

Le principe du tiers exclu

Le principe du tiers exclu est un principe logique moins fondamental que le principe d'identité et le principe de contradiction, car il peut être remis en question dans certains cas, et on peut même construire des systèmes logiques qui le récusent et admettent *trois* valeurs de vérité (vrai, faux, indécidable).

Aristote remarquait déjà que ce principe soulevait des paradoxes liés au devenir : par exemple, si aujourd'hui il est possible qu'une bataille navale ait lieu demain, et que le lendemain la bataille navale n'a pas lieu, il n'est plus vrai qu'il est possible qu'elle ait lieu. Pour éviter ce problème, un moyen simple serait d'admettre qu'il existe des propositions dont la vérité est indéterminée. Cet exemple nous montre un fait fondamental : la grande difficulté que la pensée a à appréhender le temps. Par nature, la pensée se place hors du temps, elle est intemporelle.

Le rejet du principe du tiers exclu permettrait d'ailleurs d'éviter certains paradoxes comme le paradoxe du menteur : on pourrait admettre que la proposition « je mens » n'est tout simplement ni vraie ni fausse.

La logique trivalente, qui rejette le principe du tiers exclu pour faire une place au possible ou à l'indécidable, fait partie des logiques modernes alternatives, avec par exemple la logique modale (qui traite de la nécessité) et la logique floue (dans laquelle il y a une infinité d'intermédiaires entre le vrai et le faux).

L'axiomatisation de l'arithmétique par Peano

Le logicien italien Peano a réduit toutes les mathématiques à une arithmétique axiomatisable en 5 axiomes. Le système final contient 3 indéfinissables (« idées primitives ») : 0, le concept de nombre entier et l'opération de successeur immédiat. Les 5 axiomes sont les suivants :

- (1) 0 est un nombre
- (2) si n est un nombre, le successeur immédiat de n est un nombre
- (3) si deux nombres ont le même successeur, ces deux nombres sont identiques
- (4) 0 n'est le successeur d'aucun nombre
- (5) si S est une classe à laquelle 0 appartient ainsi que le successeur de chaque nombre appartenant à S , alors chaque nombre appartient à S

A partir de ce résultat, Frege et Russell voulurent définir logiquement les 3 idées primitives et prouver logiquement les 5 axiomes pour réduire l'arithmétique à la logique. Outre le paradoxe des classes, Russell s'est heurté à certains axiomes irréductibles à des intuitions logiques simples.

Petits jeux logiques et mathématiques

Une devinette : vous êtes face à deux portes. Vous savez que l'une mène en enfer, l'autre au paradis, mais vous ne savez pas laquelle est la bonne. Devant chaque porte il y a un garde. Vous savez que l'un des gardes ment toujours, et que l'autre dit toujours la vérité ; mais vous ne savez pas lequel est lequel. Vous n'avez le droit de poser qu'une seule question pour savoir quelle est la bonne porte. Quelle est la question qui peut vous tirer d'affaire ? Réponse en annexe.

Autre exercice : constituez 4 triangles avec 6 allumettes.

Autre exercice : les deux puzzles triangulaires. [cf. images jointes.]