



NOM ET PRÉNOM :

# TIÈRE G2

## *Mon DOC de Maths*

COLLECTION FOMESOUTRA.COM

CLASSE ET ÉCOLE :

*By TEHUA*



# SOMMAIRE

Chapitre 1 : Equations et Inéquations du 2 <sup>nd</sup> degré dans $\mathbb{R}$ .....	03
Chapitre 2 : Systèmes linéaires.....	09
Chapitre 3 : Limites et Continuité.....	14
Chapitre 4 : Dérivation.....	20
Chapitre 5 : Etude de fonctions.....	26
Chapitre 6 : Suites numériques.....	33
Chapitre 7 : Séries statistiques à une variable.....	39
Chapitre 8 : Dénombrement.....	47
Chapitre 9 : Angles orientés et trigonométrie.....	51

# EQUATIONS ET INEQUATIONS DU 2<sup>nd</sup> DEGRE DANS $\mathbb{R}$

## 1 - Equations du 2<sup>nd</sup> degré

### 1 - 1 - Méthode de résolution

Soit l'équation (E) :  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $c \in \mathbb{R}$

Pour la résolution de (E), on utilise le discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$

- ✓ Si  $\Delta < 0$  alors (E) n'admet pas de solutions dans  $\mathbb{R}$  et P n'est pas factorisable dans  $\mathbb{R}$
- ✓ Si  $\Delta = 0$  alors (E) admet une unique solution dite racine double  $x_0 = -\frac{b}{2a}$  et P est factorisable dans  $\mathbb{R}$  :  $P(x) = a(x - x_0)^2$
- ✓ Si  $\Delta > 0$  alors (E) admet deux solutions :  $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  et P est factorisable dans  $\mathbb{R}$  :  $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

### 1 - 2 - Somme et produit des racines

Soit  $P(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $c \in \mathbb{R}$

Si P admet deux racines  $x_1$  et  $x_2$  ( $\Delta > 0$ ) alors leur somme et leur produit vérifient :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

### Propriété

Si deux réels ont pour somme S et pour produit P alors ils sont solutions de l'équation  $x^2 - Sx + P = 0$

## 2 - Inéquations du 2<sup>nd</sup> degré

### Méthode de résolution

Pour résoudre une inéquation du 2<sup>nd</sup> degré dans  $\mathbb{R}$ ,

- On calcule le discriminant du polynôme P associé à l'inéquation,  $P(x) = ax^2 + bx + c$

- ✓ Si  $\Delta < 0$  alors le polynôme P n'admet pas de racines et il est du signe de a

$x$	- $\infty$	$+$ $\infty$
$P(x)$	signe de a	

- ✓ Si  $\Delta = 0$  alors le polynôme P a une racine double  $x_0 = -\frac{b}{2a}$  et il est du signe de a

$x$	- $\infty$	$x_0$	$+$ $\infty$
$P(x)$	signe de a	0	signe de a

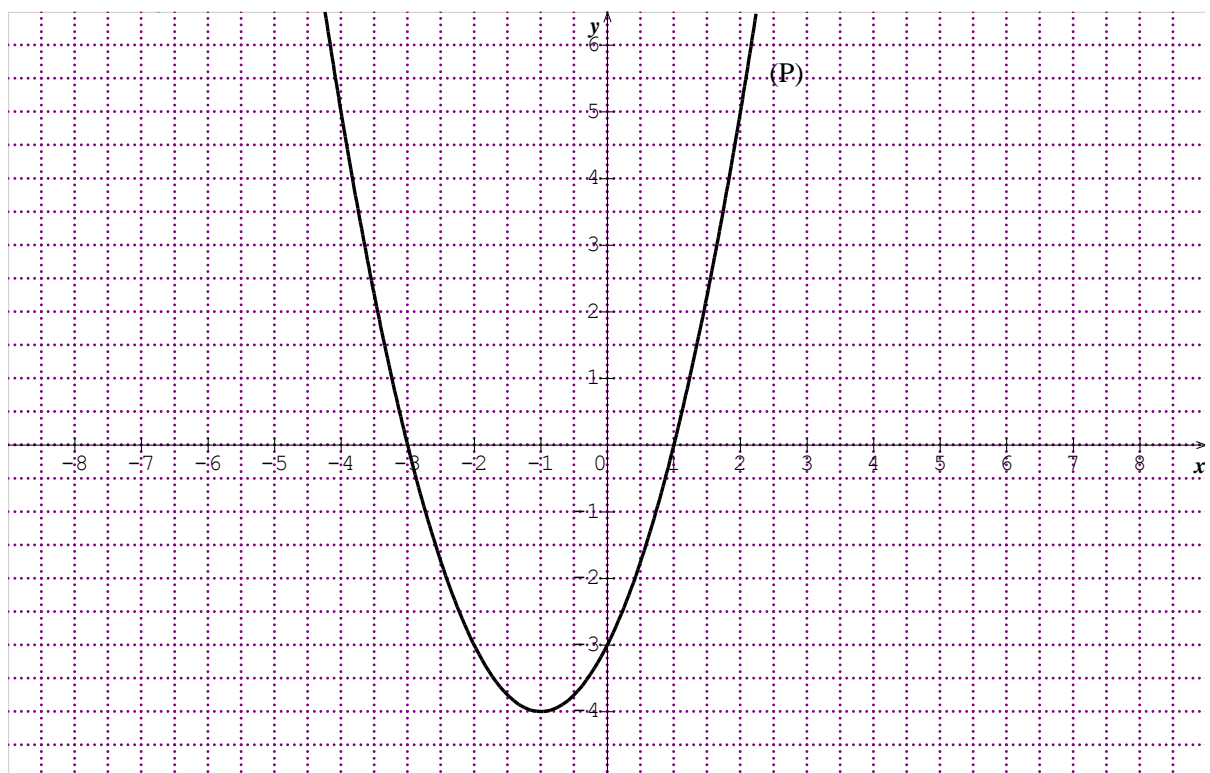
✓ Si  $\Delta > 0$  alors le polynôme P a deux racines  $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  et le signe de P est tel que ( $x_1 < x_2$ ) :

x	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$	
P(x)	signe de a	∅	signe contraire de a	∅	signe de a

- On déduit ensuite les solutions de l'inéquation grâce au signe de p(x)

### 3 - Résolution graphique

Résolution graphique dans  $\mathbb{R}$  de :  $x^2 + 2x - 3 = 0$  et  $x^2 + 2x - 3 < 0$



- L'équation :  $x^2 + 2x - 3 = 0$  a pour solutions les abscisses des points d'intersections de la parabole (P) et de l'axe des abscisses :  $S_{\mathbb{R}} = \{-3; 1\}$

- L'inéquation :  $x^2 + 2x - 3 < 0$  a pour solutions les abscisses des points de la parabole (P) situés en dessous de l'axe des abscisses :  $S_{\mathbb{R}} = ]-3; 1[$

# EXERCICES

## EXERCICE 1

Déterminer les racines des polynômes H, L et P définis comme suit :

1)  $H(x) = x^2 - 3x + 2$

2)  $L(x) = 3x^2 - x + 4$

3)  $P(x) = 4x^2 - 4x + 1$

## EXERCICE 2

Ecrire si possible sous forme d'un produit de polynôme de 1<sup>er</sup> degré :

1)  $P(x) = 5x^2 - 15x - 20$

2)  $Q(x) = -x^2 + 8x - 15$

3)  $Q(x) = 9x^2 - 12x + 4$

## EXERCICE 3

Etudier le signe des polynômes suivants :

1)  $P(x) = -x^2 - 5x - 4$

2)  $H(x) = x^2 - 3x + 2$

3)  $Q(x) = -5x^2 + x - 2$

4)  $R(x) = -9x^2 - 12x - 4$

## EXERCICE 4

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1)  $(E_1): 4x^2 - 4x + 1 = 0$

2)  $(E_2): 3x^2 - x + 2 = 0$

3)  $(E_3): 2x^2 - x - 3 = 0$

4)  $(E_4): -x^2 + 5x - 4 = 0$

### **EXERCICE 5**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

1)  $(I_1): x^2 - 3x + 2 \leq 0$

2)  $(I_2): -x^2 + 8x - 15 \geq 0$

3)  $(I_3): 7x^2 - 2x + 1 > 0$

4)  $(I_4): 9x^2 - 12x + 4 < 0$

### **EXERCICE 6**

Déterminer dans chaque cas deux nombres réels  $x_1$  et  $x_2$  connaissant leur somme  $S$  et leur produit  $P$  :

1)  $S = -5$  et  $P = -14$

2)  $S = 1$  et  $P = \frac{1}{4}$

3)  $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 6$

### **EXERCICE 7**

On considère l'équation (E) :  $2x^2 + \alpha x + \beta = 0$

1) Déterminer  $\alpha$  et  $\beta$  si (E) admet deux solutions dont la somme est  $\frac{3}{2}$  et le produit  $\frac{1}{2}$

2) En déduire les solutions de (E)

### **EXERCICE 8**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

(E) :  $3x + \frac{x+1}{2} = 5 + 2x$

(F) :  $\frac{2}{x+3} - \frac{3}{x} = 0$

(I) :  $\frac{1}{x+1} \leq \frac{2}{x+2}$

### **EXERCICE 9**

Soit  $P(x) = 3x^3 - 4x^2 - x + 2$

1) Justifier que 1 est racine du polynôme  $P(x)$

2) a- Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que :  $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$

b - En déduire les racines de  $P(x)$

3) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $P(x) < 0$

### EXERCICE 10

1) On considère le polynôme  $G$  défini par  $G(x) = 3x^2 + 5x - 2$

- a- Déterminer la forme canonique de  $G(x)$
- b- En déduire dans  $\mathbb{R}$ , les solutions de l'équation  $G(x) = 0$

2) Soit  $P(x) = 3x^3 + 11x^2 + 8x - 4$

- a- Calculer  $P(-2)$
- b- Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $P(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c)$

3) Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , l'inéquation  $\frac{3x^3 + 11x^2 + 8x - 4}{x + 2} > 0$

### EXERCICE 11

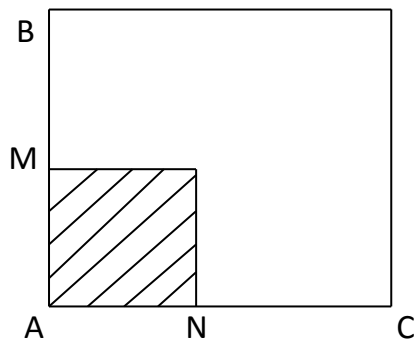
On considère le polynôme  $P$  défini par :  $P(x) = 9 - x^3 - 2x + x(x^2 - x + 2)$

- 1) Développer, réduire et ordonner  $P(x)$
- 2) a- Etudier le signe de  $P(x)$
- b- En déduire les solutions de l'inéquation  $P(x) \leq 0$

### EXERCICE 12

Monsieur Gbaguidi décide de couvrir de béton d'épaisseur  $e$ , l'espace vert de sa cour, représenté par la partie hachurée de la figure ci-dessous :

On donne :  $AB = AC = 8$  m et  $AN = BM = x$



- 1) a - Calculer  $MA$  en fonction de  $x$
- b - Calculer l'aire de la partie hachurée en fonction de  $x$
- 2) Déterminer la valeur de  $x$  pour que l'aire de la partie hachurée soit égale à  $16$  m<sup>2</sup>
- 3) Sachant que l'épaisseur  $e = 0,08$  m , calculer en m<sup>3</sup> le volume du béton pour  $x = 3$  m
- 4) Sachant qu'un mètre cube équivaut à une dépense de 15000 F, calculer la dépense effectuée par monsieur Gbaguidi pour couvrir l'espace

### EXERCICE 13

On considère le polynôme  $P(x) = x^2 - 3x + 2$

1) Compléter le tableau ci-dessous

x	0	1/2	1	3/2	2	5/2	3
P(x)							

2) Représenter graphiquement la courbe de P

3) Résoudre graphiquement dans  $\mathbb{R}$  :

a -  $P(x) = 0$

b -  $P(x) < 0$

### EXERCICE 14

Dans l'impression d'un livre, on doit respecter sur chaque page des marges de 2 cm à gauche et à droite, de 3 cm en haut et en bas. On désigne par x et y respectivement la mesure (en cm) de la largeur et de la hauteur d'une page entière. (Faire une figure)

1) L'aire totale d'une page étant de  $600 \text{ cm}^2$ , exprimer y en fonction de x

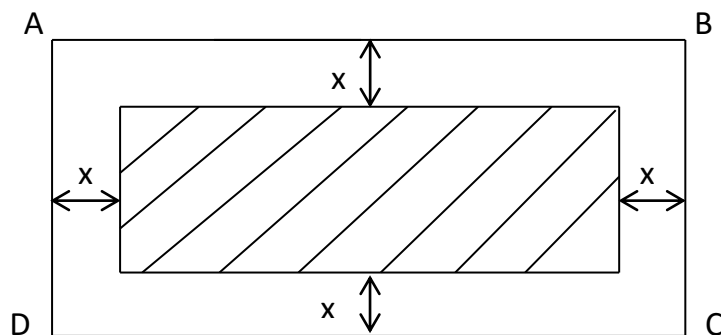
2) Déterminer l'aire (en  $\text{cm}^2$ ) de la surface imprimable d'une page en fonction de x et y

3) Montrer que l'aire  $A(x)$  de la surface imprimable est :  $A(x) = 624 - 6x - \frac{2400}{x}$

4) Déterminer les dimensions d'une page d'un livre dont l'aire est :  $A(x) = 384 \text{ cm}^2$

### EXERCICE 15

Un jardin de forme rectangulaire à les dimensions suivantes :  $AB = 2 \text{ cm}$  et  $BC = 1 \text{ cm}$



1) a - Déterminer la longueur L et la largeur l de la partie hachurée en fonction de x

b - Démontrer que l'aire de la partie hachurée en fonction de x est :  $A(x) = 4x^2 - 6x + 2$

2) Déterminer la valeur de x pour que l'aire de la partie hachurée soit égale à la moitié à la moitié de l'aire du rectangle ABCD (on admettra que  $x < \frac{1}{2}$ )

# SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

## 1 - Systèmes de deux équations du 1<sup>er</sup> degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

### 1 - 1 - Méthode de combinaison linéaire

$$\text{Soit à résoudre dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (S) : \begin{cases} 2x - y = -2 & (E_1) \\ -x + 3y = -1 & (E_2) \end{cases}$$

On élimine  $x$  en multipliant  $(E_1)$  par  $+1$  et  $(E_2)$  par  $+2$ . On obtient :  $y = -\frac{4}{5}$

$$\text{Dans } (E_2), \text{ on remplace } y \text{ par sa valeur et } x = -\frac{7}{5} \Rightarrow S_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \left( -\frac{7}{5}, -\frac{4}{5} \right) \right\}$$

### 1 - 2 - Méthode de substitution

Dans  $(E_1)$  par exemple, on exprime  $y$  en fonction de  $x$  :  $y = 2x + 2$  que l'on remplace dans l'équation  $(E_2)$ , on trouve  $x = -\frac{7}{5}$

$$\text{En remplaçant } x \text{ par sa valeur dans } (E_1) \text{ on obtient } y = -\frac{4}{5} \Rightarrow S_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \left( -\frac{7}{5}, -\frac{4}{5} \right) \right\}$$

## 2 - Systèmes de CRAMER dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

### 2 - 1 - Déterminant

$$\text{Soit le système } (S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Le nombre réel  $a'b - a'b'$  noté  $\det(S) = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$  est appelé déterminant du système  $(S)$

Un système de deux équations à deux inconnues, admet un seul couple de solutions si et seulement si son déterminant est non nul

Exemple :

$$(S) : \begin{cases} -x + y = 3 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$$

$$\text{Le déterminant de } (S) \text{ est : } \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3(-1) - 2 \times 1 = -3 - 2 = -5$$

Remarque : Les systèmes d'équations traités dans ce chapitre admettent un et un seul couple de solutions

## 2 - 2 - Résolution par la méthode de CRAMER

Soit à résoudre par le système suivant (S) : 
$$\begin{cases} 2x - y = -2 \\ -x + 3y = -1 \end{cases}$$

On calcule le déterminant de (S) est : 
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5, \text{ or } 5 \neq 0 \text{ et on utilise les}$$

formules de CRAMER :

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\det(S)} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-6 - 1}{5} \Rightarrow x = \frac{-7}{5} \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\det(S)} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-2 - 2}{5} \Rightarrow y = \frac{-4}{5} \end{aligned} \right\} \text{ donc } S_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \left( -\frac{7}{5}, -\frac{4}{5} \right) \right\}$$

## 3 - Systèmes de trois équations du 1<sup>er</sup> degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

### Méthode de GAUSS

Soit à résoudre dans  $\mathbb{R}^3$  le système (S) : 
$$\begin{cases} x - 5y - 7z = 3 & (E_1) \\ 5x + 3y + z = 3 & (E_2) \\ 3x + y - 2z = -1 & (E_3) \end{cases}$$

- On élimine x dans (E<sub>2</sub>) et dans (E<sub>3</sub>), par combinaison de chacune de ces équations avec (E<sub>1</sub>), on obtient :

$$(S) : \begin{cases} x - 5y - 7z = 3 & (E_1) \\ -28y - 36z = 12 & (E_2) : 5 \times (E_1) - (E_2) \\ -16y - 19z = 10 & (E_3) : 3 \times (E_1) - (E_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5y - 7z = 3 & (E_1) \\ -7y - 9z = 3 & (E'_2) \\ -16y - 19z = 10 & (E'_3) \end{cases}$$

- On élimine y dans (E'<sub>3</sub>) par combinaison de chacune de (E'<sub>2</sub>) et (E'<sub>3</sub>), on obtient :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5y - 7z = 3 \\ -7y - 9z = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

On obtient finalement en commençant par la dernière équation, puis en remontant  $z = 2, y = -3, x = 2$

La solution du système (S) est :  $S_{\mathbb{R}^3} = \{(2, -3, 2)\}$

# EXERCICES

## EXERCICE 1

Résoudre dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$(S_1): \begin{cases} 5x - y = 17 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$$

$$(S_2): \begin{cases} -x + y - 3 = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

$$(S_3): \begin{cases} 3x + y = 0 \\ 2x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

## EXERCICE 2

Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$

$$(S_1): \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x + y - 3z = -1 \\ x + y - 3z = -2 \end{cases}$$

$$(S_2): \begin{cases} -x + 3y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = -1 \\ 2x + 3y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$(S_3): \begin{cases} x + 3y = 5 \\ y + z = 1 \\ x + z = -8 \end{cases}$$

## EXERCICE 3

Une bibliothèque de prêt propose deux options à ses lecteurs :

Option A : Abonnement 1500 F par an et 50 F par livre emprunté.

Option B : Abonnement de 800 F et 100 F par livre emprunté.

- 1) Koffi peut consacrer 2000 F par an à l'emprunt de livres. Quelle option doit-il choisir pour pouvoir emprunter le plus grand nombre de livres possible ?
- 2) Quelle est, suivant le nombre de livres empruntés dans l'année, l'option la plus avantageuse ?

## EXERCICE 4

Le responsable informatique d'une entreprise effectue deux commandes successives de matériel identiques :

Commande n°1 : Trois ordinateurs et une imprimante : 1145000 F

Commande n°2 : Un ordinateur et trois imprimantes : 635000 F

Calculer le prix d'une imprimante et d'un ordinateur.

## EXERCICE 5

On empile 30 livres les uns sur les autres. La hauteur de la pile atteint 116 cm. Certains de ces livres ont une épaisseur de 6 cm, les autres ont une épaisseur de 2 cm.

- 1) Déterminer le nombre de livres de chaque sorte
- 2) Sachant que le livre d'épaisseur 6 cm a coûté 9900 F et ceux d'épaisseur 2 cm 5000 F l'unité Calculer le coût total des 30 livres

### **EXERCICE 6**

Un camion de capacité 10 tonnes doit transporter des caisses de légumes et des caisses de sacs de riz. La masse d'une caisse de légumes est 50 Kg et celle d'une caisse de sacs de riz 175 Kg.

Sachant que le camion ne peut transporter que 100 caisses, combien de caisses de légumes et de caisses de sacs de riz faut-il pour obtenir un chargement de 10 tonnes ?

### **EXERCICE 7**

1) Résoudre dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  le système ci-dessous par la méthode de CRAMER :

$$(S) : \begin{cases} x + y = 60 \\ \frac{1}{9}x + \frac{2}{3}y = 15 \end{cases}$$

2) Pour réaliser une cuve métallique, un technicien en soudure achète 60 feuilles de tôles, composées de feuilles d'épaisseur 1 mm et de feuilles d'épaisseur 3 mm.

On constate que le tiers des feuilles d'épaisseur 1 mm et le double des feuilles d'épaisseur 3 mm représentent les  $\frac{3}{4}$  des feuilles de tôles achetées.

On désigne par  $x$  le nombre de feuilles d'épaisseur 1 mm et  $y$  le nombre de feuilles d'épaisseur 3 mm.

a) Etablir le système d'équations linéaires correspondant à cette situation

b) Déterminer le nombre de feuilles d'épaisseur 1 mm et le nombre de feuilles d'épaisseur 3 mm, achetées par le technicien en soudure

### **EXERCICE 8**

Suite à un atelier de formation de ses membres, une coopérative veut organiser un cocktail. Le service comptable de la coopérative envisage l'organisation du menu de trois façons différentes :

-1 bouteille de jus d'ananas, 2 bouteilles de jus d'orange et 2 bouteilles de jus de citron qui coûteront 12 500F

-2 bouteilles de jus d'ananas, 2 bouteilles de jus de citron 1 bouteille de jus d'orange qui coûteront 13 000F

-1 bouteille de jus de citron, 2 bouteilles de jus d'ananas et 2 bouteilles de jus d'orange qui coûteront 12 000F

Le service comptable sollicite votre expertise en mathématique afin de déterminer le prix de chaque type de bouteille de jus.

On désigne par  $x$ ,  $y$  et  $z$  les prix respectifs d'une bouteille de jus d'ananas, jus d'orange et jus de citron.

1) Ecrire le système d'équation qu'on peut associer à ce problème

2) Résoudre ce système

### EXERCICE 9

Une amicale décide d'acheter trois terrains. Les terrains 1, 2 et 3 coûtent respectivement 942 000 F, 2 374 000 F et 1 004 000F. Les membres de cette amicale sont repartis en trois groupes A, B et C  
Le tableau ci-dessous indique ce que chaque membre de chaque groupe a payé pour ces trois terrains

	A	B	C
Terrain 1	9 000 F	12 000 F	21 000 F
Terrain 2	12 000 F	35 000 F	80 000 F
Terrain3	7 000 F	13 000 F	31 000 F

Déterminer le nombre de membres de cette amicale

# LIMITES ET CONTINUITÉ

## 1 - Limites

### 1 - 1 – Limites de référence

Soit a et c deux nombres réels :

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} c = c ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} c = c$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x \rightarrow a} (x - a)^n = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty \text{ si } n \text{ est pair et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = -\infty \text{ si } n \text{ est impair}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty \text{ si } n \text{ est pair et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty \text{ si } n \text{ est impair}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

### 1 - 2 - Limite de fonctions polynômes et rationnelles à l'infini

.Fonctions polynômes

La limite d'une fonction polynôme en  $+\infty$  ou en  $-\infty$  est égale à la limite de son monôme de plus haut degré

.Fonctions rationnelles

La limite d'une fonction rationnelle en  $+\infty$  ou en  $-\infty$  est égale à la limite du rapport de ses monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur

### 1 - 3 - Opérations sur les limites

f et g sont deux fonctions, l et l' des nombres réels et a, un nombre réel ou  $-\infty$  ou  $+\infty$

#### Limite d'une somme

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x)$	l+l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	

#### Limite d'un produit

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	l>0	l<0	l>0	l<0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x)$	l \times l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$		

## Limite d'un quotient

. Cas où la limite de g n'est pas nulle

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$				$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l < 0$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f}{g} \right) (x)$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$				

. Cas où la limite de g est nulle

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	0, avec $g(x) > 0$	0, avec $g(x) < 0$	0, avec $g(x) > 0$	0, avec $g(x) < 0$
$\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f}{g} \right) (x)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

**NB:** Les cases hachurées sont des cas de formes indéterminées c'est-à-dire qu'on ne peut pas conclure immédiatement. Ces cas nécessitent une étude particulière chaque fois qu'ils se présentent, ce sont : «  $+\infty - \infty$  » ; «  $0 \times \infty$  » ; «  $\frac{\infty}{\infty}$  » ; «  $\frac{0}{0}$  »

### 1 - 4 - Limites et branches infinies

Soit f une fonction de représentation graphique (cf)

- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  (ou  $-\infty$ ) ou  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  (ou  $-\infty$ ) ou  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  (ou  $-\infty$ ) alors la droite d'équation  $x = a$ ,  $a \in \mathbb{R}$  est asymptote à (cf) parallèle à l'axe des ordonnées
- Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$  (resp.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ ),  $b \in \mathbb{R}$  alors la droite d'équation  $y = b$  est asymptote à (cf) en  $+\infty$  (resp. en  $-\infty$ ), parallèle à l'axe des abscisses
- Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$  (resp.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ ) alors la droite d'équation  $y = ax + b$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $b \in \mathbb{R}$  est asymptote à (cf) en  $+\infty$  (resp. en  $-\infty$ )

## 2 - Continuité

### 2 - 1 - Continuité en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et  $a \in \mathbb{R}$

f est continue en a si et seulement si  $a \in I$  et  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Exemple : Soit la fonction f :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1} & \text{si } x \neq -1 \\ f(-1) = -2 \end{cases}$$

f est définie sur  $\mathbb{R}$  car  $-1 \in \mathbb{R}$  et  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} x-1 = -2 = f(-1)$ .

Donc f est continue en -1

## 2 - 2 - Continuité à gauche (resp. Continuité à droite)

Exemple : Soit la fonction  $g : \begin{cases} \forall x \in ]-\infty, 1[, g(x) = x^2 + 2x \\ \forall x \in ]1, +\infty[, g(x) = 1 + 2\sqrt{x} \\ g(1) = 3 \end{cases}$

g est continue à gauche en 1 car  $1 \in Dg = \mathbb{R}$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + 2x = 3 = g(1)$

g est continue à droite en 1 car  $1 \in Dg = \mathbb{R}$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 + 2\sqrt{x} = 3 = g(1)$

Remarque :  $1 \in Dg$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1)$  donc g est continue en 1

### Théorème

Soit f une fonction d'ensemble de définition Df et  $a \in \mathbb{R}$ .

f est continue en a si et seulement si  $a \in Df$  et  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

# EXERCICES

## EXERCICE 1

Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow -3} 5x^2 - x - 2$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2-x}}{x^2 + 3x - 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4 - x^2}{5x + 10}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + x - 2}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{x - 1}$$

## EXERCICE 2

Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1 - 2x^2}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$3) \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x-3}$$

$$4) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left( \frac{1}{x} + 1 \right) (x^2 + 1)$$

$$5) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{(1-2x)^2}{1-x}$$

$$6) \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{1-4x}{x^2-9}$$

## EXERCICE 3

Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 + 2x^2 - 5$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^3 - 3x + 6$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+5}{-x^3 + 2x^2 - 1}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x-3)(x-1)^2}{(2x+4)(x^2+1)}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 1} + x$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + x}$$

#### **EXERCICE 4**

Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2+x-2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-3x+2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-3x+5}{x+2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{3}x^5 - 5x^3 - x + 3$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+5}{-x^3+2x^2-1}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x-3)(x-1)^2}{(-2x+4)(x^2+1)}$$

#### **EXERCICE 5**

1) Déterminer les limites éventuelles respectives en 1, en 2, en  $+\infty$ , en  $-\infty$  de la

$$\text{fonction : } x \mapsto \frac{3x^2-2x-1}{(x-1)(x-2)}$$

2) Déterminer les limites éventuelles respectives en -1, en  $+\infty$ , en  $-\infty$  de la

$$\text{fonction : } x \mapsto \frac{2x^2-1}{x+1} - 2x$$

#### **EXERCICE 6**

Pour chacune des fonctions numériques suivantes, Calculer les limites aux bornes de leurs ensembles de définition et déterminer les éventuelles asymptotes et branches infinies :

$$1) f(x) = \frac{3x+2}{x-2}$$

$$2) g(x) = x+1 - \frac{3}{x+4}$$

$$3) h(x) = \frac{x^3-x+1}{x+1}$$

#### **EXERCICE 7**

Soit  $f$  la fonction définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{2x^2-x-1}{2(x+1)}$  et (Cf) sa courbe dans le plan

muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$

1) a – Déterminer Df, l'ensemble de définition de  $f$

b - Calculer les limites de  $f$  aux bornes de Df

2) a – Déterminer les réels  $a, b, c$  tels que  $\forall x \in Df, f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

b – Démontrer que la droite (D) d'équation  $y = x - \frac{3}{2}$  est asymptote à (Cf).

Déterminer l'autre asymptote de (Cf)

### **EXERCICE 8**

Soit la fonction numérique  $f$  définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{x+1}{2-x}$

(C) sa courbe dans le repère orthonormé  $(O, I, J)$

- 1) Déterminer  $D_f$ , l'ensemble de définition de  $f$
- 2) a - Calculer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$   
b - Interpréter les résultats

### **EXERCICE 9**

Soit la fonction  $f$  définie par : 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} \\ f(1) = -1 \end{cases}$$

- 1) Etudier la continuité de la fonction  $f$  en 1
- 2) Etudier la dérivabilité de  $f$  en 1

### **EXERCICE 10**

1) Etudier la continuité en 3 de la fonction suivante :

$$g : \begin{cases} g(x) = 2x + 1 & \text{si } x \leq 3 \\ g(x) = \frac{1}{4x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

2) Déterminer le réel  $\alpha$  pour que  $h$  soit continue en 4

$$h : \begin{cases} h(x) = 3\sqrt{x} + 1 & \text{si } x \geq 4 \\ h(x) = \alpha x^2 + 1 & \text{si } x < 4, \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

### **EXERCICE 11**

Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité de  $f$  en 1

1)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  et  $f(1) = 2$

2)  $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$  et  $f(1) = \frac{1}{2}$

3)  $f(x) = \frac{-x^2(1-x)}{x-1}$  et  $f(1) = -1$

# DERIVATION

## 1 - Dérivabilité en un point

### 1 - 1 - Définition

Soit  $f$  une fonction d'ensemble de définition  $D_f$ .

Ce réel est appelé nombre dérivé de  $f$  en  $a$ . On note :  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

### 1 - 2 - Interprétation du nombre dérivé : Equation de tangente

Le nombre dérivé de  $f$  en  $a$ ,  $f'(a)$  est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse  $a$ . Cette tangente a pour équation :  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

## 2 - Dérivabilité à gauche (resp. Dérivabilité à droite)

$f$  est dérivable à gauche (resp. dérivable à droite) en  $a \in D_f$  si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l, l \in \mathbb{R} \left( \text{respectivement } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l, l \in \mathbb{R} \right)$$

Cette limite est appelée nombre dérivé à gauche en  $a$ , noté  $f'_g(a)$

(respectivement nombre dérivé à droite en  $a$ , noté  $f'_d(a)$ )

### Théorème

$f$  est dérivable en  $a$  si et seulement si  $f$  est dérivable à gauche en  $a$  et  $f$  dérivable à droite en  $a$  et  $f'_g(a) = f'_d(a)$

## 3 - Dérivées de fonctions

.Fonctions dérivées usuelles

$f(x)$	$a, a \in \mathbb{R}$	$ax$	$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$
$f'(x)$	0	$a$	$nx^{n-1}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

. Opérations sur les fonctions dérivées

$f(x)$	$u + v$	$\alpha.v, \alpha \in \mathbb{R}$	$u \times v$	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$	$\sqrt{u}$	$u^n, n \in \mathbb{N}$
$f'(x)$	$u' + v'$	$\alpha.v'$	$u'.v + u.v'$	$-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{u'.v - u.v'}{v^2}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$n u^{n-1} u'$

**4 - Dérivée et sens de variation**

Théorème : Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$

si  $\forall x \in I, f'(x) > 0$  alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$

si  $\forall x \in I, f'(x) < 0$  alors  $f$  est strictement décroissante sur  $I$

si  $\forall x \in I, f'(x) = 0$  alors  $f$  est constante sur  $I$

Exemple : Soit la  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ .

On a  $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$  et  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$  ou  $x = -1$

Etudions à présent le signe de  $f'(x)$  sur  $] -\infty, 0 [$  et sur  $] 0, +\infty [$  afin de déterminer le sens de variation de la fonction  $f$

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$2$	$+\infty$	$2$	$+\infty$

Variation de  $f$  :

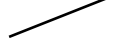
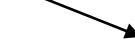
$\forall x \in ]-\infty, -1[ \cup ]0, 1[, f'(x) < 0$  donc  $f$  est strictement décroissante sur  $] -\infty, -1 [$  et sur  $] 0, 1 [$

$\forall x \in ]-1, 0 [ \cup ]1, +\infty [, f'(x) > 0$  donc  $f$  est strictement croissante sur  $] -1, 0 [$  et sur  $] 1, +\infty [$

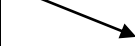

Conséquence : Extremums d'une fonction

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $] a, b [$  et  $\alpha \in ] a, b [$

Si  $f'$  s'annule sur  $] a, b [$  en  $\alpha$  en changeant de signe alors on obtient l'un des tableaux :

x	a	$\alpha$	b
$f'(x)$	+	0	-
f(x)		$f(\alpha)$	

$f(\alpha)$  est le maximum de  $f$  sur  $]a, b[$

x	a	$\alpha$	b
$f'(x)$	-	0	+
f(x)		$f(\alpha)$	

$f(\alpha)$  est le minimum de  $f$  sur  $]a, b[$

# EXERCICES

## EXERCICE 1

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1)  $f(x) = -x^3 + 8x^2 + x - 1$

2)  $g(x) = \frac{x-2}{2x+5}$

3)  $h(x) = (x-3)(2x^2 - 1)$

4)  $i(x) = (-x^2 + 2)^2$

5)  $j(x) = 3\sqrt{x^2 - 3x + 5}$

6)  $k(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{3x+2}$

7)  $m(x) = \frac{2x^2 - 5x + 4}{x}$

8)  $p(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2$

9)  $q(x) = (x-1)\sqrt{2x}$

10)  $t(x) = \frac{2x+1}{(x+3)^2}$

11)  $u(x) = x+1 - \frac{3}{x+4}$

12)  $s(x) = \frac{3}{-x^2+7}$

## EXERCICE 2

Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x$

1) Déterminer la dérivée  $f'(x)$

2) a - Existe-t-il un point de  $(C_f)$ , la courbe représentative de  $f$  où la tangente est parallèle à l'axe des abscisse ?

b - Déterminer l'équation de cette tangente

3) Déterminer l'équation de la tangente à l'origine à la courbe  $(C_f)$

## EXERCICE 3

Soit la fonction  $f: x \mapsto 3x^2 - 5x + 1$

$(C_f)$  sa représentation graphique dans un repère cartésien  $(O, I, J)$

1) En utilisant la définition, calculer le nombre dérivé de  $f$  en  $a = 2$ .

2) Déterminer une équation de la tangente  $(\Delta)$  à  $(C_f)$  au point  $M$  d'abscisse 2

3) Etudier la position de  $(C_f)$  par rapport à la droite  $(\Delta)$

4) Répondre aux mêmes questions pour la fonction  $f: x \mapsto \frac{x+2}{7-x}$  et  $a = 5$

#### **EXERCICE 4**

Dans chacun des cas ci- dessous, déterminer la fonction dérivée de f, en déduire son sens de variation, son tableau de variation et l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a

- 1)  $f(x) = -2x^3 + 3x^2 - 4$  , a = 1
- 2)  $f(x) = \frac{5x+1}{7x-2}$  , a = -1
- 3)  $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$  , a = 0
- 4)  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$  , a = 4

#### **EXERCICE 5**

On considère la fonction f définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{-2x+3}{x-2}$

(Cf) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (unité graphique : 1 cm)

- 1) a - Déterminer l'ensemble de définition Df de la fonction f  
b - Calculer les limites de f aux bornes de Df et interpréter les résultats
- 2) On admet que f est dérivable sur son ensemble de définition Df  
Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f
- 3) Déterminer l'équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse 0

#### **EXERCICE 6**

On considère la fonction g définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = \frac{-x^2+2}{x-2}$

- 1) On admet que f est dérivable sur son ensemble de définition Df,  
Calculer la fonction dérivée f' de f
- 2) Etudier les variations de f sur Df
- 3) a - Etablir le tableau de variation de f  
b - En déduire les extrémums relatifs de f

#### **EXERCICE 7**

Soit la fonction g définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = \frac{2x^2+3x}{x+2}$

- 1) Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition Dg
- 2) a - Démontrer que  $\forall x \in Dg$  ,  $g'(x) = \frac{2(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$   
b - Déterminer le signe de g'(x) sur Dg  
c - En déduire les variations de la fonction g  
d - Dresser le tableau de variation de la fonction g
- 3) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (Cg) de g au point d'abscisse 1

### **EXERCICE 8**

On considère une entreprise dont la fonction de coût total de fabrication d'un produit s'exprime en fonction de la quantité  $q$  par la relation :  $C = 12q - 4q^2 + q^3$

1) Sachant que  $C_M$ , le coût moyen de fabrication du produit est :  $C_M = \frac{C}{q}$

Déterminer  $C_M$  pour une quantité  $q = 20$

2) Le coût marginal du produit est  $C'(q)$

Déterminer le tableau de variation de la fonction coût marginal  $C'(q)$  pour  $q \in [0; 5]$

### **EXERCICE 9**

Soit  $f$  l'application de  $[0; 2]$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1-3x}{x-2}, & \text{si } x \in [0; 1[ \\ f(x) = 2\sqrt{x}, & \text{si } x \in [1; 2] \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de  $f$  en 1

2) Etudier la dérivabilité de  $f$  en 1

3) En admettant que  $f$  est dérivable sur  $[0; 1[$  et sur  $]1; 2]$

Déterminer la fonction dérivée  $f'$  de  $f$

### **EXERCICE 10**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1) Déterminer le réel  $a$  pour lequel la fonction  $f$  est continue en 1

2) Etudier alors la dérivabilité de  $f$  en 1

# ETUDE DE FONCTIONS

## Plan d'étude d'une fonction

L'étude d'une fonction  $f$  s'effectue de la façon suivante :

1) Ensemble de définition de  $D_f$  de la fonction  $f$ . Il faudra prendre l'habitude de le mettre sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles

2) Etude éventuelle de la parité

- Fonction paire

Soit  $f$  une fonction numérique,  $D_f$  son ensemble de définition

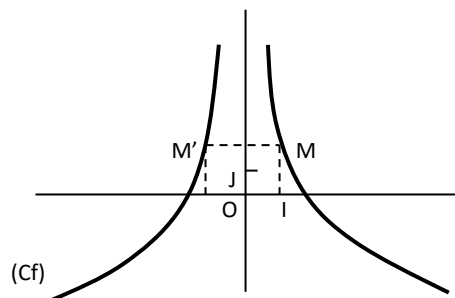
$f$  est paire  $\Leftrightarrow \forall x \in D_f, -x \in D_f, f(-x) = f(x)$

Exemple : Soit la fonction  $g$  définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = |x^3|$

$D_g = \mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$  et  $g(-x) = |(-x)^3| = |x^3| = g(x)$  donc  $g$  est paire

Dans le plan muni d'un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la représentation graphique d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (OJ)

Exemple :



Remarque :

Si  $f$  est une fonction paire, il suffit de dessiner la partie de sa représentation graphique correspondant aux valeurs positives de la variable et de compléter par symétrie par rapport à (O, J)

- Fonction impaire

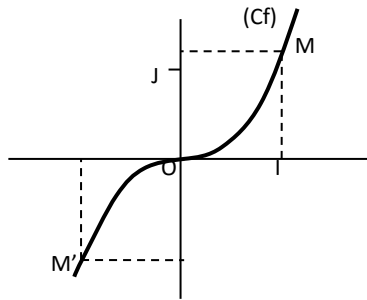
Soit  $f$  une fonction numérique,  $D_f$  son ensemble de définition

$f$  est impaire si et seulement si :  $\forall x \in D_f, -x \in D_f$  et  $f(-x) = -f(x)$

Exemple : Soit la fonction  $g$  définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 2x^3 + x$

$D_f = \mathbb{R}$  et  $\forall -x \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, f(-x) = 2(-x)^3 + (-x) = -2x^3 - x = -f(x)$  donc  $f$  est impaire

Dans le plan muni d'un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la représentation graphique de la fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine O du repère



Remarque :

Si  $f$  est une fonction impaire, il suffit de dessiner la partie de la représentation graphique correspondante aux valeurs positives de la variable et de la compléter par symétrie par rapport à l'origine du repère

Le point de coordonnées  $\Omega\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$  est centre symétrie de  $f$  si et seulement si la fonction  $g : x \mapsto f(x + a) - b$  est impaire ou si :  $\forall x \in Df, (2a - x) \in Df$  et  $f(2a - x) + f(x) = 2b$

3) Calcul des limites de  $f$  aux bornes de  $Df$

4) Continuité et dérivabilité de  $f$  sur son ensemble de définition :

- Calculer  $f'(x)$  et étudier le signe de  $f'(x)$  suivant les valeurs de  $x$
- Déduire en le sens de variation de  $f$
- Dresser le tableau de variation de  $f$ , il résume tous les résultats précédents, il importe donc de vérifier sa cohérence

5) Caractéristiques de la courbe représentative  $(Cf)$  de  $f$  :

- Asymptotes éventuelles
- Éléments de symétrie éventuels
  - . Centre de symétrie

Le plan étant muni d'un repère quelconque, la courbe  $(Cf)$  de  $f$  admet le point  $\Omega(a, b)$  comme centre de symétrie si :  $\forall x \in Df, (2a - x) \in Df$  et  $f(2a - x) + f(x) = 2b$

. Axe de symétrie

Le plan étant muni d'un repère orthogonal, la courbe  $(Cf)$  de  $f$  admet la droite d'équation  $x = a$  comme axe de symétrie si :  $\forall x \in Df, (2a - x) \in Df$  et  $f(2a - x) - f(x) = 0$

6) tableau de valeurs

7) Tracé soigneux de la courbe de  $f$

# EXERCICES

## EXERCICE 1

On considère la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^3 - 3x + 1$

(Cf) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J) unité : 1 cm

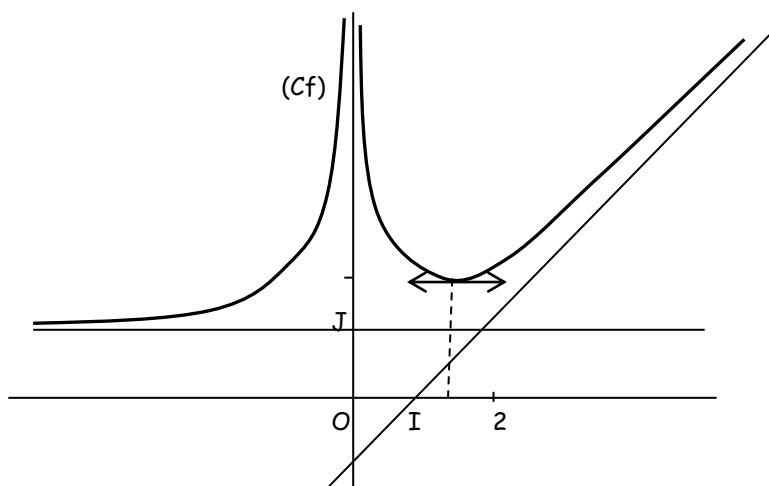
- 1) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition Df
- 2) a - Calculer la dérivée de la fonction f  
b - En déduire les variations de la fonction f et dresser le tableau de variation de f
- 3) Démontrer que le point  $\Omega\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$  est centre de symétrie de (Cf)
- 4) Construire (Cf) dans le repère (O,I,J)

## EXERCICE 2

On donne ci-contre la représentation graphique (Cf) de la fonction f dans un repère orthogonal (O,I,J)

En vous aidant du graphique, répondre aux questions suivantes :

- 1) a - Donner l'ensemble de définition Df de f  
b - Donner les limites de f aux bornes de Df
- 2) a - Donner l'image par f de  $3/2$   
b - Donner le nombre dérivé de f en  $3/2$
- 3) a - Etudier le sens de variation de f  
b - Dresser le tableau de variation de f
- 4) Préciser la nature et une équation des asymptotes à (Cf)



### EXERCICE 3

On considère la fonction  $f$  définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{4x + 1}{2x - 1}$

(Cf) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J) unité graphique : 1 cm

- 1) Déterminer l'ensemble de définition Df de la fonction  $f$
- 2) a - Calculer les limites de  $f$  aux bornes de Df  
b - Interpréter graphiquement les résultats
- 3) On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur Df  
a - Calculer  $f'(x)$  et en déduire les variations de la fonction  $f$   
b - Dresser le tableau de variation de  $f$
- 4) a - Déterminer l'équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse 2  
b - Démontrer que le point  $\Omega\left(\frac{1}{2}, 2\right)$  est centre de symétrie de (Cf)
- 5) Tracer les asymptotes éventuelles, la tangente (T), puis la courbe (Cf) dans le repère (O,I,J)

### EXERCICE 4

Soit la fonction numérique  $g$  définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = \frac{2x^2 + 3x}{x + 2}$

( $\Gamma$ ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J) unité : 1 cm

- 1) Calculer les limites de  $g$  aux bornes de son ensemble de définition Dg
- 2) a- Etudier les variations de la fonction  $g$   
b- Dresser son tableau de variation
- 3) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de ( $\Gamma$ ) avec l'axe des abscisses
- 4) Déterminer une équation de la tangente (T) à ( $\Gamma$ ) au point B d'abscisse 0
- 5) Déterminer la position de cette tangente par rapport à ( $\Gamma$ )
- 6) a - Démontrer que :  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2}$   
b - En déduire que ( $\Gamma$ ) admet une asymptote oblique dont on précisera une équation
- 7) Tracer les asymptotes, la tangente(T), puis la courbe( $\Gamma$ ) dans le repère(O,I,J)

### EXERCICE 5

Soit  $f$  une fonction définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

(Cf) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J)  
(unité graphique : 2 cm)

- 1) a - Déterminer l'ensemble de définition Df de  $f$   
b - Démontrer que  $f$  est impaire  
c - Démontrer que la droite d'équation  $y = 0$  est une asymptote horizontale à (Cf)
- 2) a - Calculer  $f'(x)$   
b - Etudier les variations de  $f$   
c - Déterminer une équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse 0
- 3) Compléter le tableau suivant

x	-4	-3	-2	-3/2	-1	0	1	3/2	2	3	4
f(x)											

- 4) Construire (T) et (Cf) dans le repère (O, I, J)

### EXERCICE 6

#### Partie A

On considère la fonction  $g$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $g(x) = \frac{x+3}{2x+3}$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition Dg de  $g$
- 2) Etudier le signe de  $g(x)$  sur Dg

#### Partie B

Soit la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $f(x) = \frac{4x+9}{(2x+3)^2}$ . (C) sa courbe représentative dans le

Plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) unité : 1cm

- 1) Déterminer l'ensemble de définition Df de  $f$
- 2) a - Calculer les limites de  $f$  aux bornes de Df  
b - Interpréter graphiquement les résultats
- 3) On admet que  $f$  est dérivable et  $f'$  sa dérivée.  
Démontrer que :  $\forall x \in Df, f'(x) = \frac{-8g(x)}{(2x+3)^2}$  . En déduire le signe de  $f'(x)$  sur Df
- 4) Etudier les variations de  $f$ , puis dresser son tableau de variation
- 5) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (C) avec l'axe (OI)
- 6) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0
- 7) Construire (T), les asymptotes puis la courbe (C) dans le repère (O, I, J)

### EXERCICE 7

Soit la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+2x}$  et  $(C_f)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$  tel que  $OI = 1\text{cm}$

1) Justifier que :  $D_f = ]-\infty, -2[ \cup ]-2, 0[ \cup ]0, +\infty[$

2) Déterminer les réels  $a, b$  et  $c$  tels que :  $\forall x \in D_f, f(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+2}$

3) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$  puis interpréter graphiquement les résultats

4) Démontrer que la droite d'équation  $x = -1$  est un axe de symétrie de  $(C_f)$

5) On se propose d'étudier la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[-1, 0[ \cup ]0, +\infty[$

a - On admet que  $f$  est dérivable et  $f'$  sa dérivée.

Démontrer que  $\forall x \in [-1, 0[ \cup ]0, +\infty[$ , on a :  $f'(x) = \frac{-2(x+1)}{(x^2+2x)^2}$

b - En déduire les variations de  $f$  puis dresser son tableau de variation sur  $[-1, 0[ \cup ]0, +\infty[$

6) Tracer la courbe  $(C_f)$  sur  $D_f$  dans le repère  $(O, I, J)$

### EXERCICE 8

On considère la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 1}$ .  $(C)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$  unité :  $1\text{cm}$

1) Déterminer l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$

2) Justifier que :  $\forall x \in D_f, f(x) = x - 6 + \frac{4}{x-1}$

3) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

En déduire l'existence d'une asymptote à  $(C)$

4) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

5) Justifier que la droite  $(D)$  d'équation  $y = x - 6$  est asymptote à  $(C)$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$

6) a - Démontrer que :  $\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$

b - Etablir le sens de variation de  $f$

c - Dresser le tableau de variation de  $f$

7) Etudier les positions relatives de  $(C)$  et de  $(D)$

8) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de  $(C)$  avec l'axe des abscisses

9) Démontrer que le point  $\Omega(1 ; -5)$  est centre de symétrie de  $(C)$

10) Construire  $(C)$  et ses asymptotes dans le repère  $(O, I, J)$

## EXERCICE 9

### PARTIE A

Soit  $P(x) = -x^3 + 6x^2 - 13x + 8$

- 1) Calculer  $P(1)$
- 2) Montrer que  $P(x) = (x-1)(-x^2 + 5x - 8)$
- 3) Etudier le signe de  $P(x)$  suivant les valeurs de  $x$

### PARTIE B

On considère la fonction  $f$  définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -x + 1 + \frac{x-1}{(x-2)^2}$  et  $(C_f)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$  unité : 1 cm

- 1) a - Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition  $D_f$   
b - En admettant que  $f$  est dérivable sur  $D_f$ , vérifier que  $f'(x) = \frac{P(x)}{(x-2)^3}$   
c - Dresser le tableau de variation de  $f$
- 2) Soit la droite  $(D)$  d'équation  $y = -x + 1$   
a - Montrer que  $(D)$  est asymptote à  $(C_f)$  ; déterminer l'autre asymptote  
b - Déterminer les coordonnées du point  $A$ , intersection de  $(C_f)$  et  $(D)$   
c - Etudier la position de  $(C_f)$  et  $(D)$
- 3) Déterminer l'équation de la tangente  $(T)$  à  $(C_f)$  au point d'abscisse 0
- 4) Compléter le tableau suivant

X	-2	-1	0	3/2	5/2	3	4	5
f(x)								

- 5) Construire dans le repère orthonormé  $(O, I, J)$ ,  $(C_f)$  et ses asymptotes

# SUITES NUMERIQUES

## 1- Définition

Une suite numérique est une application de l'ensemble  $\mathbb{N}$  dans l'ensemble  $\mathbb{R}$ .

Généralement, les suites sont notées par les lettres minuscules  $u, v, w, \dots$ . L'image d'un entier naturel  $n$  par la suite  $u$  est notée  $U(n)$  ou  $(U_n)$ .

## 2 - Diverses déterminations d'une suite

Une suite  $(U_n)$  est déterminée par :

- ✓ une formule explicite :

$$u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \rightarrow \frac{2n+3}{\sqrt{n}}, n \in \mathbb{N}^*$$

Calculons les quatre premiers termes  $u_1, u_2, u_3$  et  $u_4$

On a :  $u_1 = 5, u_2 = 7/\sqrt{2}, u_3 = 9/\sqrt{3}, u_4 = 11/2$ .

- ✓ une formule de récurrence.

Cette de déterminer les suites consiste à donner un terme de la suite, très souvent le premier et une formule le liant au terme suivant.

$$(u_n): \begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 2u_n + 8, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Calculons  $u_1$  et  $u_3$

On a :  $u_1 = 2u_0 + 8 = 16$  et  $u_3 = 2u_2 + 8$  or  $u_2 = 2u_1 + 8 = 40$  donc  $u_3 = 2 \times 40 + 8 = 88$

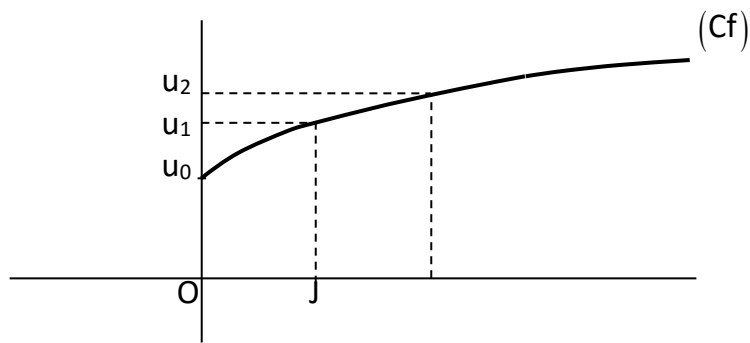
## 3 - Représentation graphique des termes d'une suite numérique

3 - 1 - Suite déterminée par une formule explicite :  $u_n = f(n)$

Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = \frac{\sqrt{n}+2}{2}$  ;  $u_0 = 1, u_1 = \frac{3}{2}, u_2 = \frac{\sqrt{2}+2}{2}$

Pour la représentation, on trace la courbe de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} + 1$

Les images des entiers 0, 1 et 2 par  $f$  sont les réels  $u_0, u_1$  et  $u_2$



### 3 - 2 - Suite déterminée par une formule de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$

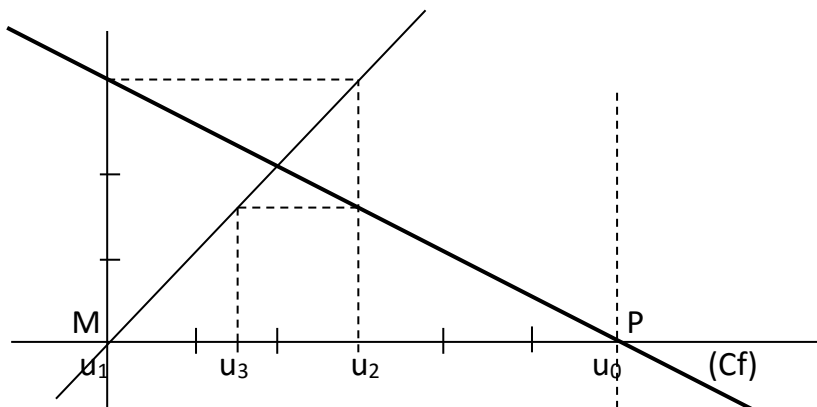
$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Les trois premiers termes de  $(u_n)$  sont :  $u_0 = 6$ ,  $u_1 = -\frac{1}{2}u_0 + 3 = 0$  et  $u_2 = -\frac{1}{2}u_1 + 3 = 3$

Pour la représentation, on trace la courbe de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

On représente les termes de cette suite sur l'axe  $(OI)$  d'un repère  $(O, I, J)$  en procédant comme suit :

- Tracer la droite  $(\Delta) : y = x$
- Tracer la parallèle à  $(OJ)$  passant par le 1<sup>er</sup> terme et qui coupe  $(Cf)$  en un point  $P$
- Tracer la parallèle à  $(OI)$  passant par  $P$  et qui coupe  $(\Delta)$  en un point  $M$
- Projeter  $M$  sur  $(OI)$ , on trouve le 2<sup>ème</sup> terme, ainsi de suite



## 4 - Suites arithmétiques

### 4 - 1 - Définition

Une suite numérique  $(u_n)$  est dite arithmétique  $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$   
 $r$  est appelée la raison de la suite  $(u_n)$

#### 4 - 2 - Différentes expressions

- Expression de  $u_n$  en fonction de  $n$

Une suite arithmétique  $(u_n)$  de premier terme  $u_k$  et de raison  $r$  a pour terme général :

$$u_n = u_k + (n-k)r$$

- Expression de la somme des premiers termes

La somme des termes consécutifs allant de  $u_k$  à  $u_l$  est :

$$S = u_k + u_{k+1} + \dots + u_l = \frac{l-k+1}{2} (u_k + u_l)$$

#### 5 - Suites géométriques

##### 5 - 1 - Définition

Une suite  $(v_n)$  est géométrique  $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = q \cdot v_n$

$q$  est appelée la raison de la suite  $(v_n)$

##### 5 - 2 - Différentes expressions

- Expression de  $v_n$  en fonction de  $n$

Une suite géométrique  $(v_n)$  de premier terme  $v_k$  et de raison  $q$  a pour terme général :

$$v_n = v_k \cdot q^{n-k}$$

- Expression de la somme des premiers termes

La somme des termes consécutifs allant de  $v_k$  à  $v_l$  est :

$$S = v_k + v_{k+1} + \dots + v_l = v_k \cdot \frac{q^{l+1-k} - 1}{q-1}, q \neq 1$$

Si  $q = 1$ ,  $S = (l - k + 1) \cdot v_k$

# EXERCICES

## EXERCICE 1

On donne les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  telles que :  $u_n = \frac{n+1}{n+3}$  et  $v_n : \begin{cases} v_{n+1} = \frac{v_n+1}{2} \\ v_0 = 2 \end{cases}$

- 1) Calculer les cinq premiers termes des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$
- 2) Représenter graphiquement les cinq premiers termes des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$

## EXERCICE 2

Soit une suite arithmétique  $(u_n)$  telle que le premier terme  $u_1 = 3$  et la raison  $r = 5$

- 1) a - Déterminer  $u_n$  en fonction de  $n$   
b - Calculer les quatre premiers termes de cette suite arithmétique
- 2) Calculer la somme des termes consécutifs allant du troisième au onzième terme

## EXERCICE 3

Déterminer la raison d'une suite arithmétique dont le 1<sup>er</sup> terme est  $u_0 = 10$  et dont la somme des 20 termes consécutifs à partir de  $u_5$  vaut 1070.

## EXERCICE 4

Une entreprise de forage estime le cout d'un forage. Le 1<sup>er</sup> mètre coûte 10000 F, le 2<sup>ème</sup> coûte 11500 F et chaque mètre coûte 1500 F de plus que le précédent. Le pétrole se trouve à 400 m sous terre. De quelle somme doit-on disposer pour le forage ?

## EXERCICE 5

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de premier terme  $u_1$  et de raison  $r$

- 1) Déterminer  $u_n$  en fonction de  $u_1$  de  $r$
- 2) Sachant que  $u_4 = 35$  et  $u_2 = 15$ , calculer la raison  $r$  et le premier terme  $u_1$
- 3) Déterminer l'entier  $n$  pour que la suite  $(u_n)$  soit supérieure ou égale à 85

## EXERCICE 6

Soit une suite géométrique  $(v_n)$  telle que le premier terme  $v_0 = 1$  et la raison  $q = 2$

- 1) a - Déterminer  $v_n$  en fonction de  $n$   
b - Calculer les trois premiers termes de cette suite géométrique
- 2) Calculer la somme des dix premiers termes

### **EXERCICE 7**

Une entreprise de construction métallique spécialisée dans la fabrication de fûts, désire étudier l'évolution de sa production. En 2005 la première année, elle fabrique 500 fûts. Elle constate ensuite une augmentation de 50 fûts chaque année. On note  $C_n$  le nombre de fûts fabriqués la  $n^{\text{ième}}$  année

- 1) a - Déterminer  $C_1$   
b - Calculer  $C_2, C_3, C_4$  et  $C_5$
- 2) Déterminer la nature de la suite formée par les nombres  $C_2, C_3, C_4$  et  $C_5$
- 3) Exprimer  $C_n$  en fonction de  $n$
- 4) Déterminer l'année où la production sera le double de celle de la première année
- 5) Calculer le nombre total de fûts fabriqués de 2005 à 2015

### **EXERCICE 8**

On donne la suite  $(u_n)$  définie par son premier terme  $u_0 = 1$  et la relation :

$$u_{n+1} = 2 + \frac{4}{u_n + 1}, n \in \mathbb{N}^* \text{ et la suite } (v_n) \text{ définie par : } v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 2}, n \in \mathbb{N}^*$$

- 1) a - Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique  
b - Exprimer  $v_n$  en fonction de  $v_1$  et de  $n$   
c - En déduire  $u_n$  en fonction de  $n$
- 2) Calculer la somme des termes consécutifs de la suite  $(v_n)$  allant de  $v_0$  à  $v_{10}$

### **EXERCICE 9**

Une entreprise de fabrication de pneus automobiles installée en Côte d'Ivoire depuis 1960, a produit 30 000 pneus en 1990. On a constaté que, à partir de 1990, la vétusté de ses machines entraîne chaque année une baisse de la production que l'on a évaluée à 5 % de la production de l'année précédente. On note  $p_0$  la production de 1990

- 1) Déterminer les productions  $P_1, P_2, P_3$  que l'entreprise a réalisées respectivement en 1991, 1992 et 1993
- 2) Soit  $n$  un certain nombre d'années après 1990. On désigne par  $P_n$  la production réalisée au cours de la  $n^{\text{ième}}$  année et par  $P_{n+1}$  celle de l'année suivante
  - a - Exprimer  $P_{n+1}$  en fonction de  $P_n$
  - b - Donner alors l'expression de  $P_n$
  - c - En déduire la production de l'année 2004
- 3) La production de l'entreprise n'est plus rentable dès qu'elle est strictement inférieure à 10000 unités. Dans ce cas on ferme l'usine.
  - a - A quelle condition l'usine restera-t-elle en fonctionnement ?
  - b - En déduire le nombre d'années pendant lesquelles l'usine sera en fonctionnement après 1990

### **EXERCICE 10**

Le 1<sup>er</sup> janvier 2007 le prix du litre de gasoil dans un pays de l'Afrique de l'ouest était fixé à 500 F CFA.

On suppose que l'augmentation annuelle de ce prix est de 1 %.

On note  $P_0$  le prix du gasoil au 1<sup>er</sup> janvier 2007 et  $P_n$  le prix du gasoil au 1<sup>er</sup> janvier de l'année (2007+n)

- 1) Calculer  $P_1, P_2, P_3$
- 2) a- Démontrer que la suite des prix annuels de gasoil est une suite géométrique.  
b - En déduire que  $P_n = 500 (1,01)^n$
- 3) Une voiture consomme en moyenne 7l de gasoil aux 100 km et a parcouru 20 000 km en 2007
  - a - Combien de litre de gasoil a-t-elle consommé ?
  - b - Quelle est la somme dépensée en 2007 ?
- 4) Le transporteur prévoit de diminuer de 10 % cette somme en 2011.
  - a - Déterminer le prix du gasoil en 2011
  - b - Calculer la quantité de gasoil que doit consommer le transporteur selon ses prévisions
  - c - Combien de kilomètres dans ces conditions pourra-t-il parcourir en 2011 ?

### **EXERCICE 11**

Le 1<sup>er</sup> janvier 2007 le prix du litre de gasoil dans un pays de l'Afrique de l'ouest était fixé à 500 F CFA.

On suppose que l'augmentation annuelle de ce prix est de 1 %.

On note  $P_0$  le prix du gasoil au 1<sup>er</sup> janvier 2007 et  $P_n$  le prix du gasoil au 1<sup>er</sup> janvier de l'année (2007+n)

- 1) Calculer  $P_1, P_2, P_3$
- 2) a - Démontrer que la suite des prix annuels de gasoil est une suite géométrique.  
b - En déduire que  $P_n = 500 (1,01)^n$
- 3) Une voiture consomme en moyenne 7l de gasoil aux 100 km et a parcouru 20 000 km en 2007
  - a - Combien de litre de gasoil a-t-elle consommé ?
  - b - Quelle est la somme dépensée en 2007 ?
- 4) Le transporteur prévoit de diminuer de 10 % cette somme en 2011.
  - a - Déterminer le prix du gasoil en 2011
  - b - Calculer la quantité de gasoil que doit consommer le transporteur selon ses prévisions
  - c - Combien de kilomètres dans ces conditions pourra t-il parcourir en 2011 ?

# SERIES STATISTIQUES A UNE VARIABLE

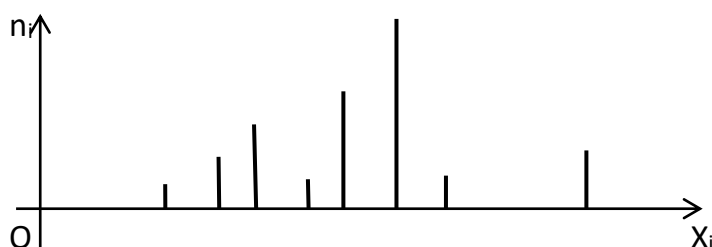
## 1 - Représentations graphiques

### 1 - 1 - Caractère quantitatif

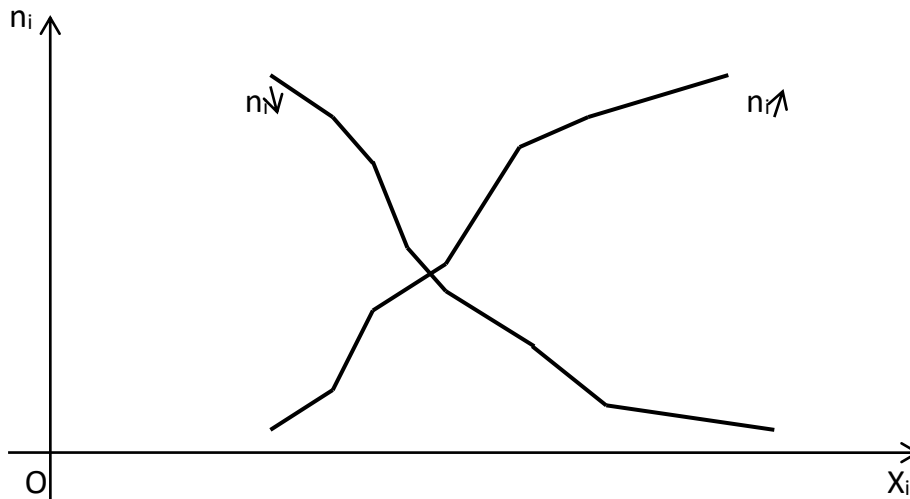
Des élèves ont obtenus les notes suivantes au cours d'un devoir de mathématique

Notes sur 20	4	6	7	9	10	12	13	17
Nombre d'élèves	1	2	3	1	4	6	1	2

✓ Diagramme en bâtons



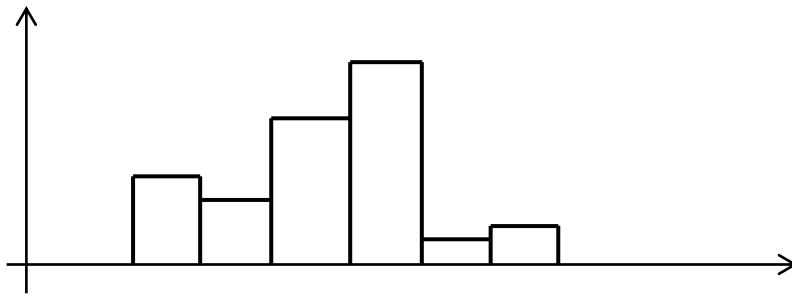
✓ Polygones des effectifs cumulés croissants et cumulés décroissants



✓ Histogramme

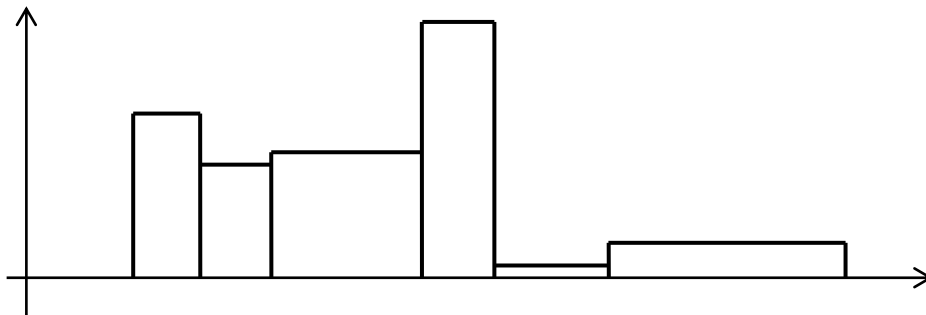
- Les amplitudes des classes sont égales

$c_i$	[2, 3[	[3, 4[	[4, 5[	[5, 6[	[6, 7[	[7, 8[
$n_i$	40	30	60	72	10	14



- Les amplitudes des classes ne sont pas égales

$c_i$	[2, 3[	[3, 4[	[4, 6[	[6, 7[	[7, 9[	[9, 12[
$n_i$	38	30	65	50	5	12
Amplitudes	1	1	2	1	2	3
$n_i$ corrigés	38	30	32,5	50	2,5	4

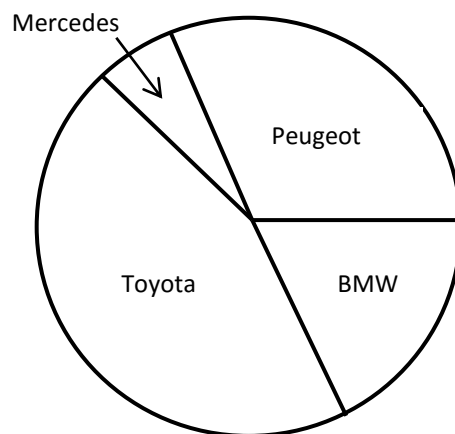


### 1 - 2 - Caractère qualitatif

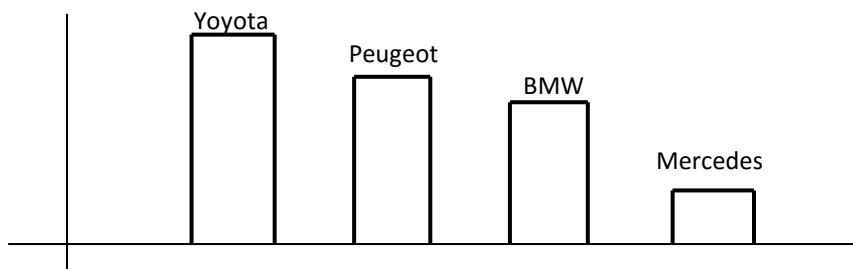
- ✓ Diagramme à secteurs

La répartition des véhicules d'un parc automobile d'après leurs marques

Marques	Mercedes	BMW	Toyota	Peugeot
Effectifs	2	5	13	10



✓ Diagramme à bandes



## 2 - Paramètres de position

### 2 - 1 - Mode

Le mode est la valeur de la variable qui présente l'effectif le plus grand. On note  $M_0$

### 2 - 2 - Moyenne arithmétique

La moyenne arithmétique d'une série statistique  $(X_i, n_i)$  d'effectif total  $N$  est  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n n_i X_i}{N}$

### 2 - 3 - Médiane

La médiane est la valeur de la variable qui partage l'effectif en deux parties égales, les éléments de la population étant rangés par ordre croissant ou décroissant. On note  $M_e$

#### Remarque :

Graphiquement la médiane est l'abscisse du point d'intersection des deux polygones cumulatifs (d'ordonnée  $N/2$ )

Lorsque les modalités sont des classes, la médiane se détermine en effectuant une interpolation linéaire

## 3 - Paramètres de dispersion

### 3 - 1 - Etendue

L'étendue est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur du caractère

### 3 - 2 - Ecart moyen

L'écart moyen d'une série statistique  $(X_i, n_i)$  d'effectif total  $N$ , est la moyenne des écarts

à la moyenne de cette série. On note  $e_m = \frac{\sum_{i=1}^n n_i |X_i - \bar{X}|}{N}$

### 3 - 3 - Variance - Ecart type

La variance d'une série statistique  $(X_i, n_i)$  d'effectif total  $N$ , est la moyenne arithmétique des carrés des écarts des valeurs de la variable à leur moyenne arithmétique.

On note  $v(x) = \frac{\sum_{i=1}^n n_i X_i^2}{N} - \bar{X}^2$

L'écart type ou l'écart quadratique moyen est la racine carrée positive de la variance.

On note  $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n n_i X_i^2}{N} - \bar{X}^2}$

Remarque

Le coefficient de dispersion d'une série statistique de moyenne  $\bar{X}$  et d'écart type  $\sigma$  est le rapport  $\frac{\sigma}{\bar{X}}$ .

Il s'exprime souvent en pourcentage

# EXERCICES

## EXERCICE 1

Une enquête portant sur le nombre d'enfants scolarisés de 40 ouvriers d'une PME donne :

2 ; 1 ; 2 ; 3 ; 2 ; 3 ; 2 ; 1 ; 2 ; 4 ; 2 ; 4 ; 2 ; 0 ; 1 ; 3 ; 2 ; 4 ; 4 ; 2 ; 1 ; 5 ; 0 ; 4 ; 2 ; 4 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 2 ; 3 ; 2 ; 3 ; 2 ; 3 ; 2 ; 5 ; 2 ; 3

- 1) a- Elaborer un tableau de dépouillement  
b- En déduire un tableau statistique comportant les effectifs, les effectifs cumulés croissants et cumulés décroissants, les fréquences
- 2) Déterminer la proportion des ouvriers ayant :
  - a - Au moins trois enfants scolarisés
  - b - Au plus un enfant scolarisé
- 3) La PME se propose d'allouer 2500 F par enfant scolarisé.  
Calculer le montant du budget affecté à l'ensemble des enfants scolarisés
- 5) Construire les diagrammes des effectifs cumulés croissants et décroissants
- 6) Déterminer le mode, la moyenne, la médiane

## EXERCICE 2

Dans une classe de 2<sup>nd</sup> de 48 élèves, on a relevé, en 2009 - 2010, l'année de naissance de chacun des élèves. On a obtenu le tableau suivant :

Année de naissance	1988	1989	1990	1991	1992
Nombre d'élèves	1	6	19	19	3

- 1) Sur cette population d'élève, on étudie le caractère qui, à chaque élève associe son âge au 31 décembre 2009.  
Etablir un tableau recensé de la distribution statistique associée à ce caractère.
- 2) Quels sont les modes de cette distribution statistique ? Que remarque-t-on ?
- 3) Calculer la moyenne arithmétique de cette distribution statistique.

## EXERCICE 3

On teste la durée de vie d'un lot de 500 ampoules électriques. Les résultats regroupés par classe d'amplitude 200 heures sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Classes	[1000 ; 1200[	[1200 ; 1400[	[1400 ; 1600[	[1600 ; 1800[
Effectifs	50	120	270	60

- 1) Déterminer le mode et l'étendue de la série statistique
- 2) Calculer la durée moyenne de vie d'une ampoule
- 3) Calculer la médiane de cette série statistique

#### **EXERCICE 4**

On classe un groupe d'adolescent leur taille :

Taille (en m)	[1,50 ; 1,65[	[1,65 ; 1,75[	[1,75 ; 1,85[	[1,85 ; 1,95[	[1,95 ; 2,00[
$n_i$	20	37	35	6	2

- 1) Déterminer la classe modale de cette série statistique
- 2) Représenter l'histogramme des effectifs partiels
- 3) Calculer la taille moyenne d'un adolescent
- 4) Calculer la médiane

#### **EXERCICE 5**

Le tableau suivant donne les salaires mensuels des employés d'une entreprise.

Salaire(En F cfa)	$[2.10^5 ; 2,5.10^5[$	$[2,5.10^5 ; 3.10^5[$	$[3.10^5 ; 4.10^5[$
Effectif	6	14	18
Salaire(En F cfa)	$[4.10^5 ; 4,5.10^5[$	$[4,5.10^5 ; 5.10^5[$	$[5.10^5 ; 6.10^5[$
Effectif	16	10	6

- 1) Combien de personnes gagnent moins de 450000 F ?
- 2) Combien de personnes gagnent au moins 400000 F ?
- 3) Tracer les polygones des effectifs cumulés croissants et des effectifs cumulés décroissants
- 4) En déduire la médiane

#### **EXERCICE 6**

On dispose de la statistique suivante portant sur les exploitations agricoles d'une région, classées d'après leurs superficies (en hectares)

Superficies	[0, 5[	[5, 10[	[10, 15[	[15, 20[	[20, 25[	[25, 30[	[30, 35[
Nombre d'exploitations	20	50	60	80	160	100	30

- 1) Déterminer :
  - a - la population étudiée
  - b - le caractère étudié et sa nature
  - c - les modalités
- 2) En admettant que les effectifs propres à une classe se répartissent uniformément à l'intérieur de cette classe,
  - a - Calculer le nombre d'exploitations ayant une superficie d'au plus 12 hectares
  - b - Calculer le pourcentage des exploitations ayant une superficie d'au moins 23 hectares

### **EXERCICE 7**

On lance deux dés 60 fois de suite et on note, pour chaque lancé, la somme des points obtenus. On obtient le tableau suivant :

Points	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Effectifs	2	3	3	5	8	11	9	8	5	3	3

- 1) Calculer la moyenne, l'écart moyen et l'écart-type de cette série statistique
- 2) Construire le diagramme en bâton des effectifs cumulés croissants et décroissants
- 3) en déduire la valeur de la médiane

### **EXERCICE 8**

Un médecin a noté le nombre d'interventions qu'il a dû effectuer de nuit au cours d'une année. Il a regroupé ces données dans le tableau suivant :

Nombre d'interventions	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de nuits	70	115	82	58	25	12	3
Fréquence							

- 1) Quel peut être le nombre maximum de sortie en une semaine ?
- 2) Compléter le tableau ci-dessus
- 3) Quel est le nombre total de sorties de nuit effectuées par ce médecin pendant l'année ?
- 4) Quelle est la médiane de cette série statistique ?
- 5) calculer la moyenne des interventions par nuit
- 6) En déduire le nombre moyen de sortie par semaine

### **EXERCICE 9**

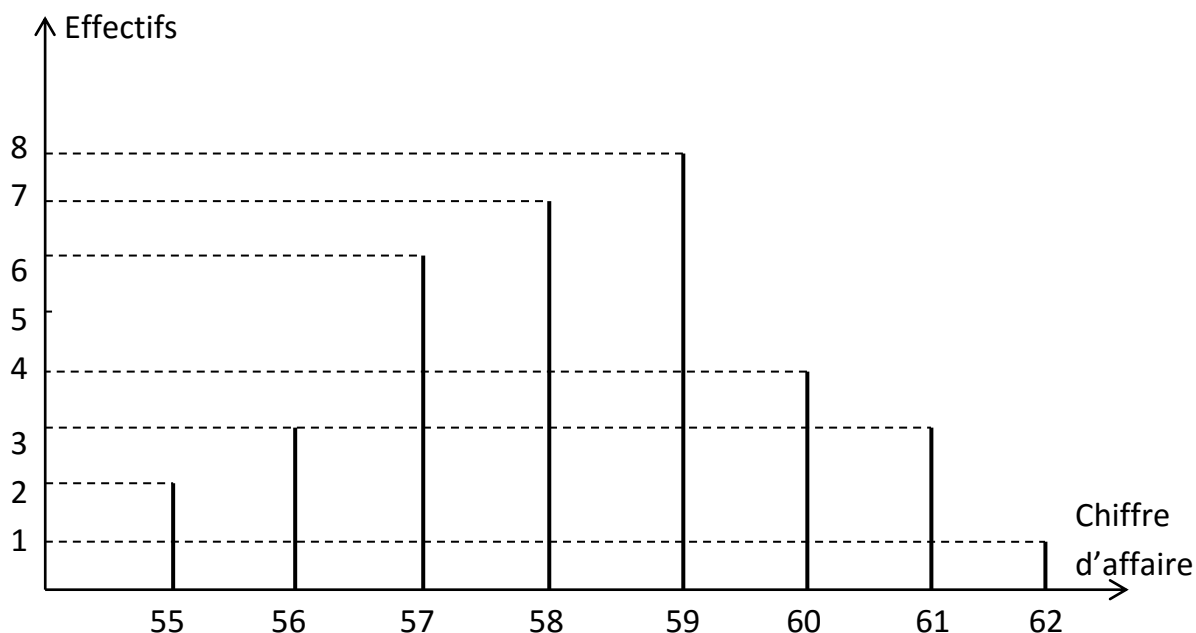
Dans une entreprise, les salariés ont droit à un salaire mensuel fixe de 300000 F par mois augmenté d'une prime d'ancienneté de 5000 F par année d'ancienneté. La répartition de ces ouvriers selon leurs anciennetés est la suivante :

Années d'ancienneté	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectifs	4	7	10	15	22	18	13	9	7	5	2

- 1) déterminer la moyenne des primes touchées par les salariés
- 2) En déduire la moyenne des salaires dans l'entreprise
- 3) Calculer la variance et en déduire l'écart type

### EXERCICE 10

Le chiffre d'affaire annuel (en millions d'euros) des magasins d'une même enseigne est reparti de la façon suivante :



Calculer l'arrondi au centimètre de la moyenne de ces chiffres d'affaires

### EXERCICE 11

On a relevé le temps mis (en secondes) par des machines pour effectuer le même travail :

1) Compléter le tableau ci-dessous

Temps	N	$n_i$	$x_i$	$x_i \cdot n_i$	$n_i x_i^2$
[105,110[	2				
[110,115[		9			
[115,120[	11				
[120,125[			122,5		
[125,130[	6			765	
Total	40				

2) Tracer les polygones des effectifs cumulés croissants et cumulés décroissants

3) En déduire la médiane de cette série statistique

4) Calculer la moyenne arithmétique  $\bar{x}$ , la variance  $V$  et l'écart type  $\sigma$

5) En utilisant la question 2), déterminer le pourcentage des machines ayant un temps

d'exécution compris dans :  $\left[ \bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma \right]$

# DENOMBREMENT

## 1 - Application (p-uplet, $p \in \mathbb{IN}$ )

Etablir une application d'un ensemble fini à  $p$  éléments vers un ensemble fini à  $n$  éléments, c'est choisir une suite ordonnée de  $p$  éléments distincts ou confondus parmi les  $n$  éléments. Le nombre de p-uplet d'un ensemble fini à  $n$  éléments est  $n^p$

## 2 - Arrangement

On appelle arrangement de  $p$  éléments d'un ensemble  $E$ , toute suite ordonnée de  $p$  éléments distincts choisis parmi  $n$  éléments de  $E$ .

Dans un arrangement, l'on tient compte de l'ordre des éléments. Aucun élément ne peut être répété plusieurs fois. Il ressort donc que tout arrangement est une  $p$ -liste.

Le nombre d'arrangements de  $p$  éléments d'un ensemble fini à  $n$  éléments est noté :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)$$

Remarque :  $n!$  se lit « factorielle  $n$  » et par convention :  $0! = 1$

## 3- Permutation

On appelle permutation de  $n$  éléments d'un ensemble  $E$ , tout arrangement des  $n$  éléments. (les ensembles de départ et d'arrivée ont le même nombre d'éléments)

Le nombre de permutations de  $n$  éléments d'un ensemble  $E$  est noté :

$$A_n^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1 = n!$$

## 4 - Combinaison

On appelle combinaison de  $p$  éléments d'un ensemble  $E$ , une suite non ordonnée de  $p$  éléments choisis parmi  $n$  éléments de  $E$ .

Aucun élément ne peut être répété plusieurs fois.

Le nombre de combinaisons de  $p$  éléments choisis parmi  $n$  éléments de  $E$  est noté :

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{A_n^p}{p!}$$

# EXERCICES

## EXERCICE 1

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher dont trois boules noires  $N_1, N_2, N_3$  et deux boules blanches  $B_1, B_2$ . On tire simultanément deux boules dans l'urne.

1) Ecrire, en extension, l'univers  $\Omega$  associé à cette expérience aléatoire.

2) a - Ecrire, en extension, les événements :

A « obtenir une boule noire et une boule blanche »

B « obtenir au moins une boule blanche »

C « obtenir deux boules noires »

D « obtenir deux boules de la même couleur »

b - Donner deux événements contraires

c - Donner deux événements incompatibles

## EXERCICE 2

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie.

1) Ecrire, en extension, l'univers associé à cette expérience aléatoire.

2) On considère les événements :

A « obtenir le même côté »

B « obtenir exactement deux fois *FACE* »

C « obtenir exactement deux fois *PILE* »

D « obtenir deux boules de la même couleur »

a - Les événements B et C sont-ils contraires ? incompatibles

b - Quel est l'événement contraire de A

## EXERCICE 3

Une boîte contient 10 jetons dont 4 de couleur rouge portent le n°1, 3 jetons de couleur verte portent le n°2, 3 jetons de couleur rouge portent le n°2

On extrait simultanément 2 jetons de l'urne

1) Combien y a-t-il de tirages possibles ?

2) Parmi ces tirages, combien possèdent les propriétés suivantes ?

a - Les 2 jetons sont de même couleur

b - Les 2 jetons portent le même numéro

c - Les 2 jetons sont de même couleur et portent le même numéro

#### **EXERCICE 4**

On jette 3 dés cubiques de couleurs différentes. Dénombrer :

- 1) Tous les résultats possibles (1 résultat est un triplet d'entiers naturels allant de 1 à 6)
- 2) Les résultats comportant trois numéros distincts
- 3) Les résultats comportant trois numéros identiques
- 4) Les résultats ne comportant aucun 6
- 5) Les résultats comportant au moins un 6

#### **EXERCICE 5**

Un bassin d'élevage contient 30 poissons : 5 carpes, 10 brochets et 15 machoirons. L'éleveur a pêché en une même prise 4 poissons par un heureux coup de filet. On admet que chaque poisson a la même probabilité d'être pris dans le filet

- 1) Calculer le nombre de possibilités pour qu'aucun des 4 poissons pêchés ne soit un machoiron
- 2) Calculer le nombre de possibilités pour qu'il y ait au moins un machoiron dans le filet
- 3) Calculer le nombre de possibilités pour que le filet contienne exactement une carpe, un brochet et deux machoirons

#### **EXERCICE 6**

Pour une loterie, on émet des carnets de 20 billets tels que dans chaque carnet :

- un billet gagnera 4 000 F
- deux billets gagneront 2 000 F chacun
- cinq billets gagneront 1 000 F chacun
- douze billets ne gagneront rien du tout

On suppose que tous les billets ont la même chance d'être achetés. Une personne achète deux billets d'un même carnet complet

- 1) Donner le nombre de différents achats possibles
- 2) Combien ya-t-il de cas pour que la personne :
  - a - ne gagne rien ?
  - b - gagne exactement 4 000 F ?
  - c - gagne exactement 2 000 F ?
  - d - n'est aucun billet qui ne gagnant rien ?

#### **EXERCICE 7**

Dans un groupe de vingt personnes, on doit choisir, au hasard, trois représentants. Saliou et Julie sont membres de ce groupe.

- 1) Quel est le nombre de possibilités que ni Saliou, ni Julie ne fassent partie des trois représentants ?
- 2) Quel est le nombre de possibilités que seule Julie fasse partie des trois représentants ?

### **EXERCICE 8**

Lors de la préparation d'un concours, un élève n'a étudié que 25 leçons. On a mis 100 papiers contenant chacun une question dans une urne, ces questions portant sur des leçons différentes. Le candidat tire simultanément au hasard 2 papiers (On donnera les réponses sous forme de fractions irréductibles)

Combien ya-t-il de cas pour que le candidat :

- 1) Ne connaisse aucun de ces sujet ?
- 2) Connaisse un et un seul sujet ?
- 3) Connaisse au moins un de ces sujets ?

### **EXERCICE 9**

Un cirque possède douze fauves dont cinq mâles. Pour chaque représentation le dompteur choisit cinq fauves.

- 1) Combien de choix possibles le dompteur a-t-il ?
- 2) Combien de choix possibles le dompteur a-t-il, s'il veut qu'il y ait un seul mâle parmi les fauves choisis ?
- 3) Combien de choix possibles le dompteur a-t-il, s'il ne veut aucun mâle parmi les fauves choisis ?
- 4) Combien de choix possibles le dompteur a-t-il, s'il veut qu'il y ait au moins deux mâles parmi les fauves choisis ?

### **EXERCICE 10**

Six couples dont le couple GBAGUIDI, dînent ensemble.

On tire au sort quatre personnes pour faire la vaisselle.

- 1) Quel est le nombre de tirages où aucun homme n'est désigné ?
- 2) Quel est le nombre de tirages où monsieur GBAGUIDI est désigné ?
- 3) Quel est le nombre de tirages où le couple GBAGUIDI est désigné ?
- 4) Quel est le nombre de tirages où deux couples sont désignés ?

---

# ANGLES ORIENTES ET TRIGONOMETRIE

## OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

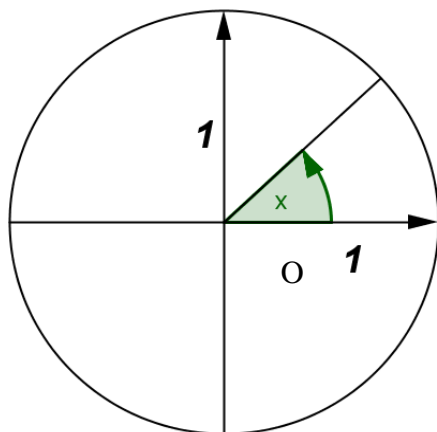
Au terme de ce chapitre, chaque apprenant, ayant exploité les acquis, devrait être capable de :

- placer l'image d'un angle orienté sur le cercle trigonométrique connaissant une mesure en radian de cet angle ;
- calculer le sinus, le cosinus et la tangente d'un nombre réel ;
- transformer des expressions à partir des formules trigonométriques ;
- citer des valeurs remarquables des lignes trigonométriques en se référant au tableau des valeurs ;
- résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations trigonométriques de la forme  $\cos x = m$  ou  $\sin x = m$  ; ( $m \in \mathbb{R}$ ).

### 1. Le cercle trigonométrique

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens positif.



NB :

- La longueur d'un cercle est de  $2\pi$ .
- Les unités de mesure d'un angle sont : degré(D) ; radian(R) ; grade(G).

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} = \frac{G}{200} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 180^\circ \rightarrow \pi \text{ radian} \\ 180^\circ \rightarrow 200 \text{ grades} \end{cases}$$

- La mesure d'un angle principal appartient à  $]-\pi; \pi]$ .
- Si  $x$  est une mesure d'un angle orienté alors toutes ses autres mesures sont  $x + 2k\pi$ ; ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

## 2. Sinus, cosinus, et tangente des angles orientés

### 2.1. Définition

- On appelle sinus de  $x$ , noté  $\sin x$ , l'ordonnée d'un point  $M$  sur le cercle trigonométrique.

La fonction sin est :

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{R} &\rightarrow [-1; 1] \\ x &\mapsto \sin x. \end{aligned}$$

Graphiquement sinus ( $\sin x$ ) se lit sur l'axe des ordonnées ( $[-1; 1]$ ).

- On appelle cosinus de  $x$ , noté  $\cos x$ , l'abscisse d'un point  $M$  sur le cercle trigonométrique.

La fonction cos est :

$$\begin{aligned} \cos : \mathbb{R} &\rightarrow [-1; 1] \\ x &\mapsto \cos x. \end{aligned}$$

Graphiquement  $\cos x$  se lit sur l'axe des abscisses ( $[-1; 1]$ ).

- On appelle tangente de  $x$  notée  $\tan x$ , le nombre réel noté  $\tan x$ ,  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  lorsque  $\cos x \neq 0$ . La fonction  $\tan$  est :

$$\begin{aligned} \tan : \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}. \end{aligned}$$

### Quelques valeurs remarquables

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
-----	---	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	------------------	------------------	------------------	-------

---

$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0

## 2.2. Propriétés

Pour tout réel  $x$ , on a :

$$P_1) \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$P_2) \quad -1 \leq \sin x \leq 1 \text{ et } -1 \leq \cos x \leq 1$$

$$P_3) \quad \cos(-x) = \cos x \quad (\text{la fonction cosinus est paire})$$

$$\text{et } \sin(-x) = -\sin x \quad (\text{la fonction sinus est impaire})$$

$$P_4) \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x \text{ et } \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

On dit que les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période  $2\pi$ ).

$$P_5) \quad \text{Si } \cos x \neq 0 \text{ alors } 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

## 2.3. Formules d'addition

Pour tous réels  $a$  et  $b$ ,

$$(1): \quad \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$(2): \quad \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$(3): \quad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$(4): \quad \sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

## Exemple

---



---

---

Exemple 2 : Résoudre  $x \in \mathbb{R}$   $\cos x = \frac{3}{2}$ .

### 3.2. Equation du type $\sin x = m$ ( $m \in \mathbb{R}$ )

$$\text{Ev} = \mathbb{R}$$

**1<sup>er</sup> cas** : si  $m \in ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$ , alors  $S_{(E)} = \emptyset$

**2<sup>ème</sup> cas** : si  $m \in [-1; 1]$ , alors il existe  $\alpha \in ]-\pi; \pi]$  tel que  $\sin \alpha = m$ .

D'où :

$$\sin x = m \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha$$

$$\Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$S_{(E)} = \{\alpha + 2k\pi; \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

**Exemple** : Résoudre l'équation  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .



---

### Exercice 2 :

- a- Calculer  $\cos 3x$  en fonction de  $\cos x$  sachant que  $3x = x + 2x$ .
- b- Calculer  $\sin 3x$  en fonction de  $\sin x$ .
- c- Vérifier que  $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$  puis calculer  $\cos(\frac{\pi}{12})$  et  $\sin(\frac{\pi}{12})$ .

### Exercice 3

1. Ecrire plus simplement :

$$A = \sin^2 x + \frac{1}{1+\tan^2 x} \quad ; \quad B = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} \quad ; \quad C = \cos^3 x + \cos x \sin^2 x.$$

2. Démontrer que :

- a.  $\cos^4 x - \sin^4 x = 2 \cos^2 x - 1$ .
- b.  $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$ .
- c.  $(\cos x + \sin x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$ .

### Exercice 4

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

- a.  $\cos 4x + \frac{1}{2} = 0$
- b.  $\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$
- c.  $\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$
- d.  $\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- e.  $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$
- f.  $\cos(\pi - x) = -\frac{1}{2}$