COURS HARMONISÉS
DE
MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

SERIES TERTIAIRES
(G2 & G3)

EDITION DE SEPTEMBRE 2022

PROGRAMME DES TERMINALES G2 - G3
MATHEMATIQUES GENERALES
VOLUME HORAIRE : 04 HEURES PAR SEMAINE

Chapitre 0 : Importance des mathématiques

1 – Définition des mathématiques
2 – Quelques branches des mathématiques
3 – Mathématiques et quelques domaines de la connaissance

Chapitre 1 : Rappels sur l'étude des fonctions numériques

1 – Ensemble de définition
2 – Limites
2.1. Rappels :
- limites de référence
- limites et opérations

2.2. Traitement des formes indéterminées
2.3. Etude des branches infinies (ne pas introduire les fonctions irrationnelles)
3 – Continuité
3.1. Continuité en un point et sur un intervalle
3.2. Théorèmes généraux
4 – Dérivation
4.1. Dérivabilité en un point
4.2. Tangente d'une courbe en un point
4.3. Fonction dérivée
4.3.1. Dérivées usuelles
4.3.2. Formules de dérivation
4.4. Application de la dérivée
4.4.1. Sens de variation des fonctions
4.4.2. Fonctions continues et strictement monotones
- Théorème de la bijection
- Théorème des valeurs intermédiaires

N.B : Dans le calcul des limites et de la dérivée, introduire les fonctions irrationnelles.

Chapitre 2 : Fonction logarithme népérien

1 – Définition
2 – Ensemble de définition de la fonction comportant ln
3 – Propriétés
4 – Equations – inéquations – systèmes comportant ln
5 - Dérivée de la fonction comportant ln
6 - Limites de la fonction comportant ln
6.1. Limites de référence
6.2. Applications

7 – Exemples d'étude de fonctions comportant ln
8 – Fonction logarithme de base a ($avec\ a > 0\ et\ a \neq 1$)
8.1. Définition
8.2. Propriétés

2. Suite arithmétique – suite géométrique
3. Convergence d'une suite
3.1. Définition
3.2. Théorème de convergence

Chapitre 7 : Dénombrement et probabilité

1. Dénombrement ou analyse combinatoire

1.1. Ensemble fini - cardinal d'un ensemble fini
1.1.1. Ensemble fini
1.1.2. Cardinal d'un ensemble fini
1.2. Produit cartésien (définition et propriété)
1.3. Structure de l'ensemble fondamental
1.4. Structure de la disposition
1.5. Outils de dénombrement
1.5.1. Cas d'une disposition ordonnée (p – uplets ; arrangement ; permutation)
1.5.2. Cas d'une disposition non ordonnée (combinaison)
1.6. Binôme de newton
1.7. Triangle de pascal
1.8. Principe du tirage (comment et quand utiliser n^p ; A_n^p et C_n^p ?

2. Probabilités

2.1. Vocabulaire probabiliste (vocabulaire des événements)
2.2. Probabilité d'un événement : définition et propriétés
2.3. Probabilité sur un univers fini
2.4. Equiprobabilité sur un univers fini

3. Variables aléatoires

3.1. Définition
3.2. Loi de probabilité de la variable aléatoire
3.3. Espérance mathématique ; variance et écart – type de la variable aléatoire

Chapitre 8 : Trigonométrie

1. Cercle trigonométrique
2. Sinus ; cosinus et tangente des angles orientés (les sinusoïdes ne sont pas à représenter)
3. Formules d'addition – formules de duplication
4. Tableau des dérivées des fonctions trigonométriques
5. Tableau des primitives des fonctions trigonométriques

PREFACE

Si un poète tire son plaisir du seul fait d'écrire son œuvre, un auteur de manuel ne serait heureux que si son ouvrage est lu, compris et apprécié.

De nos jours, les mathématiques jouent un rôle de plus en plus important dans de nombreux secteurs de la vie économique et sociale notamment dans l'éducation, les assurances, les banques, …

Ce présent support de cours est écrit pour renforcer les acquis antérieurs de ses utilisateurs et respecte le nouveau programme de mathématiques générales des classes de terminales G2 et G3.
Il vise un double objectif :

- D'une part, et surtout tenter de montrer aux apprenants, peu tournés vers les disciplines scientifiques, que la mathématique n'est pas une matière rebutante mais qu'elle fait partie de la vie de tous les jours au même titre que la philosophie, la comptabilité, les techniques commerciales, le français, …

- D'autre part, donner aux apprenants les éléments mathématiques, conformes au programme en vigueur, qui leur seront utiles ultérieurement.

Mais faire les mathématiques, ne signifie pas seulement apprendre les formules ; c'est aussi savoir les utiliser. Aussi, une bonne assimilation des cours de mathématiques passe nécessairement par la résolution des situations problèmes conformes aux notions apprises en classe. Il est donc important de faire de nombreux exercices. A ce titre, le présent support propose de nombreux exercices d'application et des exercices d'approfondissement par chapitre qui faciliteront l'assimilation des notions étudiées.

CHAPITRE 0:
IMPORTANCE DES MATHEMATIQUES

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

Au terme de ce cours, l'apprenant doit être capable de :

- définir les mathématiques ;
- citer quelques branches des mathématiques ;
- donner les relations liant les mathématiques aux disciplines de la vie courante ;

1. Définition des mathématiques

Les mathématiques sont la science et la connaissance. Autrement dit, c'est l'ensemble des connaissances abstraites résultant de raisonnements logiques appliqués à des objets divers tels que les nombres, les formes, les structures et les transformations.
D'après le mathématicien Ronald Brown, les mathématiques sont une science de la description (on dit aussi modélisation), de la démonstration, et du calcul. On peut les étudier pour elles-mêmes, pour les appliquer à d'autres sciences, ou comme un exercice de l'esprit. Les principes fondamentaux de cette discipline remontent à l'antiquité (arithmétique et géométrie) ou au XVIIe siècle (mécanique et stochastique), mais la recherche mathématique n'a jamais été aussi vivante qu'aujourd'hui. Chaque réponse à un problème donné suscite en effet de nouvelles questions, et les applications de cette recherche sont de plus en plus variées.

2. Quelques branches des mathématiques

Les principales branches des mathématiques sont :

- L'*arithmétique* (ou *théorie des nombres*) est sans doute la branche la plus ancienne des mathématiques. Le calcul arithmétique est enseigné à l'école primaire; au secondaire (ppcm, pgcd et divisibilité) et accentué en terminale C4.

- La géométrie est, à l'origine, une théorie de la mesure des longueurs, des aires, et des angles. Plus généralement, c'est la théorie du plan, de l'espace, et de toutes les formes qui peuvent se concevoir au-delà de notre espace à trois dimensions. En d'autres termes, c'est l'étude des figures comme les triangles et les parallélogrammes.

- La *mécanique* est la théorie des forces et des mouvements qu'elles induisent (*statique* et *dynamique*).

- La *stochastique* (prononcer "stokastique") est la théorie des phénomènes aléatoires. Elle s'appuie sur le *calcul des probabilités* pour modéliser les jeux de hasard.

Ces quatre branches partagent un corps de notions et de méthodes, que l'on découpe habituellement en deux grands chapitres :

- L'*algèbre* est la théorie générale des opérations qui apparaissent notamment en arithmétique et en géométrie. *On y trouve des équations, des inéquations, des structures, …*

- L'*analyse* est la théorie générale des suites, séries et fonctions (réelles ou complexes).

- La *combinatoire* est la théorie des structures finies (ou plus généralement, *discrètes*) telles que les graphes, les mots, ou les permutations. Le dénombrement de telles structures est d'ailleurs le fondement du calcul des probabilités.

- La *logique* (mathématique) est la théorie du langage mathématique et des démonstrations.

- L'*algorithmique* (mathématique) est la théorie des méthodes de calcul.

3. Mathématiques et quelques domaines de la connaissance

3.1 - Mathématiques et les autres disciplines (vie courante)

L'interaction entre mathématiques et autres sciences est maintenant un sujet d'intérêt constant. L'articulation avec la physique est encore plus visible et remarquable.

C'est une illusion de penser que les élèves ne savent que ce qu'on leur enseigne à l'école. En arrivant au cours préparatoire, ils savent parler, dessiner et compter. Les mathématiques sont surtout une manière de classer et d'organiser leurs connaissances, et les livres les plus remarquables partent de connaissances communes pour développer le sens de la géométrie et celui du calcul.

Les programmes de mathématiques incitent au rapprochement avec les autres disciplines.

Actuellement on trouve des enseignements de mathématiques dans la plupart des formations universitaires ou d'écoles post-baccalauréat. C'est le cas en physique, en biologie, en économie, en gestion, en architecture, en ingénierie...

On remarquera la présence des mathématiques dans :

- La préparation de la sauce
- Les prêts bancaires
- La construction d'une maison
- Le sport (comment choisir le meilleur angle de tir ?)
- La traversée d'une route,…

3.2 - Les mathématiques comme outils des matières enseignées (enseignement technique)

Les disciplines comme l'anglais, le français, la comptabilité, l'économie et organisation des entreprises, l'économie générale, la technique commerciale, … n'évoluent pas loin des mathématiques.

En effet, l'anglais utilise les mathématiques pour les feelings gaps, le flow chart ; le français, pour la contraction de texte (il s'agit d'une réduction), la dissertation, (il s'agit du développement), le commentaire composé ; la comptabilité l'utilise pour le calcul des amortissements, le principe de la comptabilité, l'enregistrement des factures, … ; l'économie générale l'utilise pour les calculs des coûts moyens et marginaux, les agrégats, les indices de prix, les élasticités- prix ; l'économie et l'organisation de l'entreprise l'utilise pour la gestion des stocks (stock de sécurité, stock d'alerte), la détermination de la variation de stock, le seuil de rentabilité, … ; les techniques commerciales l'utilisent pour le calcul des taux, des proportions, …

Conclusion

En ces jours, aucune discipline ne peut évoluer sans les mathématiques et vice versa. Le monde est construit sur des calculs mathématiques aussi dirait – on du Dieu qu'il est le mathématicien par excellence. Un autre dira que **les mathématiques gouvernent le monde :** « tout se mathématise.»

CHAPITRE 1 :
RAPPELS SUR L'ETUDE DES FONCTIONS NUMERIQUES

Ce chapitre vise à procurer à l'apprenant, les outils nécessaires pour l'étude complète d'une fonction numérique.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

Au terme de ce chapitre, chaque apprenant, ayant exploité les acquis, devrait-être capable de :

- déterminer l'ensemble de définition de toute fonction numérique à partir de son expression littérale ;
- calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition d'une fonction ;
- lever les formes indéterminées éventuelles dans le calcul d'une limite par des techniques appropriées ;
- étudier les branches infinies d'une fonction aux endroits définis ;
- étudier la continuité d'une fonction en un point (ou sur un intervalle) donné à partir des propriétés apprises ;
- vérifier si une fonction peut-être prolongeable par continuité en un point donné en se référant aux diverses propriétés ;
- étudier la dérivabilité d'une fonction en un point en se basant sur des propriétés ;
- montrer qu'un point est le centre ou une droite est l'axe, de symétrie d'une fonction à partir des formules apprises ;
- déduire des tracés des courbes à partir d'autres courbes données.

<u>NB</u> : Tous les exercices non corrigés de ce cours doivent être systématiquement cherchés par l'élève avant toute éventuelle correction. Ils peuvent faire l'objet d'évaluation.

1. <u>Ensemble de définition</u>

L'ensemble de définition d'une fonction f, est l'ensemble des valeurs x de l'ensemble de départ pour lesquelles la fonction existe (ou a un sens ou encore est définie).

L'ensemble de définition de la fonction f est noté D_f.

<u>Remarque</u>

Il ne faut pas confondre l'ensemble de définition D_f de la fonction f avec son ensemble de départ. Il arrive toutefois que les deux soient égaux : la fonction est alors une *<u>application</u>*.

<u>Exemple</u>

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

a) $g(x) = \frac{x-1}{x^2+2x-3}$ b) $k(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ c) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$ d) $h(x) = \sqrt{x^2 + x + 4} + 2x$

----

2. LIMITES

2.1. Rappels

- **Limites de référence**

a *et* c étant des réels, on a :

$$\lim_{x \to a} c = \lim_{x \to -\infty} c = \lim_{x \to +\infty} c = c$$

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

* a est un nombre réel et n est un entier naturel non nul, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to 0} x^n = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to a} (x-a)^n = 0$$

- Pour n pair, on a :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty \quad ;$$

- Pour n impair, on a :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x^n} = -\infty \quad ; \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x^n} = +\infty \quad ;$$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty \quad ; \quad \lim_{\substack{x \to a \\ >}} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty \quad ;$$

Exemple

On donne f et g deux fonctions définies par $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ et $g(x) = x - 1$.

Calculer les limites suivantes lorsque x tend vers 3 des fonctions suivantes :

$$f + g \ ; \ fg \ ; \ f - g \ ; \ \frac{f}{g} \ ; \ \frac{1}{f} \ ; \ \frac{1}{g}.$$

Limite d'une fonction composée (très utilisée)

Soient f et g deux fonctions ; a, b et l des réels.

Si $\lim_{x\to a} g(x) = b$ et $\lim_{x\to b} f(x) = l$ alors $\lim_{x\to a} f\circ g(x) = l$

Exemples

1. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 3}$

Posons X = $x^2 - x + 3$, alors f(X) = $\sqrt{X}$. Or $\lim_{x\to+\infty} X = +\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$,

donc $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - x + 3}$

2. Déterminer la limite en $\frac{1}{4}$ de la fonction g définie sur $\left]\frac{1}{4} ; +\infty\right[$ par $g(x) = \frac{1}{\sqrt{4x-1}}$

Posons X = $4x-1$, alors X >0 et $g(X) = \frac{1}{\sqrt{X}}$. Or $\lim_{x\to\frac{1}{4}} X = 0$ *et* $\lim_{X\to 0} \frac{1}{\sqrt{X}} = +\infty$, *donc*

$$\lim_{x\to\frac{1}{4}} g(x) = +\infty$$

2.2. Traitement des formes indéterminées

Il y a 4 types de forme indéterminée : $+\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$.

Exemples

Étudier la limite :

1) en 0 de la fonction $x \longmapsto \frac{\sqrt{x+1}\ -1}{x}$,
2) en $-\infty$ de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2 + 3x - 2} + x$,
3) en $+\infty$ de la fonction $x \longmapsto \left(x^2\sqrt{x} + 1\right)\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$,
4) en $+\infty$ de la fonction $x \longmapsto \frac{\sqrt{x}}{x-2}$,
5) en $-\infty$ de la fonction $x \longmapsto \sqrt{4x^2 - x + 1}\ + 3x$,

6) en $+\infty$ de la fonction $x \longmapsto \sqrt{9x^2 - x + 1} - 3x$,

7) en 3 de la fonction $x \longmapsto \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$,

----

<u>NB</u> : La forme indéterminée $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ $ou - \infty + \infty$ ou $+\infty - (+\infty)$ peut-être levée par la factorisation du numérateur et du dénominateur pour simplification ou par une expression conjuguée.

2.3. <u>Etude des branches infinies</u> (ne pas introduire les fonctions irrationnelles)

2.3.1. <u>Définition</u>

Les branches infinies sont les asymptotes et les branches paraboliques.

2.3.2. <u>Les asymptotes</u>

2.3.2.1. <u>Asymptote parallèle à l'un des axes</u>

- Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = -\infty$ (ou $+\infty$) ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = -\infty$ (ou $+\infty$) alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe de f ;
- Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ (ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$) alors la droite d'équation

$y = b$ est une asymptote horizontale à la courbe de f en $-\infty$ (ou en $+\infty$).

2.3.2.2. Asymptote oblique

- Si $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-y]=0$ (respectivement $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-y]=0$) *avec* $y = ax + b$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe *de* f *en* - ∞ (respectivement en +∞).

  On cherche les branches infinies lorsque $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \;\; ou\; (+\infty)$ ou

  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \;\; ou \;\; (+\infty)$.

2.3.3. Les branches paraboliques

Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ou $+\infty$ (ou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ou $+\infty$) alors on calcule $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ $\left(ou \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\right)$.

- Si $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = a,\ avec\ a \neq 0$ (ou $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = a$ avec $a \neq 0$), on calcule

  $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax]$ (ou $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]$)

- Et si encore $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax] = -\infty\ ou\ +\infty$, $\left(\text{ou} \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax] = -\infty\ ou\ +\infty\right)$

alors la courbe de f admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = ax$.

⋆ Si $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax] = \mathrm{b}$, avec $\mathrm{b} \in \mathrm{IR}$ $\left(\text{ou} \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax] = \mathrm{b}, \text{avec } \mathrm{b} \in \mathrm{IR}\right)$,

alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe de f en $-\infty$ (ou en $+\infty$).

- Si $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$ (ou $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$) alors la courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses (ox).
- Si $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = -\infty\ ou + \infty$ (ou $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = -\infty\ ou + \infty$) alors la courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées (oy).

Exemple

On donne la fonction $f\ définie\ par\ f(x) = \frac{2x^2-3x+4}{x-1}$.

a) Montrer que l'ensemble de définition de f est $D_f =]-\infty\,;1[\cup]1\,;\,+\infty[$.

b) Calculer les limites aux bornes de D_f.

c) On pose $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = a$, avec $a \neq 0$.

Calculer a et $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax]$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]$.

Donner une interprétation graphique des deux derniers résultats.

d) Préciser l'autre asymptote.

3. CONTINUITE

3.1. Continuité en un point et sur un intervalle

- **continuité en un point**

Une fonction f est continue en un point a si elle admet une limite en ce point, c'est- à-dire

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Ou bien, si f est continue en a $alors$ $\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = f(a)$.

- **Continuité sur un intervalle**

Une fonction est continue sur un intervalle si elle est continue en tout point de cet intervalle.

Propriétés

- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$
- Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle sur lequel elle est définie.
- Si f et g sont des fonctions continues au point d'abscisse a alors $\times g$, $f + g$, $\frac{f}{g}$ (avec

$g(a) \neq 0$) sont aussi continues en a .

- Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors :
  - les fonctions $f + g$, αf avec α un réel et $f \times g$ sont continues sur I,
  - Si de plus g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont aussi continues sur I,
  - D'autre part, si f est positive sur I alors $\sqrt{f}$ est continue sur I.

3.2- Théorèmes généraux

Soient $a\ et\ b\ deux\ réels\ tels\ que\ a < b\ \ et\ \ f$, une fonction admettant une limite à droite en a et une limite à gauche en b.

- Si f est continue et strictement croissante sur $[a\,;b]$ alors $f([a\,;b]) = [f(a)\,;f(b)]$
- Si est continue et strictement croissante sur $]a\,;b[$ alors

  $f(]\,a\,;b\,[) =]\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x)\ ;\ \lim\limits_{\substack{x\to b\\ <}} f(x)\,[$

- Si f est continue et strictement décroissante sur $[a\,;b]$ alors

  $f([a\,;b]) = [f(b)\ ;\ f(a)]$

- Si est continue et strictement décroissante sur $]a\,;b[$ alors

$f(]\,a\,;b\,[) =]\lim\limits_{\substack{x\to b\\ <}} f(x)\ ;\ \lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x)\,[$

4. **Dérivation**

4.1. Dérivabilité en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et a un point de I. On dit que f est dérivable en a lorsque le taux d'accroissement de f en a admet une limite finie l. On écrira

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l.$$

Remarque : On appelle alors l, **le nombre dérivé** de f en a ou la limite du taux de variation de f en a ou encore le coefficient directeur (ou la pente) de la tangente au point a à la courbe de f, et on note $\boldsymbol{f'(a) = l}$.

4.2. Tangente d'une courbe en un point

Soit (C_f) est la courbe représentant la fonction f.

L'équation de la tangente (T) au point A d'abscisse a à $la\ courbe\ (C_f) est$:

$$(T): y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Remarque :
Si f est dérivable au point A d'abscisse a, alors f est continue en a. La réciproque n'est pas toujours vraie.

Exemple
Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x - 1$.
1. Démontrer que f est dérivable en 3 puis préciser f'(3).
2. Déduire une équation de la tangente (T) à la courbe de f au point d'abscisse 3.

4.3. Fonction dérivée
4.3.1. Dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
$a\ ;\ a \in \mathbb{R}$	0
$x^n\ ;\ n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{k}{x}\quad (k \neq 0)$	$-\frac{\boldsymbol{k}}{x^2}$

4.3.2. Formules de dérivation

Fonction f	**Dérivée f'**
$\boldsymbol{f = U^n \quad ; \quad n \in \mathbb{N}^*}$	$f' = nU' \times U^{n-1}\ ; \quad n \in \mathbb{N}^*$
$\boldsymbol{f = UV}$	$f' = U'V + V'U$
$\boldsymbol{f = \frac{U}{V}}$	$f' = \frac{U'V - V'U}{V^2}$
$\boldsymbol{f = \frac{k}{V}} \quad (\boldsymbol{avec\ k} \in \mathbb{R}^*)$	$f' = \frac{-kV'}{V^2}$
$\boldsymbol{f = aU} \quad (a \in \mathbb{R}^*)$	$\boldsymbol{f' = aU'}$
$\boldsymbol{f = \sqrt{U}}$	$f' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$

Exemple

Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = (-3x+2)(2x^3-1)$; $g(x) = \frac{x-1}{x^2+2x-3}$; $h(x) = \sqrt{x^2+x+4} + 2x$;

$q(x) = (-2x^2+x-1)^3$; $k(x) = (\frac{x-1}{x+1})^5$; $m(x) = \sqrt{2x^2-3x+1}$;

$d(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$.

4.4. Application de la dérivée

4.4.1. Sens de variation d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle J et de dérivée f'. On a :

- si $f'(x) > 0$ sur J, alors f est strictement croissante sur J.
- si $f'(x) < 0$ sur J, alors f est strictement décroissante sur J.
- si $f'(x) = 0$ sur J, alors f est constante sur J.

Exemple

Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x - 2$.

1. Etudier le sens de variation de f.
2. Dresser le tableau de variation de f.

4.4.2. Fonction continue et strictement monotone

- **Théorème de la bijection**

Soit f une fonction définie de I vers $f(I)$.

- Toute fonction f continue et strictement monotone sur I réalise une bijection de I vers $f(I)$. Elle admet alors une bijection réciproque notée f^{-1}.

- **Théorème des valeurs intermédiaires**

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ où a et b sont deux réels tels que $a < b$.

- Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution comprise entre a et b.
- Si de plus, f est strictement monotone sur $[a\,;b]$ alors l'équation $f(x) = k$ admet une unique (une et une seule) solution dans $[a\,;b]$.

Remarques

Lorsque $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution comprise entre a et b.
Si de plus f est continue et strictement monotone sur $[a\,;b]$ donc bijective sur $[a\,;b]$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[a\,;b]$.

Exemple

Soit $f(x) = x^4 - 4x - 1$

1. Montrer que $f'(x) = 4(x-1)(x^2 + x + 1)$
2. Donner le sens de variation de f
3. Dresser le tableau de variation de f
4. a) Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty\,;1[$ sur un intervalle J à préciser.
   b) Montrer que f réalise une bijection de $]1\,;+\infty[$ sur un intervalle K à préciser.
5. a) Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique

$\alpha_1 \in\ ]-\infty\,;1[$.

b) Montrer de deux façons différentes que l'équation $f(x) = 0$ admet une

solution unique $\alpha_2 \in\ ]1\,;2[$.

NB :

- L'étude et le tracé des fonctions irrationnelles sont hors programme de la série G.
- L'étude et le tracé des fonctions rationnelles autorisées dans le programme de la série G sont celles de types $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ où $d°f \leq 2$ et $d°g \leq 2$.
- L'étude des fonctions comportant des symboles de valeurs absolues sont hors programme de la série G
- Dans les compositions des exercices, ceux portant sur la lecture graphique et de tableaux de variation sont vivement conseillés

A VOUS DE JOUER…

Exercice 1 : Questions à Choix Multiples (QCM)

I-Parmi les réponses proposées aux questions suivantes, une seule est juste. Choisir la bonne réponse.

1/ La fonction f définie par $f(x) = (-x^3 + 3)^4$ a pour dérivée:

A. $f'(x) = -3x^2(-x^3 + 3)^3$ B. $f'(x) = -12x^2(-x^3 + 3)^3$ C. $f'(x) = 4(3x^2)(-x^3 + 3)^3$.

2/ La fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable sur l'intervalle :

A. $]-\infty\,; 0]$; B. $[0\,;\, +\infty[$ C. $]0\,;\, +\infty[$ D. $\mathbb{R}$

3/ Soit f une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle I tel que $f(I) =]-\infty; 3]$. Alors f est:

A. continue sur $\mathbb{R}$ B. dérivable sur $f'(I)$ C. bijective de I vers $]-\infty; 3]$ D. bijective de I vers $\mathbb{R}$.

II- Parmi les réponses proposées aux questions suivantes, une seule est juste. Choisir la bonne réponse.

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

1/ Alors la limite de $\frac{2}{f}$ lorsque x tend vers $-\infty$ est égale:

A. 0 B. 2 C. $-\infty$ D. n'existe pas

2/ Alors la limite de f^2 lorsque x tend vers $-\infty$ est égale:

A. $-\infty$ B. 0 C. $+\infty$ D. n'existe pas

3/ Alors la limite de $-3f$ lorsque x tend vers $-\infty$ est égale:

A. 0 B. $+\infty$ C. $-\infty$ D. n'existe pas

4/ Alors la limite de $|f|$ lorsque x tend vers $-\infty$ est égale:

A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. 0 D. n'existe pas

EXERCICE 2

On considère une fonction f définie et dérivable sur [-5 ; 3]. Son tableau de variation étant donné ci-dessous.

1. Déterminer le nombre de solutions dans l'intervalle [-5 ; 3] de l'équation $f(x) = 0$

x	-5		-2		1		3
$f(x)$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2

2. a) Sachant que f(2) = 0, déterminer le signe de f.

   b) Déterminer le signe de sa dérivée f'.

Exercice 3

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par

$f(x) = \frac{-4x-4}{x^2+2x+5}$ et (Cf) sa courbe dans un dans un repère orthonormé d'unité 2cm.

1.a) Montrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$

b) calculer les limites de f en $-\infty$ et $en + \infty$

c) Vérifier que la dérivée de f est $f'(x) = \frac{4(x-1)(x+3)}{(x^2+2x+5)^2}$

d) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Démontrer que la courbe (Cf) a un point commun A et un seul avec l'axe des abscisses.

b) Donner les coordonnées du point A et une équation de la droite (T) tangente en A à la courbe

(Cf) dans le plan.

3) Montrer que le point A est un centre de symétrie à la courbe (Cf).

4)Tracer la droite (T) et la courbe (Cf) dans le plan

Exercice 4

Soit ci-dessous le tableau de variation ci - dessous de la fonction f.

x	$-\infty$		-3		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1

1. Pourquoi l'ensemble de définition de f est $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$?
2. Donner les valeurs de : $f(-3)$; $f(-1)$; $f(4)$; $f'(4)$.

3. Préciser les limites de f :
   a) en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b) à gauche et à droite de 1 .
4. Préciser les équations des asymptotes éventuelles (justifier).
5. Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
6. Déterminer le signe de $f(x)$.
7. Montrer que l'équation $f(x) = -2$ admet une solution unique $x_0 \in]1\,;4[$
8. Soit $k(x) = \frac{1}{f(x)}$.

a) Montrer que l'ensemble de définition de k est $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;4[\cup]4;+\infty[$
b) Exprimer $k'(x)$ en fonction de $f'(x)$ et $f(x)$.
c) Etablir le tableau de signe $k'(x)$.

Exercice 5

Soit f une fonction dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

f est de la forme $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ où a ; b ; c ∈ ℝ.

1. Calculer $f'(x)$
2. En utilisant les données du tableau :

   a) Donner $f(-2)$, $f(0)$, $f'(-2)$ et $'(0)$.

   b) Trouver a, b et .
3. Montrer que (Cf) admet comme asymptote la droite (D) : $y = x + 1$.
4. Etudier la position relative de (Cf) par rapport à (D).
5. Tracer (Cf) dans un repère orthonormé.

Exercice 6

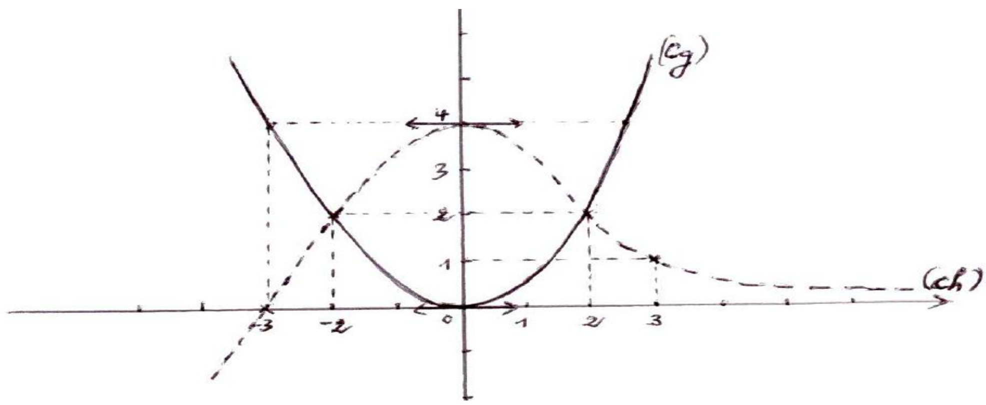
Soit f une fonction définie et dérivable sur $]1;\ +\infty[$ dont le tableau de variation est le suivant :

x	1		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

1. Soit $f(x) = ax + \frac{b}{x-c}$ où $a; b \in \mathbb{R}^*$ et $c \in \mathbb{R}$. Utiliser le tableau de variation de f pour déterminer :
   a. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)$ et en déduire la valeur de c.
   b. $f(3)$ et résoudre l'équation $f'(x) = 0$.
2. Trouver alors les valeurs de a et b.

Exercice 7

Soient g et h deux fonctions dont les courbes sont représentées ci-dessous dans le plan $\wp$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.



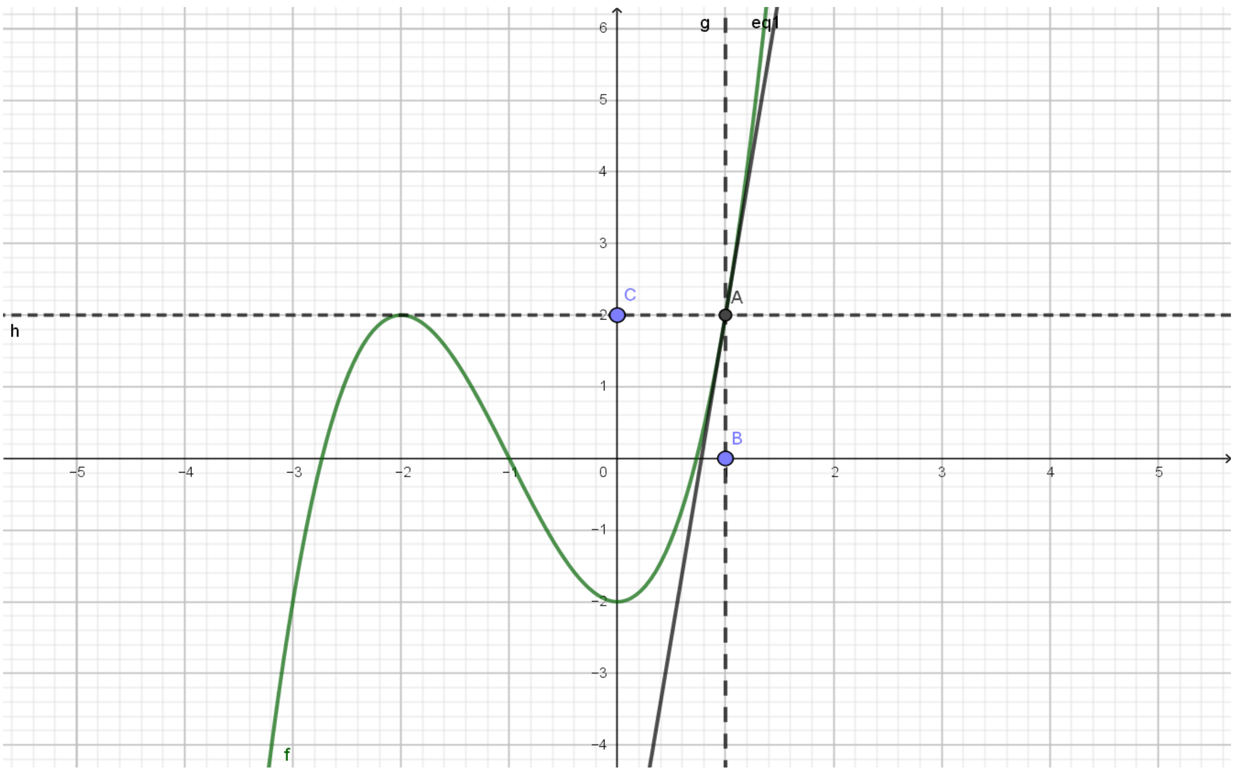
1) Préciser les limites de g et h en $-\infty$ et en $+\infty$.
2) a) Donner $h(0)$, $h(-3)$, $h(2)$, $g(-3)$, $g(-2)$, $g(0)$ $g'(0)$ et $h'(0)$

   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $g(x) = h(x)$; $g(x) \geq h(x)$; $h(x) \geq 0$; $h'(x) \geq 0$ et $g'(x) < 0$
3) Représenter dans un autre repère, l'ensemble des points de la courbe (Cf) représentative de la fonction f tels que :

$$(C_f) = \left\{ M\binom{x}{y} \in P / \ g(x) \geq 2 \ ou \ h(x) \geq 2 \right\}$$

Exercice 8

Voici la courbe (Cf) d'une fonction f. (T) est la tangente à (Cf) au point d'abscisse 1.



1) Donner $f(0)$, $f(-1)$, $f'(-2)$ et $f'(0)$.

2) Résoudre graphiquement :

a. $f'(x) = 0$ b. $f'(x) \geq 0$.

3) Déterminer $f'(1)$ sachant que (T) passe par $A\binom{1}{2}$ et $B\binom{0}{-7}$

Exercice 9 : Soit ci-dessous le tableau de variation de g

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		2		4		7		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0		$+$		$\|\|$	$+$	0		$-$		
g	-2		-4		0		$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$		0		$-\frac{1}{2}$		-1

1) Pourquoi l'ensemble de définition est $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$

2) Préciser :

a) les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de f

b) les limites à gauche et à droite de 2.

3) Donner les valeurs de : $g(-1)$; $g\left(\frac{3}{2}\right)$; $g(4)$; $g'(4)$; $g'(-1)$.

4) Préciser l'équation des trois asymptotes (justifier)

5) Donner les coordonnées du point maximum A.

6) Ecrire une équation de chacune des tangentes aux points d'abscisses -1 et 4 à (C_g).

7) a. Quel est le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$ (à justifier)

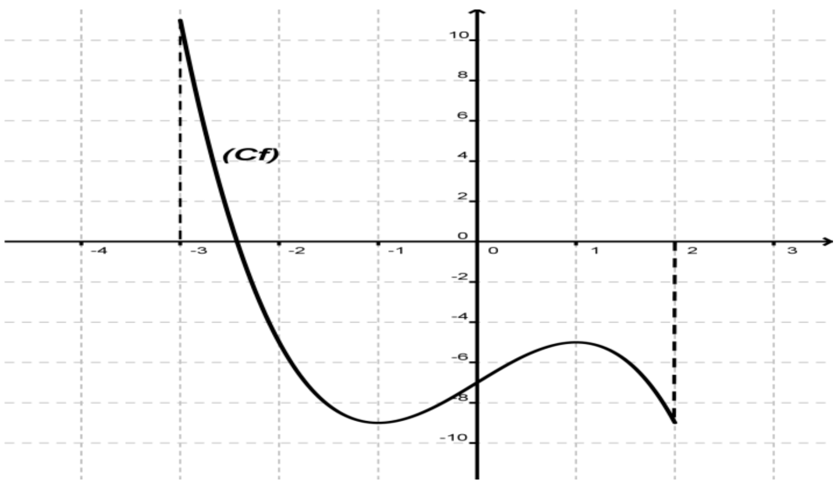
b. Préciser ces solutions.

8) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

9) Montrer que g est bijective de $]4 ; 7[$ vers un intervalle J à préciser.

10) Montrer que l'équation $g(x) = -\frac{1}{4}$ admet une solution unique x_0 comprise entre 4 et 7.

Exercice 10



1- En utilisant le graphique ci-dessous résoudre dans l'intervalle $[-3 ; 2]$:

a- $f'(x) = 0$

b- $f'(x) \geq 0$

2. a-Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]-3 ; -1[$

b-Résoudre alors l'inéquation $f(x) \geq 0$

3- Dresser le tableau de variation de f dans l'intervalle $[-3 ; 2]$.

4-On considère $\alpha = -2{,}5$ et $h(x) = \frac{1}{f(x)}$.

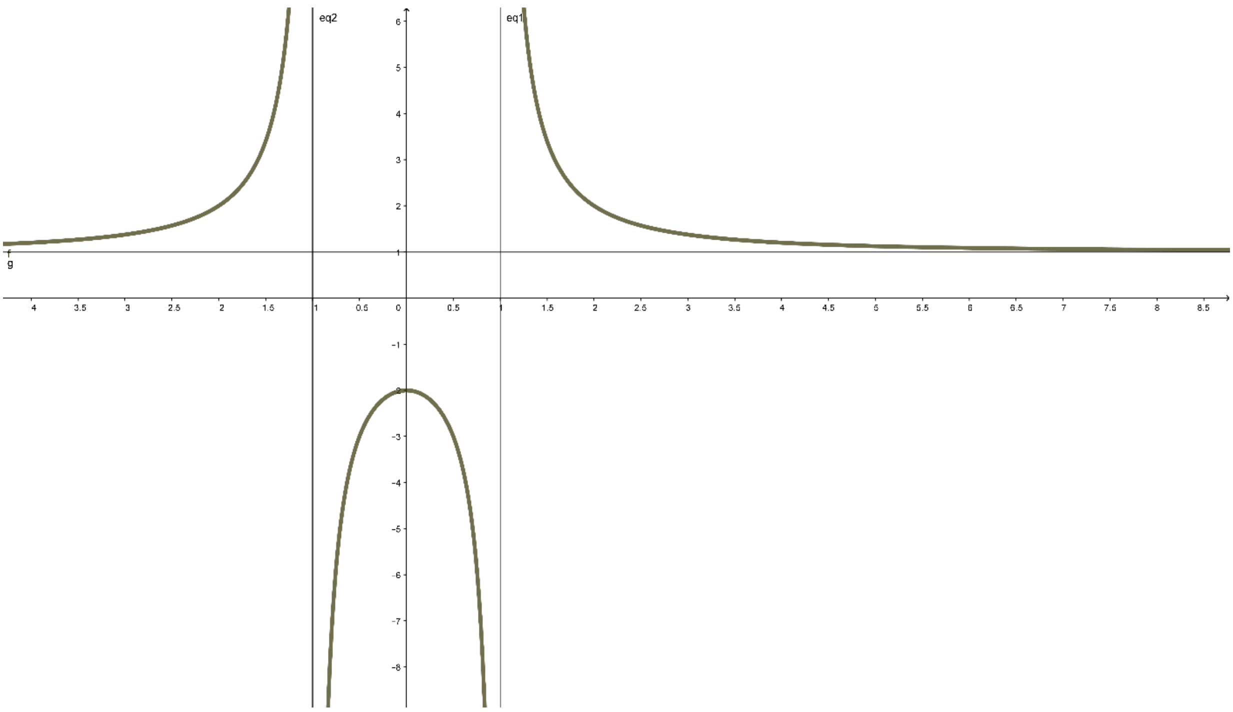
a. Montrer que h est définie sur $[-3 ; -2{,}5[\cup]-2{,}5; 2]$.

b. Exprimer $h'(x)$ en fonction de $f'(x)$ et $f(x)$.

c. Dresser le tableau de variation de h.

Exercice 11

On considère la courbe représentative Cf d'une fonction f ci-dessous



1) Lire graphiquement :

a. $\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x)$; $\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)$; $\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x)$; $\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)$

Quelles conséquences graphiques peut-on en déduire ?

Pourquoi l'ensemble de définition de f est $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$?

b. $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. Quelle conséquence graphique peut - on en déduire ?

2) Résoudre graphiquement :

a. $f(x) = 0$ b. $f'(x) = 0$ c. $f(x) < 0$ d. $f'(x) > 0$

3) Dresser le tableau de variation de f.

CHAPITRE 2 :

FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

Ce chapitre vise à stimuler l'apprenant, à l'étude et au tracé de toute fonction logarithme dans un repère orthonormé donné.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

Au terme de ce chapitre, chaque apprenant, après avoir exploité les acquis, devra être capable de :

- définir une fonction logarithme népérien connaissant les propriétés ;
- déterminer l'ensemble de définition d'une fonction contenant le logarithme népérien ;
- énumérer les propriétés fondamentales des fonctions logarithme népérien ;
- résoudre les équations et les inéquations logarithmiques au regard des propriétés ;
- dériver une fonction logarithme en se référant aux propriétés ;
- étudier le sens de variation d'une fonction logarithme à partir du signe de la dérivée ;
- tracer une fonction logarithme népérien à partir du tableau de variation.

<u>NB</u> : **Tous les exercices non corrigés de ce cours doivent être systématiquement cherchés par l'élève avant toute éventuelle correction. Ils peuvent faire l'objet d'évaluation.**

1. <u>Définition</u>

La fonction logarithme népérien est la fonction, notée ln, définie sur $]0\,;\,+\infty[$,

s'annulant en 1 et dont la dérivée est la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$

$$\begin{array}{rcl} \ln :]0\,;\,+\infty[& \to &]-\infty\,;\,+\infty[\\ x & \mapsto & \ln x \end{array}$$

2. <u>Ensemble de définition de la fonction comportant ln</u>

- L'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln x$ $est\ D_f =]0\,;\,+\infty[$.
- L'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln U(x)$ est

$$D_f = \{x \in D_U \ /\ U(x) > 0\}$$

De tout ce qui précède, nous pouvons déduire donc :

$\ln[U(x)]^{2n}$, $ne\ peut\ exister\ que\ si\ U(x) \neq 0,\ n \in \mathbb{N}^*$.

$\ln[U(x)]^{2n+1}$, $ne\ peut\ exister\ que\ si\ U(x) > 0,\ n \in \mathbb{N}$

<u>Remarque</u>

Le logarithme d'une valeur négative ou nulle n'existe pas.

Exemple

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$A(x) = \ln x$; $j(x) = \ln(-x)$; $f(x) = \ln(-3x+9)$; $h(x) = \ln\ (2x+1)^2$;

$g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x-1}$; $B(x) = \ln\left(\frac{3x+1}{x+2}\right)$; $p(x) = 1 - x\ln(1-2x) + x\ln x$

$K(x) = \ln(2x^2 - 5x + 3)^2$; $q(x) = ln\left(\frac{x^2-1}{x-2}\right)$.

----

3. Propriétés

Pour tout $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$; $\boldsymbol{b} > \mathbf{0}$ *et pour tout* $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Q}$:

i) $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$: le logarithme du produit vaut la somme des logarithmes.

ii) $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$: le logarithme du rapport vaut la différence des logarithmes.

iii) $\ln\frac{1}{\mathrm{a}} = -\ln a$: le logarithme de l'inverse vaut l'opposé du logarithme.

iv) $\ln a^n = n\ln a$: le logarithme d'un nombre à la puissance n vaut le produit du logarithme de ce nombre par n.

v) $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$.

Pour tout $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$; $\boldsymbol{b} > \mathbf{0}$:

$\ln a = \ln b$ *équivaut à* $a = b$

$\ln a \leq \ln b$ *équivaut à* $a \leq b$ (*respectivement* $\ln a < \ln b$ *équivaut à* $a < b$)

$\ln a \geq \ln b$ *équivaut à* $a \geq b$ (*respectivement* $\ln a > \ln b$ *équivaut à* $a > b$)

Remarques

- ✓ $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- ✓ $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$
- ✓ $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

➢ L'unique solution de l'équation $\ln x = 1$ est le nombre noté $\boldsymbol{e}$, appelé la base de la fonction logarithme népérien ($e = 2{,}718281828$ ...)

On a donc : $\ln e = 1$

$\forall\, x \in \mathbb{R}$; $\ln e^x = x$ **Exemple** *:* $\ln e^{2} = 2$, $\ln e^{-4} = -4$

➢ $\ln x = a \Leftrightarrow \boldsymbol{x = e^a}$, $a \in \mathbb{R}$.

Exemple

Simplifier les expressions suivantes :

$$ln3 - ln9 + ln81 \quad ; \quad ln\frac{1}{16} + ln8 - ln2 \quad ; \quad ln6 + 5ln3 - 7ln2 + ln3 \quad ;$$

$$ln\sqrt{2} \quad ; \quad ln\frac{1}{2} \quad ; \quad ln(3+\sqrt{2}) + ln(3-\sqrt{2}) \quad ; \quad ln\left(\frac{2+\sqrt{5}}{2}\right) + ln\left(\frac{-2+\sqrt{5}}{2}\right) \quad ;$$

$$ln\left(\frac{2+\sqrt{5}}{2}\right) - ln\left(\frac{-2+\sqrt{5}}{2}\right) \quad ; \quad lne^5 - lne^3 \quad ; \quad 5ln\left(\frac{1}{e}\right) + 4ln(e^2\sqrt{e}) \quad ; \quad \frac{ln32}{ln64}$$

4-Equations, inéquations et systèmes comportant ln

Exemple 1 : Résoudre dans ℝ:

1. $ln(2x-2)+ln(x+2)=ln8$
2. $2\,ln(x-1)+ln(6x+9)=2ln(2x+3)$
3. $ln(2x+3)+ln(x^2+2x+2)=ln(8x+9)$
4. $ln(x+2)=1+ln(x-3)$
5. $ln^2x+lnx-6=0$
6.
   a. Résoudre dans ℝ : $t^2-3t+2=0$
   b. Développer $(2t-1)(t^2-3t+2)$
   c. Résoudre dans ℝ : $2\,ln^3\,x-7\,ln^2\,x+7lnx-2=0$

<u>Exemple 2</u>

Résoudre les systèmes suivants :

$$1.\begin{cases} lnx + lny = \frac{3}{2} \\ lnx - lny = \frac{1}{2} \end{cases} \quad ; \quad 2.\begin{cases} lnx \times lny = \frac{3}{2} \\ lnx + lny = \frac{5}{2} \end{cases} \quad ; \quad 3.\begin{cases} x + y = 7 \\ lnx + lny = 2ln2 + ln3 \end{cases}$$

Exemple 3

Résoudre dans ℝ:

1) $ln(2x+1) < ln(1-x)$
2) $\ln(x+2) + \ln(x+4) < ln(x+8)$
3) $[\ln(x+1)]^2 + 3\ln(x+1) - 4 > 0$

Exemple 4

$soit\ \ p(x) = 3x^3 - 8x^2 - x + 10$

1- Résoudre : $x \in \mathbb{R},\ p(x) = 0$ sachant que $p(2) = 0$

2- Résoudre dans $\mathbb{R}$: $3ln^2x - 8lnx = \frac{-10+lnx}{lnx}$

3- Résoudre dans $\mathbb{R}$: $3ln^2x - 8lnx \leq \frac{-10+lnx}{lnx}$

5-<u>Dérivée de la fonction comportant ln</u>

Si U est strictement positive et dérivable sur un intervalle I, alors $\ln U$ est dérivable sur I et pur tout $x \in I$ on a $[\ln U(x)]' = \frac{U'(x)}{U(x)}$

<u>Exemple</u>

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$A(x) = \ln x$; $B(x) = \ln(-x)$; $f(x) = \ln(2x+5)$; $g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{2x+1}\right)$;

$p(x) = x \ln x$; $q(x) = 2x - \frac{\ln x}{x}$.

6-Limites de la fonction comportant ln

Limites de référence

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty \qquad\qquad \lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad\qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln x = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \qquad\qquad \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \ ; \quad n \in IN^* \qquad\qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x^n\ln x = 0 \ ; \ n \in IN^*$$

Exemple

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{3x-3}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2+\ln x}{1-\ln x}$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \ln(\frac{3x-1}{x+1})$; $\lim\limits_{x\to +\infty} 2x - \ln x$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} 2x\text{- }\ln x$

$\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}} (2x+3)\ln(2x+3)$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (-3x)(1+\ln x)$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x+\ln(1+x)}{x}$.

7. Exemple d'étude de fonctions comportant ln

Exemple 1

Soit $f(x) = \ln x$

1. Etudier les variations de f
2. Déterminer l'équation de la tangente (T) au point $x_0 = 1$ à la courbe de f.
3. a) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

b) Interpréter graphiquement le résultat.

4. Tracer (T) et (C_f).

Exemple 2

A- Soit la fonction g définie sur$]0\,;+\infty[$ par $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$

1- Calculer $g(1)$

2-

a) Montrer que $g'(x) = \frac{-2x^2-1}{x}$

b) Dresser le tableau de variation de g (le calcul des limites n'est pas demandé)

3- En déduire le signe de $g(x)$.

B- On considère la fonction f définie sur$]0\,;+\infty[$ par $f(x) = -x + 3 + \frac{\ln x}{x}$

1- Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$

2- a) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) Donner le tableau de variation de f

3- Démontrer que (C_f) admet la droite (Δ): $y = -x + 3$ comme asymptote

4- Montrer qu'il existe un seul réel $\alpha \in]3;4[$ tel que $f(\alpha) = 0$

5- Tracer (C_f) et (Δ)

Exemple 3

Soit la fonction de IR vers IR définie par :

$$f(x) = x^2 + 2\ln(1+x)$$

1) Montrer que $D_f =]-1\,;\,+\infty[$

2) Vérifier que la dérivée de f est $f'(x) = \frac{2x^2+2x+2}{1+x}$. En déduire le sens de variation de f.

3) Calculer les limites de la fonction f en -1 et en $+\infty$

4) Dresser le tableau de variation de f.

5) Tracer (C_f)

----

8 . Fonction logarithme de base a ($a > 0$ et $a \neq 1$)

8.1. Définition

On appelle logarithme de base $\boldsymbol{a}$, notée log_a, la fonction définie par :

$$log_a : \quad]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Remarque

La fonction log_a garde les mêmes propriétés que la fonction ln (ensemble de définition, dérivée, …).

8.2. Propriétés

$\forall\, x \in \mathbb{R}\,; \quad log_a\, a^x = x$

$log_a(1) = \frac{\ln 1}{\ln a} = 0 \quad ; \quad log_a(a) = \frac{\ln a}{\ln a} = 1$

Si $a = e$ alors $log_e(x) = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x$. On parle de logarithme népérien ou logarithme de base e.

Si $a = 10$ alors $log_{10}(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$. On parle de logarithme décimal ou logarithme de base 10.

Remarque :

$\log_{10} = \log\,; \qquad log_e = \ln = Log$

Exemple 1

$f(x) = log_2\, x$. Déterminer D_f et calculer $f'(x)$.

Exemple 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$

$log_2 x = 0$

$log_3 x = 2$

$log_4(x + 1) = 1$

$(log_3 x)^2 + log_3 x - 6 \geq 0$

REMARQUE

La fonction $\log_a x$ a les mêmes propriétés que la fonction $\ln(x)$: ensemble de définition, dérivée, …

A VOUS DE JOUER …

Exercice 1 : Questions à Choix Multiples (QCM)

Parmi les réponses suivantes, une seule est juste. Choisir la bonne réponse.

1/ $\ln a < 0$ équivaut a :

A. $a \in \mathbb{R}$ B. $a \in]0;+\infty[$ C. $a \in]1;+\infty[$ D. $]0;1[$.

2/ $a \in]1;+\infty[$ équivaut à :

A. $\ln a < 0$ B. $\ln a < 1$ C. $\ln a > 0$ D. $\ln a > e$.

3/ La limite de $\frac{\ln x}{x-1}$ lorsque x tend vers 1 est égale à :

A. 0 B. $-\infty$ C. 1 D. $+\infty$

4/ La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$ est :

A. $f'(x) = \frac{x-2(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)x^3}$ B. $f'(x) = \frac{x-2(x+1)\ln(x+1)}{x^3}$ C. $f'(x) = \frac{2(x+1)\ln(x+1)}{x^3}$

5/ On pose $X = \ln 2 + \ln + \ln(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}) + \ln(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})$.

A. $X = \ln 2$; **B.** $X = 2\ln 2$; **C.** $X = \ln 2(2+\sqrt{2})$ **D.** $X = 0$.

6/ La limite en 1 de la fonction $g(x) = \frac{\ln x}{1-x^2}$ est :

A. 0 ; **B.** $+\infty$; **C.** $-\infty$; **D.** $-\frac{1}{2}$

7/ Le système $\begin{cases} -2\ln x + \ln y = 3 \\ 4\ln x - 3\ln y = -7 \end{cases}$ a pour ensemble de solution :

A. $\{(e;e^{-1})\}$ **B.** $\{(e^{-1};e)\}$; **C.** $\{(e^{-1};e);(e;e^{-1})\}$; **D.** $\emptyset$.

8/ La fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{x-1} + \ln x$ a pour ensemble de définition :

A. $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ B. $D_f =]0;+\infty[$ C. $D_f = \mathbb{R}$ D. $D_f =]0;1[\cup]1;+\infty[$.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $(x-2)\ln(x-2) = 0$; $\ln(x^2 - x - 1) = 0$;

$\ln(x+3) + \ln(x+5) = \ln 15$; $\ln(x+4) + \ln(x-2) = \ln(5x-4)$;
$-2\ln^2 x + \ln x + 1 = 0$; $(\ln x)2 + 2\ln x - 15 = 0$.

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : $\ln(x+2) + \ln(x+4) < \ln x$; $\ln(2x+1) < \ln(x+3)$; $(1-\ln x)(3+\ln x) \leq 0$; $\ln(2-x) + \ln(x+4) > \ln(3x+2)$; $(1-\ln x)(2+\ln x) \geq 0$; $\ln^2 x - 2\ln x - 3 \geq 0$; $\ln(x+2) \leq \ln(x^2-4)$; $\frac{\ln x - 2}{\ln x + 1} \geq 0$; $\frac{1+\ln x}{1-\ln x} > \frac{1-\ln x}{1+\ln x}$.

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x + y = 25 \\ lnx + lny = 2ln12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} lnx + 3lny = 1 \\ 3lnx - 2lny = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 700 \\ lnx - lny = 2ln\frac{4}{3} \end{cases}$

Exercice 5

A / Soit la fonction g définie sur] 0 ; +∞[par g(x) = x^3-1+2ln$x$

1- Montrer que $g'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x}$ et en déduire que g st strictement croissante sur] 0 ; +∞[puis calculer g(1).

2- Déduire le signe de g(x) pour $x > 0$

B / Soit f la fonction définie sur] 0 ; +∞[par $f(x) = x - 1 - \frac{lnx}{x^2}$

1.a) Montrer que $D_f =]0\,;\,+\infty[$

b) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2. Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

3. Dresser le tableau de variation de f

4. Montrer que la droite (D) : $y = x - 1$ est une asymptote à la courbe (C_f)

5. Etudier la position de (C_f) par rapport à (D) .

6. Représenter (C_f) et (D) dans un repère orthonormé. Unité = 1 cm

Exercice 6

A / Soient a et b deux réels et g la fonction définie sur]0 ; +∞[par $g(x) = ax + b + \frac{lnx}{x}$

Déterminer a et b pour que la courbe de g passe par A(1 ; 0) et qu'en ce point elle admette une tangente parallèle à la droite (D) : $y = 2x$.

B / Soit f la fonction définie sur]0 ; +∞[par $f(x) = x - 1 + \frac{lnx}{x}$ et (Cf) sa courbe représentative.

1- On pose $h(x) = x^2 + 1 - \ln x$. Etudier brièvement la fonction h, établir son tableau de variation puis en déduire le signe de h(x) suivant les valeurs de x.

2- Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f.

3- Déterminer $f'(x)$ en fonction de h(x) puis établir le tableau de variation de f

4- Soit (D) : $y = x - 1$. Montrer que (D) est une asymptote à la courbe (C_f) de f puis étudier la position de (C_f) par rapport à (D).

Exercice 7

Soit f(x) = x + 4 + ln $\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$

1.a) Montrer que $D_f =]-\infty\,;\,-2[\cup]2\,;\,+\infty[$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to2\\>}} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

c) Montrer que $f'(x) = \frac{x^2}{(x-2)(x+2)}$

d) Dresser le tableau de variation de f

2. a- Montrer que (C_f) a trois asymptotes dont l'une a pour équation $y = x + 4$.

b-Tracer (C_f) ainsi que les asymptotes.

3- Soit g une restriction de f sur] 2 ; +∞[; montrer que g est une application bijective.

Exercice 8

A / Résoudre l'inéquation $\frac{x}{x+1} > 0$

B / Soit la fonction f telle que f(x) = 1 + ln($\frac{x}{x+1}$).

1. a) Montrer que $D_f =]-\infty\,;\,-1[\cup]0\,;\,+\infty[$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

c) Montrer que $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)}$

d) Dresser le tableau de variation de f

2. a- Soit (D) la droite d'équation $y = 1$. Montrer que (D) est une asymptote à la courbe de f en $-\infty$ et $en + \infty$

b-Tracer (C_f) ainsi que (D).

Exercice 9

On donne la fonction définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 2x + 3 + \ln(\frac{x+1}{x-1})$

1.

a) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Montrer que $f'(x) = \frac{2x^2-4}{x^2-1}$

c) Dresser le tableau de variation de f sachant que $f(\sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2} + \ln(3 + 2\sqrt{2}) \approx 7{,}59$

2. a- Soit (D) la droite d'équation $y = 2x + 3$. Montrer que (D) est une asymptote à la courbe de f
en $+\infty$

b-Tracer (C_f) ainsi que (D).

CHAPITRE 3 :

STATISTIQUE A DEUX VARIABLES

Ce chapitre vise à stimuler à l'apprenant, les notions d'ajustement dans son ensemble ainsi que l'intensité des relations qui lient deux variables.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

Au terme de ce cours, l'apprenant doit - être capable de :

- Justifier si l'ajustement linéaire convient à une série statistique ;
- calculer les coefficients de régression d'une série statistique ;
- Interpréter les coefficients de régression d'une série statistique ;
- calculer le coefficient de corrélation d'une série statistique ;
- interpréter le coefficient de corrélation d'une série statistique.

NB : Tous les exercices non corrigés de ce cours doivent être systématiquement cherchés par l'élève avant toute éventuelle correction. Ils peuvent faire l'objet d'évaluation.

INTRODUCTION

Les séries statistiques étudiées en première étaient des séries simples : il s'agit de l'étude d'une population selon un seul caractère. En réalité il n'y a pas de phénomène isolé en économie. Les variables économiques sont liées les unes aux autres (ici on considère souvent plusieurs caractères de la même population).
C'est ainsi que l'épargne et la consommation sont fonction du revenu disponible ; les ventes d'une entreprise dépendent d'une part des quantités produites et d'autre part de la publicité et de l'expérience professionnelle.
Notre étude se limitera à deux (2) variables et consistera à établir la forme analytique des relations entre ces variables et à mesurer l'intensité de leur relation. En d'autres termes cette étude va s'occuper de la régression et de la corrélation.

1. Notion d'ajustement linéaire (ou affine)

1.1. Nuage de points

L'ensemble des points $M_i(x_i\,;y_i)$ représentés dans un repère orthogonal est appelé **le nuage de points.** Les x_i sont placés en abscisse et les y_i en ordonnée.

1.2 - Le point moyen G

On appelle point moyen d'un nuage, le point $G(\overline{x}\,;\overline{y})$, $\overline{x}$ et $\overline{y}$ étant les moyennes calculées dans chaque série.

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{N} \qquad ; \qquad \overline{y} = \frac{\sum y_i}{N}$$

1.3. Définition d'un ajustement linéaire

L'ajustement linéaire consiste à tracer une droite qui passe au plus près des observations d'un nuage de points. Cette droite est ensuite utilisée pour faire des prévisions.

Exemple

Soit (x_i) et (y_i) respectivement la production et la consommation (en milliers de kilogrammes) de manioc de six(6) agriculteurs togolais.

x_i	3	5	6	7	7	8
y_i	2	4	3	4	6	5

a. Représenter le nuage de points.
b. Déterminer les coordonnées du point moyen G puis le représenter.
c. Peut-on envisager un ajustement linéaire ?

2. Droite d'ajustement linéaire ou affine

Ajuster des données par une fonction de type $y = ax + b$, c'est déterminer les coefficients a et b de telle manière que les valeurs ajustées soient suffisamment proches des valeurs réelles.

2.1. Méthode de MAYER ou méthode des moyennes discontinues

Elle consiste à diviser le nuage des points en deux groupes de même effectif et à calculer pour chaque groupe, le point moyen. La droite d'ajustement passe par les deux points moyens.

Exemple

Soit six(6) couples des notes obtenues par un élève en français et en mathématiques générales.

Français (x_i)	4	5	6	6	7	8
Math géné (y_i)	2	4	3	4	6	5

Trouver l'équation de la droite d'ajustement linéaire de y en x par la méthode de Mayer.

Remarque

Si le nombre de points est impair, on place indifféremment le couple du milieu dans le premier ou dans le deuxième groupe.

2.2. Méthode des Moindres Carrés (M.M.C)

Elle consiste à minimiser la somme des résidus (c'est -à-dire les carrés des écarts entre les valeurs réelles et les valeurs ajustées) pour calculer les coefficients a et b.

Pour déterminer l'équation de la droite d'ajustement, on peut calculer la variance de chaque variable (x et y) et leur covariance.

2.2.1 – La droite de régression de y en x

La droite de régression ou d'ajustement linéaire de y en x est de la forme

$(D_{y/x}) :\ y = ax + b$, avec $a = \frac{cov(x\,;\,y)}{V(x)}$ (ou bien $a = \frac{\sum x_i y_i - n(\bar{x})(\bar{y})}{\sum x_i^2 - n(\bar{x})^2}$) et $b = \bar{y} - a\bar{x}$.

$V(x) = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2$ (ou bien $V(x) = \frac{\sum x_i^2 - n(\bar{x})^2}{n}$) ;

$Cov(x; y) = \frac{\sum x_i y_i}{n} - (\bar{x})(\bar{y})$ (ou encore $Cov(x; y) = \frac{\sum x_i y_i - n(\bar{x})(\bar{y})}{n}$).

Interprétation des réels a et b

Soit la droite $(D_{y/x}) : y = ax + b$

Le réel a signifie que lorsque la variable x augmente d'une unité, la variable y augmente de a unités (si $a > 0$) ou diminue de $-a$ unité (si $a < 0$).
Le réel b désigne la valeur de la variable y lorsque la variable x vaut 0.

Remarque :

On peut de la même façon déterminer la droite de régression de x *en* y

$(D_{x/y})$: $x = a'y + b'$

2.2.2 –La droite de régression de x en y

La droite de régression ou d'ajustement de x en y est de la forme $(D_{x/y})$: $x = a'y + b'$

Alors on a $\boxed{a' = \frac{Cov(x\,;\,y)}{V(y)} \quad (ou\ bien\ \ a' = \frac{\sum x_i y_i - n(\bar{x})(\bar{y})}{\sum y_i^2 - n(\bar{y})^2})\ \text{ et }\ b' = \bar{x} - a'\,\bar{y}}$

Exemple

Une fabrique vend des boîtes de conserve dans 5 zones différentes. Elle veut évaluer l'impact de ses efforts publicitaires sur ses ventes.

Les données sur ses ventes (y_i) et sur ses dépenses publicitaires (x_i) par zone (i) sont les suivantes :

Zone i	1	2	3	4	5
x_i	2	3	4	5	6
y_i	7	9	10	12	14

1- a. Montrer que la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés, a pour équation $y = 1{,}7x + 3{,}6$
   b. Interpréter les réels 1,7 et 3,6
2- Déterminer l'équation de la droite de régression de x en y.

Remarque

Les droites $(D_{y/x})$: $y = ax + b$ et $(D_{x/y})$: $x = a'y + b'$ se coupent au point **G**$(\bar{x}\,;\bar{y})$.

3. Coefficient de corrélation linéaire

Le coefficient de corrélation entre x et y est un nombre sans unité, noté r, qui permet de mesurer l'intensité et le sens de la relation linéaire entre les deux variables.

$$r = \frac{Cov(x\,;y)}{\sqrt{V(x)}\times\sqrt{V(y)}} = \frac{Cov(x\,;y)}{\sigma_x\,\sigma_y} \quad \text{(ou bien} \quad r = \frac{\sum x_i y_i - n\,(\bar{x})(\bar{y})}{\sqrt{[\,\sum {x_i}^2 - n\,(\bar{x})^2\,]\times[\,\sum {y_i}^2 - n\,(\bar{y})^2]}}\ \text{)}$$

REMARQUES

- On a toujours $-1 \leq r \leq 1$

- Si $r > 0$ alors la relation est directe ou positive.
- Si $r < 0$ alors la relation est indirecte ou inverse ou encore négative.
- Si $r = -1$ ou $r = 1$ alors les points du nuage sont alignés.

Interprétation du coefficient de corrélation

- Si $|r| \geq 0{,}7$ alors il existe une forte corrélation linéaire entre les deux variables. Dans ce cas, un ajustement linéaire est convenable.
- Si $|r| < 0{,}7$ alors il existe une mauvaise corrélation linéaire entre les deux variables.
- $Si\ r = 0\ alors$ il n'y a pas de dépendance entre les deux variables.
- Si $r = -1$ ou $r = 1$ alors la relation entre les deux variables est totalement forte (ou parfaite).

Exemple

Soit le tableau suivant :

x_i	2	3	4	5	6
y_i	7	10	10	14	14

a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y.
b) Interpréter le résultat.

----

4. **Relation entre le coefficient de corrélation et les coefficients de régression**

Soient $(D_{y/x}): \ y = ax + b$ et $(D_{x/y}): \ x = a'y + b'$

$$r^2 = aa'$$

<u>Remarques</u> : a, a' *et* r sont toujours de même signe.

- Si $a > 0$ alors $a' > 0$ et $r > 0$. Dans ce cas, $r = \sqrt{aa'}$
- Si $a < 0$ alors $a' < 0$ *et* $r < 0$. Dans ce cas, $r = -\sqrt{aa'}$

<u>Exemple</u> : Une équation de la droite de régression de y *en* x est $y = -0{,}43x + 12{,}5$.
La moyenne de x *est* $\bar{x} = 5{,}7$ et le coefficient de corrélation est $r = -0{,}85$.
Donner une équation de la droite de régression de x *en* y.

A VOUS DE JOUER …

Exercice 1 : QCM

1. La série statistique double $(X\,;Y)$ de modalités $x_i\ et\ y_i$ représentée par l'observation de la croissance d'un poisson dont x_i représente l'âge en année et y_i représente la taille en centimètre (cm) a pour droite de régression de y en x : $y = 9{,}7x + 12{,}7$.
L'âge du poisson mesurant 100 cm est :
A) 11 ; B) 9,7 ; C) 9 ; D) 12,7
2. Les droites de régression de y en x et de x en y se coupent au point moyen de coordonnées :
A) (0 ; 0) ; B) $(0\,;\bar{y})$; C) $(\bar{x};0)$; D) $(\bar{x};\bar{y})$
3. Les droites de régression de y en x : $y = 2x - 1$ et de x en y : $y = 3x - 2$ se coupent au point moyen :
A) (0 ; 1) ; B) (1 ;0) ; C) $(1;1)$; D) $(1;2)$
4. La droite de régression de x en y d'équation $2y + 8x + 3 = 0$ a pour coefficient de régression a' égal :
A) 2 ; B) -4 ; C) (3 ; D) 4

Exercice 2

Monsieur YIYA a relevé au cours de six années consécutives le chiffre d'affaires d'une entreprise, exprimé en milliers de francs CFA.

Années	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Rang x_i	1	2	3	4	5	6
Chiffre d'affaire y_i	1320	1470	1640	1810	2010	2140

1- Représenter graphiquement le nuage de points $M_i(x_i\,;y_i)$.
2- Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage de points M_i.
3- On considère G_1 et G_2 points moyens des sous-ensembles obtenus respectivement pour $x_i \epsilon \{1;2;3\}$ et pour $x_i \epsilon\ \{4;5;6\}$. Déterminer les coordonnées des points G_1 et G_2.
4- Déterminer une équation de la droite d'ajustement linéaire par la méthode de Mayer.
5- Vérifier que G est sur cette droite .
6- En déduire une prévision du chiffre d'affaires en 2025 .

Exercice 3

On considère une série statistique à deux variables X et Y dont on donne les caractéristiques suivantes :
Equation de la droite de régression de Y en X : y = 3,09x - 4,39
La variance de Y est V(Y) = 83,84 ; la valeur moyenne de X est $\bar{x}$ = 5,5 ;
la covariance est Cov (X ; Y) = 25,5

1- Déterminer la moyenne de Y.
2- Déterminer la variance de X.
3- a) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire.
b) Interpréter le résultat.

Exercice 4

Le tableau suivant donne le pourcentage des ménages possédant au moins une automobile dans une ville du TOGO entre 2016 et 2021 .

1. On désigne par x_i l'année et y_i le taux d'équipement en pourcentage.

Année x_i	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Taux y_i	62,5	66,8	71	74,7	76,5	79,9

a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y .
b) Un ajustement affine est t − il possible ? Justifier.

2. Soit (D) la droite de régression de y en x . Déterminer une équation de la droite (D) par la méthode des moindres carrés.

3. a) Quel taux d'équipement en automobiles peut − on prévoir pour l'an 2027 ?
b) En quelle année peut − on estimer que 86% des ménages au moins sont équipés ?

Exercice 5

En prévision au lancement d'un nouveau produit, une société effectue une enquête pour en fixer le prix de vente unitaire en milliers de francs CFA. Le tableau suivant indique pour un prix donné X_i, le nombre d'acheteurs potentiels Y_i

X_i	5	6	7	8	9	10	11	12
Y_i	130	120	100	80	70	60	30	20

1. Calculer et interpréter le coefficient de Corrélation linéaire entre les deux variables
2. Par la méthode des moindres carrés, établir une droite de régression de type $Y = aX + b$ puis interpréter a et b.
3.a) Prévoir à l'unité près, le nombre d'acheteurs potentiels lorsque le prix unitaire est de 13 000F CFA.
b) Donner une estimation du prix pour 150 acheteurs potentiels ?

Exercice 6

Ce tableau indique l'évolution du revenu et le niveau d'épargne (tous en centaine de milliers de francs CFA) d'un cadre d'une société :

Années	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Revenu (X_i)	4	6	6	8	7	8	9	10	10	12
Epargne(Y_i)	1	2	2	2	1	2	3	4	5	5

1. Calculer au millième près le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y puis interpréter le résultat.

On donne les résultats numériques suivants :

$$\sum X_i = 80 \quad ; \quad \sum Y_i = 27 \quad ; \quad \sum X_i^2 = 690 \quad ; \quad \sum Y_i^2 = 93 \quad ; \quad \sum X_i Y_i = 244$$

2. Déterminer par la méthode des moindres carrées une droite de la forme $Y = aX + b$ (Donner a et b au centième près).
3. Interpréter les paramètres (a et b) de cette droite de régression.

Exercice 7

Pour une série statistique $(X_i; Y_i)$; (i allant de 1 à 5) ; la méthode des moindres carrés a permis de trouver :

- L'équation de la droite (D) de régression de y en x : $y = -0{,}7x + 5{,}6$
- L'équation de la droite (D') de régression de x en y : $y = -0{,}8x + 2$

1)
   a. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y
   b. Calculer les coordonnées du point moyen associé à cette série statistique
   c. Calculer alors $\sum X_i$ et $\sum Y_i$

2) On sait de plus que $\sum X_i^2 = 8130$. Calculer alors Cov(X ;Y) puis $\sum X_i Y_i$ et $\sum Y_i^2$

Exercice 8

L'équation de la droite de régression de y en x est : $y = 0{,}5x + 15$ et l'équation de la droite de régression de x en y est : $y = 4x - 20$ sont obtenues par la méthodes des moindres carrés d'une série statistique double $(X_i; Y_i)$; (Avec i = 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6)

1. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de cette série

2.a . Calculer les coordonnées du point moyen de cette série.

b. En déduire $\sum_{i=1}^{6} X_i$ et $\sum_{i=1}^{6} Y_i$.

3. Sachant que $\sum_{i=1}^{6} X_i^2 = 750$, déterminer la variance de X ; la covariance de (X ;Y) ; $\sum X_i Y_i$ puis $\sum Y_i^2$.

CHAPITRE 4 :

FONCTION EXPONENTIELLE

A la fin de ce chapitre, l'élève doit être capable d'étudier et de tracer toute fonction exponentielle dans un repère orthonormé donné.

OBJECTIFS OPERATIONNELS

Au terme de ce cours, l'apprenant doit - être capable de :

- définir une fonction exponentielle sur la base des propriétés
- déterminer l'ensemble de définition d'une fonction comportant exponentielle
- calculer les limites aux bornes d'un ensemble de définition à partir de son expression littérale
- résoudre des équations et inéquations comportant des fonctions exponentielles en se servant des propriétés
- étudier et tracer une fonction exponentielle en se référant au plan d'étude

NB : Tous les exercices non corrigés de ce cours doivent être systématiquement cherchés par l'élève avant toute éventuelle correction. Ils peuvent faire l'objet d'évaluation.

1. Définition

C'est la réciproque de la fonction logarithme népérien. Elle est notée exp ou e, et est définie par :

$$\mathbf{exp} : \mathbb{R} \longrightarrow]\,0\,;\,+\infty\,[$$
$$x \longmapsto \exp(x) = e^x$$

NB : e^x est donc le nombre strictement positif dont le logarithme est égal à x ($\ln e^x = x$).

$\forall\ x \in R\,,\ \ e^x > 0$; $e^0 = 1$

2. Ensemble de définition d'une fonction comportant exp

- L'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = e^x$ est $D_f = \mathbb{R}$.
- L'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = e^{U(x)}$ est $D_f = D_U$

Exemple

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes : $f(x) = e^x - 1$;

$g(x) = \frac{2x+3}{1+e^x}$; $h(x) = (x^2 - 1)e^{2-x}$; $K(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$

----

3. Propriétés

$\forall$ a $\in \mathbb{R}$, $e^a > 0$

$\forall$ $a \in \mathbb{R}$ et $\forall$ $b \in \mathbb{R}$:

$e^a . e^b = e^{a+b}$; $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$; $\frac{1}{e^b} = e^{-b}$; $(e^a)^n = e^{na}$; $e^0 = 1$; $e^1 = e$

$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$; $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$; $e^a > e^a \Leftrightarrow a > b$

$\forall\, a > 0$, $e^{\ln a} = a$.

Cas particuliers

$$e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0,$$

$$e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0,$$

$$\boldsymbol{e^x = a \Leftrightarrow x = \ln a} \quad \boldsymbol{si} \ \boldsymbol{a} > 0.$$

NB : L'équation $e^x = a$ n'a pas de solution si $a \leq 0$.

Exemple 1

Simplifier les écritures suivantes :

$$A = e^{1+ln3} \quad ; \quad B = e^{ln5+ln3} \quad ; \quad C = ln\sqrt{e^3} \quad ; \quad D = e^{3ln7}$$

Exemple 2

Montrer que :

$1 - \ \forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\,.$

$2 - \ \forall\, x \in \mathbb{R}\,,\quad \ln(e^x + 1) = x + \ln\left(1 + \dfrac{1}{e^x}\right) = x + \ln(1 + e^{-x})$

4. Equations, inéquations et systèmes comportant exp

Exemple 1

Résoudre les équations suivantes :

$e^{2x+1} = 3 \quad ; \quad e^{2x+1} = -3 \quad ; \quad e^{x+1} = 0 \quad ; \quad 2e^{2x} + e^x - 3 = 0 \quad ;$

$e^{-2x^2+x+3} = e^{-2x^2} \quad ; \quad e^{2x-1} + e^{x+1} - 2e^x = 0.$

Exemple 2

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 4e^{x} - 3e^{y} = 9 \\ 2e^{x} + e^{y} = 7 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} x - y = 1 \\ e^{2x} - 7e^{y+1} = -10 \end{cases}$

Exemple 3

Résoudre les inéquations suivantes :

$e^{2x+1} > 2$; $e^{2x} - 3e^{x} + 2 \geq 0$; $-e^{2x} - 4e^{x} - 3 \leq 0$; $2e^{2x} + e^{x} - 3 \geq 0$

$(e^{3x} - 2)(e^{x} - 6) > 0$; $e^{2x-1} + e^{x+1} - 2e^{3} \leq 0$; $\frac{e^{x}-2}{e^{x}+4} > 0$

5. **<u>Dérivée de la fonction comportant exp</u>**

Soit U une fonction une fonction dérivable sur un intervalle I.

$\boldsymbol{e^U}$ est dérivable sur I et on a : pour tout $x\ de\ I$, $(\boldsymbol{e^{U(x)}})' = \boldsymbol{U'(x)e^{U(x)}}$.

<u>Exemple</u>

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$U(x) = e^x$; $n(x) = e^{-x}$; $f(x) = e^{-x+5}$; $g(x) = (x^2 - 1)e^{2-x}$;

$h(x) = \frac{3e^x - 2}{1+e^x}$; $m(x) = e^{\frac{-2}{x-3}}$; $P(x) = \frac{2x}{e} - 1 - lnx + e^{-x}$.

6. Limites de la fonction comportant exp

Limites de référence

(1): $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$; (2): $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$;

(3): $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; (4): $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$;

(5): $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$; (6) : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$; $n \in \mathbb{N}$;

(7): $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$; $n \in \mathbb{N}$.

Exemple

Déterminer le comportement des fonctions suivantes pour les valeurs indiquées :

a) $f(x) = (3x-2)e^x$ $en -\infty$ et $en +\infty$.

b) $g(x) = \frac{e^x}{2+e^x}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

c) $h(x) = \frac{2x}{1-e^x}$ en 0.

d) $m(x) = (-3+2x)e^{-3+2x}$ $en -\infty$.

e) $p(x) = x - 2e^x$ en $+\infty$.

f) $q(x) = \frac{xe^x}{x+1}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

g) $u(x) = e^{2x} - e^x + 1$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

----

7. Exemple d'étude de fonction comportant exp

Exemple 1

Soit $g(x) = e^x$

1. Montrer que $D_g =]-\infty\,;\,+\infty[$

2. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

3. Montrer que $g'(x) = e^x$

4. Dresser le tableau de variation de g

5.a- Etudier le comportement de $\frac{g(x)}{x}$ $en\ +\infty$

b- Donner la conséquence graphique de ce résultat.

6. Donner l'équation de la tangente (T) au point 0 à la courbe de g.

7. Tracer la courbe de g. (unité graphique 1cm)

Exemple 2

On considère la fonction f définie sur ℝ par :

$$f(x) = (2x^2 - 3x)\, e^x$$

1. Vérifier que $D_f\ est\ ]-\infty\,;+\infty[$

2. a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) En déduire l'existence d'une droite asymptote à la courbe de $f\ en\ -\infty$.

3. Montrer que $f'(x) = (2x^2 + x - 3)\, e^x$.

4. a) Etablir le tableau de signe de $f'(x)$.

b) En déduire le tableau de variation de *f*.

5. a)Déterminer l'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses

b) Donner l'équation de la tangente (T) à (C_f) en 0.

6. Construire (T), (C_f) et son asymptote dans un même repère (o, i, j).

Exemple 3

A) On considère la fonction g définie par $g(x) = 1 - e^{2x} - 2xe^{2x}$

1. Montrer que $D_g =]-\infty\,;+\infty[$

2. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

3. Soit $g'(x)$ la dérivée de g. Montrer que $g'(x) = -4(x+1)e^{2x}$

4. a) Etablir le tableau de signe de $g'(x)$.
   b) En déduire le tableau de variation de g.

5. Calculer $g(0)$ puis en déduire le signe de $g(x)$.

B/ Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = x + 3 - xe^{2x}$.

1. Montrer que $D_f =]-\infty\,;+\infty[$

2. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

3. Soit $f'(x)$ la dérivée de f. Montrer que $f'(x) = g(x)$

4. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

5. Montrer que (Δ): $y = x + 3$ est asymptote à (Cf) en $-\infty$.

6. a) Etudier la position relative de (Cf) par rapport à (Δ).

   b) Tracer l'asymptote (Δ) et (Cf).

8. Fonction exponentielle de base a, $a > 0$.

8.1. Définition

On appellee fonction exponentielle de base a, la fonction notée exp_a et définie par :

$$exp_a :]-\infty\,;\,+\infty[\to]0\,;\,+\infty[$$
$$x \mapsto exp_a(x) = a^x = e^{xlna}$$

8.2. Propriétés

La fonction exp_a garde les mêmes propriétés que la fonction exp (ensemble de définition, dérivée, …).

Exemple 1

$$f(x) = 5^x$$

a. Déterminer l'ensemble de définition de f

b. Calculer la dérivée de f

Exemple 2

Résoudre :

1. $3^x = -2$
2. $2^{1-x} = 5$
3. $3^{2x} + 3^x - 2 = 0$

A VOUS DE JOUER …

Exercice 1 : Questions à Choix Multiples (QCM)

Parmi les réponses proposées aux questions suivantes, une seule est juste. Choisir la bonne réponse.

1/ La limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto x^2 - e^x$ est :

A. $+\infty$ B. 0 C. $-\infty$ D. n'existe pas.

2/ Dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $x(e^x - e) > 0$ a pour ensemble de solutions :

A. $]-\infty; 0[\cup]e; +\infty[$ B. $]0; 1[$ C. $]0; e[$ D. $]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$.

3/ La limite en 0 de la fonction $g(x) = \frac{e^x - 1}{x(x+2)}$ est :

A. 0 B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. 2.

4/ La fonction f définie par $f(x) = 2 + \frac{e^x}{x-1}$ a pour dérivée :

A. $f'(x) = \frac{(x-2)e^x}{x-1}$ B. $f(x) = 2 + \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$ C. $f(x) = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$ D. $f(x) = \frac{2x-2+e^x}{x-1}$.

EXERCICE 2

Simplifier :

A = $e^{-\ln\frac{4}{2}}$; B = $e^{\frac{2}{3}ln7}$; C = $ln\sqrt[3]{e^2}$; D = e^{-ln3} ; E = $e^{\ln(\frac{1}{6})}$;

F = $ln\sqrt[3]{e^2} + lne^2 - ln\frac{1}{e^3}$; G = $ln\frac{1}{e^2} + 3ln\sqrt{e}$; H = $lne\sqrt{e} + lne^2 - ln\frac{1}{e^3} + 2ln\frac{1}{\sqrt{e}}$

G = $lne^3 - ln\sqrt[5]{e^4} + ln\frac{1}{e^2} + 3ln\sqrt{e}$

EXERCICE 3

Trouver les limites des fonctions suivantes pour des valeurs indiquées :

$M(x) = \frac{e^x - 5}{e^x + 1}$ $en - \infty\ et\ en + \infty$; $P(x) = (3x-1)e^x$ $en - \infty\ et\ en + \infty$;

$Q(x) = \frac{e^x}{3x+5}$ $en - \infty\ et\ en + \infty$; $R(x) = 3e^x + 2e^{2x} - 4$ $en - \infty\ et\ en + \infty$;

$N(x) = \ln(e^x - 1)$ à droite de 0.

EXERCICE 4

Résoudre les équations suivantes :

$(e^x - 2)(e^x + 1) = 0$; $(e^{-x} - e)(e^{2x} + e^2) = 0$; $e^{2x} - 3e^x + 2e^2 = 0$;

$2e^{2x+2} - 7e^{x+1} + 3 = 0$; $e^x = e^{2x+5}$; $e^{2x-1} - e^{x+1} - 2e^3 = 0$

$\frac{e^{2x}-1}{e^x-3} = -3$; $\begin{cases} 3e^x + 4e^y = 19 \\ e^x - 6e^y = -1 \end{cases}$; $2^{2x} - 2^{x+1} + 3 = 0$; $(\frac{1}{4})^x - 3(\frac{1}{2})^x - 4 = 0$

EXERCICE 5

Résoudre les inéquations suivantes :

$e^{2x} - e^{x} - 6 \leq 0$; $e^{2x} - 3e^{x} - 4 > 0$

$e^{2x} - 2e^{x} - 3 \leq 0$; $\frac{e^{x} - 2}{e^{x} - 4} \leq 0$

EXERCICE 6

On donne f, la fonction définie par $\mathrm{f(x)} = \frac{\mathrm{e^{x} - e^{-x}}}{\mathrm{e^{x} + e^{-x}}}$

1. Montrer que $D_f = \mathbb{R}$
2. Montrer que $f(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$ et calculer la limite de f en $+\infty$.
3. Montrer que $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ et calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
4. Montrer que $f'(x) = \frac{4}{(e^{x} + e^{-x})^2}$
5. Dresser le tableau de variation de f.
6. Tracer la courbe de f et ses asymptotes.

EXERCICE 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 e^{1-x}$

1. Calculer les limites de $f(x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. a) Soit $f'(x)$ la dérivée de f. Montrer que $f'(x) = x(2 - x)e^{1-x}$
   b) Dresser le tableau de signe de $f'(x)$.
   c) En déduire le tableau de variation de f.
3. Tracer la courbe de f (Unité graphique 1cm)

EXERCICE 8

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ $par\ g(x) = e^{x} + 2x - 4$.

1. Calculer les limites de $g(x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. a) Soit $g'(x)$ la dérivée de g. Montrer que $g'(x) = e^{x} + 2$.
   b) Dresser le tableau de signe de $g'(x)$.
   c) En déduire le tableau de variation de g.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique β appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ 1[$
4. Représenter la courbe de g. unité graphique 2cm.

CHAPITRE : 5

PRIMITIVES ET CALCUL INTEGRAL

Ce chapitre vise à stimuler l'apprenant, aux notions de primitive d'une fonction continue ainsi que ses propriétés et au calcul de l'intégrale d'une fonction ainsi que l'aire d'une région précise d'un plan donné.

NB : Tous les exercices non corrigés de ce cours doivent être systématiquement cherchés par l'élève avant toute éventuelle correction. Ils peuvent faire l'objet d'évaluation.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

Au terme de ce cours, l'apprenant doit - être capable de :

- déterminer la primitive d'une fonction continue en se référant aux notions de l'unicité et de pluralité d'une primitive
- effectuer les opérations sur les primitives au regard des propriétés apprises
- déterminer l'intégrale d'une fonction à partir de son expression littérale
- effectuer des opérations sur les intégrales à partir des propriétés
- calculer la valeur moyenne d'une fonction en se servant de la formule
- d'intégrer par parties en utilisant la formule d'intégration par parties
- calculer l'aire d'un domaine du plan délimité par une courbe, les axes de coordonnées,………..connaissant l'expression littérale de la fonction.

1. Primitives

1.1. Définition d'une primitive

Soit f et F deux fonctions définies sur un intervalle I.

La fonction F est une primitive de f sur I, si et seulement si, elle est dérivable sur I et pour tout x élément de I, $F'(x) = f(x)$.

Exemple

La fonction $f: x \longmapsto 10x + 3$ admet pour primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction F : $x \longmapsto 5x^2 + 3x$;

f admet aussi la fonction $F_1: x \longmapsto 5x^2 + 3x + 5$ pour primitive sur $\mathbb{R}$; en effet,

$F'(x) = F_1'(x) = f(x) = 10x + 3.$

f admet aussi la fonction $F_2: x \longmapsto 5x^2 + 3x + 25$ pour primitive sur $\mathbb{R}$. En effet,

$$F'(x) = F_2'(x) = f(x) = 10x + 3.$$

1.2. Ensemble des primitives

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.

Les primitives de f sur I sont de la forme $F(x)+C$ où C est une constante réelle.

Exemple

Déterminer les primitives des fonctions suivantes sur $]0\,;\,+\infty[$:

$f(x) = -\frac{1}{4}$; $g(x) = -2x + 1$; $h(x) = 2e^{2x} + 4$; $m(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 6$

1.3. Primitive vérifiant une condition initiale

Soit f une fonction définie sur un intervalle I ; a et b deux nombres réels et F les primitives de f sur ℝ. Il existe une primitive et une seule qui prend la valeur b au point d'abscisse a. Alors f(a) = b.

Exemple 1

On donne $f(x) = 6x^2 + 2x + 3$.

a) Trouver une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) Trouver les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

c) Trouver la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 6 pour $x = 2$.

Exemple 2

1. $f(x) = 2x + 5$; $F(x) = ax^2 + bx + 7$.

Déterminer a et b pour que F soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. $f(x) = (2x^2 + 1)e^x$ et $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$

Déterminer a, b et c tels que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

- <u>Tableau des primitives</u>

Fonctions f	*Primitives F*
$f(x) = 0$	$F(x) = k \;\; avec\; k \in \mathbb{R}$
$f(x) = a \;\; avec\; a \neq 0$	$F(x) = ax + k$
$f(x) = x^n \;\; avec\; n \neq -1$	$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + k$
$f(x) = \frac{1}{x} \;\; ; \;\; x > 0$	$F(x) = \ln x + k$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + k$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + k$
$f(x) = \frac{1}{x^n} \;\; ; \; n \neq 1$	$F(x) = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + k$

Fonctions f	*Primitives F*
$f = U'U^n \; avec\; n \neq -1$	$F = \frac{1}{n+1} U^{n+1} + k$
$f = \frac{U'}{U^n} = U'U^{-n} \;\;\; avec\; n \neq 1$	$F = \frac{-1}{(n-1)U^{n-1}} + k$
$f = \frac{U'}{U} = U'U^{-1} \;\; ; \;\; U > 0$	$F = \ln U + k$
$f = U'e^U$	$F = e^U + k$
$f = \frac{U'}{U^2} = U'U^{-2}$	$F = \frac{-1}{U} + k$
$f = mU' \; avec\; m \neq 0$	$F = mU + k$
$f = U' + V'$	$F = U + V + k$

<u>Exemple</u> :
Déterminer les primitives des fonctions suivantes sur I :

a) $f(x) = 2x^5 + 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \quad sur \;\; I =]0\,;\, +\infty[.$

b) $g(x) = (3x^2 + 4)(x^3 + 4x + 1)^7 \quad sur \;\; I = \mathbb{R}.$

c) $h(x) = \frac{3}{(2+3x)^2} \quad sur \; I = [0\,;\, +\infty[.$

d) $q(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+3} \quad sur \;\; I = [0\,;\, 1[.$

1.5. Recherche de primitives d'une fonction rationnelle

Exemple 1

Soit $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 2}{2x + 1}$.

1. Déterminer les réels a ; b et c tels que $(x) = ax + b + \frac{c}{2x+1}$.
2. En déduire une primitive de sur $]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty[$.

Exemple 2

Soit $g(x) = \frac{x+5}{x^2-1}$

1. Trouver deux réels $a\ et\ b$ tels que $g(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$
2. En déduire une primitive de $g\ \ sur\ \ ]1\ ;\ +\infty[$

2. Calcul intégral

2.1. Définition de l'intégrale d'une fonction continue

Soit f une fonction continue sur I et F une primitive de f sur I ; $a\ et\ b$ deux réels appartenant à I.

On appelle intégrale $de\ a$ à b de la fonction f, le réel $F(b) - F(a)$, noté $\int_a^b f(x)dx$ ou $[F(x)]_a^b$ et se lit « **intégrale de a à b de la fonction $f(x)$ ou somme de a à b de $f(x)$.** »

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Vocabulaire

- $\int_a^b f(x)dx$ se lit « somme (**ou intégrale**) de a à b de $f(x)dx$ »

- $[\boldsymbol{F(x)}]_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}$ se lit « $\boldsymbol{F(x)}$ pris entre *a et b* »
- *a et b* sont les bornes de l'intégrale $\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f(x)dx}$
- Dans l'écriture, $\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f(x)dx}$, on peut remplacer x par toute autre lettre (**sauf *a et b***)

Exemple 1

On donne $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$. Déterminer l'intégrale de -1 à 1 de $f(x)$.

Exemple 2

Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^2 (x^2 + x)dx \quad ; \quad J = \int_2^4 (-2x + 9)dx \quad ; \quad K = \int_{ln2}^{\ln 5} e^x dx.$$

2.2. Propriétés de l'intégrale

- **Propriété 1**

Soit f une fonction continue sur un intervalle K, a et b deux éléments de K. On a :

$\int_a^a f(x)dx = 0$; $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

- **Propriété 2 (relation de Chasles)**

Soit f une fonction continue sur un intervalle *K, a, b et c* trois éléments de K. On a :

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Exemple

Considérons la fonction f définie par : $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & si\ x \in]-\infty; 1] \\ -x+4 & si\ x \in [1\ ; +\infty[\end{cases}$

Calculer $\int_0^3 f(x)dx.$

- **<u>Propriété 3</u> (linéarité de l'intégrale)**

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle K, α un nombre réel, a et b deux éléments de K. On a :

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(t)dt$$

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

<u>Exemple</u>

Sachant que I = $\int_0^1 (3x^2+1)e^x dx$ et J= $\int_0^1 x^2e^x dx$, calculer I – 3J

- **<u>Propriété 4</u> (signe de l'intégrale)**

Soit f une fonction continue sur un intervalle K ; a et b deux éléments de K ($a \leq b$). Si f est positive sur $[a\,;b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

2.3- <u>Valeur moyenne</u>

On appelle valeur moyenne ou tout simplement la moyenne d'une fonction f intégrable sur un intervalle $[a;b]$ le nombre M tel que :

$$\boxed{\boldsymbol{M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}}$$

<u>Exemple</u>

Calculer la valeur moyenne de $f(x) = 4x^2 + 1$ sur [1 ; 3]

2.4. Intégration par parties

Soient U et V deux fonctions dérivables sur I. Calculons $(UV)'$ et tirons $U'V$

$$(UV)' = U'V + V'U \Rightarrow U'V = (UV)' - V'U$$

$$\forall\, x \in [\,a\,;b],\quad \int_a^b U'(x)V(x)dx = [\,U(x)V(x)]_a^b - \int_a^b V'(x)U(x)dx$$

Exemple

En intégrant par parties, calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_0^{ln2} xe^x dx$; $I_2 = \int_0^{ln2} xe^{2x} dx$; $I_3 = \int_1^e \ln x dx$

2.5 - Notion d'aire

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal ; D est la région du plan délimitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a \quad et \quad x = b$.

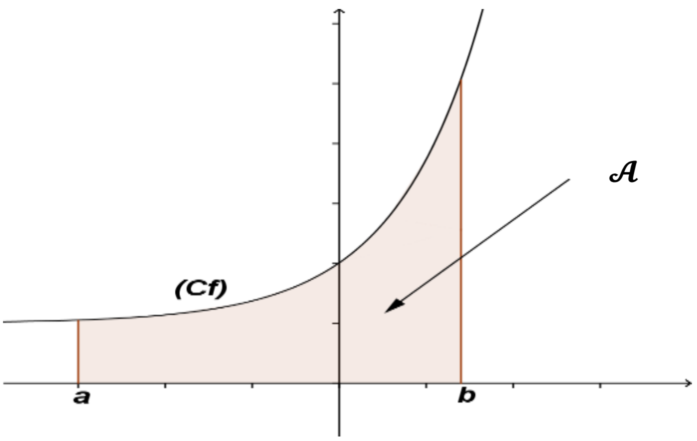
L'unité d'aire est l'aire du rectangle engendré par le repère choisi. Elle est notée $\boldsymbol{u.a}$

Exemple :

Soit le repère orthogonal (O, I, J) d'unités graphiques 2cm sur l'axe des abscisses et 3cm sur l'axe des ordonnées. L'unité d'aire u.a $= 2cm \times 3cm = 6cm^2$

- **Cas d'une fonction positive**
  Si f est une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a\,;b]$, l'aire de la région délimitée, mesurée en unité d'aire, est égale à

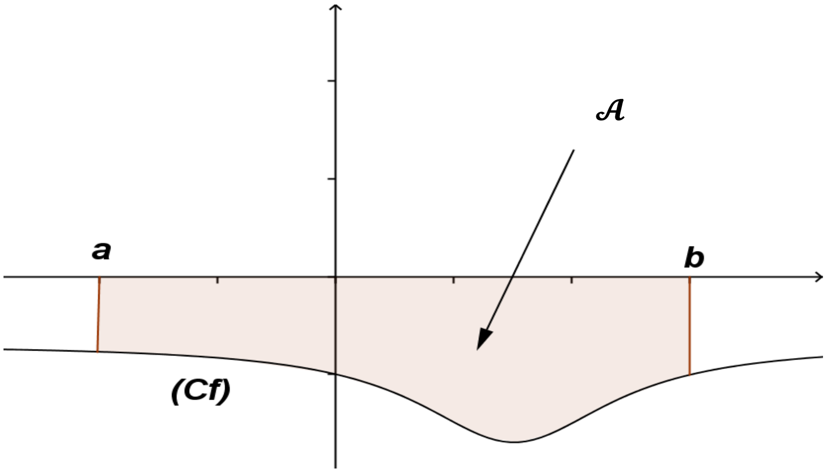
$$\boxed{\mathcal{A} = \left[\int_a^b (f(x))dx\right] \times u.a}$$



- **Cas d'une fonction négative**

Si f est une fonction continue et négative sur l'intervalle $[a\,;b]$, l'aire de la région délimitée, mesurée en unité d'aire, est égale à

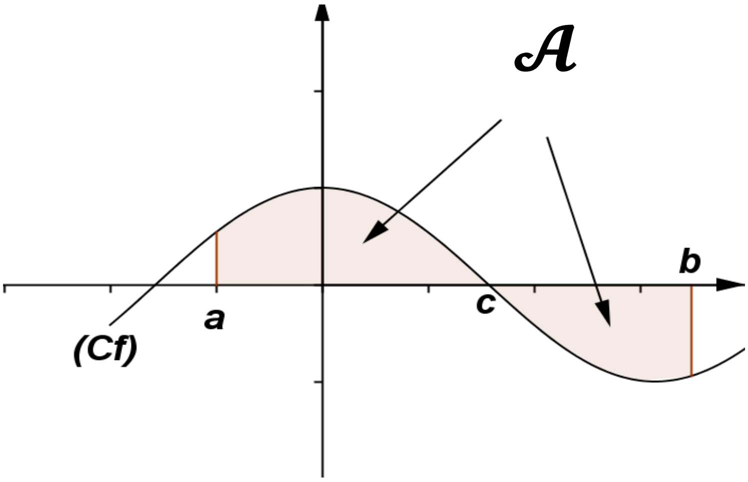
$$\mathcal{A} = \left[-\int_a^b f(x)dx\right] \times u.a$$



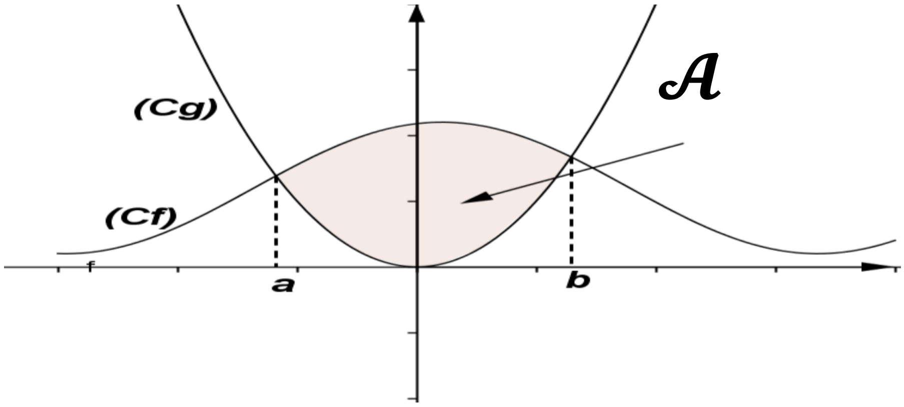
- **<u>Cas d'une fonction de signe quelconque</u>**

  Si f est une fonction continue et de signe quelconque sur l'intervalle $[a\,;b]$, l'aire de la région délimitée, mesurée en unité d'aire, est égale à la somme des aires des domaines situés au-dessus de l'axe des abscisses, diminué de la somme des aires des domaines situés en dessous de l'axe des abscisses :

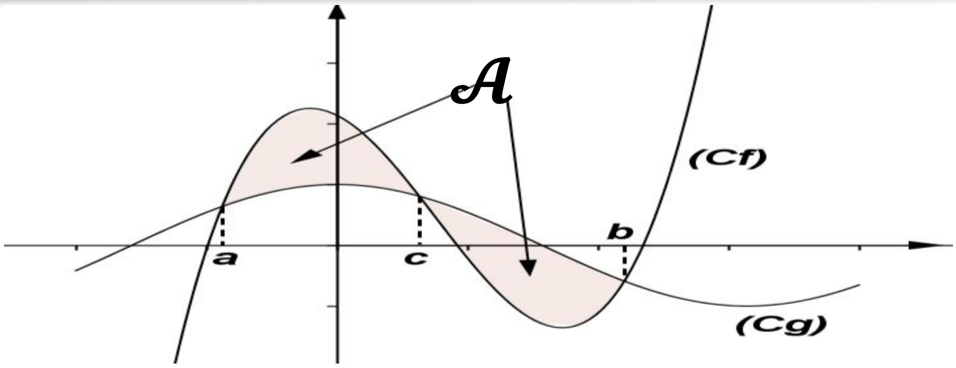
  $$\mathcal{A} = [\ \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx\ ] \times u.a$$



- **<u>Autres cas à rencontrer</u>**



$$\mathcal{A} = [\int_a^b (f(x) - g(x))dx] \times u.a \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{A} = \left[\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx\right] \times u.a$$



$$\mathcal{A} = \left[\int_a^c (f(x) - g(x))dx + \int_c^b (g(x) - f(x))dx\right] \times u.a$$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 + e^x$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère d'unités graphiques 2cm. On admet que son tableau de variation est celui donné ci-dessous :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

1. Soit la droite (D) : $y = x + 1$. Montrer que (D) est une asymptote à (C_f).
2. Tracer (C_f) et (D).
3. a- Soit $\mathcal{A}_1$ l'aire en cm^2 de la partie du plan comprise entre (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. Hachurer $\mathcal{A}_1$ et la calculer.

   b-Soit $\mathcal{A}_2$ l'aire en cm^2 de la partie du plan comprise entre (C_f), la droite (D) et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$. Hachurer $\mathcal{A}_2$ et la calculer.

A VOUS DE JOUER …

Exercice 1 : Questions à **C**hoix **M**ultiples (QCM)

Choisir la bonne réponse parmi les propositions suivantes :

1. On donne $h: x \mapsto xe^x$. Une primitive H de h sur $\mathbb{R}$ est :

A) x^2e^x ; B) $xe^x - e^x$; C) $\frac{e^x-1}{x^2}$; D) $2e^x$

2. On donne $p(x) = lnx$. Une primitive P de p sur]0 ; +∞[est :

A) $xlnx$; B) $xlnx + x$; C) $xlnx - x$; D) $\frac{lnx}{x}$

3. On donne $I = \int_0^1 x^3 dx$. I *est égale* à :

A) 0 ; B) $\frac{1}{4}$; C) $-\frac{1}{4}$; D) 3

4. On donne $J = \int_{2021}^{2021} \frac{1}{x^2+1} dx$. J vaut :

A) 0 ; B) 9 ; C) 1 ; D) $\frac{1}{2021}$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes : a) $\int_{-1}^{2} 2t dt$ b) $\int_{2}^{0} t^2 dt$ c) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$

d) $\int_0^1 \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx$ e) $\int_{-1}^{2} e^t\, dt$ f) $\int_0^4 (x-2)(x^2-4x+1)^3 dx$ g) $\int_0^1 \frac{2tdt}{1+t^2}$

h) $\int_{ln2}^{ln3} e^{2x} dx$ i) $\int_0^2 \frac{2e^{2x}+3}{e^{2x}+3x}\, dx$

Exercice 3

L'unité graphique est égale à 2cm sur l'axe (OI) et à 1cm sur l'axe (OJ) .

Dans chacun des cas suivants, représenter graphiquement la fonction f sur $[a\,;b]$ puis calculer l'aire du domaine délimité par la courbe ainsi obtenu, la droite (OI) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

$f(x) = x^2 + 1$, $a = -1$ et $b = 3$; $f(x) = \frac{-6}{(x+1)^2}$, $a = 1$ et $b = 2$

$f(x) = -\frac{1}{x}$, $a = 1$ et $b = e$; $f(x) = e^x + 1$, $a = -3$ et $b = 1$

Exercice 4

Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle K.

a. $f(x) = x^2 + 1$, K = [0 ; 10].

b. $f(x) = \frac{1}{x+2}$, K = $[e-2\ ; e^2 - 2]$.

Exercice 5

A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes.

$I = \int_1^e x\ln x \; dx$; $J = \int_2^{-1} xe^x \; dx$; $K = \int_3^5 \ln(\frac{x-1}{x})dx$

Exercice 6

1- Vérifier que : $\forall x \epsilon \mathbb{R} - \left\{-1\,;-\frac{1}{2}\right\}$, $\frac{8x+5}{x^2+3x+1} = \frac{3}{x+1} + \frac{2}{2x+1}$.

2- En déduire la valeur de $\int_0^2 \frac{8x+5}{2x^2+3x+1}\mathrm{d}x$

Exercice 7

1- Vérifier que : $\forall\, x \,\epsilon\, \mathbb{R} - \{0\,;-1\}$, $\frac{1}{x^3+x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$.

2- En déduire la valeur de $\int_1^3 \frac{1}{x^3+x^2}\, dx$.

Exercice 8 (BAC 2004)

On donne $f(x) = (2x^2+1)e^x$ et $\mathrm{F}(x) = (ax^2+bx+c)e^x$

1. Déterminer les réels a , b et c pour que F soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. On pose $\mathrm{I} = \int_0^1 (x^2+1)e^x dx$ et $\mathrm{J} = \int_0^1 x^2e^x dx$

   a. Calculer I + J et I – J.

   b. En déduire I et J.

Exercice 9 (BAC 2003)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} x - 3y = 2ln2 \\ x + y = 4ln2 \end{cases}$
2. On pose $\mathrm{I} = \int_0^{ln16} \frac{e^x+3}{e^x+4}dx$ et $\mathrm{J} = \int_0^{ln16} \frac{1}{e^x+4}dx$

   a. Calculer $I - 3J$ et $I + J$

   b. En déduire les valeurs de I et J.

Exercice 10

1. Déterminer les réels a, b et c $tels$ que pour tout $x \,\epsilon\, \mathbb{R}$,

   $\frac{1}{(1+e^x)^2} = a + \frac{be^x}{e^x+1} + \frac{ce^x}{(1+e^x)^2}$
2. Calculer $\mathrm{I} = \int_0^{ln2} \frac{dx}{(1+e^x)^2}$

<u>Exercice 11</u>

A / Résoudre l'inéquation $2e^{2x} - 5e^{x} + 2 > 0$.

B/ Soit la fonction suivante $g(x) = 2x - 1 + \frac{e^x}{e^x - 1}$ et (Cg) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Montrer que $D_g =]-\infty\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$
2. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} g(x)$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$
3. Montrer que $g'(x) = \frac{2e^{2x} - 5e^{x} + 2}{(e^x - 1)^2}$
4. Dresser le tableau de variation de g
5. Montrer que (Cg) admet pour asymptotes les droites d'équations $(D1)\colon y = 2x - 1$ $\quad et \quad$ $(D2)\colon y = 2x$
6. Tracer (Cg) ; (D1) et (D2) dans un repère d'unités graphiques 2cm.
7. Calculer en cm^2, l'aire de la partie comprise entre (C_g), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1 \ et \ x = 2$.

CHAPITRE 6 :

SUITES NUMERIQUES

Ce chapitre vise à stimuler à l'apprenant, l'approfondissement des connaissances antérieures (classe de 1ère) sur les suites numériques, la découverte de nouveaux termes et l'acquisition de nouvelles connaissances.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

Au terme de ce cours, l'apprenant doit - être capable de :

- montrer qu'une suite est arithmétique en se référant aux propriétés puis calculer ses éléments caractéristiques
- calculer la somme des n-premiers termes d'une suite arithmétique
- montrer qu'une suite est géométrique en se référant aux propriétés puis calculer ses éléments caractéristiques
- calculer la somme des n-premiers termes d'une suite géométrique

<u>NB</u> : Tous les exercices non corrigés de ce cours doivent être systématiquement cherchés par l'élève avant toute éventuelle correction. Ils peuvent faire l'objet d'évaluation.

1. Généralité

1.1. Détermination d'une suite :

- **Par une formule explicite**

On dit qu'une suite $(\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ est définie de manière explicite si son terme général dépend de n : **pour tout n,** $\boldsymbol{U_n = f(n)}$.

Exemple

Soit $U_n = \frac{n^3+6n}{n-1}$ pour n ≥ 2 . Calculer le premier et le huitième terme.

- **Par une formule implicite ou récurrente**

On dit qu'une suite $(\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ est définie de manière récurrente si son terme général dépend du terme précédent : **pour tout n,** $\boldsymbol{U_{n+1}} = f(\boldsymbol{U_n})$ **ou** $\boldsymbol{U_n} = f(\boldsymbol{U_{n-1}})$

Exemple

On donne (U_n): $\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = 2U_n - 1 \end{cases}$

Calculer le deuxième et le quatrième terme de cette suite.

1.2. Sens de variation d'une suite

La suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- croissante si $U_{n+1} - U_n \geq 0$
- décroissante si $U_{n+1} - U_n \leq 0$
- constante si $U_{n+1} - U_n = 0$

Remarque : Si tous les termes de la suite sont strictement positifs, alors pour étudier son sens de variation, on pourra aussi comparer le rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ à 1.

En effet,

- si $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ alors la suite (U_n) est une suite strictement croissante.

- si $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ alors la suite (U_n) est une suite strictement décroissante.
- si $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$ alors la suite (U_n) est constante ou stationnaire.

Exemple 1

Etudier le sens de variation de la suite définie par $U_n = -4n + 1$

Exemple 2

Etudier le sens de variation de la suite définie par $U_n = e^{2n+1}$

1.3. Suites majorée, minorée, bornée

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- Majorée s'il existe un nombre réel M tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n \leq M$
- Minorée s'il existe un nombre réel m tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n \geq m$
- Bornée si elle est à la fois minorée et majorée : $m \leq U_n \leq M$

On dit que m est un minorant de (U_n) et M un majorant de (U_n).

Exemple

Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $définie\ par$ $U_n = \frac{1}{n+1}$ est bornée.

2. **Suite arithmétique - suite géométrique**

Tableau récapitulatif

	Suite arithmétique	*Suite géométrique*
Premier terme	U_a , $a \in \mathbb{N}$	U_a , $a \in \mathbb{N}$
Raison	$r\ (r \in \mathbb{R})$	$q\ (q \in \mathbb{R})$
Formule de récurrence (définition)	$U_{n+1} = U_n + r$ *ou* $U_{n+1} - U_n = r$	$U_{n+1} = qU_n$ *ou* $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1\ (U_n \neq 0)$
Formule explicite (expression de U_n en fonction de)	$U_n = U_a + (n-a)r$	$U_n = U_a q^{n-a}$
Relation entre trois termes consécutifs d'une suite	$\mathrm{U_n} = \frac{\mathrm{U_{n-1}} + \mathrm{U_{n+1}}}{2}$	${U_n}^2 = \mathrm{U_{n-1}} \times \mathrm{U_{n+1}}$
Somme des termes consécutifs $S_n = U_a + U_{a+1} + \cdots + U_n$	$S_n = \frac{(n-a+1)}{2}(U_a + U_n)$	$S_n = U_a \frac{1-q^{n-a+1}}{1-q}$, $q \neq 1$ $S_n = (n-a+1)U_a$ *si* $q = 1$

NB : $(n-a+1)$ est le nombre de termes de la somme ou encore (indice du dernier – indice du premier terme) +1.

Exemple

1) Soit $(u_n)_{n \in IN}$ la suite définie par $u_n = e^{2n+1}$.
   a) Calculer les trois premiers termes de cette suite.
   b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in IN}$ est géométrique.
   c) Calculer en fonction de n la somme $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

2) Soit la suite (v_n) définie par $v_n = \ln(u_n)$.

a) Calculer V_0 et V_1.
b) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in IN}$ est arithmétique et préciser sa raison.
c) Calculer en fonction de n la somme $S'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n+1}$.
d) Soit $P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_{n+1}$.

Monter que $P_n = e^{S'_n}$ et en déduire l'expression de P_n en fonction de n.

3. <u>Convergence d'une suite</u>

3.1. <u>Définition</u>

On dit qu'une suite $(\mathrm{u_n})_{\mathrm{n\in I}}$ est **convergente** lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{U_n} = \ell$, où $\ell \in \mathbb{R}$.

Lorsqu'une suite $(\mathrm{u_n})_{\mathrm{n\in I}}$ n'est pas convergente, on dit qu'elle est **divergente.**

<u>Exemple</u>

Les suites de terme général $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\frac{\ln(n)}{n}$ sont convergentes et leur limite est 0.

<u>Remarques</u>

- Les propriétés de calcul de limite de fonctions restent valables dans le calcul de limite d'une suite.

- Le calcul de limite d'une suite ne se fait jamais en $-\infty$.

Cas particuliers de la convergence d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique

i. Toute suite arithmétique de raison $r \neq 0$ est divergente, mais toute suite arithmétique de raison $r = 0$ converge vers son premier terme.

ii. Soit (U_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme U_p. on a :

- (U_n) converge vers 0 si $q \in]-1\,;0[\cup]0\,;1[$
- (U_n) diverge lorsque $q > 1 \quad ou \quad q \leq -1$
- (U_n) est constante et converge vers U_p lorsque $q = 1$.

Exemple

Etudier la convergence des suites définies par :

$U_n = 5 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$; $V_n = 3 - 2n$; $W_n = e^{-n}$.

3.2. Théorèmes de convergence

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente

A VOUS DE JOUER …

Exercice 1 : QCM

1. (U_n) est une suite arithmétique de raison r et de terme initial U_0.
   Si $U_1 = 5$ et $r = -2$ alors U_8 est égal à :
   A. -11 B. -9 C. 19 D. -21
2. (V_n) est une suite arithmétique de raison r et de terme initial V_0.
   Si $V_7 = 79$ et $V_{10} = 88$ alors la raison r est égale à :
   A. 3 B. 1 C. 80,5 D. 2
3. (V_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme V_0.
   Si $V_0 = \frac{1}{2}$ et $V_3 = 4$ alors la raison q est égale à :
   A. 8 B. 3,5 C. 2 D. 4
4. (V_n) est une suite geometrique de raison q
   Si $V_1 = 128$ et $q = 0.5$ alors la somme $S_{10} = V_1 + V_2 + \cdots + V_{10}$ est égale à :
   A. 255,5 B. 704,6875 C. 255,75 D. 704,75

Exercice 2

Soit la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{4}U_n + 3 \end{cases}$

1 – Calculer U_1, U_2, U_3

2 – On pose $V_n = U_n - 4$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Exprimer V_n en fonction de n.

c) En déduire U_n en fonction de n.

3 – Soit $S_1 = V_0 + V_{1+} \dots \dots + V_n$ et $S_2 = U_0 + U_1 \dots \dots + U_n$.

Calculer S_1 et S_2 puis $\lim\limits_{n\to+\infty} S_1$.

Exercice 3

On considère suite (U_n) définie par $U_n = e^{2n+1}$ avec $n \geq 0$.

1 – Montrer que la suite (U_n) est une suite géometrique et préciser la raison

2 – On considère la suite (Vn) définie par $V_n = ln(U_n)$. Montrer que (V_n) est une suite arithmétique et préciser la raison.

3 – On donne $S_n = V_0 + V_{1+} \dots \dots + V_n$ et $P_n = U_0 \times U_1 \times \dots \dots \times U_n$.

Calculer S_n et P_n .

4 – Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$ et conclure.

Exercice 4

On considère la suite $(U_n)n\epsilon\mathbb{N}^*$ définie par : $U_1 = 1$ et $U_{n+1} = 2\sqrt{(U_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

1. Calculer U_2 ,U_3 ,U_4 ,U_5 et donner les résultats sous la forme 2^{α} (où $\alpha \epsilon \mathbb{Q}$)

On considère la suite (V_n) définie par $V_n = \ln(U_n) - \ln 4$.

2. Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme .
3. Exprimer V_n en fonction de n . En déduire U_n puis calculer sa limite en $+\infty$ **.**

Exercice 5

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_n = 2 - 3^n$ et $v_n = 5(\frac{1}{2})^n$

1. Calculer la limite des suites (u_n) et (v_n).
2. Les suites (u_n) et (v_n) sont – elles convergentes ?

Exercice 6

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,définie par $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx$.

1.a) Montrer que $u_0 + u_1 = 1$

b) Calculer u_1 et en déduire u_0.

2. Montrer que, pour tout entier naturel, $u_n \geq 0$.

3. Montrer que $u_{n+1} + u_n = \frac{1-e^{-n}}{n}$.

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(u_{n+1}) = 1 + ln(u_n)$

1. Calculer u_1 ; u_2 et u_3
2. Monter que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
3. Exprimer u_n en fonction de n et calculer la limite de cette suite.
4. Quel est le sens de variance de la suite (u_n) ?

Exercice 8

Une voiture achetée à 5 000 000 francs cfa en l'an 2005 a perdu chaque année 20% de sa valeur. On désigne par u_n la valeur de cette voiture en l'an $2005 + n$.

1. Montrer que la valeur de la voiture en l'an 2006 est $u_1 = 4000\,000$ francs cfa.
2. Donner la valeur de cette voiture en l'an 2007 puis en l'an 2008.
3. a-Montrer que $u_{n+1} = 0{,}8u_n$

   b-Déduire l'expression de u_n en fonction de n
4. Quelle est alors la valeur de cette voiture en l'an 2022 ?

Exercice 9

Une moto de marque YAMAHA achetée à 3 000 000 francs cfa en l'an 2010 à CICA TOYOTA, perd chaque année 30 000f de sa valeur. On désigne par u_n la valeur de cette moto en l'an $2010 + n$.

1. Montrer que la valeur de la moto en l'an 2011 est $u_1 = 2970\ 000$ francs cfa.
2. Donner la valeur de cette moto en l'an 2012 puis en l'an 2013.
3. a-Montrer que $u_{n+1} = u_n - 30\ 000$
   b-Déduire l'expression de u_n en fonction de n
4. Quelle est alors la valeur de cette moto en l'an 2027 ?

Exercice 10

Le 1er janvier 2000, M. AMAH verse 1000 francs cfa sur un compte rémunéré au taux annuel de 5%.

Il verse ensuite chaque 1er janvier 5 000 francs supplémentaires sur ce compte.

1. On note u_n la somme dont il dispose le 1er janvier de l'an (2000 + n).
 a. Calculer u_0 ; u_1 et u_2
 b. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n

2. a-Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n + 100\ 000$

Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.
 b-Exprimer (v_n) $puis$ (u_n) en fonction de n
 c-Quelle somme aura M. AMAH en 2022 ?

CHAPITRE 7 :

DENOMBREMENT ET PROBABILITE

Ce chapitre vise à apporter à l'apprenant, les outils nécessaires pour les dénombrements des applications et par là, mieux aborder les calculs des probabilités et maitriser les propriétés des variables aléatoires.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

Au terme de ce chapitre, chaque apprenant, après avoir exploité ses acquis, devra être capable de :
- utiliser les propriétés pour dénombrer des applications ;
- utiliser les règles pour calculer la probabilité d'un événement donné.

NB : Tous les exercices non corrigés de ce cours doivent être systématiquement cherchés par l'élève avant toute éventuelle correction. Ils peuvent faire l'objet d'évaluation.

1. Dénombrement ou analyse combinatoire

1.1. Ensemble fini et cardinal d'un ensemble fini

1.1.1. Ensemble fini

Un ensemble est fini lorsque le nombre de ses éléments est fini.

1.1.2. Cardinal d'un ensemble fini

Le cardinal d'un ensemble E fini, est le nombre d'éléments de cet ensemble. On le note card(E).

Exemple

Soit A = $\{a; d; e; i; x; 1; 4; 8\}$. L'ensemble A est un ensemble fini et le nombre d'éléments est huit (8) et on écrit card(A) = 8.

1.1.3. Le complémentaire de A dans E

Le complémentaire de A dans E, noté C_E^A ou $\bar{A}$, est l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A.

Exemple : $E = \{0; 1; a; b; c\}$ et $A = \{1; c\}$. Déterminons $\bar{A}$.

$C_E^A = \bar{A} = \{\dots\dots\dots\dots\dots\}$.

Remarques :

- $A \; et \; \bar{A}$ sont deux ensembles disjoints car $A \cap \bar{A} = \emptyset$.
- $A \cup B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B (ou l'ensemble des éléments qui appartiennent à au moins un des ensembles).
- $A \cap B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B.

- Deux ensembles A et B sont disjoints si $A \cap B = \emptyset$. Exemple : A et $\overline{A}$ sont disjoints.
- $Card\,\overline{A} = CardC_E^A = CardE - CardA.$
- $Card\emptyset = 0.$

– Propriété 1

Soit A et B deux ensembles finis.

On a $\boxed{\boldsymbol{Card(A \cup B) = CardA + CardB - Card(A \cap B)}}$

En particulier, si A et B sont disjoints alors $\boldsymbol{Card(A \cup B) = CardA + CardB.}$

Exemple 1

Soit A = $\{a; d; e; i; x; 1; 4; 8\}$; B = $\{a; d; e; n; z; 1; 4; 7\,; 10\}$.

1) Dessiner le diagramme de Venn des deux ensembles.

2) Déterminer $A \cup B$; $A \cap B$ et verifier la propriété.

Exemple 2 (Utilisation du diagramme de VENN)

Parmi les 30 élèves d'une classe, 20 pratiquent le football et 14 le handball.

TAF : Combien d'élèves pratiquent :

1- A la fois le football et le handball
2- Uniquement le football
3- Uniquement le handball.

<u>Exemple 3</u> (utilisation du diagramme de VENN)

Dans un club sportif de 1200 élèves, 520 pratiquent le football, 390 le tennis, 340 le basketball ,140 pratiquent le football et le tennis ; 180 pratiquent à la fois le football et le basketball ; 150 élèves pratiquent à la fois le tennis et le basketball, et 100 pratiquent à la fois les trois sports.

1- Combien d'élèves pratiquent uniquement le tennis ?
2- Combien d'élèves pratiquent uniquement le football ?
3- Combien d'élèves pratiquent uniquement le basketball ?
4- Combien d'élèves ne pratiquent aucun des trois sports ?
5- Combien d'élèves pratiquent uniquement le football et le basketball ?
6- Combien d'élèves pratiquent uniquement le basketball et le tennis ?
7- Combien d'élèves pratiquent uniquement le football et le tennis ?

1.2. Produit cartésien

Soient A et B deux ensembles finis.

1.2.1. Définition

On appelle le produit cartésien de A par B, noté $A \times B$, l'ensemble des couples $\left(x\,;y\right)$ où $x \in A\,;\ \ y \in B$.

Attention : $A \times B\ \neq\ B \times A$.

Exemple : $A = \left\{a\,;b\right\}$; $B = \{1\,;2\,;3\}$.

Déterminons $A \times B$.

$A \times B\ = \{\ldots\ \ \ldots.\}$

1.2.2. Propriétés

- $Card\ (A \times B) = cardA \times cardB$
- $Card(A^p) = (CardA)^p$

1.3. Outils de dénombrement

1.3.1. Cas d'une disposition ordonnée (p-uplet, arrangement, permutation)

***a.* P-uplet ou p-liste (arrangement avec répétition)**

Soit E un ensemble à n éléments et soit p un entier naturel non nul. Le nombre de p – uplets de l'ensemble E à n éléments est : $\boldsymbol{n^p}$.

NB : Dans un p-uplet, un élément peut être répété.

Exemple 1 : Combien de nombres à 4 chiffres distincts ou non peut-on former avec les chiffres 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6 ?

Exemple 2 : De combien de façons peut-on ranger 3 stylos dans 2 trousses ?

----

b. Arrangement (ou arrangement sans répétition)

Soit E un ensemble à n éléments et soit p un nombre non nul tel que $p \leq n$. On appelle arrangement de p éléments de E, tout p – uplet d'éléments de E deux à deux distincts.

Le nombre d'arrangements de p éléments pris dans un ensemble à n éléments est :

$$\boxed{\boldsymbol{A_n^p = n(n-1)(n-2) \times \ldots \times (n-p+1)\,,\quad p\ \ facteurs}}$$

NB : Les p éléments pris dans E sont ordonnées et distincts.

Exemple 1 :

a- Calculer A_3^1 ; A_5^2 ; A_{10}^2 ; A_7^3

b- Combien de façons peut-on ranger 5 voitures dans un parking à 10 places.

<u>Exemple 2</u> : Déterminer le nombre à 3 chiffres différents qu'on peut former avec les chiffres 1 ; 2 ; 3 ; 4 et 5.

<u>Exemple 3</u> :

Une assemblée de 10 membres doit élire un bureau de 5 membres dont :

1 président ; 1 vice-président ; 1 secrétaire ; 1 secrétaire adjoint ; 1 trésorier

Quel est le nombre de bureaux possibles qu'on pourra former ?

<u>Exemple 4</u> : 3 joueurs lancent un dé à 6 faces et on note le résultat de la face supérieur.

1- Combien y-a-t-il de résultats possibles ?
2- Combien y-a-t-il de résultats possibles lorsque les points menés sont tous différents ?

----

c. *Permutation*

- Notation factorielle

Soit n un nombre entier naturel. On appelle factorielle n, le nombre entier noté $\boldsymbol{n!}$ tel que :

- $\boldsymbol{n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1}$
- Par convention : **0! = 1** ; **1! = 1**

- Permutation (permutation sans répétition)

Soit E un ensemble à n éléments. On appelle permutation de E, tout arrangement des n éléments de E.

Le nombre de permutations de n éléments est $\boldsymbol{n!}$.

Remarque : $\boldsymbol{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$; $\boldsymbol{A_n^n = n!}$.

- Permutation avec répétition

Soit une liste à n éléments partiellement discernables

$$\left(\underbrace{a; a}_{\alpha\ \text{élts}} ; \underbrace{b; b; b; b}_{\beta\ \text{élts}} ; \underbrace{c; c; c}_{\gamma\ \text{élts}} ; \ldots ; \underbrace{z; z; z}_{\sigma\ \text{élts}} \right)$$

avec $n = \alpha + \beta + \gamma + \cdots + \sigma$.

On appelle permutation avec répétition de ces n éléments, toute disposition ordonnée de ces petits n éléments.

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{P}_n = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots\sigma!}}}$$

Remarque

On appelle anagramme d'un mot, tout mot formé avec les lettres qui le compose ou encore toute expression obtenue en permutant les lettres du mot.

Exemple *1* : Déterminer le nombre d'anagrammes du mot MATHS.

Exemple 2 : Déterminer le nombre d'anagrammes du mot élève :

a- En tenant compte des accents.

b- Sans tenir compte des accents.

1.3.2. *Cas d'une disposition non ordonnée : Combinaison*

On appelle combinaison de p éléments pris parmi n éléments, tout sous ensemble de p éléments pris dans un ensemble à n éléments ($n \geq p$).

Le nombre de combinaisons de p éléments pris parmi n éléments est :

$$\boxed{C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}}$$

a- Propriétés

- $C_n^0 = 1$; $C_n^n = 1$;
- $C_n^1 = n$; $C_n^{n-1} = n$
- $C_n^p = C_n^{n-p}$

- $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$: cette relation de récurrence est à la base de la construction du triangle de PASCAL qui fournit de proche en proche des valeurs de C_n^p .

<u>*Exemple 1*</u> : Calculer C_8^2 ; C_{10}^3

<u>Exemple 2</u> :

Un sac contient 6 jetons. On tire simultanément 2 jetons du sac.

1- Déterminer le nombre de tirages possibles.

2- Sur les 6 jetons, 4 sont rouges et le reste noir.

   a- Déterminer le nombre de tirages contenant 2 jetons rouges.

   b- Quel est le nombre de tirages contenant 1 jeton rouge et 1 jeton noir ?

   c- Quel est le nombre de tirages contenant 2 jetons de même couleur ?

1.4. Triangle de PASCAL

p / n	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Ces C_n^p sont en fait les coefficients du développement du terme $(a+b)^n$.

1.5. Binôme de NEWTON

$$\boxed{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}} = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p = C_n^0\, a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \cdots + C_n^n a^0 b^n}$$

avec $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ **et** $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$**.**

Utilité du triangle de pascal ou du binôme de Newton

- ✓ $(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
- ✓ $(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
- ✓ $(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$

Exemple

Développer en utilisant le binôme de newton et le triangle de pascal $(x-2)^6$

1.6. **Les principes du tirage** *(Comment et quand doit-on utiliser C_n^p ; A_n^p et n^p ?)*

a- Tirage simultané *(en même temps ou tirage par paquet)*

Ce qui signifie qu'il n'y a pas d'ordre, on effectue une seule fois le tirage de p éléments pris dans un ensemble à n éléments. Dans ce cas on utilise C_n^p.

b- Tirage successif *(sans remise)*

Ce qui signifie qu'on tient compte de l'ordre des éléments et qu'il n'y a pas de répétition. Dans ce cas on utilise A_n^p

c- Tirage successif avec remise :

Ce qui signifie qu'on tient compte de l'ordre des éléments et qu'un élément peut éventuellement être répété. Dans ce cas on utilise les p-listes qu'on peut former avec les n éléments c'est-à-dire n^p.

Remarques

En dénombrement :

- Le < < **et** >> signifie intersection **(**$\cap$) et se traduit par **la multiplication ;**
- Le << **ou** >> signifie union ($\cup$) et se traduit par l'**addition.**

2. Probabilités d'un événement

2.1. Vocabulaire des évènements (ou vocabulaire probabiliste)

- **Une épreuve ou expérience** est une action dont le résultat (l'issue) n'est pas connu d'avance.

Exemple : tirage d'une boule ; choix d'une personne ; lancé d'une pièce …

- **L'univers ou le référentiel** (noté **Ω**) associé à une épreuve est l'ensemble des résultats possibles.
- **Une éventualité** est chacun des résultats possibles d'une épreuve.
- **Un évènement** est un sous ensemble de l'univers.
- **L'évènement certain**, noté **Ω**, est l'évènement qui est toujours réalisé.
- **L'évènement impossible** est l'ensemble $\emptyset$: c'est un évènement qui n'est jamais réalisé.

- **<u>L'évènement A ou B</u>** est $A \cup B$
- **<u>L'évènement A et B</u>** est $A \cap B$
- **<u>L'évènement contraire de A est noté $\overline{A}$</u>** ou $\complement_{\Omega}^{A}$ (est l'évènement qui est réalisé si A ne l'est pas)
- **<u>Les évènements A et B sont incompatibles</u>** si $A \cap B = \emptyset$.

<u>Exemple</u> : On lance un dé parfait numéroté de 1 à 6 et on note le chiffre obtenu à la face supérieure.

- Le lancer d'un dé constitue **<u>une épreuve</u>**.
- Les sous-ensembles de Ω sont par exemple:

$A_1 = \{2; 4; 6\}$; $A_2 = \{1; 3; 5\}$; $A_3 = \{3; 6\}$ et $A_4 = \{1; 2; 3; 4\}$ sont des exemples **<u>d'évènements</u>**.

Ils peuvent également être définis par une « phrase ». Par exemple :

A_1 : $\ll$ $obtenir\ un\ chiffre\ pair$ $\gg$; A_2 : $\ll$ $obtenir\ un\ chiffre\ impair$ $\gg$;

A_3 : $\ll$ $obtenir\ un\ multiple\ de$ 3 $\gg$;

A_4 : $\ll$ $obtenir\ un\ résultat\ inférieur\ ou\ égal$ à 4 $\gg$.

- <u>Les évènements élémentaires sont</u> : $\{1\}$; $\{2\}$; $\{3\}$; $\{4\}$; $\{5\}$ et $\{6\}$

2.2. <u>Probabilité d'un évènement</u>

a- <u>Définition</u>

Une probabilité est une application P, qui à tout évènement A on associe un réel noté $P(A)$.

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \boldsymbol{P} : \boldsymbol{\mathcal{P}(\Omega)} & \longrightarrow & [\mathbf{0}\,;\mathbf{1}] \\ \boldsymbol{A} & \longmapsto & \boldsymbol{P(A)} \end{array}}$$

où $\boldsymbol{\mathcal{P}(\Omega)}$ est l'ensemble des parties de **Ω**.

$P(A)$ est la probabilité de réaliser l'évènement A.

La probabilité p vérifie les conditions suivantes :

- Pour tout évènement A, on a : $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$
- Pour tous évènements A et B incompatibles, (c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$) on a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

b- Propriétés

- La probabilité de l'événement incertain est toujours nulle : $P(\emptyset) = 0$
- $\bar{A}$ étant l'événement contraire de A, la probabilité de réaliser A vaut

$$\boldsymbol{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$$

- $A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$
- Pour tous évènements $A\ et\ B$, on a $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

2.3. Probabilité sur un univers fini

Soit $\Omega = \{a_1\,;\ a_2\,;\ a_3\,;\ \dots;\ a_n\}$

$P(a_1) + P(a_2) + \cdots + P(a_n) = 1$

On obtient la probabilité d'un événement A en ajoutant les probabilités des éventualités dont la réunion est A.

2.4. Equiprobabilité sur un univers fini

On a équiprobabilité sur l'univers $\Omega = \{a_1\,;\ a_2\,;\ a_3\,;\ \dots;\ a_n\}$ lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité de se réaliser.

$$\boldsymbol{P(a_1) = P(a_2) = \cdots = P(a_n) = \frac{1}{n}}$$

- Pour tout événement A,

$$\boxed{\boldsymbol{P(A) = \frac{Card\ A}{Card\ \Omega} = \frac{Nombre\ de\ cas\ \ll favorables \gg}{Nombre\ de\ cas\ \ll possibles \gg}}}$$

Exemple 1:

Un sac contient 2 boules rouges, 3 boules noires et 4 boules blanches indiscernables au toucher. On choisit simultanément et au hasard 3 boules du sac.

Calculer la probabilité des événements suivants :

A : ≪ obtenir des boules de couleurs toutes différentes ≫ ;

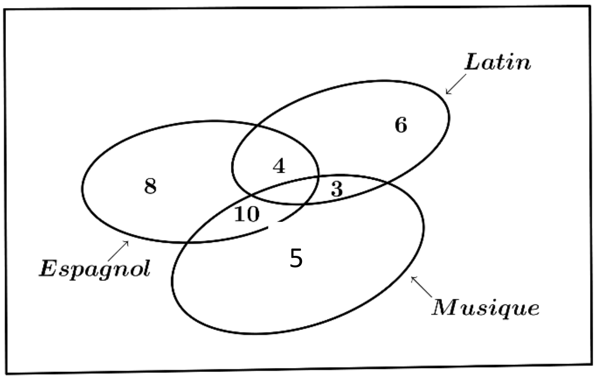
B :≪ obtenir des boules de même couleur ≫ ; C : ≪ obtenir une boule blanche ≫ ;

D : ≪ obtenir 3 boules rouges ≫ ; E : ≪ obtenir au moins une boule blanche ≫

F : ≪ obtenir au plus deux boules rouges ≫

Exemple 2

Trois options sont offertes aux élèves d'une classe : espagnol, latin, musique. Chaque élève choisit une ou deux options. Le schéma ci-dessous indique le nombre d'élèves pour chaque combinaison d'options possible.



On choisit un élève au hasard dans cette classe.

Déterminer la probabilité des événements suivants :

a/ l'élève étudie l'espagnol,

b/ l'élève étudie uniquement l'espagnol,

c/ l'élève étudie l'espagnol et le latin,

d/ l'élève étudie l'espagnol ou le latin,

e/ l'élève étudie uniquement une des deux langues : espagnol ou latin (il peut éventuellement faire aussi de la musique),

f/ l'élève étudie une seule des trois options.

----

3. Les variables aléatoires

3.1. Définition

Une variable aléatoire est une grandeur mesurable dont l'effet est lié au hasard. Une variable aléatoire X est une application permettant d'associer un nombre réel à toute éventualité.

On note $X(\Omega)$ l'ensemble de toutes les valeurs que peut prendre X. On distingue une variable aléatoire discrète et une variable aléatoire continue. Dans ce cours, l'accent sera mis sur la variable aléatoire discrète.

Une variable aléatoire est discrète lorsque l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre est dénombrable.

Exemple : On lance deux dés parfaits numérotés chacun de 1 à 6. On note S l'application qui à chaque lancer, associe la somme des résultats obtenus. L'ensemble des résultats est

$S(\Omega) = \{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\}$.

3.2. La loi de probabilité de la variable aléatoire

On appelle loi de probabilité de la variable aléatoire X, l'application qui, à chaque valeur possible $\boldsymbol{x_i}$ d'une variable aléatoire X, associe la probabilité $P(X = \boldsymbol{x_i})$.

$\boldsymbol{x_i}$	x_1	x_2	$\dots$	x_n	*Total*
$P(X = \boldsymbol{x_i})$	p_1	p_2	$\dots$	p_n	1

$(X = \boldsymbol{x_i})$ désigne l'événement « *la variable aléatoire X prend la valeur* $\boldsymbol{x_i}$ »

$P(X = \boldsymbol{x_i})$ est la probabilité que la variable aléatoire X prenne la valeur $\boldsymbol{x_i}$.

NB : La somme des $P(X = \boldsymbol{x_i})$ vaut 1 : $\boxed{\sum \boldsymbol{P(X = x_i) = 1}}$

3.3. Espérance mathématique, variance et Écart-type d'une variable aléatoire discrète X

Soit X, une variable aléatoire discrète définie sur Ω.

- L'espérance mathématique de X noté $E(X)$ ou $\bar{X}$ est définie par :

$$\boxed{\boldsymbol{E(X) = \bar{X} = \sum x_i P(X = x_i)}}$$

$\boldsymbol{x_i}$	x_1	x_2	…	x_n	$Total$
$P(X = \boldsymbol{x_i})$	p_1	p_2	…	p_n	1
$\boldsymbol{x_i}P(X = \boldsymbol{x_i})$	x_1p_1	x_2p_2	…	x_np_n	$E(X)$

- **La variance** :

La variance de X est noté V(X) ou $\sigma_X{}^2$

Pour les calculs numériques, on utilise généralement l'expression suivante :

$$\boxed{\boldsymbol{V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum x_i{}^2 P(X = x_i) - [E(X)]^2}}$$

- **L'écart – type** :

L'écart-type, noté σ_X ou $\sigma(X)$ est la racine carrée de la variance de X

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma_X = \sqrt{V(X)}}}$$

NB :

- σ_X et $E(X)$ ont même unité
- $V(X)$ et σ_X sont des caractéristiques qui mesurent la dispersion des valeurs prises par X autour de son espérance.

Tableau permettant de calculer V(x) et par conséquent $\boldsymbol{\sigma_X}$

$\boldsymbol{x_i}$	x_1	x_2	…	x_n	$Total$
$P(X = \boldsymbol{x_i})$	p_1	p_2	…	p_n	1
$\boldsymbol{x_i}P(X = \boldsymbol{x_i})$	x_1p_1	x_2p_2	…	x_np_n	$E(X)$
$\boldsymbol{x_i}^2$	x_1^2	x_2^2	…	x_n^2	
$\boldsymbol{x_i}^2P(X = \boldsymbol{x_i})$	$x_1^2p_1$	$x_2^2p_2$		$x_n^2p_n$	$E(X^2)$

$$\boldsymbol{V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2}$$

Exemple : Une loterie comporte 20 billets parmi lesquels :

- 1 billet gagne le gros lot de 100 F
- 2 billets gagnent chacun des lots de 50 F
- 3 billets gagnent chacun des lots de 20 F

Une personne achète 2 billets.

Soit X la variable aléatoire égale à la somme ainsi gagnée.

1- Quelles sont les valeurs prises par X ?

2- Etablir la loi de probabilité de X.

3- Calculer l'espérance mathématique de X

4- Calculer l'écart-type de X.

Exemple 2

Un sac contient 5 boules rouges et 3 boules blanches. On tire 2 boules du sac. Tous les tirages sont équiprobables.

- Si les boules sont de couleurs différents, on gagne 4francs ;
- Si les boules sont rouges, on perd 3 francs ;
- Si les boules sont blanches, on perd 10 francs.

Soit X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?

2. Déterminer la loi de probabilité de X.

3. Calculer l'espérance mathématique de X.

4. Calculer la variance de X.

5. Calculer l'écart – type de X.

A VOUS DE JOUER …

Exercice 1

Exercice 1 : QCM :

1) Un sac contient 5 jetons. On prélève au hasard et successivement et sans remise 3 jetons. Le nombre de résultats possibles de cette expérience est :

A) 20 B) 30 C) 50 D) 60 E) 80

2) Dans une classe de 30 élèves, on doit désigner au hasard 2 élèves comme représentants de la classe. Le nombre d'éventualités associés à cette expérience est :

A) 200 B) 203 C) 380 D) 406 E) 420

3) Combien de mots distincts de 4 lettres peut-on fabriquer en prenant les lettres du mot « mats » ?

A) 6 B) 12 C) 18 D) 20 E) 24

4) Soit A un événement tel que $P(A) = 0.18$. Que vaut alors $P(\bar{A})$?

A) 0,7 B) 0,75 C) 0,82 D) 0,88 E) 0,92

5) Dans une classe de 30 élèves dont 12 filles, on doit désigner au hasard 2 élèves comme représentants de la classe. Déterminer la probabilité de l'événement A : « les deux représentnats sont des filles ».

A) ${}^{21}/_{144}$ B) ${}^{22}/_{12}$ C) ${}^{22}/_{145}$ D) ${}^{22}/_{155}$ E) ${}^{23}/_{147}$

Exercice 2

Résoudre dans IN :

1/ a. $C_n^2 = 190$; b. $2C_n^2 + 6C_n^3 = 9n$.

2/ a. Développer $(a+b)^6$

b. Dans le développement de $(3x-2)^6$, quel est le coefficient de x^4 ?

3/ Trouver les entiers naturels n et p tels que :

a. $250 \times 249 \times 248 = \frac{n!}{p!}$; b. $2022 \times 2021 \times 2020 \times 2019 = \frac{n!}{p!}$.

Exercice 3

On a placé dans un sac 13 cartons sur lesquels sont inscrits chacune des lettres du mot MATHEMATIQUES.

1/ Déterminer le nombre d'anagrammes de ce mot.

2/On tire au hasard et simultanément 3 cartons du sac. Calculer le nombre de possibilités pour obtenir les événements suivants :

A « 3 cartons portant les lettres du mot MAT »

B « 3 cartons portant exactement un A et une consonne»

C «3 cartons portant exactement deux consonnes»

D «3 cartons portant au moins une voyelle»

Exercice 4

Une enquête menée auprès de 300 élèves de la série G2 a donné les résultats suivants :

- 180 élèves aiment le sport
- 200 élèves aiment la lecture
- 60 élèves n'aiment ni le sport, ni la lecture.

1- Combien d'élèves n'aiment que :
   a- le sport ?
   b- la lecture ?
2- combien d'élèves aiment à la fois le sport et la lecture.

Exercice 5

Dans une classe de terminale :

- 20 élèves parlent le français ; 11 l'espagnol et 18 l'anglais.
- 7 parlent le français et l'espagnol
- 9 le français et l'anglais
- 8 l'espagnol et l'anglais
- 5 les trois langues.
- Tous parlent au moins l'une de trois langues.
  1. Quel est l'effectif de cette classe ?
  2. Combien d'élèves parlent uniquement :
  a. Le français ?
  b. L'espagnol ?
  c. L'anglais ?
  d. Le français et l'anglais ?

Exercice 6

Dans un univers Ω , on donne deux événements A et B incompatibles tels que $p(A) = 0{,}2$ et $p(B) = 0{,}7$. Calculer : $p(A \cap B)$; $p(A \cup B)$; $p(\bar{A})$; $p(\bar{B})$.

Exercice 7 (Bac 2002)

Le professeur KOFFI dispose dans une armoire de son bureau 10 livres tous différents mais de même forme, indiscernables au toucher, dont 5 de comptabilité, 3 de Math et 2 d'économie. Au moment de quitter son bureau survient une panne d'électricité. Le

professeur, très pressé, prend au hasard 3 livres parmi les 10 sans se soucier de leur nature.
1/ Déterminer le nombre de façons différentes dont on peut choisir les 3 livres.
2/ Calculer la probabilité pour qu'il y ait parmi les 3 livres :
a. exactement 2 livres de comptabilité,
b. au moins un livre de Math,
c. au plus un livre d'économie,
d. exactement un livre de chaque matière.

Exercice 8 (Bac 1998)
Une loterie contenant n pièces de 25 F et $(n+1)$ pièces de 50 F (n>1). On en extrait simultanément 2 pièces au hasard et on s'intéresse à la somme S ainsi obtenue.
1/ On suppose $n = 7$. Déterminer la probabilité que S soit paire.
2/ n>1, déterminer la probabilité P_n pour que S soit paire.
3/ Montrer que $P_n < \frac{1}{2}$.
4/ A partir de quelles valeurs de n a-t-on $P_n > 0{,}46$?

Exercice 9

Un jeu de loterie consiste à tirer simultanément 5 boules d'une urne contenant 7boules rouge et 3 boules bleues indiscernables au toucher. Le joueur gagne 7 francs s'il tire 5 boules de même couleur, 3 francs s'il tire 3 boules rouges et 2 boules bleues ; dans les autres cas il ne gagne rien.

Un joueur joue une fois .Quelle est la probabilité pour qu'il :

a- gagne 7 F ?
b- gagne 3 F ?
c- ne gagne rien ?

Exercice 10

Dans un sac sont placés 10 jetons : 6 jetons portent le numéro 1, et les 4 autres le numéro 3.
On tire simultanément 3 jetons du sac, les tirages étant supposés équiprobables. On désigne par X, la variable aléatoire qui à, chaque tirage, fait correspondre la somme des numéros marqués sur les 3 jetons.
1. Qu'elles sont les valeurs possibles de X ?
2. Définir la loi de probabilité de X
3. On appelle A l'événement « la somme des numéros est strictement inférieur à 7 »

Calculer la probabilité de l'événement A.

Exercice 11 :

Une urne contient 3 jetons bleus, chacun d'eux portant le numéro 1 et quatre jetons noirs, chacun d'eux portant le numéro 2.

1- On tire simultanément 2 jetons de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a- Deux jetons bleus.

b- Un jeton de chaque couleur.

2- On tire simultanément 3 jetons de l'urne et l'on considère la variable aléatoire X qui associe à chaque tirage de trois jetons le total des nombres obtenus.

a- Etablir la loi de probabilité de X

b- Calculer l'espérance mathématique de X

c- Calculer l'écart-type de X.

Exercice 12 :

On dispose dans une urne six boules, quatre boules bleues, deux boules jaunes.

On tire simultanément 3 boules.

1. Déterminer la probabilité des événements suivants :

A : ≪ les trois boules tirées sont de même couleurs ≫

B: ≪ Parmi les trois boules tirées ne figurent pas deux boules de meme couleur ≫

2. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules bleues tirées parmi les trois.

a. Déterminer la loi de probabilité de X

b. Calculer son espérance mathématique

Exercice 13

Lors d'une kermesse, on organise un jeu tombola. On dispose d'une enveloppe contenant douze tickets dont quatre permettant de gagner chacun un gros lot et les autres restants sont des tickets nuls.

Le jeu consiste à tirer simultanément et au hasard cinq tickets de l'enveloppe. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage, associe le nombre de tickets de gros obtenus. On gagne à ce jeu tombola si l'on obtient au moins 2 tickets de gros lots sur les 5 tirés.

1. Déterminer la loi de probabilité de X
2. Calculer l'espérance mathématique de X.
3. Quelle chance a un joueur de gagner à ce jeu tombola.

Exercice 14

Une loterie comporte 100 billets parmi lesquels :

- un billet gagne un lot de 100.000f
- 5 billets gagnent chacun un lot de 30.000f
- 10 billets gagnent chacun un lot de 10.000f

Les évènements étant équiprobables :

1. Quelle est la probabilité pour qu'un acheteur de 3 billets gagne exactement 30.000f ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'un acheteur de 3 billets gagne :
   a) 10.000 F ?
   b) 20.000 F ?
   c) 0 F ?
3. Quelle est la probabilité pour qu'un acheteur de 3 billets gagne au moins 30.000f ?

CHAPITRE 8 :

TRIGONOMETRIE

Ce chapitre vise à apporter à l'apprenant, les connaissances possibles et nécessaires sur l'étude trigonométrique.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

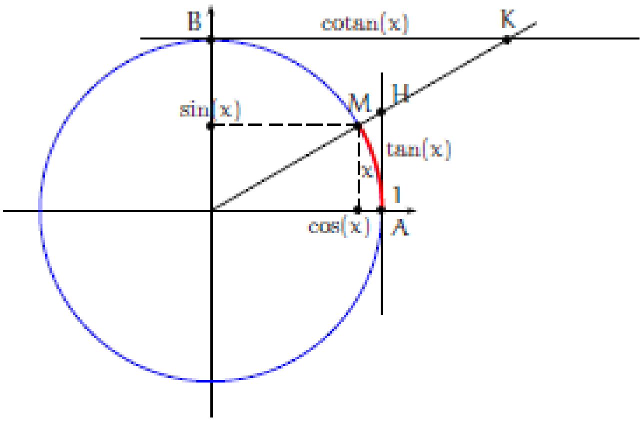
Au terme de ce cours, l'apprenant doit - être capable de :

- Utiliser le cercle trigonométrique pour déterminer les lignes trigonométriques d'un angle quelconque
- Déterminer une ligne trigonométrique en se servant d'une autre
- Utiliser le tableau des dérivées et des primitives des fonctions trigonométriques
- Calculer les primitives des fonctions trigonométriques

<u>NB</u> : Tous les exercices non corrigés de ce cours doivent être systématiquement cherchés par l'élève avant toute éventuelle correction. Ils peuvent faire l'objet d'évaluation.

1. <u>Le cercle trigonométrique</u>

C'est un cercle de centre O, de rayon 1, orienté dans le sens direct c'est-à-dire, le sens contraire à celui de l'aiguille d'une montre.



$\cos(x) =$ abscisse de M

$\sin(x) =$ ordonnée de M

$\tan(x) = \overline{AH}$

$\text{cotan}(x) = \overline{BK}$

2. <u>sinus, cosinus et tangente des angles orientés</u>

D'après le cercle trigonométrique précédent, le point M, image du réel x, a pour :

- abscisse cosinus de x ; elle est notée $cos(x)$ ou $cosx$,
- ordonnée sinus de x ; elle est notée $sin(x)$ ou $sinx$.
- on appelle tangente de x le nombre réel noté $tan(x)$ *ou* $tanx$ tel que $tanx = \frac{sinx}{cosx}$ si

  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

3. Rappels : Formules d'addition - formules de duplication

3.1 – Formules d'addition

(1) $cos(a+b) = cosa \times cosb - sina \times sinb$
(2) $cos(a-b) = cosa \times cosb + sina \times sinb$
(3) $sin(a+b) = sina \times cosb + sinb \times cosa$
(4) $sin(a-b) = sina \times cosb - sinb \times cosa$

Exemple

En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, utiliser les formules d'addition pour trouver les valeurs exactes de $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\cos\frac{\pi}{12}$

3.2. Formules de duplication

En posant a = b, on a :

(5) $cos2a = cos^2a - sin^2a$
(6) $sin2a = 2sina \times cosa$

Déduction

$cos^2a + sin^2a = 1 \Longrightarrow \begin{cases} cos^2a = 1 - sin^2a \\ sin^2 = 1 - cos^2a \end{cases}$ *d'où (5) donne :* $\begin{cases} cos^2a = \frac{1}{2} + \frac{cos2a}{2} & \textbf{(7)} \\ sin^2a = \frac{1}{2} - \frac{cos2a}{2} & \textbf{(8)} \end{cases}$

Exemple

En utilisant les formules de duplication, déterminé $\sin\frac{\pi}{8}$ et $\cos\frac{\pi}{8}$.

----

4. Tableau des dérivées des fonctions trigonométriques

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$cosx$
$\cos x$	$-sinx$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{cos^2 x}$ (avec $\cos x \neq 0$)
$\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b)$
$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$
$\sin U(x)$	$U'(x)\cos U(x)$
$\cos U(x)$	$-U'(x)\sin U(x)$

<u>Exemple</u>

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $u(x) = \cos 2x - \sin x$;
2. $v(x) = -3\sin\frac{1}{3}x + 4\cos 3x$;
3. $w(x) = -x + 2tan(x)$;
4. $l(x) = -2x\cos 3x$;
5. $m(x) = 5x\sin(-4x)$;
6. $n(x) = x + \tan x$.

5. Tableau des primitives des fonctions trigonométriques

$f(x)$	Primitives de f sur I
$\sin x$	$-\cos x + k,\quad k \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + k,\quad k \in \mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln(\cos x) + k,\ k \in \mathbb{R}$ avec $\cos x > 0$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b) + k,\ k \in \mathbb{R}$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b) + k,\quad k \in \mathbb{R}$
$U'(x)\cos U(x)$	$\sin U(x) + k,\quad k \in \mathbb{R}$
$U'(x)\sin U(x)$	$-\cos U(x) + k,\quad k \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$ (avec $\cos x \neq 0$)	$\tan x + k,\ k \in \mathbb{R}$

Exemple

Déterminer les primitives des fonctions suivantes sur I :

$f(x) = x\cos(x^2)$, $I = \mathbb{R}$; $g(x) = \sin 3x$, $I = \mathbb{R}$;

$h(x) = \cos(-2x+1)$, $I = \mathbb{R}$; $k(x) = 3x + \tan x$, $I =]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$.

A VOUS DE JOUER …

Exercice1 :Questions à Choix Multiples(QCM)

Choisir la bonne réponse parmi les propositions suivantes :

1. Soit $f(x) = \sin(x^2)$. La dérivée $f'(x)$ est :

A) $\cos(x^2)$; B) $2xsin(x)$; C)$2xsin(x^2)$; D) $2xcos(x^2)$

2. L'ensemble de définition de la fonction $f(x) = -3x - \cos(-x+\pi)$ est :

A) $]0\,;+\infty[$; B) $]-1\,;1[$; C) $\mathbb{R}$; D) $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

3. Soit $f(x) = \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + \sin(n\frac{\pi}{3})$. Le nombre $f(1)$ vaut :

A) $1+\sqrt{3}$; B) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$; C) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$; D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. Soit $f(x) = e^x(cosx + sinx)$. La dérivée $f'(x)$ est :

A) $2sinx\, e^x$; B) $-2cosx\, e^x$; C)$2cosx\, e^x$; D) $2xcos(x^2)$

Exercice 2

En utilisant les formules d'addition, calculer $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

sachant que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ et $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$; $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 3

Soit f et F deux fonctions définies sur $[0\,;\pi]$ par :

$$f(x) = x^2cos2x \quad \text{et} \quad F(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right)sin2x + \frac{x}{2}cos2x$$

1- Montrer que $cos2x = cos^2 x - sin^2 x$

2- Montrer que F est une primitive de f sur $[0;\pi]$

3- On pose $I = \int_0^\pi x^2cos^2 x\, dx$ et $J = \int_0^\pi x^2sin^2 x\, dx$

Calculer $I + J$ et $I - J$

En déduire les valeurs exactes de I et J.

Exercice 4

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \cos(x^2) \quad ; \quad g(x) = -2x\sin(x^2)$$

1- Calculer $f'(x)$.
2- En déduire les primitives de g.

Déterminer parmi ces primitives, celle qui prend la valeur 0 au point d'abscisse $\sqrt{\pi}$.

<u>Exercice 5</u>

Calculer les valeurs numériques exactes des intégrales suivantes :

a/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{3+sinx}\,dx$; b/ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{sinx}{cosx}\,dx$; c/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2x cosx\,dx$.

<u>Exercice 6</u>

Calculer les valeurs numériques exactes des intégrales suivantes en faisant une intégration par parties :

a/ $\int_0^{\pi} (2x+1)cosx\,dx$; b/ $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-x)sinx\,dx$.

<u>Exercice 7</u>

On donne les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2x\,dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2x\,dx$.

a/ Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $cos2x = cos^2x - sin^2x$.
b/ Calculer $I + J$ et $I - J$.
c/ En déduire les valeurs exactes de I et J.

<u>Exercice 8</u>

1. Exprimer $cos3x$ en fonction de $cosx$

2. Exprimer $sin\,3x$ en fonction de $sinx$

3. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}, \cos(2x + \pi) = 1 - 2cos^2x$