens de variation $de\ f$.
   e. Etablir le tableau de variation de f puis tracer sa courbe représentative.

Exercice 4

On donne la fonction g définie par $g(x) = \frac{-2x-3}{x+2}$.

1. Montrer que l'ensemble de définition de g est $D_g =]-\infty\,;\,-2[\cup]-2\,;\,+\infty[$.
2. Déterminer deux nombres réels a et b tels que $g(x) = a + \frac{b}{x+2}$.

3.a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire l'équation de l'asymptote horizontale à la courbe représentative de g.

b) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} g(x)$; $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} g(x)$. En déduire l'équation de l'asymptote verticale à la courbe représentative de g.

4. a) Montrer que la dérivée g' de g est donnée par $g'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2}$.
   b) En déduire le sens de variation de g.
5. Dresser le tableau de variation de g.

6. Montrer que le point $Q(-2\ ;\ -2)$ est un centre de symétrie de la courbe représentative de g.
7. Tracer la courbe représentative de g après avoir tracé les asymptotes dans le même repère.
8. Résoudre graphiquement l'équation $g(x) = m, m \in \mathbb{R}$.

Exercice 5

Soit la fonction $h(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 2}$.

1. Montrer que l'ensemble de définition de h est $D_h =]-\infty\ ;\ 2[\cup]2\ ;\ +\infty[$.

2.a. Calculer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} h(x)$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} h(x)$.

3. Etudier le sens de variations de h.
4. Compléter l'étude par le tableau de variation de h.
5. Déterminer les réels a ; b et c tels que $h(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$.

6.a. Montrer que (C_h) admet une asymptote oblique (D) dont on précisera l'équation.

b. Etudier la position relative de (C_h) par rapport à l'asymptote (D).

7. Justifier que (C_h) possède une deuxième asymptote dont on précisera la nature et l'équation.
8. Montrer que le point I d'intersection des asymptotes est centre de symétrie de (C_h).
9. Tracer les deux asymptotes et (C_h) dans un repère orthonormé.
10. Résoudre graphiquement l'équation $h(x) = m, m \in \mathbb{R}$.

Exercice 6

Soit f une fonction définie et dérivable sur $]1;\ +\infty[$ dont le tableau de variation incomplet est le suivant :

x	1		3		$+\infty$
$f'(x)$			0		
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$\frac{5}{2}$	↗	$+\infty$

Utiliser le tableau de variation de f pour :

1.a) Donner $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)$ et en déduire l'équation de l'asymptote verticale de (C_f).

b) Donner $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $f(3)$ et $f'(3)$.

2) Résoudre l'équation $f'(x) = 0$.

3) Compléter le tableau de variation de f.

4) Donner l'esquisse (allure) de la courbe dans un repère.

Exercice 7

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ et (C) sa courbe représentative.
1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $D_f =]-\infty\,;\,-2[\cup]-2\,;2[\cup]2\,;\,+\infty[$.
2. Déterminer deux nombres réels a et b tels que $f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$.
3. a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Déduire l'équation de l'asymptote horizontale de (C).
   b) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to -2 \\ <}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to -2 \\ >}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ <}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ >}} f(x)$. Déduire les équations des asymptotes verticales de (C).
4. Montrer que la dérivée de f est $f'(x) = \frac{-(x^2+4)}{(x^2-4)^2}$ puis étudier son signe.
5. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
6. Construire les asymptotes et la courbe (C).

Exercice 8

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3x^2+4x-3}{x^2-1}$ et (C) sa courbe représentative.
1. Montrer que $D_f =]-\infty\,;\,-1[\cup]-1\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$.
2. a. Calculer $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
   b. Montrer que $f'(x) = \frac{-4(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$
   c. Etudier le signe de $f'(x)$.
   d. Etablir le tableau de variation de f.
3. a. Montrer que la droite (D) d'équation $y = 3$ est une asymptote horizontale à (C). Etudier la position relative de (C) et (D).
   b. Justifier que (C) possède deux asymptotes verticales dont on donnera les équations.
   c. Préciser le point d'intersection de (C) avec l'axe des ordonnées.
4. Tracer les asymptotes et la courbe (C).

CHAPITRE 7 :
STATISTIQUE A UNE VARIABLE

La statistique qui était essentiellement descriptive à l'origine a évolué à partir du XVIe siècle vers l'analyse des données essentiellement grâce à l'astronomie. La statistique est une science qui étudie, élabore les méthodes de collectes, de traitement et d'analyse quantitative et qualitative des données pour la prise de décision. Les résultats de la statistique sont appelés des « ***statistiques*** ». Les statistiques désignent aussi les données chiffrées ou autres renseignements en grand nombre sur lesquels on applique la statistique. Nous allons étudier dans ce chapitre, le vocabulaire statistique (rappels), l'enquête et le dépouillement, les tableaux statistiques et la description numérique des séries statistiques à une variable.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

A la fin de ce chapitre, tout apprenant ayant exploité les acquis, devra être capable de :

- utiliser convenablement les concepts statistiques ;
- représenter graphiquement les effectifs ou les fréquences d'un caractère qualitatif, quantitatif discret ou continu ;
- représenter les courbes cumulatives ;
- réaliser le dépouillement à partir d'une série des données collectées ;
- calculer et interpréter les caractéristiques de tendance centrale et de dispersion à partir d'une série statistique.

1. Le vocabulaire statistique ou la terminologie de base

1.1. La Population statistique ou Univers statistique ou la collectivité statistique ou encore l'ensemble statistique

C'est l'ensemble sur lequel porte l'étude statistique.

Exemple :

- ✓ L'ensemble des élèves d'un lycée technique.
- ✓ L'ensemble des salariés d'une entreprise.
- ✓ L'ensemble des entreprises qui exercent dans un secteur d'activité.

1.2. Unité statistique ou Individu statistique

C'est un élément de la population statistique.

Exemple : Si on considère la population des élèves du lycée technique alors un élève de ce lycée est un individu statistique.

1.3. Le Caractère Statistique

C'est une propriété qui décrit l'unité statistique.

Le caractère peut être qualitatif ou quantitatif.

Exemple : L'âge, le sexe, le poids, la religion, la nationalité, la taille, la note des élèves, la situation matrimoniale, le salaire, le nombre d'enfants d'une famille, le temps, la couleur de la peau, etc.

1.3.1. Caractère quantitatif

C'est un caractère mesurable ou quantifiable.

Exemple : L'âge, le poids, la taille, la note de mathématiques générales, le salaire, le nombre d'enfants d'une famille, le temps de parcours des élèves de la maison à l'école, etc.

1.3.2. Caractère qualitatif

C'est un caractère non mesurable.

Exemple : Le sexe, la religion, la situation matrimoniale, la couleur de la peau, le temps qu'il fait (nuageux, ensoleillé, pluvieux, orageux …), etc.

1.4. Modalité statistique

C'est la valeur prise par chaque caractère pour un individu donné.

Exemple : Le sexe a deux modalités : masculin, féminin.

L'âge peut prendre plusieurs valeurs : 15 ans, 16 ans, 17 ans …

1.5. Variable statistique

Ce sont les valeurs qu'on attribue aux caractères quantitatifs.

Exemple : La taille, le poids, l'âge ; …

1.5.1. Variables discrètes ou discontinues

Elles ont des modalités sous forme de points (ou sous forme de valeurs isolées).

Exemple : Le nombre d'enfants par ménage : 2 ; 3 ; 4 ; …
La taille des élèves d'un lycée :1,50m ; 1,60m ; …

1.5.2. Variables continues

Elles ont des modalités sous forme d'intervalles appelés classes.
Exemple : La taille en mètre des élèves d'un lycée : [1,50 ; 1,60[; [1,60 ; 1,70[; …

1.6. Classe

C'est un groupe d'individus pour lequel le caractère prend la même valeur.
Les classes sont des intervalles de la forme $a - b$ ou bien $[a ; b[$ ou encore $a \leq x < b$.

- Le centre de la classe $[a\,;b[$ est noté c_i ou x_i ; $c_i = \frac{a+b}{2}$.
- L'amplitude de la classe $[a\,;b[$ est notée k_i ; $k_i = b - a$.
- La densité (d_i) d'une classe est le quotient de l'effectif de la classe par l'amplitude de cette classe.

$$\boxed{\boldsymbol{d_i = \frac{n_i}{k_i}}}$$

1.7. Effectif

C'est le nombre d'individus d'une modalité ou d'une classe. Il est noté n_i.

L'effectif total n ou N est le nombre total d'individus.

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_p = \sum_{i=1}^{p} n_i \quad où$$

$$\sum_{i=1}^{p} n_i = somme\ des\ n_i\ , i\ allant\ de\ 1\ \text{à}\ p.$$

- L'Effectif cumulé, noté N_i d'une modalité x_i (ou d'une classe donnée) est obtenu en additionnant successivement les effectifs de toutes les modalités ou de toutes les classes qui lui sont inférieurs ou supérieurs. On distingue :
  - ✓ l'effectif cumulé croissant ou ascendant noté $N_i \nearrow (ECC)$ et
  - ✓ l'effectif cumulé décroissant ou descendant noté $N_i \searrow (ECD)$.

1.8. Fréquence

C'est le quotient de l'effectif d'une modalité donnée (ou d'une classe donnée) par l'effectif total. Elle est notée f_i et est exprimée en valeur ou en pourcentage (%).

- Exprimée en valeur, $f_i = \frac{n_i}{n}$ avec $0 \leq f_i \leq 1$.
- Exprimée en pourcentage, $fi\ (\%) = \frac{n_i}{n} \times 100$ avec $0 \leq f_i(\%) \leq 100$.

$$La\ Fréquence\ totale, notée\ f\ ou\ F\ est\ f = \sum_{i=1}^{k} f_i\ .$$

- ✓ Si la fréquence est exprimée en valeur alors $f = 1$.
- ✓ Si la fréquence est exprimée en % alors $f = 100$.

La Fréquence cumulée notée F_i d'une modalité x_i (ou d'une classe donnée) est obtenue en additionnant successivement les fréquences correspondant à toutes les modalités ou à toutes les classes qui lui sont inférieures ou supérieures. On distingue $F_i \nearrow$; $F_i \searrow$.

$$F_i \nearrow (\%) = \frac{N_i \nearrow}{n} \times 100.$$

1.9. Distribution statistique ou série statistique

C'est un tableau de données statistiques regroupant le caractère, ses modalités ou ses classes et ses effectifs (ou ses fréquences).

1.10. Echantillon

C'est un sous ensemble représentatif de la population statistique.

Exemple : Un groupe d'élèves du LETP – L (une classe des élèves de 1G2 et 1G3 du lycée).

1.11. Recensement

C'est une enquête sur toute la population concernée.

Exemple 1 : Répartition d'un groupe d'élèves du LETP - L selon l'âge.

Age	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**Total**
Nombre d'élèves	2	1	5	6	3	2	1	20

1- Préciser la population étudiée, l'unité statistique, le caractère considéré et sa nature.
2- Déterminer la proportion d'élèves ayant 20 ans.
3- Déterminer le nombre d'élèves ayant au moins 20 ans.
4- Déterminer le nombre d'élèves ayant au plus 18 ans.
5- Calculer les fréquences de chaque modalité de cette série (en pourcentage).
6- Déterminer la proportion d'élèves ayant moins de 18 ans.

Exemple 2

Le devoir n°1 de mathématiques générales d'un groupe d'élèves du CND sacré – cœur a donné les résultats suivants :

Notes	**0-4**	**4-8**	**8-12**	**12-16**	**16-20**	**Total**
ni	3	7	8	5	2	25

1- Déterminer la population statistique, le caractère étudié et sa nature.
2- Calculer le nombre d'élèves ayant moins de 12.
3- Calculer le nombre d'élèves ayant au moins 4.
4- Déterminer le nombre d'élèves ayant plus de 12 sachant que 3 élèves ont 12.
5- Déterminer le nombre d'élèves ayant au plus 12 sachant que 3 élèves ont 12.
6- Déterminer le nombre d'élèves ayant une note comprise entre 4 et 16.

----

2. Enquête et dépouillement statistique

2.1. Enquête statistique

C'est une opération technique qui consiste à collecter les informations ou données statistiques.

Elle se fait par le biais de questionnaire. Il existe 2 types d'enquête :

- Le **sondage** ou l'**échantillonnage** ou encore l'**enquête partielle** qui est l'enquête sur une partie représentative de la population.
- Le **recensement** ou l'**enquête exhaustive** est l'enquête sur toute la population concernée. Ici on collecte les informations recherchées auprès de tous les individus de la population.

2.2. Dépouillement statistique

2.2.1. *Dépouillement d'un caractère qualitatif*

Exemple : Répartition d'un groupe d'élèves d'une classe de première G_3 selon le sexe :

H F F F H H F F H F F F H H H F F F F F F H avec F = femme ; H = homme.

Dépouiller ces résultats dans un tableau statistique.

2.2.2. *Dépouillement d'un caractère quantitatif*

2.2.2.1. *Dépouillement d'un caractère quantitatif discret*

Exemple

L'âge d'un groupe d'élèves de la classe de première G2 à l'IT NDE est donné comme suit :

19	20	20	17	21
20	17	21	19	22
19	20	20	18	20

Dépouiller ces résultats dans un tableau statistique.

2.2.1.1. *Dépouillement d'un caractère quantitatif continu*

Exemple

Voici le relevé du temps (en minutes) mis par les employés d'une entreprise de leur résidence au service :

8	25	15	12	16	5	40	25	28
34	45	5	10	16	25	15	12	5
70	40	12	25	8	25	30	46	18
8	6	18	48	35	42	16	16	25
12	28	44	58	22	15	72	44	10

Dépouiller les résultats obtenus en précisant le temps en classe d'amplitude 10 (la première classe est [0; 10[ ).

3. Tableaux statistiques et représentations graphiques

La collecte des données ne constitue qu'une étape préliminaire de l'analyse statistique. Sur la base des données collectées, l'on produit des tableaux et graphiques qui permettent aux gestionnaires de mieux visualiser les informations et de préparer à la prise de décision.

3.1. Tableaux statistiques

Ce sont des tableaux dans lesquels sont consignées les informations statistiques permettant de décrire un phénomène concret en un lieu précis et à une date bien déterminée.

Exemple : Confère tableau de répartition des élèves de LETP - L selon l'âge (exemple 1).

3.2. Représentations graphiques

Les représentations graphiques permettent généralement de visualiser la structure de la répartition des données d'une série statistique. Elles diffèrent selon ce que l'on désire montrer et selon la nature des variables (qualitative, quantitative discrète ou continue).

3.2.1. Cas d'un caractère qualitatif

Pour représenter graphiquement un caractère qualitatif, on utilise fréquemment des diagrammes circulaire (ou à secteurs), semi-circulaire, à bandes (ou en tuyaux d'orgue).

Exemple :

Répartition de 20 élèves du CRETFP-Kpalimé selon la profession de leurs pères.

Profession	**A**	**B**	**C**	**D**	**Total**
$\boldsymbol{n_i}$	3	8	7	2	20

Représenter :

a) le diagramme à bandes ou en tuyaux d'orgue.

b) le diagramme circulaire.

c) le diagramme semi-circulaire.

3.2.2. Cas d'un caractère quantitatif

3.2.2.1. Cas d'un caractère quantitatif discret

Pour représenter graphiquement un caractère quantitatif discret, on utilise fréquemment un diagramme en bâtons.

Exemple : Répartition d'un groupe d'élèves du LETP-Mango selon l'âge.

Age	16	17	18	19	20	21	22	Total
n_i	2	1	5	6	3	2	1	20

Représenter graphiquement le diagramme en bâtons.

3.2.2.2. Cas d'un caractère quantitatif continu

Pour représenter graphiquement un caractère quantitatif continu à amplitudes égales ou inégales, on utilise un histogramme.

a. Lorsque les amplitudes sont égales :

On représente directement le graphique sans aucun calcul au préalable.

Exemple : Répartition des PME selon le chiffre d'affaires en million de francs CFA.

Chiffre d'affaires	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24	Total
n_i	2	3	7	5	3	20

Tracer l'histogramme de cette série statistique.

b. Lorsque les amplitudes sont inégales :

Dans ce cas, on doit impérativement corriger les effectifs ou les fréquences avant de tracer l'histogramme. On peut procéder comme suit :

- calculer la densité d_i de chaque classe $d_i = \frac{effectif\ (n_i)\ de\ la\ classe}{amplitude\ (k_i)\ de\ la\ classe} = \frac{n_i}{k_i}$ dans une première colonne ;
- calculer l'effectif corrigé $n'_i = d_i \times k$ dans une deuxième colonne (k est la plus petite des amplitudes calculées) ;
- tracer l'histogramme, en portant sur l'axe des abscisses les classes et sur l'axe des ordonnées les $n'_i = d_i \times k$ (hauteur de chaque rectangle).

<u>Exemple</u> : Le tableau statistique suivant représente l'âge des individus d'un groupement agricole au Togo en 1985.

Age	**16-19**	**19-25**	**25-34**	**Total**
$\boldsymbol{n_i}$	3	14	33	50

Tracer l'histogramme de cette série.

3.2.3. <u>Le graphique cumulatif</u> (courbe des effectifs cumulés ou des fréquences cumulées).

Pour tracer **le graphique cumulatif croissant ou ascendant**, on place les points M d'abscisses les bornes supérieures des classes et d'ordonnées les $N_i \nearrow$ ou les $F_i \nearrow$ et le point M (X_{min} ; 0)

Pour tracer **le graphique cumulatif décroissant ou descendant**, on place les points M d'abscisses les bornes inférieures des classes et d'ordonnées les $N_i \searrow$ ou les $F_i \searrow$ et le point M (X_{max} ; 0)

<u>Exemple</u>

Répartition des entreprises selon le chiffre d'affaires en million de francs CFA

CA	5-10	10-20	20-40	40-50	50-60	Total
n_i	5	15	25	3	2	50

Tracer les courbes cumulatives croissante et décroissante dans le même repère.

----

4. Description numérique des séries (variables) à une dimension

Les tableaux et les graphiques statistiques permettent de visualiser les distributions statistiques.
Pour prendre une décision économique, les images fournies par ce tableau statistique doivent être soumises à un traitement préliminaire. Le traitement le plus simple consiste à calculer les caractéristiques numériques des variables. Ces caractéristiques sont de plusieurs ordres :

- Les caractéristiques de tendance centrale ou de position (la moyenne arithmétique, la médiane, le mode et les quartiles) ;
- Les caractéristiques de variation ou de dispersion (l'étendue, l'écart - type, la variance et le coefficient de variation).

4.1. Les caractéristiques de tendance centrale ou de position

4.1.1. *Le Mode ou la dominante*

4.1.1.1. Définition

Le mode est la valeur de la variable qui correspond à l'effectif le plus élevé ou qui correspond à la fréquence la plus élevée.

Autrement dit c'est la valeur de la variable la plus observée ou la plus dominante. Il est noté M_o .

4.1.1.2. Détermination du mode dans le cas d'une variable discrète

Exemple

Répartition d'un groupe d'élèves du CND Sacré – Cœur selon l'âge.

Age	16	17	18	19	20	21	22	Total
Nombre d'élèves	2	1	5	6	3	2	1	20

a. Déterminer le mode.

b. Interpréter le résultat.

4.1.1.3. Détermination du Mode dans le cas d'une variable continue à amplitudes égales

Dans ce cas il faut :

- déterminer la classe modale qui correspond à l'effectif le plus élevé ou la fréquence la plus élevée ;
- déterminer le mode qui est le centre de la classe modale $[a\,;b[$: $M_o = \frac{a+b}{2}$.

Exemple : Répartition des clients d'un magasin selon l'âge.

Age	**20-30**	**30-40**	**40-50**	**50-60**	**60-70**	**Total**
Nombre clients	40	55	30	15	10	150

a) Déterminer le mode.

b) Interpréter le résultat.

4.1.1.4. Détermination du mode dans le cas d'une variable continue à amplitudes inégales

Dans ce cas, il faut :

- corriger les effectifs ou les fréquences ;
- déterminer la classe modale qui correspond à l'effectif corrigé le plus élevé ou à la fréquence corrigée la plus élevée ;
- déterminer le mode qui est le centre de la classe modale $[a\,;b[$: $M_o = \frac{a+b}{2}$.

NB : $effectif\ corrig\text{é} = \dfrac{effectif\ de\ la\ classe \times la\ plus\ petite\ des\ amplitudes}{amplitude\ de\ la\ classe}$

$\boldsymbol{n'_i = \dfrac{n_{i \times k}}{k_i} = d_i \times k}$**, avec $\boldsymbol{k}$ la plus petite amplitude.**

Exemple

Répartition d'un groupe d'entreprises au Togo selon le chiffre d'affaires (CA) en million de francs CFA.

CA	0-2	2-6	6-10	10-12	12-14	Total
n_i	2	6	12	8	2	30

a) Déterminer la classe modale.

b) Déterminer le mode.

c) Interpréter le résultat précédent.

Remarque : Les effectifs corrigés sont utilisés uniquement pour :

- calculer le mode ;
- tracer l'histogramme.

4.1.2. *La Moyenne arithmétique*

Définition

La moyenne d'une série statistique d'effectif total n ou N est le nombre réel noté $\bar{X}$, défini par :

- moyenne simple : $\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$;
- moyenne pondérée : $\bar{X} = \frac{\sum X_i n_i}{n} = \frac{X_1n_1+X_2n_2+\ldots+X_kn_k}{n}$ ou $\bar{X} = \frac{\sum X_i f_i}{f}$.

  NB : Pour une série regroupée en classes, les X_i sont les centres des classes.

Exemple 1

On donne les notes de Mathématiques Générales d'un groupe de cinq élèves : 16 ; 4 ; 7 ; 12 ; 15. Calculer la moyenne arithmétique de cette série statistique et l'interpréter.

Exemple 2

Consommation quotidienne du gombo d'un groupe de 12 familles à Atakpamé.

$X_i(g)$	200	300	400	500	Total
Nombre de familles	1	2	4	5	12

a) Calculer la moyenne arithmétique de cette série statistique.

b) Interpréter le résultat.

Exemple 3

Répartition des ouvriers d'une entreprise de Sokodé selon le salaire mensuel en kilo francs (ou en milliers de francs).

Salaire	10-20	20-30	30-40	40-50	Total
Nombre d'ouvriers	2	8	10	5	25

a) Calculer le salaire moyen.

b) Interpréter le résultat.

Exemple 4 :

Répartition des ouvriers d'une entreprise de Sokodé selon le salaire mensuel en kilo francs (ou en, milliers de francs).

Salaire	**10-20**	**20-30**	**30-40**	**40-50**	**Total**
Proportions d'ouvriers (f_i%)	8	32	40	20	100

Calculer le salaire moyen et l'interpréter.

4.1.3. La Médiane ou la moyenne de position

4.1.3.1-Définition

On appelle médiane tout nombre réel qui partage la série en deux parties d'effectifs égaux. Elle est notée M_e .

4.1.3.2-Détermination de la médiane dans le cas de données non pondérées (ou données simples)

Dans ce cas, il faut préalablement ranger la série statistique.

- **Cas d'un nombre impair d'observations**

Exemple : Soit la note de mathématiques générales de 7 élèves : 1 ; 8 ; 10 ; 2 ; 14 ; 15 ; 13.

Déterminer la médiane de cette série.

- **Cas d'un nombre pair d'observations**

Exemple: Soit la note de Math géné de 6 élèves : 1 ; 8 ; 10 ; 2 ; 14 ; 15.

Déterminer la médiane de cette série.

Remarque : Dans ce cas, la médiane n'est pas une valeur de la série statistique.

4.1.3.3- Détermination de la Médiane dans le cas d'une variable discrète.

Dans ce cas, la médiane est la valeur de la variable qui correspond au 1er effectif cumulé croissant directement supérieur à la moitié de l'effectif total.

<u>Exemple</u> : Répartition d'un groupe d'élèves de LETP - Kantè selon le nombre de frères ou sœurs.

Nombre de frères et ou sœurs	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**Total**
n_i	2	6	8	4	5	25

Déterminer la médiane de cette série.

4.1.3.4-<u>Détermination de la médiane dans le cas d'une variable continue</u>

Dans ce cas, on détermine **la classe médiane** (qui correspond au 1er effectif cumulé croissant directement supérieur à la moitié de l'effectif total).

<u>**NB**</u> : la moitié de l'effectif total est appelé le rang de la médiane.

On détermine la médiane en utilisant l'**interpolation linéaire.**

<u>Exemple 1:</u>

Répartition d'un groupe de PME selon le chiffre d'affaires (CA) en milliers de francs CFA

CA	**4-6**	**6-8**	**8-10**	**10-12**	**Total**
n_i	2	8	4	2	16

a. Déterminer la classe médiane.
b. Calculer le chiffre d'affaires médian.
c. Interpréter le résultat.

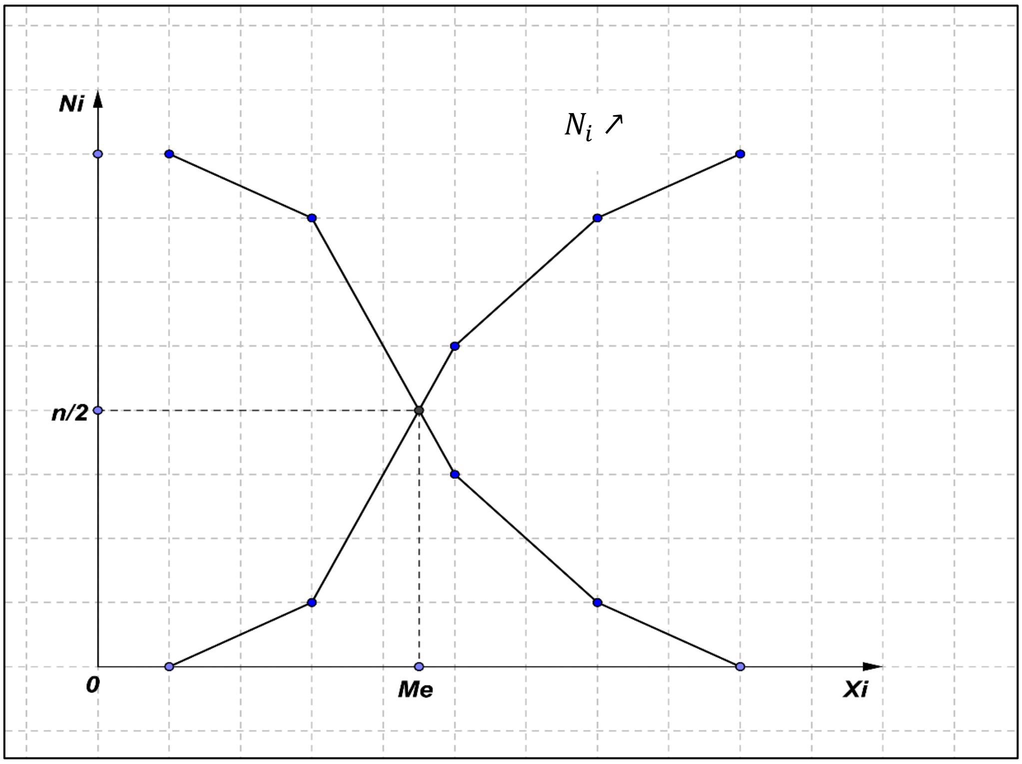
<u>Exemple 2</u> : Reprendre les mêmes questions que précédemment avec le tableau suivant :

CA	**4-6**	**6-8**	**8-10**	**10-12**	**Total**
Proportion de PME (f_i%)	12,5	50	25	12,5	100

4.1.3.5-Détermination graphique de la médiane

On peut déterminer graphiquement la médiane (M_e) à partir des courbes cumulatives.

$N_i \searrow$



4.1.4-Les Quartiles

Le Calcul des quartiles est similaire à celui de la médiane. Les quartiles sont les valeurs de la variable (Q_1, Q_2, Q_3) qui divisent la série en 4 parties égales.

Ecart interquartile (E_Q ou I_Q)

C'est la différence entre le quartile supérieur et le quartile inférieur. $E_Q = Q_3 - Q_1$

Exemple

Répartition d'un groupe d'employés d'une entreprise de Dapaong selon le salaire mensuel (en milliers de francs CFA).

Salaire mensuel	**160-165**	**165-170**	**170-175**	**175-180**	**180-185**	**Total**
n_i	3	12	21	10	4	50

a) Calculer et interpréter le premier quartile (Q_1), le deuxième quartile (Q_2) et le 3ème quartile (Q_3).

b) Calculer l'écart interquartile.

4.2. Les Caractéristiques de dispersion ou de variation

4.2.1. Etendue ou intervalle de variation

C'est la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale de la série.

$$e = X_{max} - X_{min}$$

4.2.2. Variance

C'est la moyenne du carré des écarts entre la variable et sa moyenne. Elle est notée V_X .

- Dans le cas de données simples :

$$V_X = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{N}$$

- Dans le cas de données pondérées :

$$V_X = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2 n_i}{N} \quad ou \quad V_X = \frac{\sum(x_i - \bar{X})^2 f_i}{f}$$

NB : Formule simplifiée de la variance

Pour des besoins de calculs, on a recours à une formule simplifiée de la variance.

La variance d'une variable est la différence entre la moyenne des carrées de la variable et le carré de la moyenne de la variable.

- Dans le cas de données simples : $V_X = \overline{X^2} - (\bar{X})^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2$
- Dans le cas de données pondérées :

$$V_X = \overline{X^2} - (\bar{X})^2 = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\bar{X})^2 \quad ou \quad V_X = \frac{\sum x_i^2 f_i}{f} - (\bar{X})^2$$

4.2.3. Ecart - type

C'est la racine carrée de la variance. Il est noté σ_X .

$$\sigma_X = \sqrt{V_X}$$

Interprétation

Prenons par exemple la répartition des entreprises selon le chiffre d'affaires (CA) en millions de francs.

Si $\sigma_X = 0{,}5$ on dit que le CA varierait de 500 000 F d'une entreprise à l'autre.

4.2.4. Coefficient de variation

C'est le rapport entre l'écart-type et la moyenne. Il est noté $Cv_{(X)}$ ou Cv_X.

$$Cv_X(\%) = \frac{\sigma_X}{\bar{X}} \times 100$$

Interprétation

- Si $Cv_X \leq 33{,}33\%$ alors on dit que la population étudiée est homogène.
- Si $Cv_X > 33{,}33\%$ alors on dit que la population étudiée est hétérogène.

Exemple 1 : Répartition d'un groupe d'entreprises de Kara selon le chiffre d'affaires (CA) en millions de francs CFA.

CA	2-6	6-8	8-10	10-12	Total
n_i	4	6	8	2	20

a. Calculer l'étendue, la variance.

b. Calculer et interpréter l'écart – type et le coefficient de variation.

Exemple 2 : Reprendre les mêmes questions que précédemment avec le tableau suivant :

CA	**2-6**	**6-8**	**8-10**	**10-12**	**Total**
Proportion d'entreprises (f_i%)	20	30	40	10	100

A VOUS DE JOUER…

Exercice 1 : Questions de cours

A/ Définir les termes suivants :

Population ; individu statistique ; caractère statistique ; modalité statistique ; fréquence ; effectif.

B/ Donner la nature des caractères suivants :

L'état matrimonial ; le salaire mensuel ; le chiffre d'affaires ; la tension artérielle ; la taille ; la couleur des yeux ; la marque de véhicule ; le poids ; la durée de vie ; la catégorie socioprofessionnelle ; la profession d'une personne.

C/QCM

Choisir la bonne réponse parmi les quatre propositions :

1) Soit la note de Math-Géné. de 8 élèves : 10 ; 7 ; 5 ; 18 ; 17 ; 8 ; 2 ; 12.

Sa médiane est :

A) 9 B) 10 C) 12 D) 18.

2) La fréquence totale en pourcentage est :

A) 1 B) 100 C) 10 D) 1000.

Exercice 2 : Dans un centre de transfusion sanguine, les résultats prélevés auprès de 40 patients selon leur groupage (A ; B ; AB ; O) sont les suivants :

A	A	A	AB	B	A	B	AB
O	O	A	AB	O	A	O	A
AB	B	O	O	B	B	O	A
AB	AB	AB	A	A	A	A	A
B	A	B	O	AB	AB	B	AB

1- Faire le dépouillement de ces résultats dans un tableau statistique.
2- Calculer la fréquence pour chaque modalité.
3- Dessiner le diagramme à bande (diagramme à colonnes ou à tuyaux d'orgues).
4- Dessiner le diagramme circulaire.

Exercice 3 : Les résultats consignés dans le tableau ci-dessous représentent la répartition de 1000 individus selon le sport pratiqué au sein d'un club sportif.

Ces résultats sont obtenus à la suite d'une enquête statistique effectuée auprès de ces individus.

Activités sportives	Marche	Saut en hauteur	Lancer de poids	Natation	Escrime
Fréquence simple en %	15		30	40	10

1- Définir les mots soulignés.
2- Faire le diagramme circulaire.
3- Dessiner le graphique à bandes (ou à tuyaux d'orgue).
4- Donner la proportion f_2 des individus qui pratiquent le saut en hauteur.
5- Quel est l'effectif n_4 de ceux qui pratiquent la natation.

Exercice 4 : Après un devoir de mathématiques, l'enseignant dresse un tableau des notes obtenues par les élèves d'une classe de première :

Notes	5	6	8	9	10	11	12	13	14	15	17	18	19
Effectif	4	1	3	4	1	2	4	2	4	4	1	3	1

1- Quel est l'effectif total de cette série ?
2- Compléter le tableau par l'effectif cumulé croissant (ECC) et l'effectif cumulé décroissant (ECD).
3- Combien d'élèves ont au moins 10 ?
4- Combien d'élèves ont au plus 12 ?
5- Combien d'élèves ont plus de 13 ?
6- Combien d'élèves ont moins de 9 ?
7- Calculer la moyenne $\bar{X}$ de cette série.

Exercice 5 : Soit la répartition des entreprises commerciales de Lomé selon le chiffre d'affaires (CA).

CA	0 - 4	4 - 8	8 – 12	12 – 16	16 – 20
Effectif	3	7	8	5	2

1- Calculer la fréquence de chaque modalité.
2- Compléter le tableau par :
   a) les effectifs cumulés croissants (ECC).
   b) les effectifs cumulés décroissants (ECD).
   c) les fréquences cumulées croissantes (FCC) en pourcentage.
   d) les fréquences cumulées décroissantes (FCD) en pourcentage.
3- Quelle est la classe modale ?
4- Calculer le mode (M_O) de cette série.
5- Calculer le chiffre d'affaires moyen $\bar{X}$.
6- Tracer l'histogramme de cette série.

Exercice 6 :
Soit ci-dessous la répartition d'un groupe d'élèves selon l'âge.

Age	15	16	17	18	19
Effectif	20	10	50	60	30

1- Quel est l'effectif total des élèves du groupe ?
2- Quelle est la proportion des élèves ayant 15 ans ?
3- Quel est le nombre des élèves ayant moins de 18 ans ?
4- Déterminer la fréquence de chaque modalité.
5- Déterminer : ECC ; ECD ; FCC(%) ; FCD(%).
6- Quel est l'âge modal (M_o) de cette série ?
7- Quel est l'âge moyen $\bar{X}$ de cette série ?
8- Dessiner le diagramme en bâtons de cette série.

Exercice 7 : Soit une série de notes de Math-Géné des élèves de la première G_2 du LETP-Attiégou.

10	8	6	17	16	12
4	15	14	1	7	7
6	14	10	10	14	19
3	10	19	12	2	6
17	4	9	13	5	2

1-
   a- Effectuer le dépouillement dans un tableau statistique.
   b- Déterminer le mode (M_o) et la moyenne $\bar{X}$ de x cette série.

2-
   a- Effectuer un nouveau dépouillement en considérant 5 classes d'égale amplitude 4. La première classe étant : [0 ; 4[.
   b- Tracer l'histogramme de cette nouvelle série.
   c- Calculer le mode (M_o) et la moyenne $\bar{X}$ de cette série.

Exercice 8 :
Le tableau suivant représente le relevé des tailles d'un groupe d'élèves.

Taille (Cm)	Effectif	Fréquence	Fréquences cumulées
160 – 170	54		18
170 – 180			77
180 – 190			95
190 – 200			100

1- Compléter le tableau.
2- Déterminer l'amplitude de chaque classe.
3- Déterminer la classe modale et calculer la taille modale.
4- Déterminer les centres de classes.
5- Calculer la taille moyenne $\bar{X}$.
6- Tracer l'histogramme de cette série.
7- Déterminer :
   - la variance : $V(X)$;
   - l'écart type : $\sigma(X)$;
   - le coefficient de variation $CV(X)$.

Exercice 9 :
La répartition des salaires des employés d'une entreprise est donnée dans le tableau suivant :

Salaire	Centre de classe	f_i %	n_i %	$N_i \uparrow$
3000 – 3800		5		
3800 – 4200		8,5		
4200 – 4600		23,75		
4600 - ?		25		
? - ?	5400			
5800 - 7000		6,75		400

1- Recopier et compléter le tableau.
2- Tracer l'histogramme de cette série.
3- Combien d'employés ont un salaire inférieur à 4 600 F
4- Calculer la moyenne, la médiane et le mode de cette série.

Exercice 10 :
Le tableau suivant représente le relevé de taille. Compléter le tableau et calculer la moyenne.

Taille (cm)	n_i	f_i	$F_i \uparrow$
160 – 170	54		0,18
170 – 180			0,77
180 – 190			0,95
190 – 200			1
Total			-

Exercice 11 :
On donne la distribution suivante où x et y sont des réels.

Classe	0 - x	x – 20	20 – 40	40 – 70	70 – y
Effectif	16	30	18	10	6

1- Sachant que la médiane est égale à 18, calculer x.
2- Calculer y sachant que x = 10 et la moyenne de la série 26,625.

Exercice 12 :

Age	16 – 19	19 – 25	25 – 34	Total
Effectif	x	14	y	50

Le tableau ci-dessus représente l'âge des individus d'un groupement agricole.
1- Sachant que l'âge moyen des 50 individus est de 26,68 ans, déterminer x et y.
2- Dans la suite on pose $x = 3$ et $y = 33$. Tracer l'histogramme de cette série.

Exercice 13 : Soit le bénéfice des entreprises de Lomé en millions de francs.

Bénéfice	20 – 40	40 – 80	80 – 100	100 – 160
Effectif	20	80	60	60

1- Compléter le tableau par les effectifs cumulés croissants et décroissants.
2- Calculer et interpréter : la moyenne, la médiane, le mode de cette série.
3- Calculer et interpréter le 1er quartile et le 3^{e} quartile de cette série.
4- Tracer l'histogramme de cette série.

CHAPITRE 8 :

LES SUITES NUMERIQUES

Ce chapitre vise chez l'apprenant l'approfondissement des connaissances antérieures sur les suites numériques, la découverte de nouveaux termes et l'acquisition de nouvelles connaissances.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

Au terme de ce cours, chaque apprenant en exploitant les acquis de ce cours, devrait être capable de :

- calculer les termes d'une suite définie par une formule explicite ou une relation de récurrence ;
- établir le sens de variation d'une suite donnée ;
- reconnaître ou montrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique ;
- calculer le terme d'indice n d'une suite arithmétique ou géométrique ;
- calculer une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique ;
- utiliser les suites numériques pour résoudre des problèmes concrets : placement de capitaux.

1. Généralités

1.1. <u>Définition</u>

Une suite numérique est une application définie de ℕ ou d'une partie de ℕ vers ℝ.

- La suite numérique V est notée (V) ou bien (V_n) ou encore $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- Le terme général de la suite (V_n) est noté V_n , un terme quelconque est noté V_i(i est l'indice du terme V_i).
- Les termes consécutifs sont les termes qui se suivent
- Le terme de base ou terme de départ ou encore le terme initial est le premier terme (par exemple V_0)
- Le nombre de termes (ou le rang de la suite) est la différence entre l'indice du premier terme et l'indice du dernier terme augmenté de 1 (c'est la différence des indices extrêmes +1).

1.1.1. <u>Suite définie par une formule explicite</u>

Une suite peut être définie par une formule explicite (claire) lorsque son terme général V_n dépend de n.

<u>Exemple</u> : $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ $v : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$n \longmapsto u_n = n + 2$ $\qquad$ $n \longmapsto v_n = \frac{2n+3}{n^2+1}$

Calculer les trois premiers termes de chaque suite.

1.1.2. <u>Suite définie par une formule implicite ou récurrente</u>

Une suite peut être définie par une formule implicite ou récurrente lorsque son terme général dépend terme précédent.

<u>Exemple</u> : $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}: \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 3U_n + 2 \end{cases}$; $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}: \begin{cases} V_0 = 2 \\ V_1 = 4 \\ V_{n+1} - 2V_n + 3V_{n-1} = 0 \end{cases}$

Calculer les trois premiers termes de chaque suite.

1.2. Sens de variation ou monotonie d'une suite $(\mathrm{U_n})$

Etudier le sens de variation de la suite (U_n) revient à chercher le signe de $U_{n+1} - U_n$.

En effet :

- ✓ Si $U_{n+1} - U_n > 0$ alors la suite (U_n) la suite est strictement croissante ;
- ✓ Si $U_{n+1} - U_n < 0$ alors la suite U_n est strictement décroissante ;
- ✓ Si $U_{n+1} - U_n = 0$ alors la suite (U_n) est constante ou stationnaire.

Remarque : Si tous les termes de la suite sont strictement positifs, alors pour étudier le sens de variation de cette suite ; on pourra aussi comparer le rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ à 1.

En effet,

- ➢ si $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ alors la suite est une suite (U_n) est strictement croissante ;
- ➢ si $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ alors la suite(U_n) est strictement décroissante ;
- ➢ si $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$ alors la suite (U_n) est constante ou stationnaire.

<u>Exemple</u> : On considère les suites suivantes : $a)$ (U_n): $U_n = 7n + 3$; $b)$ (V_n): $V_n = 3.2^n$; $c)(W_n)$: $W_n = \frac{2}{n+3}$.

Etudier la monotonie de $(U_n), (V_n)$ et de (W_n).

2. SUITE ARITHMETIQUE - SUITE GEOMETRIQUE

2.1. <u>Suite Arithmétique $(\boldsymbol{U_n})$ de raison $\boldsymbol{r}$ $(\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^*)$</u>

2.1.1. <u>Définition</u>

La suite (U_n) est arithmétique si : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = r$ ou bien $U_{n+1} = U_n + r$.

2.1.2. <u>Monotonie d'une suite arithmétique</u>

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.

- Si $r > 0$ alors la suite (U_n) est strictement croissante.
- Si $r < 0$ alors la suite (U_n) est strictement décroissante.
- Si $r = 0$ alors la suite (U_n) est stationnaire.

2.1.3. Expression du terme général d'une suite arithmétique

Soit (U_n) une suite arithmétique de premier terme $\boldsymbol{U_p}$ et de raison r.

Le terme général de la suite $(\boldsymbol{U_n})$ en fonction de $\boldsymbol{n}$ est $U_n = U_p + (n-p)r$.
Si le premier terme est U_0 alors on a $U_n = U_0 + nr$.

2.1.4. Relation entre trois termes consécutifs $(U_{n-1}\,;U_n\,;U_{n+1})$ d'une suite arithmétique

$$\boldsymbol{U_1 - U_0 = U_2 - U_1 \Rightarrow 2U_1 = U_0 + U_2 \Rightarrow U_1 = \frac{U_0 + U_2}{2}}$$

$$\boldsymbol{U_{n-1} + U_{n+1} = 2U_n \quad \Rightarrow \quad U_n = \frac{U_{n-1} + U_{n+1}}{2}}$$

2.1.5. Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétiques $(\boldsymbol{U_n})$

Soit S_n cette somme. $S_n = U_a + U_{a+1} + U_{a+2} + \cdots + U_n$.

Par définition,

$$S_n = \left[\frac{\textit{premier terme+dernier terme}}{2}\right] \times (\textbf{\textit{nombre de termes}})$$

$$\boldsymbol{S_n} = \left[\frac{U_a + U_n}{2}\right] \boldsymbol{(n - a + 1)}$$

Cas particulier : $S = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ et $S' = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n$

Exemple

Soit $(U_n) : U_n = 5n - 2$, avec n $\in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que (U_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison r.

2. Calculer le dixième terme de (U_n).

3. On donne $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ et $S' = U_1 + U_2 + \cdots + U_{99}$

a) Calculer S_n en fonction de n.

b) Calculer S'.

2.1.6. Application des suites arithmétiques : intérêt simple

Exemple

Au mois de novembre 2013, l'imprimerie Fafa imprime 2 100 livres par mois. Le directeur décide d'augmenter les cadences de 250 livres par mois. On note U_0 le nombre de milliers de livres imprimés au mois de novembre 2013 et U_n le nombre de livre imprimés n mois plus tard.

1) Donner la valeur de U_0 et calculer U_1 et U_2.

2) Montrer que $U_{n+1} = U_n + 250$ et en déduire que (U_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

3) Montrer que $U_n = 2100 + 250n$.

4) Quel sera le nombre de livres imprimés en fin juin 2014 ?

5) On pose $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$.

Exprimer S_n en fonction de n.

6) Combien de livres seront imprimés par la société jusqu'en fin d'année 2016 ?

7) A partir de quel mois de quelle année, la production annuelle est-elle supérieure à 5 900 livres ?

2.2. Suites géométriques $(\mathbf{V_n})$ de raison q $\left(\mathbf{q} \in \left]-\mathbf{1}\,;\, +\infty\right[-\{\mathbf{0}\}\right)$

2.2.1. Définition

La suite $(V_n)_{n \in IN}$ est géométrique si pour tout $n \in IN$, $\frac{V_{n+1}}{V_n} = q$ ou

bien $V_{n+1} = qV_n$.

2.2.2. Monotonie d'une suite géométrique (q > 0)

- Si $q \in \left]0\,;\,1\right[$ alors la suite (V_n) est strictement décroissante.
- Si $q > 1$ alors la suite (V_n) est strictement croissante.
- Si $q = 1$ alors la suite (V_n) est constante.

2.2.3. Expression du terme général d'une suite géométrique

Soit $(\boldsymbol{V_n})$ une suite géométrique de premier terme $\boldsymbol{V_p}$ et de raison q.
Le terme général de la suite $(\boldsymbol{V_n})$ est donné par $\boldsymbol{V_n = V_p\ q^{n-p}}$.

Si le premier terme est V_0, alors on a $\boldsymbol{V_n = V_0\, q^n}$.

2.2.4. Relation entre trois termes consécutifs $V_{n-1}; V_n; V_{n+1}$ d'une suite géométrique

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{V_2}{V_1} \Longrightarrow V_1^2 = V_0 \times V_2.$$

Donc $V_n^2 = V_{n-1} \times V_{n+1}.$

2.2.5. Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Soit S_n cette somme.

$S_n = V_{\mathrm{a}} + V_{\mathrm{a}+1} + V_{\mathrm{a}+2} + \cdots + V_n$

Par définition

$$S_n = V_a \left[\frac{1-q^{n-a+1}}{1-q}\right], \text{ avec } q \neq 1$$

$$S_n = (1er\ terme)\left[\frac{1-(Raison)^{nbre\ de\ termes}}{1-Raison}\right]; \quad \text{avec raison} \neq 1.$$

- ✓ Si $q = 1$ alors $S_n = V_{\mathrm{a}} \times (n - \mathrm{a} + 1)$

  $S_n = 1er\ terme \times nombre\ de\ termes.$

Cas particuliers : - $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$ **donc** $S_n = V_0\left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right]$, avec $q \neq 1$

Si $q = 1$ alors $S_n = V_0\,(n+1).$

- $S'_n = V_2 + V_3 + \cdots + V_n$ **donc** $S'_n = V_2\left[\frac{1-q^{n-1}}{1-q}\right]$; avec $q \neq 1.$

Si $q = 1$ alors $S'_n = V_2\,(n-1).$

Exemple

On donne $V_n = 7^n, \quad n \geq 2.$

1) Calculer le 1^{er} terme et le $10^{ème}$ terme.

2) Monter que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

3) On donne $S_n = V_2 + V_3 \ldots + V_{n+1}$ et $S' = V_2 + V_2 + \cdots + V_{100}$.

a) Calculer S_n en fonction de n.

b) Calculer S'.

2.2.6. Application des suites géométriques : intérêt composé

Exemple

Une voiture achetée à 5 000 000F CFA en l'an 2000 a perdu chaque année 20% de sa valeur. On désigne par U_n la valeur de cette voiture en l'an 2000+n.

1- Montrer que la valeur de la voiture en l'an 2001 est $U_1 = 4\ 000\ 000 F\ CFA$.
2- Donner la valeur de cette voiture en l'an 2002 puis en l'an 2003.
3-
   a- Montrer que $U_{n+1} = 0{,}8 U_n$.
   b- Déduire l'expression de U_n en fonction de n.
4- Quelle est alors la valeur de cette voiture en cette année 2017 ?
5- On pose $S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$. Exprimer S_n en fonction de n.

A VOUS DE JOUER …

Exercice 1 : QCM

1) On considère la suite U définie par son terme général $U_n = -2n + 3$.

U est une suite arithmétique de raison :

A) -2 B) 2 C) 1 D) 3.

2) On considère la suite U définie par son terme général $U_n = -3n + 2$.

U est une suite :

A) strictement croissante B) strictement décroissante C) constante D) stationnaire.

3) On considère la suite U définie par son terme général $U_n = 2^{n+2}$.

U est une suite géométrique de raison :

A) 4 B) 2 C) -2 D) $\frac{1}{2}$

4) On considère la suite U définie par son terme général $U_n = 3 \times 2^{n+2}$.

La suite U est :

A) croissante B) stationnaire C) décroissante D) constante.

Exercice 2

Soit (U_n) une suite numérique définie par $U_0 = 6$ et pour tout entier naturel n,

$U_n = \frac{1}{3}U_{n-1} - 2$.

1- Calculer les trois premiers termes de cette suite.
2- Soit (V_n) la suite définie pour tout entier naturel n, $V_n = U_n + 3$.
   a- Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b- Exprimer V_n en fonction de n.
   c- Calculer $S_n = V_0 + V_1 + \dots\dots + V_n$.
   d- Exprimer U_n en fonction de n.
   e- Calculer $S'_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots \dots + U_n$.

Exercice 3

Soit (U_n) la suite numérique définie par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \frac{1}{4}U_n + 3$.

1- Calculer U_1 , U_2 et U_3
2- On pose $V_n = U_n - 4$ pour $n \in \mathbb{N}$
   a- Montrer que la suite (V_n) est géométrique dont on précisera le 1er terme et la raison q.
   b- Exprimer V_n en fonction de n.
   c- Exprimer U_n en fonction de n.
3- On pose $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \ldots \ldots + V_n$ et $S'_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots \ldots \ldots + U_n$.
   a- Calculer S_n en fonction de n.
   b- Calculer S'_n en fonction de n.

Exercice 4

1- On donne la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 7 \\ U_{n+1} = U_n - 5 \end{cases}$
   a- Calculer U_1, U_2, U_3 et U_4.
   b- Vérifier que (U_n) est une suite arithmétique de raison $r = -5$.
   c- En déduire l'expression de U_n en fonction de n.
   d- Calculer la somme : $S = U_0 + U_1 + \cdots \ldots \ldots + U_{99}$.
2- (V_n) est une suite géométrique de raison positive q telle que: $V_0 \times V_3 = 128$;$V_0 + V_3 = 36$.
   a- Calculer V_0 et V_3.
   b- Sachant que $V_n = V_0 \times q^n$, calculer la raison de la suite (V_n).
5- Quelle est alors la valeur de cette voiture en cette année 2017 ?

Exercice 5

A. Soit (U_n) la suite réelle définie par U_0 fixé et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 1{,}05U_{n-1} + 1000$ et soit (V_n) la suite définie par $V_n = U_n + 20\,000$.
   1. Démontrer que (V_n) est une suite géométrique.
   2. Calculer V_n en fonction de V_0 et n. En déduire U_n en fonction de U_0 et n.
B. En février 1995 la population électorale d'une commune était de 20 000 électeurs. Chaque année cette population électorale augmente de 5% et de plus, 1000 électeurs supplémentaires viennent s'y établir définitivement.
   1. Préciser la population électorale en février 2000 dans cette commune.
   2. Etant donné que le taux d'abstention est de 20%, déterminer le nombre de votants dans cette commune en 2000.

Exercice 6

Le salaire de l'un des cadres fonctionnaires d'une société financière de la place subit une augmentation de 25.000F chaque année. En 2021, son salaire est de 420 000F

1. Quel était son salaire en 2020 ? en 2019 ?
2. Quel sera son salaire en 2022 ? en 2023 ?
3. On suppose que son salaire en année 2021 + n *est* $U_n = 420\,000 + 25\,000 * n$ (où n est un entier naturel).
   a- Calculer U_1 et U_2 puis interpréter les résultats.
   b- Calculer son salaire en 2030.
   c- En quelle année le salaire sera égal à 845 000F.

Exercice 7

Dans une petite ville, les services de Pôle Emploi ont relevé le nombre de demandeurs d'emploi chaque année.

Après observations, ils constatent que chaque année 102 nouveaux demandeurs d'emploi s'inscrivent tandis que 30% des anciens demandeurs trouvent un emploi et sont retirés des listes.

Au 1er janvier 2015, le nombre de demandeurs d'emploi était de 490. On note U_n le nombre de demandeurs d'emploi au 1er janvier 2015 + n. Ainsi $U_0 = 490$.

Dans tout l'exercice, les valeurs sont arrondies à l'unité.

1-
   a- Montrer que le nombre de demandeurs d'emploi au 1er janvier 2016 est $U_1 = 445$.
   b- Calculer le nombre de demandeur d'emploi au 1er janvier 2017.
2- Justifier que l'on peut modéliser la situation précédente par la relation, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 0{,}7U_n + 102$.
3- On désigne par (V_n) la suite définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}, V_n = U_n - 340$.
   a- Montrer que (V_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et V_0.
   b- Pour tout entier naturel n, exprimer V_n en fonction de n puis en déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n = (0{,}7)^n 150 + 340$.
4- Calculer le nombre de demandeurs d'emploi au 1er janvier 2020.
5- Le directeur de l'agence pourra-t-il atteindre son objectif de diminuer le nombre de demandeurs d'emploi de 30% par rapport au 1er janvier 2015 ? Si oui, indiquer à quelle date.

CHAPITRE 9 :
NOTIONS DE TRIGONOMETRIE

Ce chapitre vise à apporter à l'apprenant, les connaissances nécessaires à l'étude trigonométrique.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

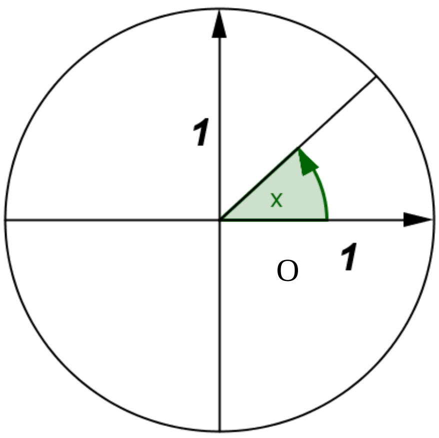
Au terme de ce chapitre, chaque apprenant, ayant exploité les acquis, devrait être capable de :

- placer l'image d'un angle orienté sur le cercle trigonométrique connaissant une mesure en radian de cet angle ;
- calculer le sinus, le cosinus et la tangente d'un nombre réel ;
- transformer des expressions à partir des formules trigonométriques ;
- citer des valeurs remarquables des lignes trigonométriques en se référant au tableau des valeurs ;
- résoudre dans ℝ les équations trigonométriques de la forme $cosx = m$ ou $sinx = m$; (m ∈ IR).

1. Le cercle trigonométrique

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens positif.



NB :

- La longueur d'un cercle est de 2π.
- Les unités de mesure d'un angle sont : degré(D) ; radian(R) ; grade(G).

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} = \frac{G}{200} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 180° \to \pi\ radian \\ 180° \to 200\ grades \end{cases}$$

- La mesure d'un angle principal appartient à $]-\pi;\pi]$.
- Si x est une mesure d'un angle orienté alors toutes ses autres mesures sont $x+2k\pi$; $(k\in\mathbb{Z})$.

2. Sinus, cosinus, et tangente des angles orientés

2.1. Définition

- On appelle sinus de x, noté $sinx$, l'ordonnée d'un point M sur le cercle trigonométrique.

  La fonction sin est :

$$\begin{array}{llll} sin & : & \mathbb{R} \longrightarrow & [-1;1] \\ & & x \longmapsto & sin\,x. \end{array}$$

Graphiquement sinus ($sin\ x$) se lit sur l'axe des ordonnés ($[-1;1]$).

- On appelle cosinus de x, noté $cosx$, l'abscisse d'un point M sur le cercle trigonométrique.

  La fonction cos est :

$$\begin{array}{llll} cos & : & \mathbb{R} \longrightarrow & [-1;1] \\ & & x \longmapsto & cos\,x. \end{array}$$

Graphiquement $cos\ x$ se lit sur l'axe des abscisses ($[-1;1]$).

- On appelle tangente de x notée $\tan x$, le nombre réel noté $\tan x$, $\tan x=\frac{sinx}{cosx}$ lorsque $cosx\ \neq 0$. La fonction tan est :

$$tan \quad : \quad \mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto tan\,x=\frac{sin\,x}{cos\,x}.$$

Quelques valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

$sin\,x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$cos\,x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1
$tan\,x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0

2.2. Propriétés

Pour tout réel x, on a :

P_1) $cos^2x + sin^2x = 1$

P_2) $-1 \leq \sin x \leq 1$ et $-1 \leq \cos x \leq 1$

P_3) $\cos(-x) = \cos x$ (la fonction cosinus est paire)

et $\sin(-x) = -\sin x$ (la fonction sinus est impaire)

P_4) $sin(x + 2\pi) = sin\,x$ et $cos(x + 2\pi) = cos\,x$

On dit que les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π).

P_5) Si $cosx \neq 0$ alors $1 + tan^2x = \frac{1}{cos^2x}$.

2.3. Formules d'addition

Pour tous réels a et b,

(1): $cos(a + b) = cos\,a\,cosb - sin\,a\,sin\,b$

(2): $cos(a - b) = cos\,a\,cos\,b + sin\,a\,sin\,b$

(3): $sin(a + b) = sin\,a\,cos\,b + sin\,b\,cos\,a$

(4): $sin(a - b) = sin\,a\,cos\,b - sin\,b\,cos\,a$

Exemple

En posant $a = \frac{\pi}{3}$ et $b = \frac{\pi}{4}$ faire l'application numérique des quatre formules.

2.4. Formule de duplication

En posant $b = a$, alors la première (1), la troisième (3) et la cinquième (5) formule d'addition deviennent :

$$cos\ 2a = cos^2 a - sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$sin\ 2a = 2\, sin\, a\, cos\, a$$

3. Equations Trigonométriques

3.1. Equation : $\boldsymbol{cos\, x = m}$; $(\boldsymbol{m} \in \mathbb{R})$

Ev= $\mathbb{R}$

1er cas : si $m \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, alors $S_{(E)} = \emptyset$

2ème cas : si $m \in [-1; 1]$, alors il existe $\alpha \in]-\pi; \pi]$ tel que $cos\ \alpha = m$. D'où :

$cos\ x = m \iff \cos x = cos\ \alpha$

$\iff x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$S_{(E)} = \{\alpha + 2k\pi\ ;\ -\alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

Exemple *1* : Résoudre (E) : $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \frac{1}{2}$.

Exemple 2 : Résoudre $x \in \mathbb{R}$ $\boldsymbol{\cos x} = \frac{3}{2}$.

3.2. Equation du type $\boldsymbol{\sin x = m}$ $(\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{IR})$

Ev = $\mathbb{R}$

1er cas : si $m \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, alors $S_{(E)} = \emptyset$

2ème cas : si $m \in [-1; 1]$, alors il existe $\alpha \in]-\pi; \pi]$ tel que $\sin \alpha = m$.

D'où :

$\sin x = m \iff \sin x = \sin \alpha$

$\iff x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$S_{(E)} = \{\alpha + 2k\pi ; \pi - \alpha + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$

Exemple : Résoudre l'équation $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\sin x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

A VOUS DE JOUER…

Exercice 1 : QCM

Parmi les réponses proposées aux questions suivantes, une seule est juste. Choisir la bonne réponse.

1) Une solution de l'équation $cosx = \frac{1}{2}$ est :

A) $\frac{\pi}{2}$; B) $\frac{\pi}{3}$; C) $\frac{\pi}{4}$; D) $\frac{\pi}{6}$.

2) En trigonométrie, π radian équivaut à :

A) 360^o ; B) 90^o ; C) 190^o ; D) Aucune réponse.

3) En trigonométrie, l'expression $\cos 2x$ est égale à :

A) $1 + tan^2x$; B) $\frac{1}{cos^2x}$; C) $2cos^2x - 1$ ou $1 - 2sin^2x$; D) $sin^2x + cos^2x$.

4) $1 + tan^2x$ est égal à :

A) $1 + \frac{cos^2x}{sin^2x}$; ; B) $\frac{1}{cos^2x}$; C) $(1 + tanx)^2$; D) $1 + \frac{1}{cos^2x}$.

5) On donne $A = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(x) + \sin(x)$. Une expression simple de A est :

A) $A = 0$; B) $A = \cos(x)$; C) $A = 2\sin(x)$; D) $A = \cos(x) + Sin(x)$**.**

Exercice 2 :

a- Calculer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$ sachant que $3x = x + 2x$.

b- Calculer $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$.

c- Vérifier que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ puis calculer $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

Exercice 3

1. Ecrire plus simplement :

$A = \sin^2 x + \frac{1}{1+\tan^2 x}$; $B = 1 - \frac{1}{\cos^2 x}$; $C = \cos^3 x + \cos x \sin^2 x$.

2. Démontrer que :
   a. $\cos^4 x - \sin^4 x = 2\cos^2 x - 1$.
   b. $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$.
   c. $(cosx + sinx)^2 + (sinx - cosx)^2 = 2$.

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a. $\cos 4x + \frac{1}{2} = 0$

b. $\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

c. $\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

d. $\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

e. $2sinx - \sqrt{3} = 0$

f. $\cos(\pi - x) = -\frac{1}{2}$