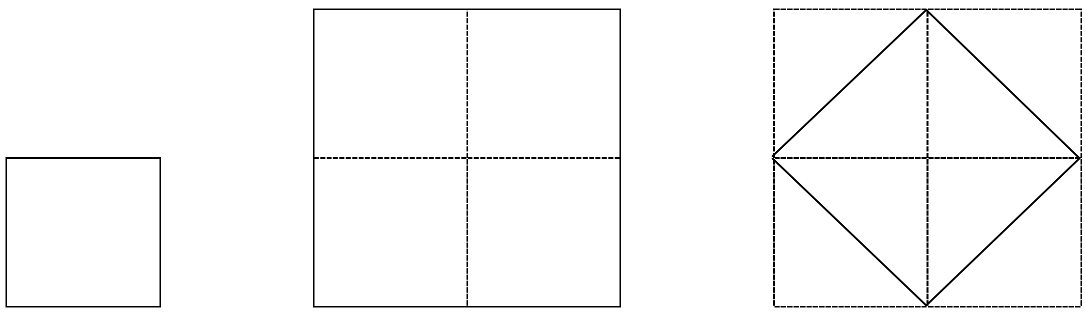
Compléments mathématiques

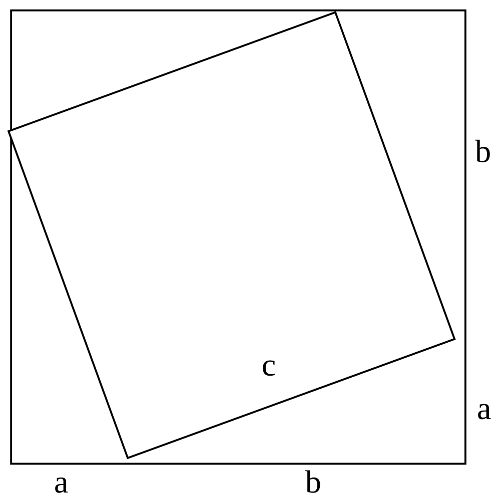
Théories et astuces mathématiques

- Théorème de Thalès : dans un triangle, la droite qui relie les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté et elle mesure la moitié de ce troisième côté.
- Thalès a mesuré le diamètre de la Terre en comparant deux ombres dans deux villes assez lointaines. [Schéma]
- On dit que Thalès est tombé dans un puits alors qu'il contemplait les étoiles. Mais à un ami qui lui disait que sa philosophie ne servait à rien, il répondit qu'avec elle il pouvait faire fortune quand il voulait. Comme l'autre restait incrédule, il dut le prouver : il loua tous les pressoirs de la région à bas prix car les récoltes étaient mauvaises ; l'année suivante la saison fut exceptionnellement bonne et il tira une fortune de ses pressoirs. Il avait prévu l'évolution du temps grâce à sa science de la météorologie.
- Dans le *Ménon*, Platon montre comment un simple esclave sans éducation retrouve une démonstration mathématique. Il s'agit de tracer un carré dont la surface soit le double d'un carré donné. Le jeune homme commence par doubler le côté du carré, mais il se rend compte qu'ainsi il obtient un carré dont la surface vaut *quatre* fois celle du premier carré. Alors il coupe chaque carré en deux en diagonale, et démontre ainsi un cas particulier du théorème de Pythagore :



Carré de départ. Surface quadruple. Surface double.

Le cas général est le suivant :



Démonstration du théorème de Pythagore :

Pour tout triangle rectangle de côtés droits a et b on peut construire la figure ci-contre. La figure centrale est un carré (démonstration facile).
La surface du grand carré vaut $(a + b)^2$ et la surface du petit carré vaut c^2. La surface des quatre triangles vaut la différence, soit $(a + b)^2 - c^2 = a^2 + b^2 + 2ab - c^2$.
On sait par ailleurs que la surface de chaque rectangle vaut ab/2. Donc la surface des quatre triangles vaut $4 \times ab/2 = 2ab$.
Par conséquent $2ab = a^2 + b^2 + 2ab - c^2$, donc $a^2 + b^2 = c^2$.

Pour tout triangle rectangle de côtés droits a et b on a donc l'équation suivante : $a^2 + b^2 = c^2$.

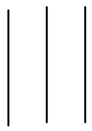
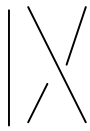
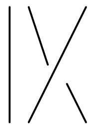
- Les nombres imaginaires (i est tel que $i^2 = -1$) permettent de résoudre certains calculs en faisant un détour par des nombres qui n'existent pas du tout, qui sont purement fictifs, opératoires.
- Calcul infinitésimal.
- La théorie des groupes est peut-être le meilleur exemple de la généralité des mathématiques. Un groupe est un ensemble d'éléments, parfaitement indéterminés (ce pourrait être absolument n'importe quoi, pas seulement des nombres), muni d'une loi interne, c'est-à-dire une loi qui à deux éléments du groupe G associe un élément du même groupe. Cette loi, que l'on peut noter + ou * (le choix des signes est purement conventionnel), vérifie les propriétés suivantes :

(1) pour tout a il existe un élément neutre, noté e, tel que : $a * e = e * a = a$

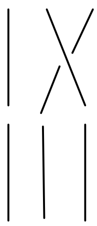
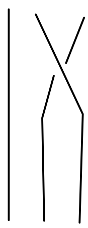
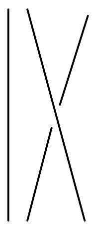
(2) pour tout a il existe un inverse, noté a', tel que $a * a' = a' * a = e$

On voit que la multiplication et l'addition sont des lois de ce genre : l'élément neutre de l'addition est 0, tandis que l'élément neutre de la multiplication est 1. En effet, si on ajoute 0 à n'importe quel nombre on obtient le même nombre, et si on multiplie n'importe quel nombre par 1 on obtient aussi le même nombre.

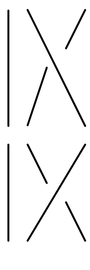
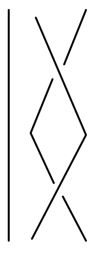
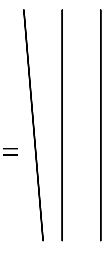
Ce qu'il est remarquable de voir, c'est que cette théorie peut s'appliquer à autre chose qu'à des nombres, par exemple à des nœuds. On peut définir la loi « * » comme le fait de mettre deux nœuds bout à bout. On trouve alors que

e =  , et pour a =  on trouve a' = 

En effet,

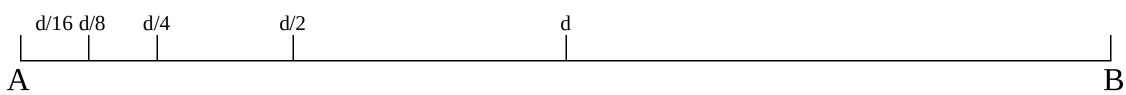
a * e =  =  =  = a

et

a * a' =  =  =  = e

Paradoxes et calculs mathématiques liés à l'infini

- Paradoxe de Zénon : le mouvement est impossible, car pour qu'un corps parcoure une distance d il doit d'abord en parcourir la moitié ; mais pour parcourir cette première moitié il doit d'abord en parcourir la moitié ; et on peut réitérer le raisonnement à l'infini, de sorte que le corps doit parcourir un nombre infini d'espace, ce qui est impossible en un temps fini. Donc le mouvement est impossible.



La solution est la suivante : certes, le nombre de distances à franchir tend vers l'infini, mais la longueur de ces distances tend vers zéro, dans un rapport tel que les deux infinis s'annulent et que la somme infinie de termes infiniment petit est finie (exactement comme la somme de la série $1/2^n$, qui tend vers 1 bien que ses termes soient en nombre infini).

- Au XIX^e siècle, le mathématicien Georg Cantor a entraîné une véritable révolution en découvrant le calcul *transfini*, qui permet de travailler sur des nombres infinis. L'idée de base est qu'il n'est pas nécessaire de compter les éléments de deux ensembles pour pouvoir les comparer : on peut se contenter de mettre leurs éléments en *bijection*, c'est-à-dire de les grouper deux à deux. Si c'est possible, sans résidu de part et d'autre, alors les deux ensembles ont le même nombre d'éléments. Ainsi, on aboutit au résultat surprenant que l'ensemble des entiers naturels a le même cardinal (infini) que l'ensemble des nombres pairs. A chaque entier *n* on peut en effet associer le nombre pair 2*n* :

Nombres entiers : 1, 2, 3, 4, 5, … n …
Nombres pairs : 2, 4, 6, 8, 10, … 2n …

Ce résultat montre que dans certains cas, le fameux axiome d'Euclide selon lequel « le tout est plus grand que la partie » est faux. On peut démontrer, de la même manière, qu'une droit infinie et un cercle ont le même cardinal, c'est-à-dire qu'ils « contiennent » le même nombre (infini) d'éléments. Mais cet infini est « plus grand » que l'infini des entiers naturels. La conjecture de Cantor, toujours pas démontrée à ce jour, est qu'il n'y a pas d'infini entre l'infini des entiers naturels et l'infini de la droite. Pour prouver l'existence d'un infini supérieur à l'infini des entiers naturels, voici une démonstration simple :

> Soit la suite Sn donc chaque terme est une suite infinie quelconque de 0 et de 1 :
> S1 : **1**, 0, 0, 1, 1, …
> S2 : 1, **0**, 0, 1, 0, …
> S3 : 0, 1, **1**, 1, 1, …
> Le cardinal de Sn est égal à celui des entiers naturels, car on peut mettre ces ensembles en bijection (Sn $\leftrightarrow$ n). Or le nombre total de suites de 0 et de 1 possible est supérieur au cardinal de Sn, car il existe une telle suite qui n'est pas dans Sn : nous pouvons la construire, il suffit de suivre la diagonale des suites Sn et de prendre à chaque fois l'autre élément que celui qui apparaît : dans notre exemple on aura S' = 0, 1, 0, … Par conséquent S' diffère de S1 car son premier terme n'est pas le même ; elle diffère de S2 car son deuxième terme n'est pas le même que S2 ; elle diffère de S3 car son troisième terme en diffère ; etc. Donc Sn ne contient pas S', donc il existe un ensemble plus grand que Sn.

Ces calculs sur l'infini n'ont pas pour seul intérêt de montrer que nos idées les plus fondamentales peuvent parfois être remises en cause. Ils ont aussi des conséquences philosophiques importantes, car ils nous permettent d'éviter certaines erreurs lorsque l'on raisonne sur l'infini. Par exemple, Nietzsche croit pouvoir démontrer la nécessité de l'éternel retour en arguant de l'infinité temporelle de l'univers. Mais il faut comparer cet infini au nombre de possibilités d'évolution de l'univers. En particulier, s'il se trouve que l'univers contient de la matière en quantité infinie, alors l'argument de Nietzsche ne fonctionne pas : il faut comparer l'infini « matériel » et l'infini « temporel » pour savoir si l'infini temporel est « assez long » pour couvrir toutes les configurations possibles de l'univers…

Postulats de la géométrie euclidienne :

> (1) On peut mener un segment de droite d'un point quelconque à un point quelconque.
> (2) On peut prolonger un segment de droite par un segment qui le continue dans la même direction.

(3) On peut tracer un cercle de centre quelconque et de rayon quelconque.
(4) Tous les angles droits sont égaux entre eux.
(5) Si deux droites du plan sont coupées par une troisième, et si les angles intérieurs d'un même côté de la sécante font ensemble moins de deux droits, alors les deux premières droites se rencontrent du même côté où les angles font moins de deux droits.
Autre formulation : Une droite et un point étant donnés, il passe par le point une unique parallèle à la droite.