MATHEMATIQUES

1ière G2

L'ouvrage que nous présentons ici contient tout le programme annuel de l'enseignement de la mathématique générale dans les classes de Première **G2-G3 ET SES**, accompagné par des exercices d'applications et d'entrainements ; ainsi que les quatre(04) derniers sujets d'examen proposés au probatoire notamment de 2011 à 2014 avec correction à l'appui.

L'intérêt fondamental de ce type d'ouvrage est d'être utilisé comme un instrument ultime perfectionnement d'apprentissage du cours à fin de mieux faire face aux épreuves et problèmes rencontrés.

Puisse le lecteur faire sienne cette devise : « **il faut se divertir, travailler sérieusement** ».

Tous commentaires, critiques, suggestions sont les bienvenus.

Sommaire

CHAPITRE I : EQUATIONS DU 2^{ND} DEGRE

Leçon1 : polynômes de second degré

Leçon 2 : les inéquations du 2^{nd} degré

CHAPITREII : ETUDE ET REPRESENTATION GRAGHIQUE DES FONCTIONS

Leçon1 : étude des fonctions

Leçon2 : limites&continuité

Leçon3 : transformation du plan

CHAPITRE III : suites numériques

Leçon1 : généralité

Le**çon2** : suites arithmétiques & géométriques

Exercices d'entrainement

CHAPITRE IV : DENOMBREMENT

Leçon1 : (rappel) ; algèbre des ensembles

Leçon2 : les pistes-les arrangements- les permutations

Leçon3 : les combinaisons

Exercices d'entrainement

CHAPITRE I : EQUATIONS DU SECOND DEGRE

Leçon 1 Polynôme du second degré :

On appel polynômes du second degré, toute expression littérale de la forme : $p(x) = ax^2 + bx + c.(a \neq o), a, b, c\ sont\ des\ nombres\ réels$

Exemples : $p(x) = 2x^2 - 3x + 4$; $Q(x) = 4x^2 + 2x + 1$

Toute expression littérale de la forme : $p(x) = o \gg ax^2 + bx + c = o\ est\ appelée\ équation\ du\ 2nd\ dégré\ en\ x.$

Exemple : $p(x) = 2x^2 - 3x + 4 = 0; q(x) = 4x^2 + 2x + 1 = 0$

I) Forme canonique d'un polynôme du 2nd degré :

Soit :
p(x)=$ax^2bx\ c\ (a \neq 0), p(x) est\ écrit\ sous\ la\ forme\ canonique\ de\ la\ façon\ suivante$:

$$\boldsymbol{p(x) = a[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 + 4ac}{4a^2}]}$$

Exemples : on donne :

$p(x) = x^2 - 6x + 10$ (1)

$p(x) = 3x^2 - 5x + 2$ (2)

$p(x) = x^2 - x - 6$ (3)

Taf : donner la forme canonique de ces polynômes

Solution :

$p(x) = x^2 - 6x + 10$; $a = 1, \quad b = -6\ et\ c = 10$

$p(x) = 1[\left(x + \frac{-6}{2*1}\right)^2 - \frac{(-6)^2 - 4*1*10}{4}] = [\left(x - \frac{6}{2}\right)^2 - \frac{36-40}{4}]$=(x-6/2)²+1

$\underline{\boldsymbol{p(x) = (x-3)^2 + 1}}$

$\boldsymbol{p(x) = 3x^2 - 5x + 2}$

$$\boldsymbol{p(x) = 3[\left(x-\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{(-5)^2-4*3*2}{4(3)^2}]}$$

P(x) =$\boldsymbol{3[\left(x-\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25-24}{36}}$

$$\boldsymbol{p(x) = 3[\left(x-\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{36}}$$

<u>**NB**</u>: p(x) = ax²+bx+c (a≠ 0), *ayant pour forme canonique* :

$p(x) = [\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}]$; L'expression b²-4ac qu'on appelle Δ *est appelée discriminant du polynome du 2nd dégré et noté* Δ

$$= b^2-4ac, d'\text{où}\ p(x) = a[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}]$$

<u>Exemple</u> : p(x)=x²-6x+10 ;$\Delta = b^2-4ac \Leftrightarrow \Delta = (-6)^2 - 4*1*10 = 36-40$

$\Rightarrow \Delta = \boldsymbol{-4}$

3) <u>**racines d'un polynôme du 2nd degré :**</u>

Elles s'obtiennent à partir du signe du discriminant :

- Si $\Delta = b^2-4ac < 0,$ *pas de racine*
- Si $\Delta = b^2-4ac = 0,$ *une racine unique*; $x = -\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta = b^2-4ac > 0,$ *deux racines distinctes*
  Y1=$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; y2= $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Exemples : $\boldsymbol{q}(x) = x^2+4x+5$; $p(x) = 9x^2+6x+1; s(x) = 2x^2+12x+10$

<u>**Solution :**</u>

Q(x)=x²+4x+5

Δ= 16-20=-4<0, pas de racines

P(x)=9x²+6x+1

$$\Delta = 36-36 = 0, \textit{une racine unique}\ ; x = \frac{-6}{18} = -\frac{1}{3}$$

S(x)=2x²+12x+10

$$\Delta = 144-80 = 64 > 0, 2\ \textit{racines tellesque} :$$

X1=$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x1 = \frac{-12-\sqrt{64}}{4} = \frac{-12-8}{4} = -5$

X2==$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x2 = \frac{-12+8}{4} = -1$

On appelle équation du 2nd degré, le polynôme du 2nd degré=0 cette à dire $ax^2+bx+c=0$
($a\neq 0$). *le discriminant du polynome du 2nd degré est ausi appelé* discriminant de l'équation du 2nd degré p(x)=0. Pour résoudre une équation du 2nd degré $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$), *on calcul d'abordle discriminant* $\Delta= b^2 - 4ac$ *à partir de sonsigne on détermine des solutions*

- Si $\Delta= b^2 - 4ac < 0$, *pas de solution* $\boldsymbol{donc\ s} = \emptyset$
- Si $\Delta= b^2 - 4a = 0$, *une solution unique*. $x = -\frac{b}{2a}$ *donc* $s = \left\{\frac{\boldsymbol{-b}}{\boldsymbol{2a}}\right\}$
- Si $\Delta= b^2 - 4a > 0$, *deux solutions distinctes*
  X1=$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$;   x2=$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ *donc* $s = \{\mathbf{x1}; \mathbf{x2}\}$

<u>Exemple</u> : résoudre dans R les équations du 2nd degré suivantes :

a) $2x^2+x+1=0$
b) $9x^2-12x+4=0$
c) $X^2-8x+7=0$

<u>Solution :</u>

a) $2x^2+x+1=0$ $\Delta= b^2 - 4ac \Rightarrow 1 - 8 = -7 < 0$, *pas de solution*
b) $9x^2-12x+4$

$\Delta= b^2 - 4ac \Rightarrow 144 - 144 = 0$, *une solution nuique* , $x = -\frac{b}{2a}$

X=$\frac{12}{18} = \frac{4}{3}$; $\boxed{s = \{4/3\}}$

c) $X^2-8x+7=0$

$$\Delta= b^2 - 4ac \Rightarrow 64 - 28 = 36 > 0, 2\ solutions\ distinctes$$

$$x1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \frac{8-\sqrt{36}}{2} = \frac{8-6}{2} = 1$$

$x2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \frac{8+6}{2} = 7$; $\boxed{s = \{1; 7\}}$

<u>4) détermination des sommes et des solutions :</u>

Soit l'équation de 2nd degré (E) : ax^2+bx+c ($a\neq 0$)

$\Delta= b^2 - 4ac > 0$, *deux solutions distinctes*

X1=-b-$\sqrt{\Delta}/2a$; x2= -b+$\sqrt{\Delta}/2a$

S= Somme=x1+x2⇔ $\boldsymbol{s} = \left(\frac{-\boldsymbol{b}-\sqrt{\Delta}}{\boldsymbol{2a}}\right) + \left(\frac{-\boldsymbol{b}+\sqrt{\Delta}}{\boldsymbol{2a}}\right)$

$= \frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a} \quad \boldsymbol{s} = -\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$

P=produit=x1.x2 $\boldsymbol{s} = \left(\frac{-\boldsymbol{b}-\sqrt{\Delta}}{\boldsymbol{2a}}\right)\left(\frac{-\boldsymbol{b}+\sqrt{\Delta}}{\boldsymbol{2a}}\right)$

$= \frac{(-b-\sqrt{\Delta})(-b+\sqrt{\Delta}}{4a^2} = \frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2}$

Ainsi=b²-(b²-4ac)/4a² $=\frac{\cancel{b^2}-\cancel{b^2}+4ac}{4a^2} = \frac{\cancel{4}ac}{\cancel{4}a^2}$; $\boxed{P = x1.x2 = \frac{c}{a}}$

<u>Exemple :</u>

Déterminer la somme et le produit des solutions des équations suivantes :

a) 4x²-x+1=0
b) -1/2x²+4x-8=0
c) 4x²+17x-15

<u>Solution :</u>

a) 4x²-x+1=0 $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow 1 - 16 = -15$
b) -1/2x²+4x-8=0 $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow 16 - 16 = 0$
c) 4x²+17x-15

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow 289 + 240 = 529 > 0, \textit{deux solutions distinctes}$

S=-b/a =-17/4 ; P= c/a=-15/4

5) <u>détermination de deux nombres connaissant la somme et le produit</u>

S=x1+x2
P=x1.x2 = x²-sx+p=0
Exemple : s=4; p=2
L'équation de 2nd degré est de la forme : x²-sx+p=0
Application :
S=2, p=4

L'équation du 2nd degré est de la forme : x²-sx+p=0⇒ $x^2 - 2x + 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 16 = -12 < 0; \textit{il n'existede réel telsque } s = 2 \textit{ et } p = 4$

$\underline{exerxice\ d'application}$:

$dans\ chacun\ des\ cas\ suivants\ écrirent\ le\ polynome\ du\ 2nd\ degré\ p$ *sous la* $forme\ canonique$

Canonique :

P(x)=4x²-12x-7

P(x)=-3x²+12x+8

Factoriser si possible les polynômes du 2nd degré suivants :

P(x) : x²-8x+17

P(x) : x²+6x-7

Dan s chacun des cas suivants vérifiez que

$\boldsymbol{\sigma\ est\ solution\ de\ (E).trouvez\ l'autre\ solution}$

a) : (E) : 7x²-4x-11=0 $\sigma = -1$

b) : (E) : 2x²-3x-2=0 $\sigma = 2$

c) : (E) : 5x²-x-4=0 $\sigma = 1$

Résoudre dans IR les équations suivantes :

a) -4x²-10x-6=0

b) 2x²-4$\sqrt{3x} + 6 = 0$

c) 4x²-x+3=0

Déterminer s'il existe deux nombres réels donc la somme est 3 et le produit P

a) S=3 et P=-10

b) S=-3 et P=9

c) S=5 et P=6

Solution :

P(x)=4x²-12x-7

$=4\left[\left(x-\frac{12}{8}\right)^2+\frac{144+112}{64}\right]=4\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-4\right]$

P(x) = -3x²+12x+8

P(x) = -3$\left[(x-2)^2-\frac{20}{3}\right]$

Factorisation :

a) P(x) = x²-8x+17

$\Delta = b^2 - 4ac$ =64-68=-4<0 ; factorisation impossible, pas de racine

b) P(x) : x²+6x-7 $\Delta = b^2 - 4ac$=36+28=64>0 ; deux racines distinctes.

Conclusion : factorisation possible.

X1=-b-$\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = -6 - \frac{8}{2} = -7$

X2=-b+$\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2}{2} = 1$
P(x)=a(x-x1)(x-x2)
= (x+7)(x-1)

<u>Vérifions si $\boldsymbol{\sigma}$ est solution de (E)</u>

a) (E) : $7x^2-4x-11=0$ $\sigma = -1$

$$\Rightarrow 7(-1)^2 - 4(-1) - 11 = 7 + 4 - 11$$

$(E) = 0,\ \sigma = -1$ Vérifie l'équation (E). Calcul de l'autre solution
$\Delta = b^2 - 4ac$=324>0 ; x2=-b+$\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{22}{14} = \frac{12}{7}$

b) $(E): 2x^2 - 3x - 2 \Rightarrow 2(2)^2 - 3(2) - 2 = 8 - 6 - 2 = 0$
$\sigma = 2, vérifie\ l'équation\ E. \Delta = b^2 - 4ac = -3^2 - 4 * 2 * -2$
$= 9 + 16 = 25 > 0, deux\ solutions\ tellesque :$
$\boldsymbol{x1 = -b + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 3 - \frac{5}{4}}$ **=-2/4**
$\boldsymbol{x2}$ **=−b+**$\boldsymbol{\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 3 + \frac{5}{4} = 2}$

<u>Résoudrons dans IR les équations suivantes</u> :

$a)$ =$-4x^2-10x-6=0$; on pose $\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 * -4 * -6 = 100 - 96 = 4 > 0, il\ ya\ deux\ solutions\ distinctes\ tellesques :$

$$\boldsymbol{x1 = -1\ et\ x2 = \frac{3}{-2}\ d'ou\ S = \left\{(-1; \frac{3}{-2})\right\}}$$

$b)$ =$2x^2-4\sqrt{3x} + 6 = 0, \Delta = \left(-4\sqrt{3x}\right)^2 - 4 * 2 * 6 = 16 * 3 - 48 = 0$

$$\Delta = 0, il\ ya\ une\ solution\ unique\ x1 = x2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$$
$$\boldsymbol{x1 = x2 = \sqrt{3}; s = \{(\sqrt{3})\}}$$

c) =$4x^2-x+3=0$, $\Delta = -47 < 0, pas\ de\ solution; s = \emptyset$
Déterminons s'il existe des réels tels que p=-10 et s=3

L'équation de 2nd degré est de la forme **: x²-sx+p=0**⇒ $x^2 - 3x + (-10)$

<u>P(x) =x²-3x-10</u>; $\Delta = 49 > 0, deux\ solutions\ ou\ deux\ réels\ telsque : s = \boldsymbol{3\ et\ p = -10}$

On donne s=-3 et p= 9

Ecrire sous forme **: x²-sx+p=0**⇒ $x^2 - (-3)x + 9$

<u>P(x)=x²+3x+9</u> ; $\Delta = \boldsymbol{-27} < 0, \boldsymbol{pas\ de\ solution}, \boldsymbol{pas\ de\ réel}.$

Leçon2 : LES INEQUATIONS DU 2ND DEGRE

Elles sont sur l'un des quatre formes suivantes :

$Ax^2+bx+c<0$

$Ax^2+bx+c>0$

$Ax^2+bx+c\geq 0$ $\qquad a\neq 0$

Ax^2+Tapez une équation ici.$+c\leq 0$

Le discriminant de l'équation du 2nd degré est de même que celui de l'inéquation du 2nd degré on détermine d'abord le discriminant
$\Delta\ l'ensemble\ des\ solutions\ est\ donnée\ \ sous\ la\ forme\ d'intervale\ suivant\ un\ tablea$

De signe établit. Les symboles d'inégalité < ou
$\leq$
$se\ rapproche\ du\ tableau\ des\ signes\ par\ le\ signe\ -$
$dans\ les\ intervales\ ou\ de\ \ tableaux\ de\ signes.$

$\boldsymbol{les\ symboles\ d'in}\acute{e}\boldsymbol{galit}\acute{e} > ou$
$\geq se\ rapproche\ du\ tableau\ des\ signes\ par\ le\ signe +, suivant\ le\ signe\ de\ \Delta\ on\ \ \boldsymbol{a}$
$: -\boldsymbol{si}\ \Delta < 0, pas\ de\ solution\ : s = \emptyset$

X	**-∞** $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Ax²+bx+c	**Signe de a**

- Si $\Delta = 0, une\ solution\ unique\ x = -\frac{b}{2a}$

X	-∞ $\qquad$ $-\frac{b}{2a}$ $\qquad$ $+\infty$
Ax^2+bx+c	signe de a $\qquad$ 0 Signe de a

S=IR-$\{-b/2a\}$

- Si $\Delta > 0, deux\ solutions\ distinctes$

X1=-b$-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ et x2= -b+$\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

X	-∞ **x1** **x2** +∞		
Ax²+bx+c	signe de a	signe de -a	Signe de a

EX : résoudre dans IR les inéquations suivantes :

1) **$4x^2+2x+1<0$**
2) **$2x^2-x-3>0$**
3) **$-x^2-x+12<0$**
4) **$25x^2-70x+49<0$**

Solution :

1) $4x^2+2x+1$; $\Delta= b^2-4ac=4-16=-12<0; pas\ de\ solution\ s=\emptyset$

X	-∞ + ∞
$4x^2+2x+1$	+

2) $2x^2-x-3>0$;$\Delta= b^2-4ac=1+24=25>0; deux\ solutions\ distinctes$
X1=-1 ; x2=3/2

X	-∞ $-\mathbf{1}$		$\frac{3}{2}$ + ∞
$2x^2-x-3$	+	-	+

S= $]-\infty;-\mathbf{1}[\cup]\mathbf{3/2}\ ;+\ \infty$**[**

3) $-x^2-x+12<0$; $\Delta= 49>0; deux\ solutions\ distinctes : x1=3\ et\ x2=-4$

X	$-\infty$ -4 3 +∝ Tapez une équation ici.		
$-x^2-x+12$	-	+	-

S=$]-\infty;-4[\cup]3;+\infty[$

4) **$25x^2-70x+49<0$; $\Delta=\mathbf{0}, x=-\frac{b}{2a}=\frac{70}{2*25}=\frac{70}{50}=\frac{14}{10}=\frac{7}{5}$**

X	$-\infty$ $\frac{7}{5}$ + ∞	
$25x^2-70x+49$	+	+

S= IR-$\left\{\frac{7}{5}\right\}$

EQUATIONS ET INEQUATIONS SE RAPPORTANT AU 2ND DEGRE

I) EQUATIONS ET INEQUATIONS DE DEGRE 3 :

Elles sont de la forme :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{ax^3 + bx^2 + cx + d = 0} \\ \boldsymbol{ax^3 + bx^2 + cx + d} < 0 \\ \boldsymbol{ax^3 + bx^2 + cx + d} > 0 \\ \boldsymbol{ax^3 + bx^2 + cx + d \leq 0} \\ \boldsymbol{ax^3 + bx^2 + cx + d \geq 0} \end{pmatrix} \quad a \neq 0$$

Le problème se ramène à un énoncé du genre. Soit une équation de la

Forme $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

a) Vérifiez le réel σ *est solution de l'équation donnée*
b) Trouvez l'équation du 2nd degré correspondante et la résoudre
c) Résoudre l'équation de degré 3 donnée

Exemple : soit à résoudre l'équation de 2nd degré 3 données.

$$\underline{\boldsymbol{2x^3 - 5x^2 - x + 6 = 0}}$$

a) Vérifiez que -1 est solution
b) Déterminez l'équation du 2nd degré correspondante
c) Donnez l'ensemble solution d'équation du degré 3

Solution :

a) Vérifions si -1 est solution

(E) : $2x^3 - 5x^2 - x + 6 = 0$

=$2(-1)^3 - 5(-1)^2 + 6$
=2(-1) (-1)(-1)-5(-1)(-1)+6
=-2-5+1+6
=-7+7
=0 ; conclusion -1 est solution de l'équation (E)

$2x^3 - 5x^2 - x + 6$	**x+1**
-$(2x^3 + 2x) - x + 6$	2x-7x+6
$\cancel{2x^3} - 5x^2 - x + 6$	
$-\cancel{2x^3} - 2x^2$	
$-7x^2-x+6$	
$-(-7x^2-7x)-x+6$	
$-\cancel{7x^2}-x+6$	
$\cancel{7x^2}+7x$	
$+6x+6$	
$-(6x+6)$	
= =	

b) **On aura pour équation du 2^nd degré : (x+1) ($2x^2-7x+6$)=0**$\Rightarrow (x+1) \neq 0 ou\ x = -1\ et\ 2x^2 - 7x + 6 = 0$; $\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(2)(6) = 49 - 48 = 1 > 0$ *deux solutions distinctes*

X1=-b-$\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 7 - \frac{1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

X2=-b+$\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8}{4} = 2$ $s = \left\{(-1; \frac{3}{2}; 2)\right\}$

Autre méthode : la division includienne. L'équation du 2^nd degré est sous la forme : $ax^2+bx+c=0$

$2x^3 - 5x^2 - x + 6 = (x+1)(ax^2+bx+c)$

$2x^3 - 5x^2 - x + 6 = ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c$

$2x^3 - 5x^2 - x + 6 = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c$

$$\begin{cases} 2x^3 - 5x^2 - x + 6 \\ ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c \\ ax^3 = 2x^3 \quad a = 2 \\ (a+b)\cancel{x^2} = -5\cancel{x^2} \Rightarrow a + b = -5\ ; 2 + b = -5 \Rightarrow b = -7 \\ (b+c)x = -x \\ c = 6 \end{cases}$$

L'équation du 2^nd degré demandée est $2x^2-7x+6$

2x²-5x²- x+6= (x+1) (2x²-7x+6)

Exercice :

$$x^3 - 7x - 6$$

a) **Vérifiez que -1 est solution**
b) **Déterminer l'équation du 2nd degré**

Résoudre dans IR l'inéquation de degré (I) : $x^3 - 7x - 6 < 0$; $x^3 - 7x - 6 \geq 0$

(I) : $x^3 - 7x - 6$ <0
(x+1)(x²-7x-6)<0

X	-∞ -2	-1	3	+∞
X+1	-	-	0 +	+
X²-x-6	+	0 -	-	0 +
(I)	-	+	-	+

(I)<0 s=] -∞; $-2[\cup] - 1; 3[$

(I)≥ 0 $s = [-2; -1] \cup$ [3; +∞[

< Ou ≤⇔ −

>ou ≥⇔ +

II) EQUATIONS ET INEQUATIONS BICARREES

1) **DEFINITION** :
Ce sont les équations et inéquations de la forme (E) : $ax^4 + bx^2 + c = 0$

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{ax^4 + bx^2 + c < 0} \\ \boldsymbol{ax^4 + bx^2 + c \leq 0} \\ \boldsymbol{ax^4 + bx^2 + c} > 0 \qquad a \neq 0 \\ \boldsymbol{ax^4 + bx^2 + c \geq 0} \end{array}\right.$$

De l'une des quatre formes ci-dessus pour les inéquations

2) Méthode de résolution
3) On effectue un changement d'inconnu en posant X=x², l'équation (E) : devient ax²+bx+c=0
(I) : devient ax²+bx+c>0
Ax²+bx+c>0 $(\geq ou \leq)$

Exemple : résoudre dans IR l'équation suivante : (E) : $4x^4 - 8x^2 + 7 = 0$

On pose X=x²⇒ $x^2 - 8x + 7 = 0$; $\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 28 = 36 > 0$, *deux solutions distinctes* :

X1=1 et x2=7

S={1; 7} $\quad X1 = 1 = x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 0$

X=1 ou x=-1

X2=x²=7=x²-7=0⇒ $\left(x - \sqrt{7}\right)\left(x + \sqrt{7}\right) = 0$

X=$\sqrt{7}$ *ou* $x = -\sqrt{7}$

S=$\{-\sqrt{7}, -1; 1; \sqrt{7}\}$

Devoir : résoudre les inéquations suivantes :

$$x^4 - 8x + 7 > 0;\ x^4 - 8x^2 + 7 \leq 0$$

Solution :

(I) : $x^4 - 8x + 7 > 0$, *on pose* : $X = x^{2\Rightarrow} X^2 - 8X + 7 > 0$
$\Delta + 36 > 0$, *DEUX SOLUTIONS DISTINCTES*

X1=1 etx2==2

X1=x²=1 et x2=x²=7 on aura donc x=1 ou x=-1 et x=$-\sqrt{7}$ *ou* $x = \sqrt{7}$

Tableau de signes :

X	-∞	$-\sqrt{7}$	**-1**	**1**	$\sqrt{7}$ +∞
X+$\sqrt{7}$	-	0 +	+	+	+
X+1	-	-	0 +	+	+
x-1	-	-	-	0 +	+
x-$\sqrt{7}$	-	-	-	-	0 +
(I)	+	-	+	-	+

$\boxed{S=]\infty;-\sqrt{7}[\cup]-1;1[U]\sqrt{7};+\infty[}$

Si (I):≤ 0

$\boxed{S=[\sqrt{7};-1]U[1;\ \sqrt{7}]}$

<u>Problème :</u>On doit partager un montant de 30 000fcfa entre un certain nombre de personnes. S'il y avait 4 personnes de moins la part de chacune serait

Augmentées de 1250fcfa

Déterminer le nombre de personnes et la part de chacune d'elle

<u>Solution :</u>

- La somme égale à x personnes est 30000/x
- S'il ya 4 personnes de moins (x-4) nombre de personnes
- La somme qu'aurait chacune est :
  30 000/x-4 =30 000/x+1250

Soit x le nombre de personnes et y la part de chacune d'elle

$$\begin{cases} y = \dfrac{30\ 000}{x} \\ \dfrac{30\ 000}{x-4} = \dfrac{30\ 000}{x} + 1250 \end{cases}$$

30 000/x-4 =30000+1250/x
(30 000+1250x)(x-4)=30 000x
30 000x-120 000+1250x²-5000x=30 000x
30 000x-120 000+1250x²-5000x-30 000x=0
1250x²-5000x-120 000=0

$$\Delta= b^2-4ac=(-5000)^2-4(1250)(-120\ 000)$$

$$25000^2+600\ 000=625\ 000\ 000>0, deux\ solutions\ distinctes$$

X1=5000-25000/2500 =-20000/2500=-8, partage rejeté
X2=12
Y=30000/12 =2500

$\boxed{S=\{(12;2500)\}}$

<u>Exercices d'entrainement :</u>

<u>Exo1</u> :
On se propose de résoudre l'équation (E) : $x^4+2x^2-3=0$
1) Résoudre l'équation $x^2+2X-3=0\ dans\ R$

2) A l’aide de la question précédente, déterminer les solutions de (E) dans R

<u>Exo2 :</u>

$$p(x) = -x^3 + 6x^2 - 11x + 6$$

1) Calculer p (1)
2) Déterminer les réels a, b et c tels que $p(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$
   Résoudre dans R
   a) P(x)=0
   b) P(x)>0 P(x)<0

CHAPITRE II : ETUDE ET REPRESENTATION GRAGHIQUE DES FONCTIONS

Leççon 1 : ETUDE DES FONCTIONS

<u>Définition :</u>

On appelle fonction, une relation binaire entre deux ensemble A et B tels que tout élément de l’ensemble d’arrivée a plus un antécédent dans l’ensemble de départ.

Les fonctions que nous allons étudiées ont pour ensemble de départ et d’arrivée IR. On les appelle les **fonctions numériques d’une variable réelle.**

1) <u>Les types de fonctions</u> :

Notre étude portera sur deux types de fonctions :

- Les fonctions polynômes
- Les fonctions homographiques

2) **<u>Les différentes étapes de l’étude d’une fonction</u>** :

a) <u>Domaine de définition ou ensemble de définition (Df) :</u>

C’est l’ensemble dans lequel s’étudie les fonctions. C’est l’ensemble pour lequel la fonction existe. Pour les fonctions polynômes, $\boldsymbol{Df}$=]-∞; +∞[

Pour les fonctions homographiques, f existe si et seulement si **le dénominateur est différent de zéro**

<u>Exemple :</u>

F(x)=2x-1 **Df=IR**

F(x)=3/2x² +2x-8

F(x)=$x^3 - \frac{1}{4x^2} + x - 6$

F(x) =x-1/x+1

F(x) $\exists\ ssi\ x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1; donc\ df = IR - \{-1\}\ ou\ df =]-\infty; -1[U] - 1; +\infty[$

b) <u>Parité :</u>

- F est paire si pour tout (-x) $\epsilon\ df, pourtout\ x\epsilon df. f(-x)$=f(x)

Exemple :

F(x)=x²+1 ; f(x)=$x^4 - 8x^2 + 7$

F(x)=x²+1 ; Df=IR

$$\forall(-x) = IR$$

$$\forall\ x\epsilon IR, f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$$

Conclusion : f est paire

F(x)= $x^4 - 8x^2 + 7$

$$\forall(-x) = IR$$

$$\forall\ x\epsilon IR, f(-x), f(-x) = (-x)^4 - 8(-x)^2 + 7$$

= (-x)(-x)(-x)(-x)-8(-x)(-x)+7

=$x^4 - 8x^2 + 7 = f(x)$

<u>Conclusion</u> : f est paire

<u>REMARQUE</u> :

Toutes les fonctions donc les monômes sont de degré paire sont paires

- F est impaire si $\forall\ x\epsilon df, f(-x) = -f(x)$

Exemple : f(x)=$x^3 - x$

F (-x)=(- $x)^3 - (-x)$

= (-x)(-x)(-x)+x

$=-x^3+x$

$-f(x)=-(x^3-x)=-x^3+x$

<u>Conclusion</u> f (-x)=-f(x)= $\boldsymbol{-x^3+x, f\ est\ impaire}$

<u>REMARQUE</u> : toutes les fonctions dont les monômes sont de degré impair sont impaires

En dehors des deux 1er cas, toutes les autres fonctions sont ni paires ni impaires.

<u>Application :</u>

Etudier la parité des fonctions suivantes :

$F(x)=1-x^2$; $f(x)=x^3-x-6$; $f(x)=2x^2-3x+x^4-1$

Solution

$F(x)=1-x^2$

Df =IR, $\forall(-x)=IR\quad \forall(x)=IR, f(-x)=1—x^2=1-x^2\,; cl: f\ est\ paire$

F(x) =$\boldsymbol{x^3-x}$**-6**

Df =IR,$\forall(-x)\epsilon df, f(-x)=(-x)^3—x-6=-x^3+x+6$

$-f(x)=-(x^3-x-6)=-x^3+x-+6)$; cl : f est ni paire ni impaire

Leçon 2 : LIMITE- CONTINUITE

I) <u>CALCUL DES LIMITES</u>

1) <u>Limite à l'infini (-∞)</u>

La première des choses à_ faire c'est de trouver d'abord le df ; parce que les

Limites d'une fonction se calcul aux bornes du df . C'est pour cela qu'il faut écrire le df pour bien voir les bornes.

Pour les fonctions polynômes, donc le df=IR les limites se calculent à -∞ et à $+\infty$ et sont d'égal à limite de monômes du plus haut degré.

Exemple : f(x)=$\boldsymbol{x^3-x-6}$

NB : la limite d'une fonction se note Lim f(x)=Lim$x^3 - x - 6 = limx^3 = +\infty$

X$\rightarrow -\infty$ x$\rightarrow -\infty$ x $\rightarrow -\infty$

La limite à l'infini pour les fonctions homographiques est égale à la limite du quotient des monômes le plus haut degré.

2) Les limites en un point xo

Une fonction f admet en xo, une limite lorsque le limite
x$\rightarrow$ xo de la fonction $f(x)$est égale $f(xo)$

$$\lim_{x \to xo} f(x) = f(xo) = f$$

Limite à gauche-limite à droite

Les limites à gauche ou limites à droite d'une fonction concernant seulement les fonctions homographique. Xo étant la valeur qui annule le dénominateur

- ✓ ***Limite à gauche de xo (xo-)***
  (xo-=xo par valeur négative)

$$\lim_{x \to xo-} f(x) = \text{lg}(limite \text{ à } gauche)$$

- ✓ ***Limite à droite de xo (xo+)***

$$\lim_{x \to xo+} f(x) = \text{ld(limite à droite)}$$

Exemple : f(x)= 1/x ; **Df=IR-**$\{0\} =]-\infty; \mathbf{0}[\boldsymbol{U}]\mathbf{0}; +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{lim1}{x} = \frac{\lim 1}{-\infty} = 0$$

$x \to -\infty \qquad x \to -\infty$

$$limf(x) = \frac{\lim 1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$x \to 0^+ \qquad x \to 0^+$

$$\text{Lim}f(x) = \frac{\lim 1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$limf(x) = \frac{\lim 1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$x \to 0^+ \qquad x \to 0^+$

$x \to 0^-$ $x \to 0^-$

- Si Lim f(x) = Lim f(x) = f(x)

$x \to x0^-$ $x \to x0^+$

- $si\ lim f(x) \neq lim f(x) = f(x), la\ fonction\ n'admetde\ limite\ en\ xo$

$x \to x0^-$ $x \to x0^+$

II) <u>CONTINUITE :</u>

1) **<u>Théorème</u>** :

Toutes les fonctions polynômes sont continuent dans leur Df

2) <u>Continuité en un point xo</u>

Une fonction f est continu en un point xo si les deux conditions suivantes sont remplient et leurs conditions :

- **F(x) existe**
- **Lim f(x) =f (x)**
  $\boldsymbol{xo \to xo}$

3) <u>Continuité à gauche à droite de xo</u>

a) <u>Continuité à gauche cette à dire en xo^- :</u>

- ❖ $\boldsymbol{f(xo^-) existe}$
- ❖ **Lim f(x)=** $\boldsymbol{f(xo^-)}$

$\boldsymbol{x \to xo^-}$

b) <u>Continuité à droite cette à dire en $x0^+$:</u>

- **F** $\boldsymbol{(x0^+)\ existe}$
- **Lim f(x)=f** $\boldsymbol{(x0^+)}$

$\boldsymbol{x \to xo^+}$

Si f (xo^-) = **f** $\boldsymbol{(x0^+)}$ = $\boldsymbol{f}(xo), f\ n'estpas\ continue\ ou\ elle\ est\ discontinue.$

III) <u>DERIVABILITE- DERIVEE :</u>

1) **<u>Théorème</u>** :

- La fonction polynôme est dérivable sur IR
- Toute fonction homographique est dérivable en tout point sauf au point où le dénominateur s'annule

2) Dérivabilité d'une fonction en un point xo

F est dérivable en un point $xo, lorque$:

$$\boldsymbol{lim \frac{f(x) - f(xo)}{x - xo} = f'(xo)}$$
$$\boldsymbol{x \to xo}$$

Le réel

$f'(xo)\ est\ appelé\ nombre\ dérivé\ de\ f\ au\ point\ xo. exemple\ calculer\ le\ nombre$

Dérivé de la fonction en xo $pour\ chacun\ des\ cas\ suivants$:

1) $f(x) = x^2 + 1; xo = -1$
2) $f(x) = \frac{x}{x-3}, xo = 2$

Solution :

3) $f(x) = x^2 + 1; xo = -1$

$$f(xo) = f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$$

$lim \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$ $=lim \frac{x^2+1-2}{x+1} = lim \frac{x^2-1}{x+1} \leftrightarrow \frac{x^2-1}{x+1} \exists ssi\ x + 1 \neq 0 \Rightarrow x = -1$

$x \to -1$ $\qquad$ $x \to -1$ $\qquad$ $x \to -1$

$lim\ \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{l}{x\to-1} = \frac{(x-1)(x+1}{x+1} = \lim x - 1 = -1 - 1 = \mathbf{-2}$

$x \to -1$ $\qquad$ $x \to -1$ $\qquad$ $x \to -1$

$$lim \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = -2, est\ le\ \boldsymbol{nombre}\ \text{dérivé}\ de\ la\ fonction\ au\ point\ \boldsymbol{xo} = \mathbf{-1}$$

3) $f(x) = \frac{x}{x-3}, xo = 2, la\ suite\ \text{à}\ chercher$

Exercice :

Dans chacun des cas suivants calculer en utilisant de la définition, le nombre de la dérivée f en xo

a) $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 1; xo = -2}$
b) $\boldsymbol{f(x) = \frac{2x+3}{x-1}; xo = 2}$

Solution :

a) $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 1; xo = -2}$

Df=R ; $f(xo) = f(-2) = (-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$

$\lim_{x\to-2} \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} = \lim_{x\to-2} \frac{x^2+1-5}{x+2} = \lim_{x\to-2} \frac{x^2-4}{x+2}\ x + 2 \neq 0, x \neq -2$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-2} \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = \lim_{x\to-2} x - 2 = -2 - 2 = -4$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = -4; conclusion : le\ nombre\ dérivé\ de\ f\ au\ point\ xo = -2$$

a) $\boldsymbol{f(x) = \frac{2x+3}{x-1}; xo = 2}$

df=R-{1} ; $f(xo) = f(2) = 2(2) + \frac{3}{2} - 1 = 4 + \frac{3}{1} = 7$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2)$$

$$= \lim_{x\to 2} 2x+3 \Big/ x - \frac{1}{x} - 2 = \lim_{x\to 2} 2x+3-7x+7 \Big/ x - \frac{1}{x} + 2$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{-5x+10}{(x-1)(x-2)}$$

$$\exists ssi\ (x-1)(x-2) \neq 0; x \neq 1\ oux \neq 2$$

$=\lim_{x\to 2}\frac{-5(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{-5}{x-1} = -\frac{5}{2} - 1 = -5$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = -5; est\ le\ nombre\ dérivé\ de\ f\ au\ point\ xo = 2}$$

<u>Notion d'équation de tangente d'une fonction :</u>

$$\lim\frac{f(x)-f(xo)}{x-xo} = f'(xo) \Rightarrow f(x)-f(xo) = f'(xo)(x-xo)$$

$$\Rightarrow f(x) = f'(xo)(x-xo) + f(xo)$$

Comme y=f(x)

$$y = \boldsymbol{f'(xo)(x-xo) + f(xo)} ; est\ l'équationde\ la\ tengente\ de\ f\ au\ point\ xo$$

- Exemple : x^2-2x+3

Df=R ; f(o)=$(o)^2$-2(o)+3=3

$$f'(o) = \frac{limf(x)-f(o)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x}{x}, pour\ x \neq 0$$

$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(x-2}{\cancel{x}} =$

$\lim_{x\to 0} \quad x-2 = 0-2 = -2$

$f'(o) = -2$

$y = f'(0)(x-0) + f(0) = \mathbf{-2x+3}$

- $\boldsymbol{f(x) = \frac{x-3}{x-2}}$; $xo = -1 \quad df = R - \{2\}$

$$f(-1) = \frac{-1-3}{-1-2} = \frac{4}{3}$$

$$f'(-1) = \frac{f(x) - f(-1)}{x-(-1)}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{x - \frac{3}{x} - 2}{x+1} - \frac{4}{3}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{3(x-3) - \frac{4(x-2)}{x} - 2}{x+1}$$

$$= \frac{3(x-3) - 4(x-2)}{3(x-2)(x+1)}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x - 9 - 4x + 8}{3(x-2)(x+1)}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{-x-1}{3(x-2)(x+1)}; avec\ 3(x-2)(x+1) \neq 0,$$

$$(x-2) \neq 0 et\ (x+1) \neq 0$$

$$\lim_{x\to -1} \quad x \neq 2\ et\ x \neq -1$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{-(x+1)}{3(x-2)(x+1)}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{-1}{3(x-2)} = -\frac{1}{3(-1-2)} = 1/9$$

$$\boldsymbol{f'(-1) = \frac{1}{9}}$$

$$y = f'(-1)(x+1) + f(-1) = \frac{1}{9}(x+1) + \frac{4}{3} = \frac{1}{9}x + \frac{1}{9} + \frac{4}{3} \Leftrightarrow \boldsymbol{y = \frac{1}{9}x + \frac{13}{9}}$$

3. DERIVE

SOIT f une fonction dérivable dans son df, on appelle fonction dérivée, la fonction notée $f'(x)$

- **Pour les fonctions polynômes**

$$\boxed{f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}}$$

Exemple : f(x)=$x^3 - 3x^2 + 1; df = R;\ \forall x \in R, f'(x) = 3x^{3-1} - 3 * 2x^{2-1} + 0 \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x$

Dérivée des fonctions usuelles

$$f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = ax \Rightarrow f'(x) = a$$

$$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$$

$$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$$

$$f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$$

- **Pour les fonctions homographiques :**

$$\boxed{h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}}$$

$h(x) \exists ssi g(x) \neq 0$; $\forall x \in dh(x)$: $h'(x) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Exemple :

$$h(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad f(x) = 1 \Rightarrow f' = 0\ et\ g(x) = x \Rightarrow g' = 1$$

$$h(x) \exists ssi x \neq 0\ donc\ df = R - \{0\}$$

$h'(x) = 0 * 1 - 1 * \frac{1}{x^2} = 0 - 1/x^2 \Leftrightarrow h'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$$f(x) = \frac{\frac{2}{3}x - 7}{\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}}$$

$$f(x) \exists ssi\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \neq 0, ssi \frac{1}{2}x \neq -\frac{1}{4}, ssi\ x \neq -\frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{df = R - \left\{-\frac{1}{2}\right\}} =]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{2}; +\infty[$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{2}{3}x - 7 \Rightarrow f'^{(x)} = \frac{2}{3}}$$

$$\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2}}$$

$$\forall \boldsymbol{x \in df, f'(x) = \frac{f'g - g'f}{g^2}}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}x - 7\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4})^2} = \frac{\frac{2}{6}x + \frac{2}{12} - \frac{2}{6}x + \frac{7}{2}}{(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4})^2} = \frac{\frac{2}{12} + \frac{7}{2}}{(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4})^2} =$$

$$= \frac{\frac{88}{24}}{(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4})^2} = \qquad \boldsymbol{f'(x) = \frac{11}{3(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4})^2}}$$

<u>Signe de la dérivée :</u>

1) $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x}$; signe de la dérivée $f'(x) = -\frac{1}{x} < 0, f \downarrow$ (décroissante)
2) $f(x) = \frac{\frac{2}{3}x-7}{\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}} \Rightarrow f'(x) = \frac{11}{3\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)}$; signe de la dérivée $f'(x) = \frac{11}{3(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}} > 0, f \uparrow$ (croissante)
3) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

$$\forall x \in R, f'x = 3x^2 - 6x; \quad \textit{signe de la dérivée}$$

$$f'(x) = o \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(x-2) = 0\ d'ou 3x = 0\ ou\ x - 2 = 0; \quad x = 0\ ou\ x = 2$$

<u>Tableau de variation</u> :

C'est un tableau composé de trois compartiments. Le premier compartiment contient les valeurs de x (valeurs de la dérivée celles qui l'annule et valeurs de df.

Le deuxième compartiment c'est le domaine de la fonction dérivée f' ; c'est là où on trouve des signes – ou +/- et +

Le troisième compartiment, c'est le domaine de la fonction initiale f(x). Là où trouve un dessin de flèche montantes ou descendantes/ montantes et descendantes.

X	- **Valeurs de x qui annulent la dérivée**

	- **Valeurs de DF**			
F’	-	+	-	-
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

<u>Exercice :</u>

Dresser les tableaux de variations des fonctions 1, 2,3

- Pour la fonction polynôme
  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1; avec\ pour\ f'(x) = 3x^2 - 6x, après\ développement\ de\ f'(x) on\ a : x = 0\ ou\ x = 2$

❖ **<u>Tableau de signes</u>** :

X	$-\infty$	0		2	$+\infty$
3X	-	0	+		+
X-2	-		-	0	+
F(X)	+	0	-	0	+

❖ **<u>Tableau de variation</u>** :

$$f(0) = 1; f(2) = -5$$

X	$-\infty$	0		2	$+\infty$
F’	+		−		+
F	$+\infty$ $-\infty$ $\nearrow$	1	$\searrow$	-5	$\nearrow$

- **Pour les fonctions homographiques** :

1) F(x)=1/x

❖ **<u>Tableau de variation</u>** :

X	$-\infty$	0	$+\infty$
F’	-		-
F	0 $\searrow$ -∞		+∞ $\searrow$

❖ **Calcul des limites aux bornes du DF :**

$$\lim_{x\to +ou-} f(x) = \lim \frac{1}{x} = \frac{1}{\pm\infty} = 0$$

2) $f(x) = \frac{\frac{1}{3}x-7}{\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}; avec\ f'(x) = \frac{11}{3\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)^2} > 0$

X	-∞	-1/2	+∞
F'	+	‖	+
F	+∞ 4/3	‖	4/3 -∞

❖ **Calculs des limites :**

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2}{3}x-7}{\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2}{3}x}{\frac{1}{2}x} = \frac{2}{3}x*2 = \frac{4}{3}$$

$$\lim_{x\to\frac{-1^-}{2}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{-1^+}{2}} f(x) = +\infty$$

<u>Conclusion</u> : la droite d'équation y=4/3 est appelée asymptote horizontale.

La droite d'équation x=-1/2 est appelée asymptote verticale à la courbe (f).

<u>Recherche des extremums</u> :

Cette rubrique concerne les fonctions polynômes seulement. Lorsqu'on trouve la dérivée et on l'annule, des valeurs de **x** qui annulent la dérivée, constituent les abscisses des extremums pour trouver les ordonnées de ces extremums, on remplace chacune de ces valeurs de **x** dans la fonction initiale cette à dire si a est la valeur qui annule la dérivée **a** est abscisse de l'extremum **f(a**) est ordonnée de l'extremum.

<u>Exemple</u> : $\boldsymbol{f(x) = x^4 - 8x^2 + 7}$

DF=R ; $\forall x \in R, f'(x) = 4x^3 - 16x$

- **Signe de la dérivée :**

F'(x)=0⇔ $4x^3 - 16x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow 4x(x-2)(x+2) = 0$

$$\begin{cases} 4x = 0 \; ou \; x = 0 \\ x - 2 = 0 \; ou \; x = 2 \\ x + 2 = 0 \; ou \; x = -2 \end{cases}$$

F(0)=7 ; f(2)=-9 ; f (-2)=-9

- **Axe de symétrie- centre de symétrie :**

1) **Axe de symétrie** :
   L'axe de symétrie d'une fonction est une droite d'équation $x = x0. pour\ montrer\ qu'unedroite\ x = x0\ est\ axe\ de\ symétrie\ d'unefonction\ f\ on\ a$:

$$\underline{\forall \boldsymbol{h} \in \boldsymbol{df};\ \ \boldsymbol{f(xo - h) = f(xo + h)}}$$

2) **Centre de symétrie :**
   Un centre de symétrie d'une fonction est un **point** pour le donner on a :

$\forall h \in df; I\begin{pmatrix} xo \\ yo \end{pmatrix}$

$$\boxed{f(xo - h) + f(xo + h) = 2yo}$$

Exemple :

$f(x) = x^2 - 1; démontrer\ que\ la\ droite\ x = 0, est\ axe\ de\ symétrie.$

F(x)=$\frac{x-1}{x+1}$; $\ \ le\ point\ I\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\ est\ centre\ de\ symétrie.$

Solution :

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 1};\ \forall h \in df\ \ x = 0;\ \forall x \in df, f(xo - h) = f(xo + h)$$

$$\Rightarrow f(0 - h) = f(0 + h) = f(-h) = f(h) = (-h)^2 - 1 = h^2 - 1 = h^2 - 1 \\ = h^2 - 1$$

Conclusion : la droite d'équation x=o est axe de symétrie.

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}, f(x) \exists ssix + 1 \neq 0, ssi\ x = -1}$$

Df=R—1, $\forall\, h \in df; f(xo-h)+ f(xo+h)=2yo = f(-1-h)+ f(-1+h)=2*1$

$$f(-1-h)=\frac{-1-h-1}{-1-h+1}=\frac{-2-h}{-h}=2+\frac{h}{h}\Leftrightarrow f(-1-h)=\frac{2+h}{h}$$

$$f(-1+h)=\frac{-1+h-1}{-1+h+1}=-2+\frac{h}{h}\Leftrightarrow f(-1+h)=\frac{-2+h}{h}$$

$f(-1-h)$+f(-1+h)=$\frac{2+h}{h}+\frac{-2+h}{h}=\cancel{2}+h-\cancel{2}+\frac{h}{\cancel{h}}=\frac{2\cancel{h}}{\cancel{h}}=2$

$$f(-1-h)+f(-1+h)=2$$

$$I\binom{-1}{1}\ \textit{est le centre de symétrie}$$

- **<u>Representation graphique</u>** :

  La tracée d'une fonction s'effectue dans un système d'axe orthogonaux ou orthonormés.

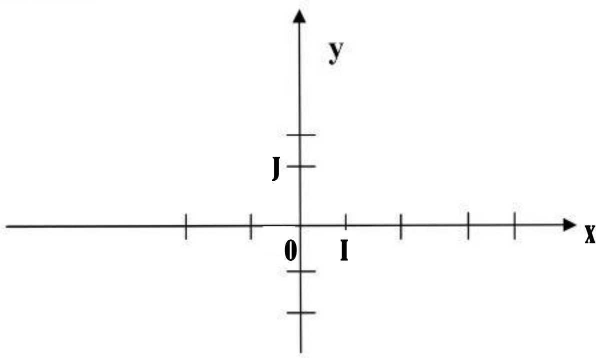
Un repère orthogonal est un repère dans lequel les mesures de longueurs sont différentes d'un axe à l'autre.

<u>Exemple :</u> axe des abscisses 1.5 cm ; axe des ordonnées 1 cm

Un repère orthonormé est un repère dans lequel les mesures de longueur sont égales d'un axe à l'autre.

<u>Exemple :</u> axe (ox). 1 cm

Axe (oy). 1 cm



Points remarquables nécessaires au tracé de la fonction :

- ✓ Les **asymptotes** : verticales($x=xo$) et horizontales ($y=l$), pour les fonctions homographiques.
- ✓ Marquer les extremums par des tangentes horizontales (**pour les fonctions polynômes).**
- ✓ Intersection avec les axes des ordonnées :

- **<u>Avec l'axe des ordonnées</u>** :
  On calcul f(o) pour toutes les fonctions.
- **<u>Avec l'axe des abscisses</u>** :
  On résoud l'équation f(x)=0

- Table des valeurs :

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
F(x)	F (-3)	F (-2)	F (-1)	F(0)	F(1)	F(2)	F(3)

Les valeurs de la table de valeurs (x) sont prisent dans les intervalles du df et cela s'effectue au choix si ces valeurs ne vous sont pas données.

Il est conseillé de choisir les petites valeurs pour éviter les difficultés de calculs.

<u>Exercice :</u>

Soient f et g deux fonctions définies par :

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$$

$$g(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

1) Etudier les variations de f et de g
2) Tracer les courbes (cf.) et (cg) dans le plan rapporté au repère orthonormé (O, I, J)
3) Préciser les équations des asymptotes, l'intersection avec les axes et dresser la table des valeurs.

<u>Solution :</u>

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$$

1) $df = R; = \left]-\infty, +\infty\right[$
2) Trouvons la dérivée et son signe :

$$f(x) = nx^{n-1}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 16x$$

- **Signe de la dérivée :**

On résoud f'(x)=0⇒ $f(x) = 4x^3 - 16x = 0 = 4x^3(x^2 - 4) = 0$

$4x = 0 \; ou \; x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 0 \; ou \; (x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 2 \; ou \; x = -2$

- **Parité**

  F est paire, car f (-x)=f(x)

  - Calcul de f(o), f(-2) et f(2)

    F(o)=7 ; f(-2)=-9 et f(2)=-9

  - Tableau de variation :

X	-∞	-2	0	2	$+\infty$
F'	-	+	-	+	
F	+∞	-9	7	-9	+∞

- **Continuité de f :** f est continue sur R
- **Calculs des limites**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = x^4 = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = x^4 = +\infty$$

- **Tracer de la courbe (cf)** :

  a) Intersection avec les axes :

➢ Avec l'axe y'oy : f(o)=7

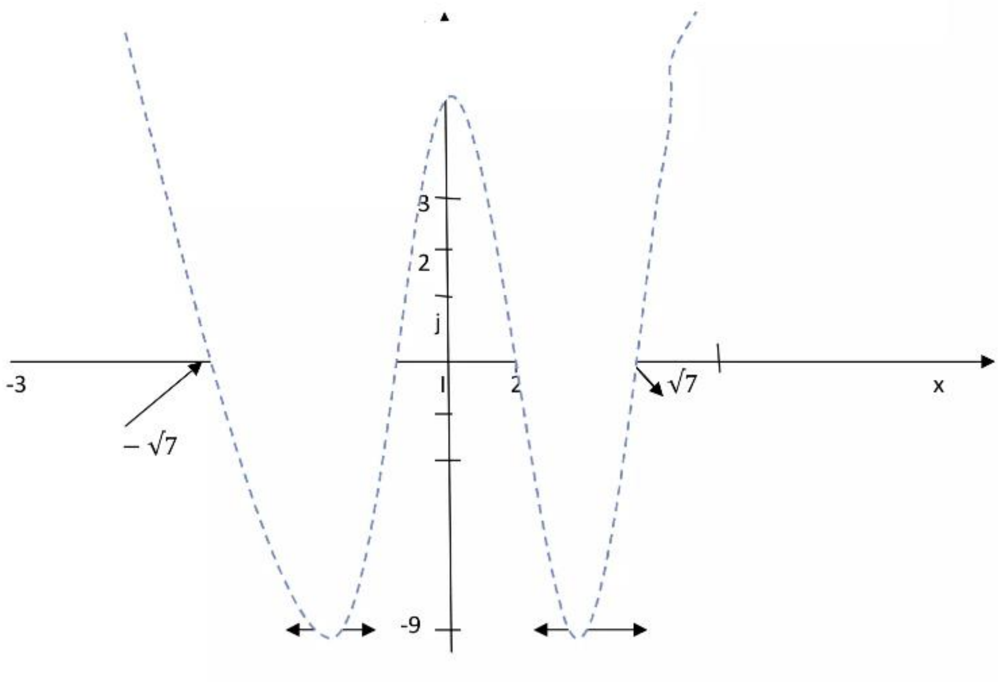
➢ Avec l'axe x'ox

F(x)=0⇒ $x^4 - 8x^2 + 7 =$

$0; on\; fait\; un\; changement\; d'origine\; en\; posant\; x = x^{2\Rightarrow} f(x) = x^2 - 8x + 7 = 0;\; \Delta = b^2 - 4ac = 64 - 28 = 36 > 0, deux\; solutions\; tellesque\; : x1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 8 - \frac{6}{2} = 1; x2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{14}{2} = 7$

Si x=x²=1$(x^2 - 1) = 0 \; ou \; (x - 2(x+2) = 0 \Rightarrow x = 1 \; ou \; x = -1$

$si\; x = x^2 = 7(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) = 0 \; ou \; x = \sqrt{7} ou x = -\sqrt{7}$



$$g(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

1) $df = R - \{2\} =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$

2) $\boldsymbol{parit}$é : $f\ est\ ni\ paire\ ni\ impaire$

3) $\boldsymbol{continuit}$é : $f\ est\ continue\ sur\ R - \{2\}$

4) $\boldsymbol{d}$é$\boldsymbol{riv}$é$\boldsymbol{e}$: $f'(x) = \frac{f'g - g'f}{g^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1(x-2)-(x+1)*1}{(x-2)^2} = \frac{x-2-x-1}{(x-2)^2} = -\frac{3}{x-2}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{f'(x)} = -\frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{x-2}} \downarrow, f\ est\ strictement\ décroissante$

5) $tableau\ de\ variation$:

X	-∞	2	+ ∞
F'	-	||	-
F	1 ↘ -∞	||	+∞ ↘ 1

6) **<u>Calculs des limites :</u>**

$$\lim_{x\to\pm-\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm-\infty} f(x) = \frac{x+1}{x-2} = \frac{x}{x} = 1$$

La droite d'équation y=1 est asymptote horizontale.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{x+1}{0^- =} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{x+1}{0^+} = +\infty$$

La droite d'équation y=2 est asymptote verticale.

7) **<u>Intersection avec les axes :</u>**

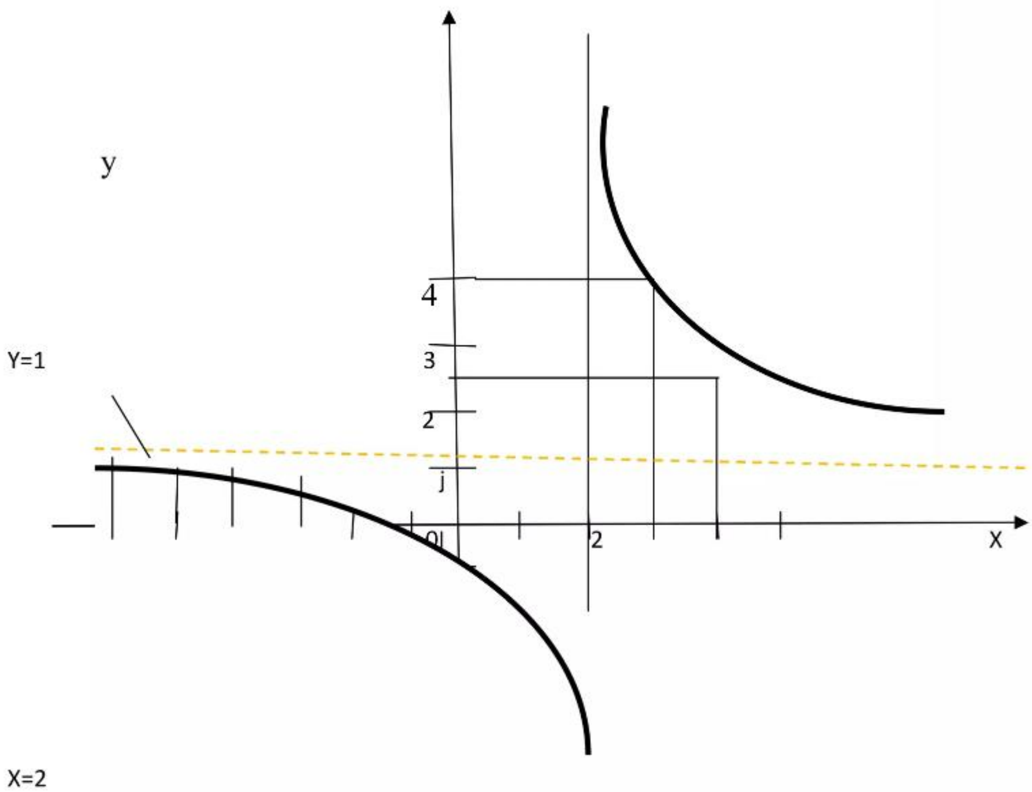
<u>Avec l'axe des ordonnées</u> : on calcul g(0)⇒ $\frac{0+1}{0-2} = -\frac{1}{2}$

<u>Avec l'axe des abscisses</u> : on calcul f(x)=0⇒ $x + 1 = 0\ ou\ x = -1$

8) **<u>Table des valeurs</u>**

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	3	4

G(x)	4/7	3/6	2/5	¼	0	-1/2	-2	4	5/2



Lecon 3

LES TRANSFORMATIONS DU PLAN

I) La fonction opposée

1) définition

Soit f(x) une fonction définie et continue sur son df on appelle fonction opposée de f notée –f, la fonction qui se traduit du f par l'intermédiaire de la table de valeur.

La courbe (cf) est symétrique de la courbe (cf) par rapport à l'axe des abscisses.

Exemple :

Soit la fonction f définie par $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 3x}$

1) étudier les variations de f et tracer les courbes dans un repère orthonormé.

2) Déduire la courbe (Cf.), la courbe (Cf.) et tracer la dans la même repère

Solution :

1) $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 3x}$

a) ***Domaine de définition :*** $df = R =]-\infty, +\infty[$

b) ***La parité*** : f est ni paire, ni impaire

c) ***La continuité*** : f est continue sur R

d) ***Calcul de la dérivée*** : f'(x)=3x²-3

e) ***Signe de la dérivée*** : f'(x)=3x²-3=0⇒ $3(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow 3(x - 1)(x + 1) = 0, on\ aura\ \boldsymbol{3 \neq 0, x = 1\ ou\ x = -1}$

f) <u>Tableau de signe :</u>

X	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
X+1	-	+	+	
x-1	-	-	+	
	+	-	+	

g) Tableau de variation :

X	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
F'	+	-	+	
F	$-\infty$	2	-2	$+\infty$

h) ***Calcul de f (-1) et de f(1)*** :

F (-1)=$(-1)^3 - 3 * -1 = -1 + 3 = 2$

F(1)=$1^3 3 * 1 = 1 - 3 = -2$

i) Calcul des limites :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = x^3 = +\infty$$

*j) **<u>Table de valeurs</u>** :*

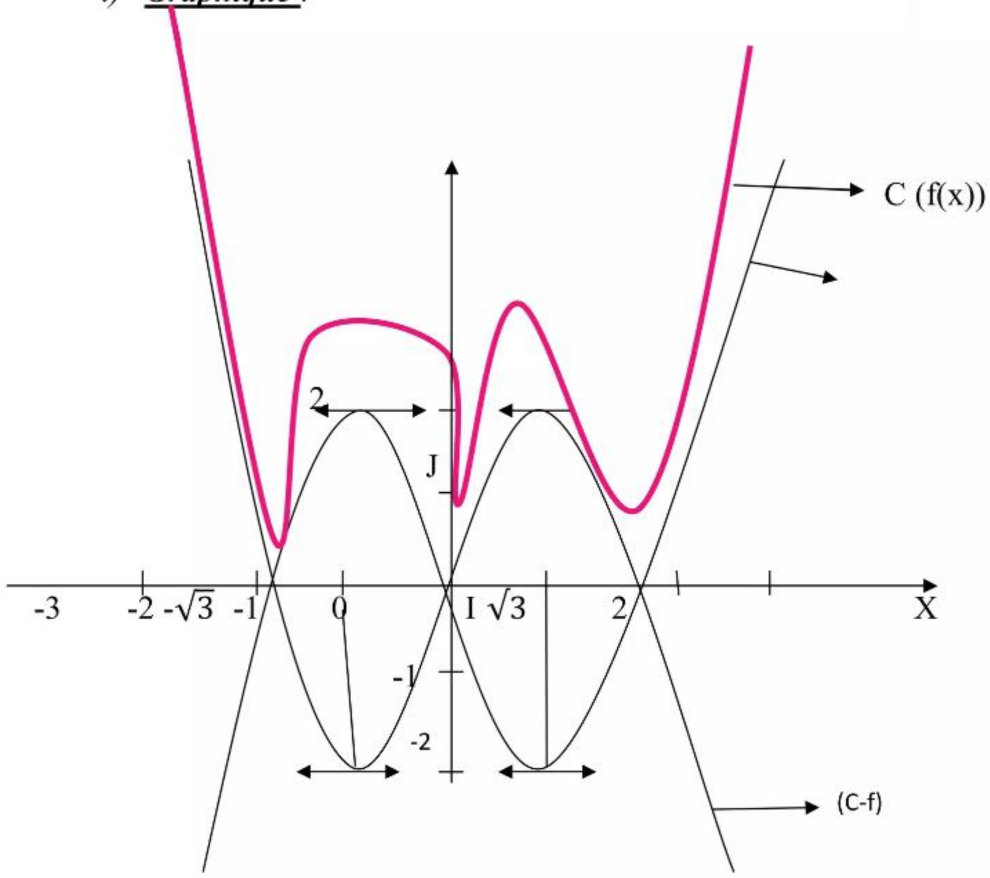
x	-2	-1	0	1	2
Y=f'(x)	-2	2	0	-2	2
Y=f(x)	2	-2	0	2	-2

*k) **<u>Intersection avec les axes</u>** :*

Avec(oy): $f(0) = 0$

Avec$(0x)$: $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x = 0; x = -\sqrt{3}; x = \sqrt{3}$

l) ***Graphique*** *:*



II) **FONCTION VALEUR ABSOLUE**:

Le repère $(0, I, J)$ *est orthogonal soit f la fonction de représentation graphique*

(Cf.) pour construire la représentation graphique. Valeur absolue de f on procède de la façon suivante :

- Construire (Cf.)
- Construire (c-f), courbe opposé à (Cf.)
- Rendre les parties des deux courbes situées au dessus des deux courbes (Cf. et c-f) situées au dessus des axes des abscisses.

III) REPRESENTATION GRAPHIQUE DES FONCTIONS POLYNOMES DU 2ND DEGRE :

$$\begin{cases} p(x) = ax^2 + bx + c; \quad (a \neq 0) \\ p(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \\ f(x) = ax^2 + bx + c \\ f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \\ f(x) = a(x - \alpha) + \beta \\ avec\ \alpha = -\dfrac{b}{2a};\ \beta = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2} \end{cases}$$

Sa représentation graphique est l'image de la parabole d'équation :

Y=ax² ; par la translation de vecteur $\underset{U}{\rightarrow}\binom{\alpha}{\beta}$

Exercices d'entrainement :

Exo1 :

Soit f(x)=2x²+4x+1

1) Vérifier que pour tout x (h(x)), f(x)=-2(x-1)²+3
2) Construire la courbe f' d'équation y=-2x², déterminer la translation qui transforme f' en Cf. puis construire Cf. à partir de Cf.'.

Exo2 :

Pour la fabrication de x objets, un entreprenant doit supporter les charges dont le montant en francs est $\boldsymbol{c(x) = x^2 - 10x + 100}$.

1) Etudier les variations de la fonction C(on prendra x réel strictement positif).
2) Déduire de l'étude précédente la production qui minimise les charges. Donner dans ce cas le montant des charges.

3) Chaque objet est vendu à 40f par l'entreprenant.
a) Démontrer que le bénéfice réalisé lors de la vente est B(x)=$-x^2 + 50x - 100$.
b) Déterminer la valeur de x qui minimise le bénéfice.
c) Donner dans ce cas la valeur du bénéfice.
4) Représenter graphiquement la fonction des charges et la fonction bénéfice. (on prendra pour unité, 2cm pour 5 objets en abscisse et 1 cm pour 25f en ordonnées.)

Exo3 :

A) F étant une fonction numérique d'une variable réelle. Donner le domaine de définition de f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = \frac{x^2-3x+4}{2\sqrt{2}}$ $b)\ f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ $c)\ \ f(x) = \sqrt{-3x}$ $c)\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$

B) Soit g la fonction réelle définie par g(x)=$-x^2+2x+3$
1) Calculer $g(\sqrt{2}), g(-1)$
2) Vérifier que $g(x) = 4 - (x-1)^2$
3) Montrer que g est croissante sur $[-2; 1]et\ décroissante\ sur\ [1; 2]$

Chapitre III: LES SUITES NUMERIQUES

LECON I GENERALITES

1) **Définition**
On appelle **suite numérique** toute fonction de l'ensemble des nombres entiers naturels **IN**→ $\boldsymbol{IR}$
2) **Notion et vocabulaire :**
IN est l'ensemble de définition d'une suite numérique. Il ya deux types de notations d'une suite numérique

- La notation fonctionnelle cette à dire la suite est écrit sous la forme d'une fonction et on la note **U(n).**
- La notation indicielle : la variable n est écrit en indice $(\boldsymbol{u_n})$. *dans la suite du cours; on , n'adoptera la notation* u_n *qui est appelé terme d'indice n ou terme général. le* ***nième*** *est appelé terme de rang* $\boldsymbol{n}$.

Exemple :

$$u_n = \frac{1}{2}n - 2; \;\; u_n = \frac{n+2}{n+3}; \;\; \begin{cases} vo = 1 \\ vn + 1 = \frac{1}{2}vn - 3 \end{cases}$$

3) **Détermination d'une suite numérique** :

En général ; une suite numérique
u_n *est déterminée par deux formules principales* :

- **Une forme explicite** :* qui permet de calculer u_n *en fonction de n*

Exemple :

$u_n = \frac{1}{2}n - 2$; *ici nous voyons que* u_n*de terme général est en fonction de*

N seulement donc la suite u_n *est définie par une formule explicite.*

Calculons le 1[er] et le 2[e] terme :

$$u_0 = \frac{1}{2}(o) - 2 \Leftrightarrow u_0 = -2 \Rightarrow 1er\ terme$$

$$u_9 = \frac{1}{2}(9) - 2 = \frac{5}{2} \Rightarrow 10e\ terme$$

Or $u_{10} = \frac{1}{2}(10) - 2 = 3$

Exemple 2 :

$$v_n = 1 + \frac{n}{n}; calculer\ le\ 1er\ terme\ et\ le\ 20e\ terme$$

- 1[er] terme :$v_0 = 1 + \frac{1}{1} = 2$
- 20[e] ter me :$v_{19} = 1 + \frac{20}{20} = \frac{21}{20} = 1.05$

- La forme récurrente :

Qui exprime $(u_n)ou(v_{n+1})en\ fonction\ du\ u_n et\ du\ 1er\ terme.$

Exemple :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \rightarrow 1er\ terme \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n}{2} \rightarrow terme\ général \end{cases}$$

Le premier terme de la suite est connu et chaque terme est fonction du précédent. Calculer les 5 premiers termes.

Solution :

- 2^e^ terme : $u_1 = 1 + \frac{u_0}{2} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{2} = 2 + \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{2} * \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = u_1$
- 3^e^ terme : $u_2 = 1 + \frac{u1}{2} = 1 + \frac{\frac{3}{4}}{2} = 4 + \frac{\frac{3}{4}}{2} = \frac{7}{4} * \frac{1}{2} = \frac{7}{8} = u_2$
- 4^e^ terme : $u_3 = 1 + \frac{u2}{2} = \frac{15}{16} = u_3$
- 5^e^ terme : $u_4 = 1 + \frac{u3}{2} = \frac{31}{32} = u_4$
- 6^e^ terme : $u_5 = 1 + \frac{u4}{2} = \frac{63}{64} = u_5$

Lecon 2 : SUITES ARITHMETIQUES ET GEOMETRIQUES

I) Suites arithmétiques :

1) Définition :

*Une suite
numérique est appelée ***suite arithmétique*** *s'il existe un nombre réel* **r**

$;\forall n \in IN; u_{n+1=u}$ $_{n+r. le\ réel\ r\ est\ appelé\ raison\ de\ la\ suite\ u_n.}$
$pour\ calculer\ la\ raison\ r\ on\ pose\ la\ formule$:

$$\boldsymbol{u_{n+1} - u_n = r}$$

Exemple :

$$\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = u_{n+3} \end{cases} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 3$$
$$r = 3$$

2) **Propriétés :**
Calcul du **n nième** terme. Soit
$\boldsymbol{u_n}$ $une\ suite\ arithmétique\ de\ raison\ r\ et\ de\ 1er\ terme$ $\boldsymbol{u_0}$

$$u_1 = uo + r$$
$$u_{2=u1+r}$$

= (u_0+r)+r
=u_0+2r

$$u_3 = u_2 + r$$
$$= (u_0 + 2r) + 2$$
$$u_3 = u_0 + 3r$$

.
.
.

$$\boxed{\boldsymbol{u_n = u_0 + n\,r}}$$

3) Somme de n terme consécutif d'une suite arithmétique :
Elle est égale au produit par n de la demi-somme des termes extrêmes.

$$\boxed{\boldsymbol{s_n = \frac{n(u_0 + u_n)}{2}}}$$

Exemple :
Ecrire la somme de n premiers nombres entiers naturels différents de o

$$s_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

$$\boxed{\boldsymbol{s_n = \frac{n(1+n)}{2}}}$$

4) **Détermination des suites arithmétiques :**
Soit ;$\boldsymbol{u_n}$ $une\ suite\ arithmétique\ définie\ par\ u_6 =$
$15\ et\ u_{8=19.déterminer\ la\ raison\ et\ le\ 1er\ terme\ de\ cette\ suite.}$

Solution :

$$u_n = u_0 + nr$$

$u\ _{6=u_0+6r}$

$u_{8=u_0+8r} \Rightarrow$

$$\begin{cases} u_6 + 6r = 15 \\ u_{0+8r=19} \end{cases} \Rightarrow -1 \begin{cases} -\cancel{u_0} + 6r = 15 \\ \cancel{u_0} + 8r = 19 \end{cases}$$

2r=4$\Rightarrow r = 2$

$$u_0 + 6 * 2 = 15 \Rightarrow u_0 + 12 = 15 \Rightarrow \boldsymbol{u_{0=15-12=3}}$$

Conclusion :

Suite arithmétique de raison r=2 et du 1er terme $u_0 = 3$

Application :

1) Déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique donc le 5e terme est 6 et le 12e terme=-8
2) Exprimer en fonction de n le terme général de cette suite et la somme des n premiers termes consécutifs.

Solution :

$$\mathbf{1)}\ \boldsymbol{u_n = u_0 + nr}$$

$$u_5 = u_{0+4r}$$

$$u_{12} = u_0 + 11r$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_{0+4r} = 6 \\ u_0 + 11r = -8 \end{cases} \Rightarrow -1 \begin{cases} -\cancel{u_0} - 4r = -6 \\ \cancel{u_0} + 11r = -8 \end{cases}$$

7r=-14$\Rightarrow r = -2$

$\boldsymbol{u_{0+4(-2)=6}}$ $\boldsymbol{{}_{u_0+(-8)=6} \Leftrightarrow u_0{=}6{+}8{=}14}$ ***;conclusion suite arithmétique de raison*** $\boldsymbol{r=-2}$ ***et du*** $\boldsymbol{1e}$ ***terme*** $\boldsymbol{u_{0=14}}$

2-on sait que $u_n = u_0 + nr \ \Rightarrow \boldsymbol{u_n = 14 - 2n}$

$$s_n = \frac{n(u_{0+u_n})}{2} = \frac{n(14 + 14 - 2n)}{2} = \frac{n(28 - 2n)}{2} = \frac{28n - 2n^2}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{s_n} = \boldsymbol{28n - n^2}$$

II) Suite géométrique

1) Définition :

Soit :

$u_n; \textit{une suite numérique } u_n \textit{ est dite suite géométrique s'il existe un}$

Nombre réel q ; $\forall n \in IN$; $\boldsymbol{u_{n+1} = q.u_n}$

Le nombre q est appelé raison de la suite

$u_n. \textit{pour déterminer la raison } q \textit{ d'une suite géométrique, on pose la formule}$

$$\boxed{q = \frac{u_{n+1}}{u_n}}$$

Exemple :

$$\begin{cases} u_0 = -9 \\ u_{n+1} = u_n \end{cases} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = 3 \Rightarrow q = 3$$

2) Propriété :

a) Calcul de n nième terme :

$u_n \textit{étant une suite géométrique de raison } q \textit{ et de } 1er \textit{ terme } u_0$

$$u_1 = u_{0}.q \text{ ou } u_1 = qu_0$$
$$u_2 = qu_1$$
$$= q(qu_0)$$
$$= q^2u_0$$

$$u_3 = q.u_2 \Rightarrow \boxed{u_n = q^n u_0} = \textbf{terme général}$$
$$= q(q^2.u_0)$$
$$= q^3.u_0$$
$$\vdots$$
$$u_n = q^n u_0$$

N.B : si une suite $\boldsymbol{u_n}$ ***a pour 1er terme u1 le terme général est*** :

$$\boxed{u_n = q^{n-1}u_1}$$

b) **Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique** :

Soit 3, la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q et de premier terme $\boldsymbol{u_0}$

$$\boxed{s = \frac{1 - (raison) ou\ nbre\ de\ termes}{1 - raison} * 1er\ terme}$$

$$\boxed{s = \frac{1-q^n}{1-q} . u_0 \quad si\ q \neq 1}$$

Si le 1er terme est u_1 :

$$\boxed{s = u_{1*} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad (q \neq 0)}$$

Si q=1, $s = n . u_0$

Exemple :

$$u_n = (\frac{1}{2})^n, déterminer\ u_{0;} q\ et\ s$$

Q=1/2 ; Uo=1 ; $u_n = q^n u_{0=\left(\frac{1}{2}\right)n \Rightarrow} s = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)n}{1-\frac{1}{2}} * 1 = \frac{1-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)n}{2}-1}{2} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)n}{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow$ $\boxed{s = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)n\right] * 1}$

c) **Détermination des suites géométriques : activité**

Soit

u_n *une suite géométrique donc le* 4*e terme est* 2000 *et le* 7*e terme est égal*

2000 000

1) Déterminer le 1er terme et la raison de cette suite.
2) Exprimer en fonction de n le terme général de cette suite et la somme de n premier terme consécutif.

Solution :

1) 4e terme=2000 ; 7e terme=2000 000

Soit q la raison et Uo le 1er terme :

$$\begin{cases} u_3 = u_{0q^3} \\ u_6 = u_{0q^6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{0q^3} = 2000 \\ u_{0q^6} = 2000\,000 \\ \dfrac{u_0 q^6}{u_{0q^3}} = \dfrac{2000\,000}{2000} \\ q^6 * q^{-3} = 1000 \\ q^{6-3} = 1000 \\ q^3 = 1000 \Rightarrow q = \sqrt[3]{1000} = 10 \Rightarrow \boldsymbol{q = 10} \\ u_3 = q^3 u_{0 \Rightarrow} q^3 u_0 = 2000 \Rightarrow u_0 = \dfrac{2000}{q^3} = \dfrac{2000}{1000} = 2;\ u_0 = \mathbf{2} \end{cases}$$

2) $u_n = u_0 q^n \Rightarrow \boldsymbol{u_n = 2.10^n}$

$$s = \frac{1-q^n}{1-9} * u_0 = \frac{1-(10)n}{1-10} * 2 = 2.\frac{1-(10)n}{1-10} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{s_n} = \frac{\mathbf{2[1-(10)n]}}{\mathbf{-9}}}$$

Exercice d'application :

Exo1 :

On donne : $u_0 = 1000\,000; et\ t\ le\ taux = 0{,}005$

1) Calculer U1 ; U2 ; U3
2) Exprimer Un+1 en fonction de Un ; déterminer la raison et le 1er terme de cette suite.
3) Calculer U10
4) Sachant que Un =3400 000 ; U0=1000 000 et r=5000, calculer la durée n.

Exo 2 : reprenons les mêmes données, mais remplaçons tout juste les U0 par V0 et les questions restent les mêmes. Vn=2000 000 et t=0.05

Solution :

Exo 1 :

1) Calculs d'U1 U2 U3
   U1=U0+U0*0,5/100 =1000 000+1000000(0,005)=1000000+5000=1005000
   U2=U1+r=1005000+5000=1010000
   U3=U2+r=1010000+5000=1015000
2) Exprimons Un+1 en fonction de Un

Un+1=Un+r⇒ $Un + 1 - Un = r = 5000; conclusion :$
$Un\ est\ une\ suite\ arithmétique\ de\ raison\ r =$
$5000\ et\ du\ 1er\ terme\ Uo = 1000000$

3) **Un=U0+nr**
U10=1000000+(5000)10=1050000
4) Un=U0+nr
3400000=1000000+5000n
3400000-1000000/5000 =n
N=480 mois ; d'où **n=40 ans**

Exo 2:*

1)

V1=V0+ (5/100) VO⇒ $V1 = 1000000 + 50000$=**1050000**

V2=V1*1.05=1050000*1.05=**1102500**

V3=V2*1.05=1102500*1.05=**1157625**

2) **Vn+1=$\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{vn}\Rightarrow}$** $Vn + 1 = 1.05Vn.\,q = \frac{v_{n+1}}{v_n} = \mathbf{1.05}; conclusion :$
$v_n\ est\ une\ suite\ géométrique\ de\ raison\ q =$
$\mathbf{1.05}\ et\ du\ 1er\ terme\ \boldsymbol{Vo} = \mathbf{1000000}$
3) $v_n = q^n u_0; d'où v_{10} = (1.05)^{10} * 1000000 = 1628894.627$
4) 2000000=$q^n * 1000000$
$(1.05)^n = \frac{2000000}{1000000}$
On tire n=15 ans

<u>Exercices d'entrainement</u> :

<u>Exo 1 :</u>

On suppose que la longueur d'un boa augmente de 40% chaque année et ceci pendant 12 premières années. Sa longueur, à la naissance est de 10 cm.

Pour tout nombre entier n, compris entre 0 et 12, on désigne par Ln sa longueur en centimètres au bout de n années.

1) Calculer L1 et L2
2) Exprimer Ln en fonction de n, pour tout n compris entre 0 et 1
3) Déterminer la longueur du boa au bout de 12 années.

4) Déterminer au bout de combien d'années le boa aura dépassé 1 cm.

Exo 2 :

Une personne loue une maison à partir du 1^{er} janvier 2013. Le loyer annuel initial est 24000fr et le locataire s'engage à occuper la maison pendant 9 années complètes.

On note Uo le loyer payé la première année. Le locataire accepte une augmentation annuelle de 5% du loyer de l'année précédente.

1) Calculer le loyer U1 payé lors de la deuxième année
2) Exprimer le loyer Un+1 payé lors de la $(n+2)^{ième}$ *année en fonction du loyer Un payé lors de la* $(n+1)^{ième}$ année.
3) Calculer la somme totale à payer à l'issue de la $9^{ième}$ année

CHAPITRE IV: LE DENOMBREMENT

DEFINITION :

Dénombrer c'est compter des nombres; c'est obtenir à partir d'un certain nombre de représentation des chiffres, des représentations différentes en changeant la position de ces chiffres.

1) LECON I(rappel) : ALGEBRE DES ENSEMBLES

Intersection et réunion de deux ensembles :

Soit A et B deux parties d'un ensemble E. on appelle intersection de A et de B, l'ensemble des éléments de E appartenant à la fois à A et à B ; on

$''\boldsymbol{A \cap B}''$ ***et on lit*** $''\boldsymbol{A}''$***inter*** $''\boldsymbol{B}''$**.**on appelle réunion de A et de B l'ensemble des éléments de E qui appartient à A ou à B. cela veut dire que les éléments peuvent appartenir soit à A soit à B soit à la fois à A et à B.

On note$''\boldsymbol{A \cup B}''$***et on lit*** $''\boldsymbol{A}''$***union*** $''\boldsymbol{B}''$.

Soit E l'ensemble des 10 premiers chiffres (nombres entiers naturels)

Soit A l'ensemble des nombres paires et B l'ensemble des nombres multiples de 5.écrire E ; A ; et B.

Déterminer $A \cap B$ ET $A \cup B$

SOLUTION

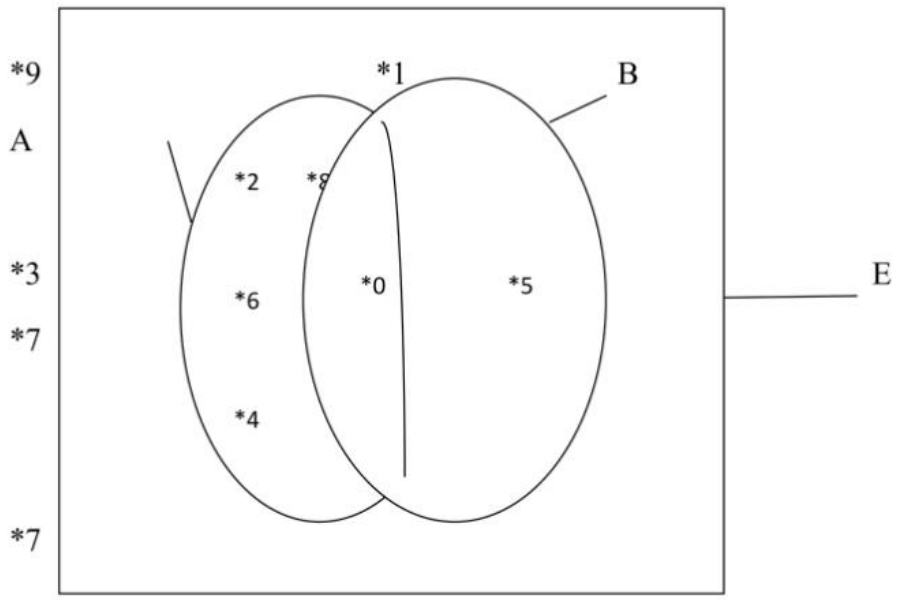
$$E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

$$A = \{0,2,4,6,8\}$$

$$B = \{0,5\}$$

$$A \cap B = \{0\}$$

$$A \cup B = \{0,2,4,5,6,8\}$$



2) Cardinal d'un ensemble E

a) **Définition** :

Le cardinal d'un ensemble noté card (E)) est le nombre d'éléments de cet ensemble.

Exemple :

Card (E) =? 10; card (B) =2

Card (A) =? 5

Card ($A \cap B$) =? 1

Card ($A \cup B$) =? 6

3) **Complémentaire d'un ensemble** :

On appel complémentaire d'un ensemble A dans un ensemble E

L'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A. on le note :

$\complement_E^A$ =Ă complémentaire de A dans E

Exemple :

Déterminer la complémentaire :

$\bar{A}\complement_E^A = \mathbf{1, 3, 5, 7, 9} \quad B = \complement_E^B = \{\mathbf{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9}\}$

$\underset{A\cap B}{\longrightarrow}\complement_E^{A\cap B} = \{\mathbf{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}\} \quad \underset{A\cup B}{\longrightarrow} = \complement_E^{A\cup B} = \{\mathbf{1, 3, 7, 9}\}$

Propriété :

$$card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$$

$$si\ A \cap B = \emptyset; card(A \cup B) = card(A) + card(B)$$

4) **Le produit cartésien** :

Exemple : on lance simultanément 02 des cubiques. On se propose de déterminer tous les résultats possibles en notant à chaque lancé des numéros des faces supérieures les courbes suivantes sont formées à partir d'un tableau à double entrée.

1^e dé / 2^e dé	1	2	3	4	5	6
1	**(1.1)**	**(2.1)**	**(3.1)**	**(4.1)**	**(5.1)**	**(6.1)**
2	**(1.2)**	**(2.2)**	**(3.2)**	**(4.2)**	**(5.2)**	**(6.2)**
3	**(1.3)**	**(2.3)**	**(3.3)**	**(4.3)**	**(5.3)**	**(6.3)**
4	**(1.4)**	**(2.4)**	**(3.4)**	**(4.4)**	**(5.4)**	**(6.4)**
5	**(1.5)**	**(2.5)**	**(3.5)**	**(4.5)**	**(5.5)**	**(6.5)**
6	**(1.6)**	**(2.6)**	**(3.6)**	**(4.6)**	**(5.6)**	**(6.6)**

On aura formé 36 courbes soit 6*6

<u>Définition :</u>

On appel produit cartésien, deux ensembles A et l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in A\ et\ y \in B. on\ note \quad ''A * B''eton\ lit''A\ croixB''$

Si le 1er cartésien se fait dans un même ensemble on appellera **E*E= E²** et le produit du cartésien est :

$$\boldsymbol{card(A * B) = card(A) * card(B)}$$

<u>Exercice :</u>

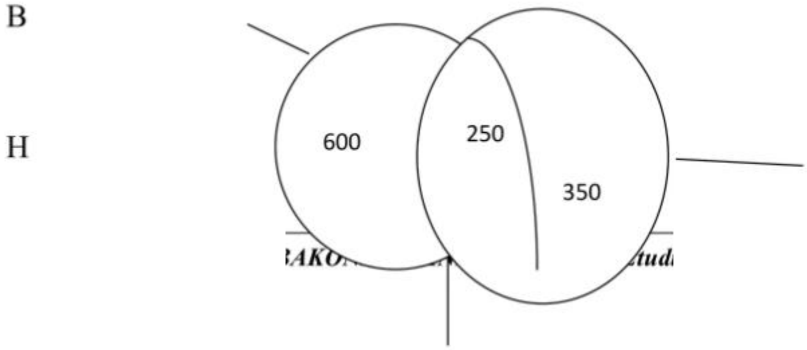
Dans un club sportif tous les membres pratiquent au moins un des deux sports proposés le : le basket et le handball .850 membres pratiquent le basket ; 600 le handball ; 250 pratiquent les deux. Combien de membres compte le club sportif ?

<u>SOLUTION :</u>

850 membres pratiquent le basket

600 ----- le handball

250 ----- les deux sports



$$A \cap H$$

- Total membre=$\boldsymbol{card(A)} + \boldsymbol{card(H)} - \boldsymbol{card(B \cap B)} = 850 + 600 - 250 = \mathbf{1200\ membres}$

Application :

Le formateur de musique DISSOLUTION fait une enquête auprès de 150 étudiants de l'institut universitaire du golfe de guinée :

- 116 aiment la musique traditionnelle
- 52 aiment la musique rap français
- 40 aiment les deux musiques.

Combien d'étudiants n'ont pas donnés leur avis ?

Total d'étudiant n'ayant pas donnés leur avis= 116+52=168-40=128

Total=150-128=22 étudiants

LECON II : LES P-LISTES – LES ARRANGEMENTS ET LES PERMUTATIONS

I) Les p-listes :

Exemple : soit

E=

$\{1,2,3,4\}$; *quel est le nombre de coubles de triplet ou de quatriplet*

On peut former avec un ensemble E.

Un couple d'éléments de E est appelé 2- listes. Exemple : **(2,4) (1,5) (3,3)**

Un triplet d'éléments de E est appelé 3- listes, **(2, 2,2) (5, 8,3) (1, 2,1)**

Un qua triplet d'éléments de E est appelé 4- listes. **(1, 2, 3,4), de E =4^2=16 couples.**

Le nombre de triplet d'éléments de E=$\mathbf{4^3} = \boldsymbol{64\ triplets}$

Le nombre de qua triplet d'éléments de **E=**$\mathbf{4^4} = \boldsymbol{256\ qua\ triplet}$

Soit E un ensemble fini de $cardn\ et\ p\ un\ nombre\ entier\ naturel\ un\ p-$
$liste\ d'élémentsde\ E\ est\ une\ suite\ de\ p-termes\ tout\ élément\ de\ E.$

Le nombre de p-liste un ensemble E à x éléments est :

$$N = n^p$$

Exemple :

1) Donner le nombre de couples de l'ensemble formé de l'ensemble $\{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{f}\}$
2) Donner le nombre de triplets de l'ensemble $\{0,1\}$
3) On veut ranger 3 livres dans 4 tiroirs, donner le nombre de façons

Solution :

1) $cardn = 2, p = 2; N = \mathbf{2^2} = \mathbf{4}$
2) $n = 2, p = 3 = 2^3 = \boldsymbol{8\ triplets}$
3) $p = 3\ et\ n = 4;\quad N = \mathbf{4^3} = \boldsymbol{64\ façons}$
   $a)\ quel\ est\ le\ nombre\ de\ qua\ triplet\ qu'on\ peut\ former\ avec\ les\ chiffres\ E =$ $\{1,2,3,4,5,6\}$?

b) Quel est le nombre de façons de distribuer 52 cartes à 6 joueurs ?
c) Comment peut-on écrire des mots de 3 lettres dans l'alphabet français ?

SOLUTION :

a) $p = 4\ et\ n = 6 : N = 6^4 = 1296\ qua\ triplet$
b) $p = 6\ et\ n = 52 : N = 52^6 = 2\ façons$
c) $p = 3\ et\ n = 26 : N = 26^3 = 17576\ mots$

II) LES ARRANGEMENTS :

Ce sont les dispositions ordonnées lorsqu'on choisi un élément on observe et on peut le remettre en place avant de prendre un deuxième. Les arrangements c'est le nombre de p-liste donc les éléments sont deux à deux distincts.

Définition :

Soit E, ensemble de $cardn$ et b un $nombre$ $entier$ $naturel$ $avec$ $p \leq$ $n. un$ $arrangement$ de p et de E est une $p -$ $liste$ élément de E où les éléments de E $sont$ $deux$ à $deux$ $distincts.$

Propriété :

Le nombre d'arrangement d'un ensemble de E à n éléments est noté :

$$\boxed{\bigwedge_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots * n - p}$$

Exemple :

1) on peut arranger 4 livres dans 6 tiroirs. Quel est le nombre de façons de le faire ?
2) On veut installer 5 personnes sur 8 chaises sachant que 2 personnes ne peuvent occupées la même chaise. Quel est le nombre de façons d'arranger ces personnes ?
3) On veut élire un bureau d'une organisation sous l'appellation « **AMICAL des jeunes de NDOM** », composé d'un président, d'un secrétaire général et d'un trésorier et parmi les 20 membres d'une coopérative donc les statuts n'autorisent pas les cumuls de postes. Quel est le nombre de façons de constituer ce bureau ?

Solution :

1) Détermination de nombres de façons d'arranger 4 livres dans 6 tiroirs :

$$\boldsymbol{A_6^4 = 6(6-1)(6-2)\ldots(6-4+1) = (6 * 5 * 4 * 3) = 360\ façons}$$

2) Le nombre de façons d'installer 5 personnes sur 8 chaises est de :

$$A_8^5 = \mathbf{8(8-1)(8-2)(8-3)(8-4) = 8*7*6*5*4 = 6720}\ \boldsymbol{fa}\textit{çons}$$

3) Le nombre de façons de constituer le bureau de la coopérative est de :

$$A_{20}^3 = \mathbf{20(20-1)(20-2) = 20*19*18 = 6840}\ \boldsymbol{façons}$$

III) <u>LES PERMUTATIONS :</u>

Ils comme est les arrangements, ils sont les dispositions ordonnées et tout ce passe avec le nombre d'éléments n. permuter veut dire changer la position des éléments sans changer la structure.

<u>Exemple :</u>

$$E = \{\boldsymbol{P}, \boldsymbol{F}\}\ \boldsymbol{a\ pour\ permutation}\ \{\boldsymbol{F}, \boldsymbol{P}\}$$

$\boldsymbol{E} = \{\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{2}\}$-,-$\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{0}\}$

$$\{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}\}, \{\mathbf{2}, \mathbf{0}, \mathbf{1}\}, , \{\mathbf{1}, \mathbf{20}\}$$

Soit E un ensemble de cardn une permutation de E est un arrangement de n éléments de E.

1) Propriété :
   Le nombre de permutation d'E de Cardn est noté :

$$\boxed{A_n^n = n! = factorielle \ = n(n-1)(n-2)*\ldots*2*1}$$

$$0! = 1; 1! = \mathbf{1}; 2! = \mathbf{2}; 3! = \mathbf{6(3*2*1)};\ \ 4! = \mathbf{24(4*3*2*1)}.$$

Autres formules de
L'arrangement de p éléments de E de $card(E) = n$

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Combien ya t-il de façons de disposer 6 drapeaux de 6 pays différents sur 6 mas ?

$$\bigwedge_{6}^{6} = \frac{6!}{(6-6)} = 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 720$$

LECON III : LES COMBINAISONS

SOIT un ensemble E de $cardn\ et\ p, un\ nombre\ entier\ naturel, avec\ p \leq E\ toute\ partie\ de\ E\ ayant\ p\ élément.$

Les combinaisons sont les dispositions désordonnées parce que tout se fait au hasard.

1) Propriété :

Soit E ensemble de n éléments avec $n \in IN\ soit\ p\ \in IN\ avec\ p \leq n. le\ nombre\ de\ combinaison\ de\ p\ élément\ de\ p\ soit\ p\ noté$:

$$\boxed{\left({p \atop n} \right. = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}}$$

Exemple :

Quel est le nombre de tiercé é dans le désordre dans une course de 10 coureurs ?

$$N = \left({3 \atop 10} \right. = \frac{10!}{3!\,(10-3)} = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10 * 9 * 8}{3!\,7!} = 120$$

• **Les tirages** :

On démontre deux types de tirages :

- ✓ **Les tirages successifs avec ou sans remise et les tirages simultanés.**

A) Tirage successif

1) **Tirage successif avec remise** :

Les objets, ou les boules sont classés l'un après l'autre en prenant le soin de remettre l'objet tiré avant de procéder à un second tirage. Ici l'ordre est important et les objets ne sont pas distincts plus qu'on peut tirer le même objet deux fois.
Le nombre de tirage possible est égal à $\boldsymbol{n^p}$

$$\boldsymbol{n} = nombre\ total\ des\ objets;\ \ \boldsymbol{p} = nombre\ d'objet\ à\ tirer$$

2) Tirage successif sans remise :

De même, les objets sont tirés l'une après l'autre en prenant le soin de garder l'objet sans toutefois le remettre après chaque tirage.
L'ordre est important plus qu'on tire les objets l'un après l'autre et les objets sont 2 à 2 distincts, le nombre de résultats possibles d'un ensemble E à n éléments.

$$\bigwedge_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)(1-2)\ldots 2n - p + 1$$

3) Tirage simultané :

Ici, les tirages se font en désordre et au hasard. Puisque le tirage se fait d'un élément après l'autre, on tire les éléments d'un seul coup et les objets sont distincts. Le nombre de résultat possible est une combinaison de p élément d'un ensemble E à n élément.

$$\boldsymbol{\binom{p}{n}} = \frac{\boldsymbol{n!}}{\boldsymbol{p!\,(n-p)}}$$

Exercices d'entrainement

EXERCICE 1 :

Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire successivement 3 boules en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage. Combien ya –il de tirages possibles ?

Une urne contient 6 boules rouges et 4 boules blanches. On tire simultanément 2 boules de l'urne.

a) Combien ya-t-il de tirages possibles ?
b) Combien ya-t-il de tirages sachant que les boules tirées sont de même couleurs ?
c) Combien ya-t-il de tirages sachant que les boules tirées sont de couleurs différents ?

EXERCICE 2 :

On dispose de 5 étalons portant les chiffres 0, 1, 2, 3,4. On les place cote à cote de manière à former les nombres (exemple : 12304, 01243…)

a) De combien de manières peut-on les placer ?
b) Combien de nombres de 5 chiffres peut-on ainsi former ?
c) Combien de nombre divisibles par 10 peut-on former ?

Epreuve de mathématique générales

EXERCICE I :

Lors du lancement d'un produit sur le marché, une étude a montré que la fonction de demande des consommateurs de ce produit est $d(q) = -0,1q^2 +$

$31{,}6;$ *et la fonction d'offre du frabricant est* $\emptyset(q) = 3q + 10,$ où q *est la quantité demandée (en milliers d'objets).*

1) Déterminer la quantité telle que l'offre soit égale à la demande
2) Déterminer les quantités pour lesquelles l'offre est inferieure à la demande

EXERCICE II :

Une commerçante vend des assiettes et des verres. Pour épuiser son stock de 3200 assiettes et de 4800 verres, elle décide de les vendre par mois par lots :

- LOT A : 9 assiettes et 6 verres, vendu à 6600f
- LOT B : 2 assiettes et 12 verres, vendu à 3600f

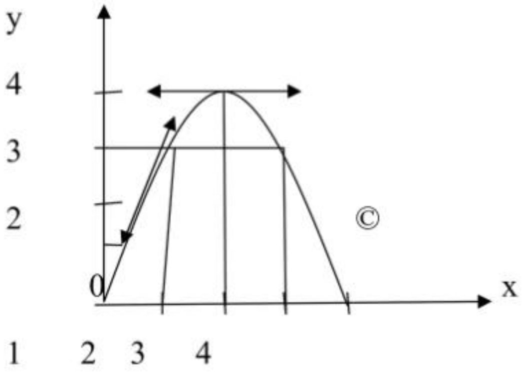
1) Calculer le prix d'une assiette et celui d'un verre.
2) Quelle somme d'argent recevra la commerçante s0uite à la vente des lots ?
3) Cette somme placée à un taux de x% l'an a rapporté à la fin de $2^{ème}$ année 295200f. calculer la valeur du taux.

PROBLEME :

La courbe © ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur [0,4].

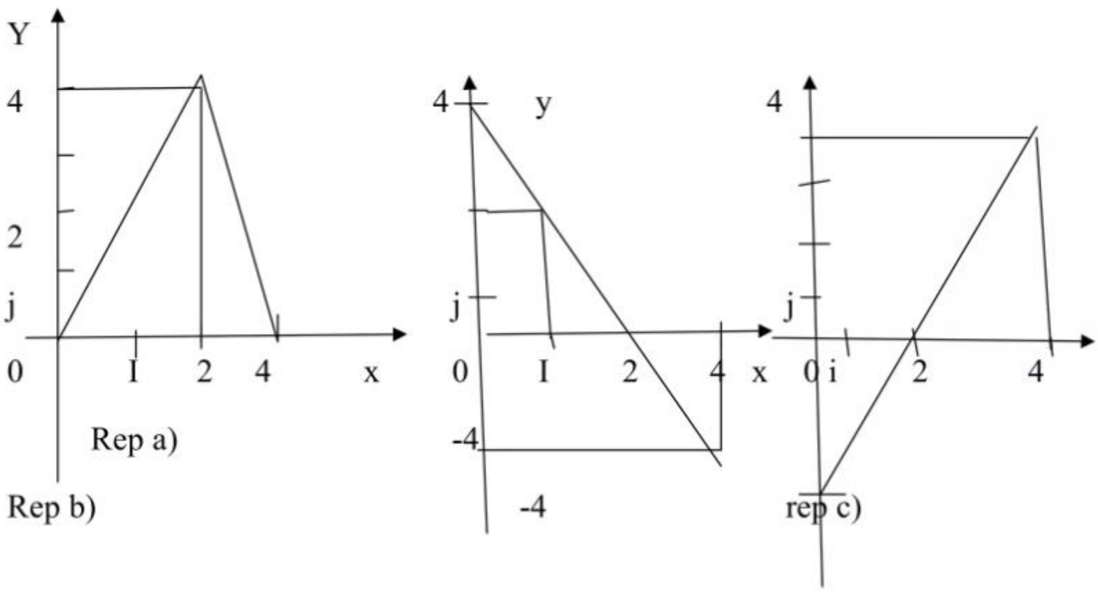
(T) est la tangente à la courbe © au point d'abscisse 1.

1. Ranger dans l'ordre croissant f(0) ; f(2) ; f(3).
2. Calculer f'(1) et f'(2)
3. Dresser le tableau de variation de f



4. Discuter, suivant les valeurs de réel m, le nombre de solution de l'équation $f(x)=m$.
5. Déterminer l'image par f de l'intervalle $[1,2]$.
6. Déterminer l'image réciproque par f de l'intervalle $[0,3]$.

   Dans la question (7), trois réponses vous sont proposées dont une seule vraie. Indique la lettre qui correspond à la réponse correcte.
7. En admettant que © est une parabole, la courbe représentative de la fonction dérivée de f est :



ANGLES ORIENTES ET TRIGONOMÉTRIE

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

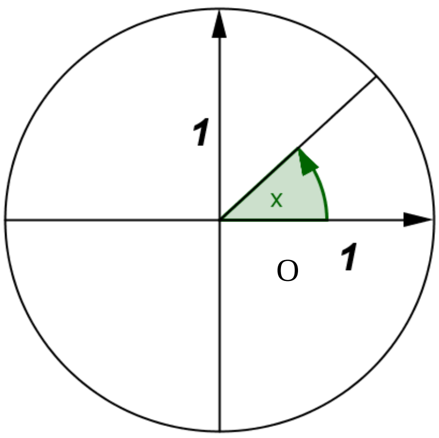
Au terme de ce chapitre, chaque apprenant, ayant exploité les acquis, devrait être capable de :

- placer l'image d'un angle orienté sur le cercle trigonométrique connaissant une mesure en radian de cet angle ;
- calculer le sinus, le cosinus et la tangente d'un nombre réel ;
- transformer des expressions à partir des formules trigonométriques ;
- citer des valeurs remarquables des lignes trigonométriques en se référant au tableau des valeurs ;
- résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques de la forme $cosx = m$ ou $sinx = m$; (m $\in$ IR).

1. Le cercle trigonométrique

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens positif.



NB :

- La longueur d'un cercle est de 2π.
- Les unités de mesure d'un angle sont : degré(D) ; radian(R) ; grade(G).

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} = \frac{G}{200} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 180° \to \pi\ radian \\ 180° \to 200\ grades \end{cases}$$

- La mesure d'un angle principal appartient à $]-\pi; \pi]$.
- Si x est une mesure d'un angle orienté alors toutes ses autres mesures sont $x + 2k\pi$; $(k \in \mathbb{Z})$.

2. Sinus, cosinus, et tangente des angles orientés

2.1. Définition

- On appelle sinus de x, noté $sinx$, l'ordonnée d'un point M sur le cercle trigonométrique.

  La fonction sin est :

$$\begin{array}{llll} sin & : & \mathbb{R} & \longrightarrow [-1;1] \\ & & x \longmapsto & sin\,x. \end{array}$$

Graphiquement sinus ($sin\,x$) se lit sur l'axe des ordonnés ($[-1;1]$).

- On appelle cosinus de x, noté $cosx$, l'abscisse d'un point M sur le cercle trigonométrique.

  La fonction cos est :

$$\begin{array}{llll} cos & : & \mathbb{R} & \longrightarrow [-1;1] \\ & & x \longmapsto & cos\,x. \end{array}$$

Graphiquement $cos\,x$ se lit sur l'axe des abscisses ($[-1;1]$).

- On appelle tangente de x notée $\tan x$, le nombre réel noté $\tan x$, $\tan x = \frac{sinx}{cosx}$ lorsque $cosx \neq 0$. La fonction tan est :

$$tan \quad : \quad \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \quad \longmapsto \quad tan\,x = \frac{sin\,x}{cos\,x}.$$

<u>Quelques valeurs remarquables</u>

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

$sin\,x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$cos\,x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1
$tan\,x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0

2.2. Propriétés

Pour tout réel x, on a :

$P_1)$ $cos^2x + sin^2x = 1$

$P_2)$ $-1 \leq \sin x \leq 1$ et $-1 \leq \cos x \leq 1$

$P_3)$ $\cos(-x) = \cos x$ (la fonction cosinus est paire)

et $\sin(-x) = -\sin x$ (la fonction sinus est impaire)

$P_4)$ $sin(x + 2\pi) = sin\,x$ et $cos(x + 2\pi) = cos\,x$

On dit que les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π).

$P_5)$ Si $cosx \neq 0$ alors $1 + tan^2x = \frac{1}{cos^2x}$.

2.3. <u>Formules d'addition</u>

Pour tous réels a et b,

(1): $cos(a + b) = cos\,a\,cosb - sin\,a\,sin\,b$

(2): $cos(a - b) = cos\,a\,cos\,b + sin\,a\,sin\,b$

(3): $sin(a + b) = sin\,a\,cos\,b + sin\,b\,cos\,a$

(4): $sin(a - b) = sin\,a\,cos\,b - sin\,b\,cos\,a$

<u>Exemple</u>

En posant $a = \frac{\pi}{3}$ et $b = \frac{\pi}{4}$ faire l'application numérique des quatre formules.

2.4. Formule de duplication

En posant $b = a$, alors la première (1), la troisième (3) et la cinquième (5) formule d'addition deviennent :

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

3. Equations Trigonométriques

3.1. Equation : $\boldsymbol{\cos x = m}$; $(\boldsymbol{m} \in \mathbb{R})$

Ev= $\mathbb{R}$

1^er^ cas : si $m \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, alors $S_{(E)} = \emptyset$

2^ème^ cas : si $m \in [-1; 1]$, alors il existe $\alpha \in]-\pi; \pi]$ tel que $\cos \alpha = m$. D'où :

$\cos x = m \iff \cos x = \cos \alpha$

$\iff x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$S_{(E)} = \{\alpha + 2k\pi \; ; \; -\alpha + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}\}$

Exemple *1* : Résoudre (E) : $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \frac{1}{2}$.

Exemple 2 : Résoudre $x \in \mathbb{R}$ $\boldsymbol{\cos x = \frac{3}{2}}$.

3.2. Equation du type $\boldsymbol{\sin x = m \ (m \in IR)}$

Ev = $\mathbb{R}$

1^er^ cas : si m $\in \,]-\infty; -1[\, \cup \,]1; +\infty[$, alors $S_{(E)} = \emptyset$

2^ème^ cas : si m $\in [-1; 1]$, alors il existe $\alpha \in \,]-\pi; \pi]$ tel que $\sin \alpha = m$.

D'où :

$\sin x = m \iff \sin x = \sin \alpha$

$\iff x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$S_{(E)} = \{\alpha + 2k\pi \,;\, \pi - \alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

Exemple : Résoudre l'équation $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}}$.

A VOUS DE JOUER…

Exercice 1 : QCM

Parmi les réponses proposées aux questions suivantes, une seule est juste. Choisir la bonne réponse.

1) Une solution de l'équation $cosx = \frac{1}{2}$ est :

A) $\frac{\pi}{2}$; B) $\frac{\pi}{3}$; C) $\frac{\pi}{4}$; D) $\frac{\pi}{6}$.

2) En trigonométrie, π radian équivaut à :

A) 360^o ; B) 90^o ; C) 190^o ; D) Aucune réponse.

3) En trigonométrie, l'expression $\cos 2x$ est égale à :

A) $1 + tan^2x$; B) $\frac{1}{cos^2x}$; C) $2cos^2x - 1$ ou $1 - 2sin^2x$; D) $sin^2x + cos^2x$.

4) $1 + tan^2x$ est égal à :

A) $1 + \frac{cos^2x}{sin^2x}$; ; B) $\frac{1}{cos^2x}$; C) $(1 + tanx)^2$; D) $1 + \frac{1}{cos^2x}$.

5) On donne $A = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(x) + \sin(x)$. Une expression simple de A est :

A) $A = 0$; B) $A = \cos(x)$; C) $A = 2\sin(x)$; D) $A = \cos(x) + Sin(x)$**.**

Exercice 2 :

a- Calculer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$ sachant que $3x = x + 2x$.

b- Calculer $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$.

c- Vérifier que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ puis calculer $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

Exercice 3

1. Ecrire plus simplement :

$A = \sin^2 x + \frac{1}{1+\tan^2 x}$; $B = 1 - \frac{1}{\cos^2 x}$; $C = \cos^3 x + \cos x \sin^2 x$.

2. Démontrer que :
   a. $\cos^4 x - \sin^4 x = 2\cos^2 x - 1$.
   b. $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$.
   c. $(cosx + sinx)^2 + (sinx - cosx)^2 = 2$.

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a. $\cos 4x + \frac{1}{2} = 0$

b. $\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

c. $\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

d. $\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

e. $2sinx - \sqrt{3} = 0$

f. $\cos(\pi - x) = -\frac{1}{2}$