

I. Les sciences déductives [la démonstration]

On peut ranger les sciences en trois grandes catégories : les sciences déductives (logique et mathématiques), les sciences naturelles (physique, chimie, astronomie, biologie, etc.) et les sciences humaines (histoire, économie, sociologie, psychologie, psychanalyse, linguistique, anthropologie, etc.). A ces trois catégories correspondent trois types de rationalité, de méthode et de preuve. Les sciences déductives procèdent par hypothèse et démonstration. C'est pourquoi leur étude est étroitement liée à la notion de démonstration.

A. La logique



1. Présentation

La logique est la science du *logos*, c'est-à-dire du discours et de la pensée. La logique a été fondée par Aristote. Elle a relativement peu progressé au cours des siècles, jusqu'au XIX^e siècle où, sous l'impulsion de Frege, des progrès considérables ont été réalisés, au terme desquels on a vu exploser la logique en une multitude de logiques différentes adaptées à des situations et des types de rationalités différentes (mathématiques, sciences physiques, médecine, politique, etc.). Il est frappant de remarquer que l'évolution des mathématiques est similaire, surtout en ce qui concerne la géométrie : la géométrie euclidienne n'a pas changé depuis Euclide jusqu'au XIX^e siècle, où elle a été soudain remise en cause de manière spectaculaire. Mais n'anticipons pas.

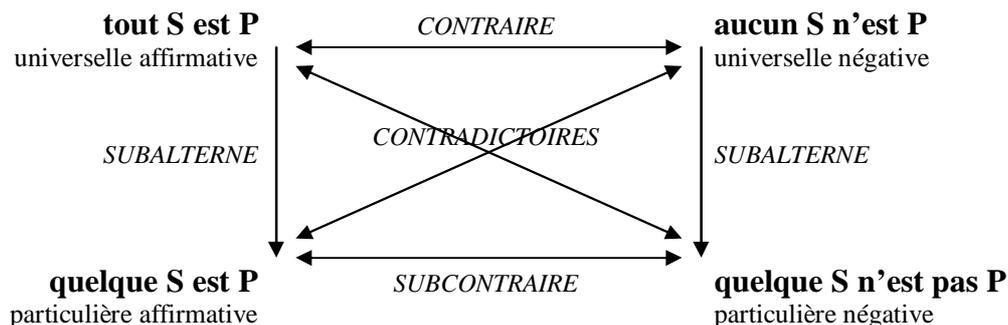
a. La logique d'Aristote

L'objet premier de la logique est la **proposition**, c'est-à-dire le discours déclaratif porteur d'une assertion et donc susceptible d'être vrai ou faux (discours apophantique). La proposition se compose d'un prédicat (qui est affirmé ou nié), d'un sujet, et d'une copule qui relie les deux. Exemple : *Socrate* (sujet) *est* (copule) *mortel* (prédicat). Tout jugement, selon Aristote, peut ainsi s'analyser comme l'attribution d'un prédicat à un sujet.

Une proposition peut être une affirmation ou une négation (c'est la **qualité** de la proposition). L'opposition entre une affirmation et sa négation est appelée une contradiction. Le principe de contradiction, que nous verrons plus loin, pose qu'une affirmation et une négation ne peuvent être vraies en même temps : on ne peut dire une chose et son contraire.

La **quantité** d'une proposition est ce qui distingue propositions universelles, particulières et singulières. Ex : « tout S est P » et « aucun S n'est P » sont des propositions universelles, « certains S sont P » et « certains S ne sont pas P » sont des propositions particulières et « x est P » et « x n'est pas P » sont des propositions singulières.

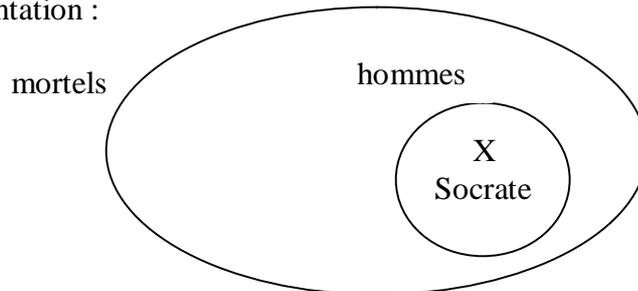
On peut schématiser les rapports entre les différentes propositions dans le *carré logique* suivant :



Le *syllogisme*, objet central de la logique d'Aristote, est un ensemble de 3 propositions, la dernière (ou conclusion) étant déduite des deux premières (la majeure et la mineure). On peut représenter un syllogisme par des cercles emboîtés. Il existe différents types de syllogismes. Exemple :

Majeure		Tous les hommes sont mortels		Tout B est C
Mineure		Socrate est un homme		A est B
Conclusion	donc	Socrate est mortel	donc	A est C

Représentation :



Fomesoutra.com
ça soutra
 Docs à portée de main

La logique vise à débusquer les erreurs de raisonnement, qu'elles soient volontaires (on parle alors de *sophismes*, en référence aux sophistes qui essayaient d'embrouiller leur interlocuteur par des raisonnements complexes) ou involontaires (on parle alors de *paralogismes*, du grec *para* qui signifie contre : parapluie, parachute, paratonnerre, paradoxe). Saurez-vous débusquer les erreurs des paralogismes suivants ?

Tout ce qui est rare est cher.
 Un cheval bon marché, c'est rare.
 Donc un cheval bon marché, c'est cher.

Le saucisson donne soif. La soif fait boire. Boire désaltère. Donc le saucisson désaltère.

Si j'enlève un grain de sable d'un tas de sable, j'ai encore un tas de sable.
 Donc, par récurrence, un grain de sable est un tas de sable.

Il y a un paradoxe beaucoup plus difficile à résoudre : le paradoxe du menteur. Il est tout simple : quelle est la valeur de vérité de la proposition « Je mens » ? Si elle est vraie, je mens, donc elle est fausse. Mais si elle est fausse, je ne mens pas, donc ce que dis est vrai, donc elle est vraie ! Bref, cette phrase ne peut être ni vraie ni fausse. Autre version du même paradoxe :

La phrase suivante est vraie.
 La phrase précédente est fausse.

Si la première phrase est vraie, la seconde est vraie donc la première est fausse : contradiction. Mais si la première phrase est fausse, la seconde est fausse donc la première phrase est vraie : nouvelle contradiction. Donc ces phrases ne peuvent être ni vraies ni fausses. Ce cas illustre la circularité ou (autoréférence) encore plus clairement que le paradoxe du menteur.

Quand le logicien grec Eubulide a découvert ce paradoxe, il s'est suicidé. Un tel « fanatisme logique » peut nous étonner. Mais il faut bien voir que si la logique était véritablement paradoxale, ce serait absolument terrible, car toute rationalité, et donc toute pensée et toute science, seraient impossibles. Heureusement, le paradoxe du menteur (et les autres paradoxes semblables, qui reposent tous sur une forme de circularité) ne remettent pas

en cause la validité de la logique en général. D'ailleurs le paradoxe du menteur ne remet en cause que le principe du tiers exclu.



b. Gottlob Frege

La logique aristotélicienne a eu cours, sans amélioration significative, pendant plusieurs siècles. Ce n'est qu'au XIX^e siècle qu'elle se voit profondément rénovée par le logicien allemand Gottlob Frege.

Frege supprime la copule car il analyse le prédicat comme une fonction (exactement comme une fonction mathématique). Ainsi, au lieu d'écrire « Socrate est mortel », Frege écrit $M(S) = V$ ($M(S)$ est vrai), ou plus simplement $M(S)$: la mortalité est une fonction dont la valeur « en » Socrate est « Vrai », tout comme x^2 est une fonction dont la valeur en 2 est 4. Le concept est donc une fonction qui n'associe pas un nombre à un nombre (comme la plupart des fonctions mathématiques que vous connaissez), mais une valeur de vérité (vrai ou faux) à un objet. A partir de cette découverte, Frege a pu construire un langage logique formel, une langue parfaite exprimant la pensée sans ambiguïté et permettant de penser mécaniquement (en manipulant les symboles sans se préoccuper de leur sens¹), réalisant ainsi le rêve de Leibniz.

Cette « mathématisation » de la logique a rendu possible l'informatique, c'est-à-dire la mécanisation de la pensée : les signaux électriques, correspondants à des bits – l'absence de courant se traduit par la valeur 0, ou « faux », la présence d'un courant par la valeur 1, ou « vrai » – permettent de coder les deux valeurs des fonctions logiques. Les *portes logiques* sont des montages simples qui reproduisent les opérateurs logiques de base. Par exemple, le « et » logique correspond à un montage en série, et le « ou » à un montage en parallèle : dans le premier cas le courant ne passe que si l'interrupteur 1 *et* l'interrupteur 2 sont fermés, dans le second cas le courant passe si l'interrupteur 1 *ou* l'interrupteur 2 est fermé.

Frege établit également la logique des relations : il remarque que certains prédicats apparents sont en fait des relations. Par exemple, la proposition « Pierre est amoureux de Sophie » s'analyse mieux comme une relation – que l'on peut écrire $A(P,S)$ – que comme une attribution de prédicat – que l'on écrirait $A(P)$, et où A désignerait la propriété complexe « être amoureux de Sophie ». Cette nouvelle fonction enrichit et simplifie considérablement le calcul de la vérité de certaines propositions complexes.

c. Le formalisme logique

La logique des propositions peut être formalisée en introduisant des signes qui représentent les opérations primitives : et, ou, non, etc. On peut ensuite établir des théorèmes et réaliser des calculs logiques.

Langage naturel	Ecriture logique
propositions	p, q
et	\circ
ou	\vee
non	\neg
implique	\Rightarrow
équivalent	\Leftrightarrow
p et q	$p \circ q$
p ou q	$p \vee q$
non p	$\neg p$
p est vraie ou q est fausse	$p \vee \neg q$
p implique q	$p \Rightarrow q$

¹ L'exemple des nombres complexes en mathématiques offre un autre exemple frappant de l'efficacité des signes indépendamment de leur signification. Cf. annexe sur les nombres complexes.

On peut aussi établir les *tables de vérités* de chaque fonction logique, qui donnent la vérité d'une proposition complexe en fonction de la vérité de ses composantes. Voici la table de la fonction *ou* et celle de la fonction *et* :

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Pour que la proposition complexe « p et q » soit vraie, il faut que les propositions p et q soient toutes deux vraies. Si je prétends avoir une pomme *et* une banane dans mon pique-nique, il faut que les deux propositions soient vraies pour que je dise la vérité. Alors que si j'affirme avoir une pomme *ou* une banane, il suffit que l'une ou l'autre soit vraie pour que l'ensemble soit vrai. On peut construire ainsi les tables de vérité de toutes les fonctions logiques. L'intérêt est que l'on peut obtenir des équivalences : ainsi, dire que p implique q revient à dire que si p est vraie, q est vraie, donc que ou bien p est fausse, ou bien q est vraie. Ce qu'on peut écrire ainsi : $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$. On le vérifie en constatant que les tables de vérité des deux fonctions sont bien les mêmes :

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

D'ailleurs on peut ajouter que $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$: dire que p implique q revient à dire que non q implique non p. Par exemple, si étudier implique logiquement d'obtenir le bac, alors échouer au bac implique logiquement que l'on n'a pas étudié.

2. Vérité et validité

Revenons sur la distinction entre validité et vérité. Le syllogisme *Tous les hommes sont mortels, or Socrate est un homme, donc Socrate est mortel* est un raisonnement valide : c'est-à-dire que si les prémisses sont vraies, alors la conclusion est vraie. La validité ne dépend pas de la vérité des prémisses, elle dépend seulement de la forme du syllogisme : c'est une propriété purement *formelle* du raisonnement. Ainsi, tout raisonnement de la forme *A est B et B est C donc A est C* est valide. Par exemple, le syllogisme suivant est valide :

Tous les oiseaux sont des pingouins.
Nicolas Sarkozy est un oiseau.
Donc Nicolas Sarkozy est un pingouin.



Ce raisonnement est parfaitement valide : si les prémisses étaient vraies, la conclusion serait vraie. Mais comme les prémisses sont fausses la conclusion est fausse. La vérité de la conclusion dépend donc à la fois de la *vérité* des prémisses et de la *validité* du raisonnement.

La logique n'étudie pas la vérité des prémisses, qui relève des autres sciences. La logique étudie seulement la validité des raisonnements. Mais comment établir cette validité ? Comment démontrer qu'un raisonnement est valide ?

3. Les limites de la démonstration

Nous sommes ici face à un véritable paradoxe. En effet, toute démonstration part de certaines propositions (les prémisses) pour aboutir à une conclusion. Pour démontrer ces prémisses, il faudrait donc faire appel à d'autres prémisses, qui devraient être à leur tour démontrées à partir d'autres prémisses : nous sommes face à une régression à l'infini. Nous devons donc reconnaître l'impossibilité de tout démontrer. Il faut admettre des *premiers principes* qui ne peuvent pas être démontrés car ils sont au fondement de toute démonstration. Or les *principes logiques* sont justement ces premiers principes. Par conséquent, **on ne peut absolument pas démontrer les principes logiques**.

Voilà un paradoxe étonnant ! La logique, science de la démonstration, est elle-même indémontrable ! Quel échec retentissant ! En vérité, ce n'est pas un échec. Cela montre que la démonstration est, par définition, limitée. Contrairement aux apparences, la démonstration ne nous donne pas la vérité, elle ne nous donne que la validité, la rigueur du raisonnement, la cohérence. Toute démonstration repose sur des principes qui doivent être acceptés, bien qu'ils soient indémontrables.

Mais alors qu'est-ce qui nous prouve la vérité de ces premiers principes, si ce ne peut être une démonstration ? Cette question est capitale, car la validité de tous nos raisonnements et donc la vérité de toutes nos conclusions dépend de la vérité de ces premiers principes. Aristote, qui reconnaissait déjà les limites de la démonstration (ou *science*) a parlé d'*intuition* et d'*induction* pour désigner cette faculté qui permet de connaître les premiers principes :

C'est nécessairement l'induction qui nous fait connaître les principes, car c'est de cette façon que la sensation elle-même produit en nous l'universel. Quant aux *habitus* de l'entendement par lesquels nous saisissons la vérité, puisque les uns sont toujours vrais et que les autres sont susceptibles d'erreur, comme l'opinion, par exemple, et le raisonnement, la science et l'intuition étant au contraire toujours vraies ; que, d'autre part, à l'exception de l'intuition, aucun genre de connaissance n'est plus exact que la science, tandis que les principes sont plus connaissables que les démonstrations, et que toute science s'accompagne de raisonnement : il en résulte que **des principes il n'y aura pas science**. Et puisque, à l'exception de l'intuition, aucun genre de connaissance ne peut être plus vrai que la science, c'est une intuition qui appréhendera les principes. (...) Si donc nous ne possédons en dehors de la science aucun genre de connaissance vraie, il reste que c'est l'intuition qui sera principe de la science. Et l'intuition est au principe du principe lui-même, et la science tout entière se comporte à l'égard de l'ensemble des choses comme l'intuition à l'égard du principe.

Aristote, *Seconds analytiques*, II, 19



4. Les « premiers principes », ou principes logiques

De quoi s'agit-il ? Pour le savoir, il faut d'abord savoir quels sont ces fameux premiers principes logiques au fondement de toute démonstration. Ils sont au nombre de trois.

(1) Le **principe d'identité** affirme que toute chose est identique à elle-même. ($A = A$)

(2) Le **principe de contradiction** pose qu'on ne peut pas affirmer à la fois une chose et son contraire : « il est impossible que le même attribut appartienne et n'appartienne pas en même temps au même sujet et sous le même rapport »². En langage logique : $\neg(A \circ \neg A)$.

(3) Le **principe du tiers exclu** pose que toute proposition est vraie ou fausse. Il n'y a pas de troisième possibilité. ($A \vee \neg A$)

Ces trois principes nous semblent absolument évidents. C'est précisément pour cette raison que nous sommes incapables de les démontrer : car toute chose par lesquels on tenterait de les expliquer serait moins évidente qu'eux. Les choses les plus évidentes ne peuvent être démontrées, car démontrer c'est ramener une idée à des idées plus évidentes.

² Aristote, *Métaphysique*, IV.

5. L'intuition, principe des principes

On peut tout de même avancer des arguments en faveur de ces principes. Aristote en propose trois principaux, qui nous permettent de comprendre ce qu'il veut dire par *intuition* (il ne s'agit en aucun cas de l'intuition féminine !).

Premier argument : ces principes sont la condition de toute pensée. Sans eux on ne peut rien dire ni penser. Si quand je dis ou pense une chose, je dis ou pense aussi son contraire, ce que je dis ou pense n'a aucun sens. Nous pouvons ainsi comprendre que ces principes sont la condition du sens et de la pensée. Nous explorons, de l'intérieur, les limites de la pensée en « voyant » que ce qui est de l'autre côté n'est pas pensable. Nous « voyons » bien que si nous ne respectons pas le principe de contradiction nous ne pouvons pas penser du tout.

Le deuxième argument, lié au premier, est que même ceux qui prétendent rejeter ces principes les acceptent en réalité, comme le prouve leur comportement. Car celui qui penserait véritablement que le poison, par exemple, est à la fois mortel et n'est pas mortel, celui-là ne survivrait pas longtemps. Il y a un lien étroit entre pensée et comportement. Quand on doute de la sincérité d'un homme, on fera bien de se fier à ses actes plutôt qu'à ses paroles. Le comportement des hommes nous prouve que le principe de contradiction est la condition de la pensée : on peut le rejeter par nos mots, mais pas par nos actes. On pourrait même dire qu'il est la condition de la vie.

Enfin, on peut aussi considérer que ces principes sont obtenus par *induction*, c'est-à-dire qu'ils sont le résultat de nos observations du monde, dont ils résument les traits les plus généraux. Dans toute science en effet, on observe que les choses sont identiques à elles-mêmes, etc. Ce dernier argument est ambigu car il part du principe que les principes logiques portent sur le monde dont ils expriment les traits les plus généraux, ce qui est contradictoire avec l'idée qu'ils ne concernent que la pensée dont ils indiquent l'exigence de cohérence interne.

6. La logique ne dit rien sur le monde

Il serait d'ailleurs tout à fait paradoxal que ces principes portent sur le monde, car leur connaissance semble innée : nous savons a priori (c'est-à-dire avant toute expérience) que toute chose est identique à elle-même, qu'un homme ne peut pas être à la fois mortel et immortel, etc. Si ces principes sont innés, c'est donc qu'ils ne disent rien. Dire que $A = A$, c'est ne rien dire du tout, c'est se contenter de poser les conditions de la pensée. C'est une répétition, une redondance, une *tautologie*.

Ainsi pour Wittgenstein, les lois logiques sont *vides de sens*, au sens où elles ne nous apprennent rien sur le monde : ce sont des tautologies. Les propositions mal formées (du type : « 4 est rouge » ou « le ciel est ou » ou même « Xyszwt ») sont *dénuées de sens* (*unsinning*). Les propositions bien formées sont ou bien des propositions qui portent sur le monde (du type « $A = B$ » ou « le ciel est bleu ») et qui peuvent être vraies ou fausses, ou bien des propositions *vides de sens* (*sinnlos*), c'est-à-dire des lois logiques, des tautologies.

propositions		
mal formées dénuées de sens (<i>unsinning</i>)	bien formées	
	vides de sens (<i>sinnlos</i>) tautologies lois logiques	propositions atomiques vraies ou fausses
« 4 est rouge », « le ciel est ou », « Xyszwt »	« $A = A$ », « si A est B et B est C alors A est C »	« $A = B$ », « le ciel est bleu »

C'est pour cela que les lois logiques sont toujours vraies et incontestables : car elles ne disent *rien*. Comment nier *rien* ? Comment dire que celui qui ne dit rien se trompe ? Ce sont des jugements *analytiques* (ils analysent un concept) et non des jugements *synthétiques* (qui, reliant un concept à un autre, apportent une connaissance). Dire que le mètre-étalon (la barre métallique conservée à Paris et qui définit le mètre) mesure un mètre, c'est énoncer un jugement analytique, qui est vrai a priori, par définition. C'est un jugement logique. En revanche, dire que tout autre objet mesure un mètre, c'est énoncer un jugement synthétique dont la vérité doit se vérifier a posteriori (par une expérience), et dont la vérité n'est pas nécessaire mais contingente.

Jugements analytiques	Jugements synthétiques
« A = A »	« A = B »
« Le mètre-étalon mesure un mètre »	« Ma règle mesure un mètre »
vérité nécessaire	vérité contingente (vrai ou faux)
vrai a priori	vrai (ou faux) a posteriori
vrai par définition	vrai par expérience
jugement sur le langage (porte sur les mots : définit le sens du mot « mètre »)	jugement sur le monde (porte sur les objets : établit une relation physique entre deux corps)



7. La valeur de la logique

Mais si la logique ne nous apprend rien sur le monde, à quoi sert-elle ? Elle sert à clarifier la pensée et à éviter de tomber dans des erreurs de raisonnement. Cela peut sembler peu de choses, mais en vérité la logique a apporté des clarifications importantes, notamment dans les questions philosophiques. Wittgenstein a même pensé que *tous* les problèmes philosophiques étaient des problèmes mal posés, des problèmes de langage et de logique, et que la logique allait les faire disparaître. Ou, pour le dire autrement, que la philosophie ne dit rien du monde mais ne vise qu'à dissiper des malentendus.

L'idée de Wittgenstein est que le langage est en isomorphisme avec le monde : il y a une analogie de forme entre la proposition (« le chat est sur le tapis ») et un fait du monde (le fait que le chat sur le tapis) : à chaque fois, en effet, la proposition exprime des relations logiques entre des objets du monde, c'est-à-dire des états de choses.

Par conséquent, il n'y a pas d'énigme : toute question bien posée peut aussi recevoir une réponse, car elle correspond à un fait du monde et à une certaine expérience. Si les problèmes philosophiques sont insolubles, c'est donc qu'ils sont mal posés. En ramenant toute vérité à une expérience possible (c'est aussi la grande idée de Peirce), le positivisme logique exclut les questions métaphysiques insolubles, qui sont désormais considérées comme dénuées de sens.

Concrètement, un argument philosophique comme l'argument ontologique qui croit pouvoir prouver l'existence de Dieu par un raisonnement purement logique est réfuté par l'analyse logique, qui montre que la logique ne dit rien du monde et que l'existence n'est pas une propriété.

Les positivistes logiques allèrent jusqu'à dire que les métaphysiciens parlaient dans le vide, que confondant vivre et connaître, ils étaient en quelque sorte de mauvais poètes, des musiciens sans don musical. Montaigne disait déjà que toute la philosophie n'est qu'une « poésie sophistiquée ».