

Cours de mathématiques : 1 Bac Lettre

Les exercices et les devoirs

Réalisé par : Younes AIT IDDIR



Mathématique Pr. Younes AIT IDDIR

TABLE DES MATIÈRES

1	La logique	5
1.1	Proposition	5
1.2	Les quantificateurs	5
1.2.1	Le quantificateur existentielle ("∃")	5
1.2.2	Le quantificateur universel ("∀")	6
1.3	Opérations sur les propositions	6
1.3.1	La négation d'une proposition	6
1.3.2	Conjonction de deux propositions	7
1.3.3	La disjonction de deux propositions	7
1.3.4	Implication de deux propositions	8
1.3.5	Équivalence de deux propositions	9
2	Calcul numérique :	10
2.1	Équations et inéquations de premier degré a une inconnue	10
2.1.1	Équation de la forme : $ax + b = 0$ où $a; b \in \mathbb{R}$	10
2.1.2	Équation de la forme : $\frac{ax + b}{cx + d} = 0$ où $a; b; c; d \in \mathbb{R}$	11
2.1.3	Inéquation de premier degré a une inconnue :	11
2.2	Équation de second degré à une inconnue	12
2.2.1	Définitions :	12
2.2.2	Factorisation d'un trinôme du second degré	14
2.2.3	Signe d'un trinôme du second degré	15
2.3	Inéquation du second degré	16
2.4	Système de deux équations du premier degré	17
2.5	Proportionnalité - Pourcentage - Échelles	19
2.5.1	Proportionnalité	19
2.5.2	Pourcentage	20
2.5.3	Échelle	20
2.6	Devoir libre 1 S_1	21
2.7	Devoirs surveiller 1 S_2	22
3	Les fonctions numériques	24
3.1	L'ensemble de définition d'une fonction :	24
3.1.1	Activités :	24
3.1.2	Définition	25
3.2	Fonction paire - fonction impaire	25
3.2.1	Activité :	25
3.2.2	Définition	25

3.2.3	L'interprétation géométrique (La courbe d'une fonction) :	25
3.3	La fonction majorée - la fonction minorée - la fonction bornée :	27
3.3.1	Activité :	27
3.3.2	Solution de l'activité :	27
3.4	Comparaison de deux fonctions et l'interprétation géométrique :	27
3.4.1	Égalité de deux fonctions :	27
3.4.2	La résolution graphique des équations et des inéquations :	28
3.5	Les variations d'une fonction :	31
3.5.1	Définitions :	31
3.5.2	Taux de variations :	32
3.6	Extremums d'une fonction : (Valeur minimale - Valeur maximale) :	33
3.6.1	Activité :	33
4	Les suites numériques	36
4.1	Définitions :	36
4.1.1	Activité :	36
4.1.2	Définition et exemples :	36
4.2	La suite arithmétique	37
4.2.1	Le terme général d'une suite arithmétique :	38
4.2.2	La somme des termes successives d'une suite arithmétique	39
4.3	La suite géométrique :	40
4.3.1	Définitions :	40
4.3.2	Le terme général d'une suite géométrique :	40
4.3.3	La somme des termes successives d'une suite géométrique	41
4.4	Devoir libre 2 S ₁	45
5	Dénombrement	55
5.1	Le principe fondamental du dénombrement	55
5.1.1	Activités	55
5.2	Arrangements et permutations et combinaisons :	58
5.2.1	Arrangements et permutations :	58
5.2.2	Combinaisons	60
5.3	Types de tirages	60
6	Les limites des fonctions :	71
6.1	Activités :	71
6.1.1	Activité (Limite infinie en 0) :	71
6.1.2	Activité (Limite finie en 0) :	71
6.1.3	Activité (Limite infinie en $+\infty$ et en $-\infty$) :	72
6.1.4	Limite finie d'une fonction en $+\infty$ et en $-\infty$	73
6.2	Définitions et propriétés :	73
6.2.1	Limite finie d'une fonction en un point :	73
6.2.2	La limite de la fonction : $x \mapsto x^n$ en 0	74
6.2.3	Quelques opérations sur les limites :	74
6.2.4	Limite d'une fonction polynôme en un point - limite d'une fonction rationnelle en un point :	74
6.3	La limite à droite - la limite à gauche :	75
6.4	Opérations sur les limites :	76
6.5	Autres méthodes de calcul :	79

7	La dérivation	81
7.1	Le nombre dérivé en un point - l'interprétation géométrique du nombre dérivé - la droite tangente en un point	81
7.1.1	Activités et définitions	81
7.1.2	L'équation de la tangente à la courbe en un point :	82
7.2	La fonction dérivée :	83
7.2.1	Définition	83
7.2.2	La dérivation de quelques fonctions usuelles	84
7.2.3	Les opérations sur les fonctions dérivables :	84
7.3	Les variations d'une fonction et le signe de la dérivée :	86
8	L'étude des fonctions	88
8.1	L'asymptote verticale et l'asymptote horizontale :	88
8.1.1	L'asymptote verticale :	88
8.1.2	L'asymptote horizontale :	89
8.2	Étude de la fonction de seconde degré : $x \mapsto f : ax^2 + bx + c$	90
8.3	Étude de la fonction : $x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}$	92
8.4	Étude de la fonction polynôme degré 3 : $x \mapsto f : ax^3 + bx^2 + cx + d$	94

CHAPITRE 1

LA LOGIQUE

1.1 Proposition

Définition :

Une proposition est un texte mathématique qui a un sens et qui soit vrai soit faux pas les deux en même temps.

Exemples :

- La proposition : " $3 \times 2 = 16$ " est fausse
- la proposition : "Deux droites strictement parallèles se coupent" est fausse
- La proposition : " $5 > 3$ " est vraie.

1.2 Les quantificateurs

1.2.1 Le quantificateur existentielle (" \exists ")

a) Définition :

La proposition " $(\exists x \in E) : P(x)$ " signifie qu'il existe au moins un élément $x \in E$ qui vérifie $P(x)$, et qu'elle soit vrai lorsqu'on trouve au moins un élément x de E qui vérifie $P(x)$.

Le symbole \exists est appelé "le quantificateur existentielle" et se lit "il existe au moins".

b) Remarques :

La proposition " $(\exists! x \in E) : P(x)$ " signifie qu'il existe un seule élément x de E qui vérifie $P(x)$.

Exemples :

- 1) La proposition $P_1 : "(\exists x \in \mathbb{R}) : 2x + 1 = 0"$ est vraie, (car l'élément $-\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ vérifie $2x + 1 = 0$).
- 2) La proposition $P_2 : "(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 = -1"$ est fausse, (car il n'existe pas d'élément de \mathbb{R} qui vérifie $x^2 = -1$).
- 4) La proposition $P_3 : "(\exists x \in \mathbb{N}) : n + 1 = 0"$ est fausse, (car il n'existe pas d'élément de \mathbb{N} qui vérifie $n = -1$. ($-1 \notin \mathbb{N}$).

Exercice 1

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

1. $Q_1 : "(\exists x \in \mathbb{R}) : 4x - 3 = 0"$
2. $Q_2 : "(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 + x - 2 = 0"$

3. $Q_3 : "(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 - x + 2 = 0"$

4. $Q_4 : "(\exists x \in \mathbb{R}) : 4x - 16 > 0"$

1.2.2 Le quantificateur universel (" \forall ")

a) Définition :

Soit " $(x \in E) : P(x)$ " une fonction propositionnelle ($E \neq \emptyset$).

La proposition " $(\forall x \in E) : P(x)$ " signifie que tout élément $x \in E$ vérifie $P(x)$. et qu'elle soit vraie lorsque pour tout $x \in E$ on a $P(x)$ est vraie.

Le symbole \forall est appelé "le quantificateur universel" et se lit "pour tout" ou "quel que soit".

Exemples :

- 1) La proposition $P_4 : "(\forall x \in \mathbb{R}) : 2x + 1 = 0"$ est fautive, (car l'élément $0 \in \mathbb{R}$ ne vérifie pas $2x + 1 = 0$).
- 2) La proposition $P_5 : "(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 \geq 0"$ est vraie, (car pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 \geq 0$).

Exercice 2

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

1. $Q_4 : "(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 + x + 2 > 0"$
2. $Q_5 : "(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 + 1 \geq 1"$
3. $Q_6 : "(\forall x \in \mathbb{R}) : 4x + 16 > 0"$

Exercice 3

1. Écrire les propositions suivantes à l'aide des quantificateurs :

P : " pour tout entier naturel n le nombre $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel".

Q : " il existe au moins deux entier relatif n et m tel que : $n - m = 5$ ".

2. Déterminer la valeur de vérité des propositions P et Q .

1.3 Opérations sur les propositions

1.3.1 La négation d'une proposition

a) Définition :

Définition 1.1

La négation d'une proposition P notée (non P) ou $(\neg P)$ ou (\bar{P}) est la proposition qui est vraie si P est fautive et qui est fautive si P est vraie.

Table de vérité :

P	$\neg P$
V	F
F	V

b) Exemples

- La négation de la proposition " $P : 1 > \sqrt{2}$ " est " $\neg P : 1 \leq \sqrt{2}$ ".
- La négation de la proposition " $Q : \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ " est " $\neg Q : \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ".
- La négation de la proposition " $R : (-2)^2 = -4$ " est " $\neg R : (-2)^2 \neq -4$ ".

c) Remarques

1. Pour déterminer la négation d'une proposition il faut déterminer la négation de Certains Symboles :

Le symbole	=	<	>	∈	⊂	∀
la négation	≠	≥	≤	∉	⊄	∃

2. La négation de la proposition " $(\exists x \in E) : P(x)$ " est " $(\forall x \in E) : \neg P(x)$ ".

La négation de la proposition " $(\forall x \in E) : P(x)$ " est " $(\exists x \in E) : \neg P(x)$ ".

3. Pour montrer que la proposition " $(\forall x \in E) : P(x)$ " est fautive il suffit de montrer que sa négation " $(\exists x \in E) : \neg P(x)$ " est vraie, et donc il suffit de donner un exemple.

Exercice 4

Montrer que la proposition : " $(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$ " est fautive.

Exercice 5

1) Déterminer la négation des propositions suivantes :

$$P_1 : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N}) : x \leq n$$

$$P_2 : (\exists x \in \mathbb{R}) : 2x + 1 = 3$$

$$P_3 : \mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$$

$$P_4 : (\forall n \in \mathbb{N}) : n \in \mathbb{Z}$$

$$P_5 : (\forall x \in \mathbb{R}) : 4x + 16 \geq x$$

2) Déterminer la valeur de vérité des propositions précédentes.

1.3.2 Conjonction de deux propositions

a) Activité :

L'étudiant Omar enseigne à la fois l'arabe ; Le français et l'anglais.

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

P_1 : Omar enseigne " l'arabe et le français.

P_2 : Omar enseigne " l'arabe et l'espagnol.

P_3 : Omar enseigne " l'espagnol et l'allemand.

b) Définition

Définition 1.2

la conjonction de deux propositions notée (" P et Q ") ou $(P \wedge Q)$ est une proposition qui est vraie si P et Q sont vraies. et qui est fautive sinon.

On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

c) Exemples

1. la proposition " Deux droites strictement parallèles se coupent" et " $2 \in \mathbb{N}$ " est une proposition fautive.

2. la proposition " $\sqrt{\sqrt{9}} = \sqrt{3}$ " et " $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ " est fautive.

3. la proposition " $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ " et "3 est impair" est une proposition vraie.

Remarque

Les propositions $(P$ et $Q)$ et $(Q$ et $P)$ ont même vérité. On dit que la conjonction est commutative.

1.3.3 La disjonction de deux propositions

a) Activité :

L'étudiant Omar enseigne à la fois l'arabe ; Le français et l'anglais.

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

P_1 : Omar enseigne " l'arabe ou le français.

P_2 : Omar enseigne " l'arabe ou l'espagnol.

P_3 : Omar enseigne " l'espagnol ou l'allemand.

b) Définition

Définition 1.3

la disjonction de deux propositions notée (" P ou Q ") ou $(P \vee Q)$ est une proposition qui est fausse si P et Q sont fausses. et qui est vraie sinon.

On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

c) Exemples

1. la proposition " Deux droites strictement parallèles se coupent" ou " $2 \in \mathbb{N}$ " est une proposition vraie.
2. la proposition " $\sqrt{\sqrt{9}} = \sqrt{3}$ " ou $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$. est vraie.
3. la proposition " $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$ " ou " $\mathbb{R} \subset \mathbb{N}$ " est une proposition fausse.

Remarque

Les propositions $(P$ ou $Q)$ et $(Q$ ou $P)$ ont même vérité. On dit que la disjonction est commutative.

Propriété 1.1

La négation de la proposition $(P$ ou $Q)$ est la proposition $(\neg P$ et $\neg Q)$.

La négation de la proposition $(P$ et $Q)$ est la proposition $(\neg P$ ou $\neg Q)$.

1.3.4 Implication de deux propositions

a) activité

a) Définition

Définition 1.4

L'implication de la proposition P vers la proposition Q est la proposition notée $P \Rightarrow Q$ qui est fausse si P est vraie et Q est fausse et qui est vraie sinon.

On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

b) Exemples

1. " $9 > 4 \Rightarrow 9 > 2$ est une proposition vraie.
2. " $\sqrt{2} \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ " est une proposition vraie.
3. "3 est nombre impair \Rightarrow 4 est un nombre impair " est une proposition fausse.
4. "4 est nombre impair \Rightarrow 3 est un nombre impair " est une proposition vraie.

c) Remarques

1. La proposition $P \Rightarrow Q$ se lit « P implique Q » (ou si P alors Q).
2. les deux propositions $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ elles ont pas le même sens.
3. L'implication $Q \Rightarrow P$ est l'implication réciproque de l'implication $P \Rightarrow Q$.

4. Pour montrer que la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie, on commence de la proposition P et il faut trouver la proposition Q . (on suppose que P est vraie et on montre que Q est vraie).

Exercice 6

Soit f la fonction définie par : $f(x) = ax^2 + c$, ($a \neq 0$). Considérons les deux propositions :

P : "l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions". Q : " $ac < 0$ ".

Montrer que : $P \Rightarrow Q$.

1.3.5 Équivalence de deux propositions

a) Définition

Définition 1.5

l'équivalence de deux propositions P et Q est une proposition notée $(P \Leftrightarrow Q)$ qui est vraie si P et Q ont même vérité et qui est fausse dans les cas contraires.

On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

" $P \Leftrightarrow Q$ " signifie que " $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ ".

b) Exemples

" $|2 - \pi| = \pi - 2 \Leftrightarrow \sqrt{2^2} = 2$ " est une proposition vraie.

" $1 + \sqrt{3^2} = 4 \Leftrightarrow 12 = 2^2 \times 3^2$ " est une proposition fausse.

" $-1 \in \mathbb{N} \Leftrightarrow -1 > 0$ " est une proposition vraie.

" $(\exists n \in \mathbb{Z}) : 2n - 1 = 0 \Leftrightarrow 2$ est un nombre impair" est fausse.

c) Remarque

1. $P \Leftrightarrow Q$ se lit (P équivaut à Q) ou (P si et seulement si : Q) ou (P si équivalent à Q).
2. $P \Leftrightarrow Q$ est la proposition ($P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$).
3. Les deux propositions $P \Leftrightarrow Q$ et $Q \Leftrightarrow P$ ont le même sens.
4. On général pour montrer que $P \Leftrightarrow Q$ il suffi de montrer que $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.

CHAPITRE 2

CALCUL NUMÉRIQUE :

2.1 Équations et inéquations de premier degré à une inconnue

2.1.1 Équation de la forme : $ax + b = 0$ où $a; b \in \mathbb{R}$

Activité :

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

- 1) $3x - 5 = 2x + 3$; 2) $\frac{5x+1}{\sqrt{3}+2} = -4+x$; 3) $(2x+3)(5x-1) = 0$
4) $x^2 - 4x + 4 = 0$; 5) $2x+3 = -5(x+1) - 3$; 6) $2x^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

Propriété et Définition 2.1

- Une équation du premier degré à une seule inconnue est toute équation de la forme $ax + b = 0$.
- Soit S l'ensemble de solution de l'équation $ax + b = 0$:

★ Si $a \neq 0$ alors $S = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$

★ Si $a \neq 0$ et $b = 0$ alors $S = \mathbb{R}$ tous les nombres réels sont des solutions

★ Si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors $S = \emptyset$ l'équation n'admet pas de solutions

Exemple 2.1

- 1) La solution de l'équation : $2x + 4 = 0$ est $x = -\frac{4}{2} = -2$ donc $S = \{-2\}$
2) L'équation : $x + 1 = x + 2$ signifie que : $1 = 2$ (impossible) donc cette équation n'admet pas de solution c'est à dire $S = \emptyset$
3) L'équation $2x + 4 - x - 5 = x - 1$ signifie que $2x + 4 = 2x + 4$ donc tous les nombres réels sont des solutions de cette équation c'est à dire $S = \mathbb{R}$

Exercice 7

Résoudre dans \mathbb{R} les équation :

- 1) $2x + 6 = 12$; 2) $|2x + 6| = 12$; 3) $x^2 - 9 + (x + 3)(x - 1) = 0$
4) On pose : $P(x) = x^2 - 3x + 2$,
a) Montrer que : $P(2) = 0$
b) Résoudre l'équation : $x^2 - 3x + 2 = 0$
5) On pose : $Q(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$,
a) Montrer que : $P(1) = 0$ et $P(3) = 0$
b) Résoudre l'équation : $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$

2.1.2 Équation de la forme : $\frac{ax+b}{cx+d} = 0$ où $a; b; c; d \in \mathbb{R}$

Propriété 2.1

Pour résoudre une équation de la forme : $\frac{ax+b}{cx+d} = 0$: Il faut déterminer son ensemble de définition,

L'équation : $\frac{ax+b}{cx+d} = 0$ est définie si et seulement si $cx+d \neq 0$ si et seulement si $x \neq -\frac{d}{c}$

Donc son ensemble de définition est $D_E = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$ et son ensemble de solution est : $S = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$

Exemple 2.2

Considérons l'équation : (E) : $\frac{2x-6}{3x+12} = 0$

L'équation (E) est définie : s.s.s.i $3x+12 \neq 0$ s.s.s.i $x \neq -\frac{12}{3}$ donc : $D_E = \mathbb{R} - \{-4\}$.

Soit $x \in D_E$ on a : (E) : $\frac{2x-6}{3x+12} = 0 \Leftrightarrow 2x-6 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{-6}{2}$ donc $S = \{3\}$.

Exercice 8

Résoudre les équations :

- 1) . $\frac{4x-2}{x-2} = 0$; 2) . $\frac{-2x+8}{2x-3} = 0$; 3) . $\frac{x+5}{4x-8} = 0$; 4) . $\frac{\sqrt{2x-2}}{x+3} = 0$
 5) . $\frac{4x-6}{-2x+3} = 0$; 6) . $\frac{2x-8}{x-4} = 0$

2.1.3 Inéquation de premier degré à une inconnue :

Activité :

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations :

- 1). $4x-12 > 0$; 2). $4x-12 < 0$; 3). $4x-12 \geq 0$; 4). $4x-12 \leq 0$;

Définition 2.1

Une inéquation de premier degré à une inconnue est toute équation de la forme :

" $ax+b > 0$ " ou " $ax+b < 0$ " ou " $ax+b \geq 0$ " ou " $ax+b \leq 0$ " avec $a; b \in \mathbb{R}$.

Tableau de signe de $ax+b$ où $a; b \in \mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	Le signe de $-a$		Le signe de a

Exemples :

Le signe de $-a = 3$ Le signe de $a = -3$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a} = \frac{5}{3}$	$+\infty$
$-3x+5$	+	0	-

- Tableau de signe de : $-3x+5$ ($a = -3$ et $b = 5$) :

La solution de l'équation : $3x - 6 = 0$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$3x - 6$	—	0	+

- Tableau de signe de : $3x - 6$ ($a = 3$ et $b = -6$) :

D'après le tableau de signe : • les solution de l'équation : $3x - 6 > 0$ sont : $S =]2; +\infty[$

- les solution de l'inéquation : $3x - 6 \geq 0$ sont : $S = [2; +\infty[$
- les solution de l'inéquation : $3x - 6 < 0$ sont : $S =]-\infty; 2[$
- les solution de l'inéquation : $3x - 6 \leq 0$ sont : $S =]-\infty; 2]$

Exercice 9

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations :

- 1). $2x + 3 < 0$; 2). $-3x + 5 > 0$; 3). $-4x + 2 < 0$; 4). $6x + 1 \geq 0$; 5). $-5x + 3 \leq 0$

2.2 Équation de second degré à une inconnue

2.2.1 Définitions :

Définition 2.2

- Toute équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b, c sont des nombres réels et $a \neq 0$, est une équation du second degré à une inconnue dans \mathbb{R} .
- Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé discriminant de cette équation ou discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$

Propriété 2.2

On considère dans \mathbb{R} l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ où $a \neq 0$. et soit S son ensemble de solutions :

- Si $\Delta < 0$: l'équation n'admet pas de solution et on a : $S = \emptyset$.
- Si $\Delta = 0$: l'équation admet une unique solution $-\frac{b}{2a}$ et on a : $S = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$.
- Si $\Delta > 0$: l'équation admet deux solutions distincts à savoir : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
et on a : $S = \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$

Exemple 2.3

- 1) Résolvons l'équation : $3x^2 + 3x - 6 = 0$, on a : $a = 3$; $b = 3$ et $c = -6$ donc :

$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 3 \times -6 = 9 + 72 = 81 > 0$, alors l'équation admet deux solutions distincts :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{81}}{2 \times 3} = \frac{-3 - 9}{6} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{81}}{2 \times 3} = \frac{-3 + 9}{6} = 1$$

donc : $S = \{-2; 1\}$

- 2) Résolvons l'équation : $x^2 - 6x + 9 = 0$, on a : $a = 1$; $b = -6$ et $c = 9$ donc :

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 36 - 36 = 0$, alors l'équation admet une unique solution qu'est :

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2} = 3, \text{ donc : } S = \{3\}$$

- 3) Résolvons l'équation : $x^2 + 2x + 3 = 0$, on a : $a = 1$; $b = 2$ et $c = 3$ donc :

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 - 12 = -8 < 0$, alors l'équation n'admet pas de solution : $S = \emptyset$

- 4) Résolvons l'équation : $-x^2 = 6x + 8$, alors : $-x^2 - 6x - 8 = 0$ on a : $a = -1$; $b = -6$ et $c = -8$ donc :

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times -1 \times -8 = 36 - 32 = 4 > 0$, alors l'équation admet deux solutions distincts :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) - \sqrt{4}}{2 \times -1} = \frac{6 - 2}{-2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) + \sqrt{4}}{2 \times -1} = \frac{6 + 2}{-2} = -4$$

donc : $S = \{-2; -4\}$

Méthode:

- Étape 0 (éventuelle) : Mets l'équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$.
- Étape 1 : Identifie les coefficients a , b et c de l'expression du second degré.
- Étape 2 : Calcule le discriminant Δ en remplaçant a , b et c par leurs valeurs dans la formule $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Étape 3 : Effectue les opérations en respectant les priorités de calcul.
- Étape 4 : Donne le signe du discriminant obtenu.

Si $\Delta > 0$ (positif), il y a deux solutions :

- Étape 5 : Remplace a , b et Δ par leurs valeurs dans les deux formules $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Étape 6 : Calcule. Les deux résultats obtenus sont les solutions de l'équation.

Si $\Delta = 0$, il y a une solution :

- Étape 5 : Remplace a et b par leurs valeurs dans la formule $\frac{-b}{2a}$.
- Étape 6 : Calcule. Le résultat obtenu est la solution de l'équation.

Si $\Delta < 0$ (négatif), il n'y a pas de solution :

- Étape 5 : Conclue qu'il n'y a pas de solution.

Exercice 10

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

- 1) $x^2 - 3x + 2 = 0$
- 2) $4y^2 + 4y + 4 = 0$
- 3) $t^2 + t - 2 = 0$
- 4) $x^2 + 3x - 4 = 0$
- 5) $x^2 - 7x + 12 = 0$
- 6) $x^2 + x + 2 = 0$
- 7) $x^2 - 3x = 3x^2 - x - 4$
- 8) $x^2 = 5$
- 9) $x^2 = -1$
- 10) $2x^2 - 6x + 4 = 0$
- 11) $x^2 - x = x^2 + x - 1$

2.2.2 Factorisation d'un trinôme du second degré

Propriété 2.3

On considère le trinôme $ax^2 + bx + c$, Soit Δ son discriminant :

- Si $\Delta > 0$: alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distincts x_1 et x_2 et on a : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Si $\Delta = 0$: alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une unique solution : $-\frac{b}{2a}$ et on a : $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.
- Si $\Delta < 0$: alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solutions et le trinôme ne peut pas être factorisé en produit de polynômes de premier degré.

Exemple 2.4

- 1) l'équation : $3x^2 + 3x - 6 = 0$, admet deux solutions : -2 et 1 alors : $3x^2 + 3x - 6 = 3(x - (-2))(x - 1) = 3(x + 2)(x - 1)$
- 2) l'équation : $x^2 - 6x + 9 = 0$, admet une unique solution : $-\frac{b}{2a} = 3$ alors : $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$
- 3) l'équation : $x^2 + 2x + 3 = 0$, n'admet pas de solution alors : $x^2 + 2x + 3$ ne se factorise pas.

Exemple 2.5

- 1) l'équation : $-2x^2 - 3x + 2 = 0$, admet deux solutions : -2 et $\frac{1}{2}$ alors : $-2x^2 - 3x + 2 = -2(x - (-2))\left(x - \frac{1}{2}\right) = -2(x + 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$
- 2) l'équation : $2x^2 + 4x + 2 = 0$, admet une unique solution : $-\frac{b}{2a} = -1$ alors : $2x^2 + 4x + 2 = 2(x + 1)^2$
- 3) l'équation : $x^2 + x + 1 = 0$, n'admet pas de solution alors : $x^2 + x + 1$ ne se factorise pas.

Exercice 11

Factoriser les polynômes suivants :

- 1) $P(x) = x^2 - 7x + 12$
- 2) $Q(x) = -3x^2 - 9x + 30$
- 3) $R(x) = 4x^2 + 4x + 1$
- 4) $L(x) = 4x^2 + 5x + 1$
- 5) $H(x) = 25x^2 - 10\sqrt{2}x + 2$
- 6) $K(x) = -3x^2 + 2x - 7$

2.2.3 Signe d'un trinôme du second degré

Propriété 2.4

On considère le trinôme : $P(x) = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$) et soit Δ son discriminant.

- Si $\Delta < 0$, alors le signe de $P(x)$ est le signe de a pour tout x de \mathbb{R} .

$\Delta < 0$	x	$-\infty$	$+\infty$
	$ax^2 + bx + c$	<i>Signe de a</i>	

- Si $\Delta = 0$, alors le signe de $P(x)$ est le signe de a , pour tout $x \neq -\frac{b}{2a}$.

$\Delta = 0$	x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
	$ax^2 + bx + c$	<i>Signe de a</i>	0	<i>Signe de a</i>

- Si $\Delta > 0$, alors le signe de $P(x)$ est :
 - ▷ le signe de a à l'extérieur des racines ;
 - ▷ le signe contraire de a à l'intérieur des racines ;

$\Delta > 0$	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
	$ax^2 + bx + c$	<i>Signe de a</i>	0	<i>Signe contraire de a</i>	0

Exemple 2.6

- 1) Étudions le signe de trinôme : $P(x) = -2x^2 + x - 1$,

Le discriminant du trinôme $P(x)$ est : $\Delta = 1^2 - 4 \times -2 \times -1 = -7 < 0$

alors le signe de $P(x)$ est celui du nombre $a = -2 < 0$, alors $P(x) < 0$ pour tout x de \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	—	

- 2) Étudions le signe de trinôme : $Q(x) = 2x^2 + 2x - 4$,

Le discriminant du trinôme $Q(x)$ est : $\Delta = 2^2 - 4 \times 2 \times -4 = 36 > 0$,

l'équation admet deux solutions 1 et -2 ; alors le tableau de signe de $P(x)$ est :

$a = 2 > 0$	x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
	$Q(x)$	+	0	—	0

donc : $Q(x) \geq 0$ pour tout $x \in]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[$ et $Q(x) \leq 0$ pour tout $x \in [-2; 1]$

- 3) Étudions le signe de trinôme : $R(x) = x^2 - 6x + 9$,

Le discriminant du trinôme $R(x)$ est : $\Delta = 36 - 36 = 0$,

l'équation admet une seule solution 3; alors le signe de $R(x)$ est : $R(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

$a = 1 > 0$	x	$-\infty$	3	$+\infty$
	$R(x)$	+	0	+

Exercice 12

Déterminer le tableau de signe des polynômes suivants :

- $E(x) = -x^2 + 7x - 12$;
- $F(x) = -x^2 + 4x - 4$
- $G(x) = x^2 + x + 2$;
- $H(x) = x^2 - 8x + 15$
- $K(x) = x^2 + 8x + 16$;
- $L(x) = -x^2 + 2x + 8$

2.3 Inéquation du second degré**Définition 2.3**

On considère le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$; ($a \neq 0$). Toute Inéquation de la forme : $P(x) \geq 0$; $P(x) > 0$; $P(x) \leq 0$ ou $P(x) < 0$ est appelée **inéquation du second degré**.

Exemple 2.7

1) Résolvons dans \mathbb{R} l'inéquation (1) : $x^2 - 7x + 12 \geq 0$.

Étudions d'abord le signe du trinôme : $x^2 - 7x + 12$.

Pour cela il faut résoudre l'équation : $x^2 - 7x + 12 = 0$, l'équation admet deux solutions : $x_1 = 3$ et $x_2 = 4$

x	$-\infty$	3	4	$+\infty$	
$x^2 - 7x + 12$	+	0	-	0	+

Tableau de signe de $x^2 - 7x + 12$:

L'ensemble de solution de l'inéquation : $x^2 - 7x + 12 \geq 0$ est : $S =]-\infty; 3] \cup [4; +\infty[$.

2) Résolvons dans \mathbb{R} l'inéquation (2) : $-x^2 + x - 1 \geq 0$.

Étudions d'abord le signe du trinôme : $-x^2 + x - 1$.

Pour cela il faut résoudre l'équation : $-x^2 + x - 1 = 0$, $\Delta < 0$ l'équation n'admet pas de solution :

x	$-\infty$ $+\infty$
$-x^2 + x - 1$	-

Tableau de signe de $-x^2 + x - 1$:

▷ L'ensemble de solution de l'inéquation : $-x^2 + x - 1 \geq 0$ est : $S = \emptyset$.

▷ L'ensemble de solution de l'inéquation : $-x^2 + x - 1 \leq 0$ est : $S = \mathbb{R}$.

3) Résolvons dans \mathbb{R} l'inéquation (2) : $-x^2 + 4x - 4 \geq 0$.

Étudions d'abord le signe du trinôme : $-x^2 + 4x - 4$.

Pour cela il faut résoudre l'équation : $-x^2 + 4x - 4 = 0$, $\Delta = 0$ l'équation admet une seule solution : $x = 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-x^2 + 4x - 4$	-	0	-

Tableau de signe de $-x^2 + 4x - 4$:

▷ L'ensemble de solution de l'inéquation : $-x^2 + 4x - 4 \geq 0$ est : $S = \{2\}$.

▷ L'ensemble de solution de l'inéquation : $-x^2 + 4x - 4 \leq 0$ est : $S = \mathbb{R}$.

▷ L'ensemble de solution de l'inéquation : $-x^2 + 4x - 4 > 0$ est : $S = \emptyset$.

▷ L'ensemble de solution de l'inéquation : $-x^2 + 4x - 4 < 0$ est : $S = \mathbb{R} - \{2\}$.

Exercice 13

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

- 1) $2x^2 - 3x + 3 \geq 0$;
- 2) $-2x^2 - x - 3 > 0$;
- 3) $x^2 + 2x - 15 \leq 0$;
- 4) $-x^2 - 4x + 5 < 0$
- 5) $9x^2 + 6x + 1 \geq 0$;
- 6) $x^2 - x + 1 > 0$;
- 7) $x^2 - x + 1 \geq 0$;
- 8) $-x^2 + 6x - 9 < 0$
- 9) $x^2 - 2x + 1 \leq 0$;
- 10) $3x^2 - 2x - 8 > 0$;
- 11) $x^2 - 2x + 15 \leq 0$;
- 12) $-5x^2 + 10\sqrt{5}x + 25 < 0$

2.4 Système de deux équations du premier degré

Définition 2.4

Le système $(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ est appelé système de deux équation du premier degré à deux inconnues x et y ; où $a; b; c; a'; b'; c'$ sont des nombres réels.

Exemple 2.8

- **Méthode de substitution :**

1) Résolvons dans \mathbb{R}^2 le système : $(S_1) : \begin{cases} 2x - y = 7 & (1) \\ 3x + 4y = 12 & (2) \end{cases}$

- On détermine l'un des inconnue en fonction de l'autre.

A partir de l'équation (1), on trouve : $y = 2x - 7$ (3)

Dans l'équation (2), on remplace y par l'expression $2x - 7$, on obtient alors l'équation du premier degré à une inconnue : $3x + 4(2x - 7) = 12$ qui signifie que $x = \frac{40}{11}$

- Dans l'équation (3), on remplace x par la valeur $\frac{40}{11}$, on obtient : $y = 2 \times \frac{40}{11} - 7 = \frac{3}{11}$,

Donc l'ensemble des solution de (S_1) est : $S_1 = \left\{ \left(\frac{40}{11}; \frac{3}{11} \right) \right\}$

2) Résolvons dans \mathbb{R}^2 le système : $(S_2) : \begin{cases} 3x + 2y = 7 & (1) \\ 2x + 4y = 10 & (2) \end{cases}$

- On détermine l'un des inconnue en fonction de l'autre.

A partir de l'équation (2), on trouve : $2x = -4y + 10$ qui signifie que $x = -2y + 5$ (3)

Dans l'équation (1), on remplace x par l'expression $-2y + 5$, on obtient alors l'équation du premier degré à une inconnue : $3(-2y + 5) + 2y = 7$ qui signifie que $y = 2$

- Dans l'équation (3), on remplace y par la valeur 2, on obtient : $x = -2 \times 2 + 5 = 1$,

Le couple $(1; 2)$ vérifie le système (S_2) . Donc l'ensemble des solution de (S_2) est : $S_2 = \{(1; 2)\}$

- **Méthode de résolution par la combinaisons linéaire**

1) Résolvons dans \mathbb{R}^2 le système $(S_3) : \begin{cases} 2x + 4y = 22 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases}$

- En multipliant les deux membres de la première équation par 3 et les deux membre de la deuxième équation par -2 , on obtient : $\begin{cases} 6x + 12y = 66 \\ -6x + 4y = -18 \end{cases}$

- En additionnant les deux dernières équations obtenues membre à membre (pour éliminer x), on trouve : $6x + 12y - 6x + 4y = 66 - 18$ c'est à dire $16y = 48$ c'est à dire : $y = 3$

- Pour obtenir la valeur de x , on peut appliquer la même méthode en multipliant les deux membres de la première équation par 2 et les deux membre de la deuxième équation par 4, on obtient :

$$\begin{cases} 4x + 8y = 44 \\ 12x - 8y = 36 \end{cases}$$

- En additionnant les deux dernières équations obtenues membre à membre (pour éliminer y), on trouve : $4x + 8y + 12x - 8y = 44 + 36$ c'est à dire $16x = 90$ c'est à dire : $x = 5$

Le couple $(5; 3)$ vérifie le système (S_3) . Donc l'ensemble des solution de (S_3) est : $S_3 = \{(5; 3)\}$

2) Résolvons dans \mathbb{R}^2 le système $(S_4) : \begin{cases} -3x + 2y = 23 \\ 2x + 5y = 29 \end{cases}$

- En multipliant les deux membres de la première équation par 2 et les deux membre de la deuxième équation par 3, on obtient : $\begin{cases} -6x + 4y = 46 \\ 6x + 15y = 87 \end{cases}$

- En additionnant les deux dernières équations obtenues membre à membre (pour éliminer x), on trouve : $6x + 4y - 6x + 15y = 46 + 87$ c'est à dire $19y = 133$ c'est à dire : $y = 7$

- Pour obtenir la valeur de x , on peut appliquer la même méthode en multipliant les deux membres de la première équation par -5 et les deux membre de la deuxième équation par 2, on obtient :

$$\begin{cases} 15x - 10y = -115 \\ 4x + 10y = 58 \end{cases}$$

- En additionnant les deux dernières équations obtenues membre à membre (pour éliminer y), on

trouve : $15x - 10y + 4x + 10y = -115 + 58$ c'est à dire $19x = -57$ c'est à dire : $x = -3$

Le couple $(-3; 7)$ vérifie le système (S_4) . Donc l'ensemble des solution de (S_4) est : $S_4 = \{(-3; 7)\}$

• **Méthode de déterminant**

Propriété 2.5

On considère Le système $(S) : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

1) Le système (S) admet une seule solution si et seulement si : $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$;

Dans ce cas la solution est le couple $(x; y)$ définie par : $x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{D}$ et $y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{D}$

2) Si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$ alors :

▷ ou bien le système (S) n'admet pas de solution.

▷ ou bien le système (S) admet une infinité de solutions.

Exemple 2.9

1) Résolvons dans \mathbb{R}^2 le système $(S_5) : \begin{cases} 3x - 4y = -11 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$;

Le déterminant de ce système est : $D = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 18 + 20 = 38 \neq 0$

Comme $D \neq 0$ alors le système (S_5) admet une unique solution $(x; y)$ telle que :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} -11 & -4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}}{38} = \frac{-66 + 28}{38} = \frac{-38}{38} = -1$$

$$\text{et } y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -11 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}}{38} = \frac{21 + 55}{38} = \frac{76}{38} = 2$$

Donc l'ensemble des solution du système S_5 est : $S_5 = \{(-1; 2)\}$

Exercice 14

Résoudre dans \mathbb{R}^2 les systèmes suivants : (En utilisant les trois méthodes) ;

$$(S_1) : \begin{cases} 3x - 2y = -14 \\ 5x + 9y = 26 \end{cases} ; \quad (S_2) : \begin{cases} 3x + y = 7 \\ 6x + 3y = 19 \end{cases} ; \quad (S_3) : \begin{cases} 2x + y = 10 \\ 4x - 2y = -16 \end{cases} ;$$

$$(S_4) : \begin{cases} 5x + 3y = 42 \\ -6x + 9y = 0 \end{cases} ; \quad (S_5) : \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 6x + 4y = 19 \end{cases} ; \quad (S_6) : \begin{cases} 15x + 3y = 12 \\ -30x - 6y = -24 \end{cases} ;$$

2.5 Proportionnalité - Pourcentage - Échelles

2.5.1 Proportionnalité

Définition

On considère quatre nombres rationnels non nul a, b, c et d .

Les nombres a, b, c et d dans cet ordre forment une **proportionnalité** si et seulement si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Remarque

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ Signifie que $a \times d = b \times c$.
- Le nombre d s'appelle la **quatrième proportionnelle**.

Exemples

- Les nombres 3, 5, 9 et 15 forment dans cet ordre une proportionnalité car : $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$.
- Les nombres 2, 3, 4 et 5 ne forment pas dans cet ordre une proportionnalité car : $\frac{2}{3} \neq \frac{4}{5}$.

Exemple 2 :

Le tableau suivant donne les prix de pomme en dh.

Poids de pomme en kg	1	2	5	0.5	3	9
Le prix en dh	6	12	•	•	•	•

- Le tableau correspondant à une situation de proportionnalité : $\frac{6}{1} = \frac{12}{2} = \frac{30}{5} = \dots = 6$.
- Le coefficient de proportionnalité est 6.

Coefficient de proportionnalité

Exemple

On considère le tableau suivant :

1	3	7	9
4	12	28	36

- Le tableau correspondant à une **situation de proportionnalité** car :

$$\frac{4}{1} = \frac{12}{3} = \frac{28}{7} = \frac{36}{9} = \boxed{4}$$

- Le **coefficient de proportionnalité** est : $\boxed{4}$

2.5.2 Pourcentage

Exemple 1

Dans une classe il y a 40 élèves dont 15% sont des garçons.
Calculer le nombre des garçons dans cette classe.

Réponse : On considère le tableau de proportionnalité suivant :

40	100
x	15

$$\text{On a : } x = \frac{40 \times 15}{100} = \frac{600}{100} = 6$$

Donc **dans cette classe il y a 6 garçons**

Exemple 2

Dans une classe il y a 30 élèves dont 12 sont des filles.
Calculer le pourcentage des filles dans cette classe.

Réponse : On considère le tableau de proportionnalité suivant :

30	100
12	x

$$\text{On a : } x = \frac{12 \times 100}{30} = \frac{1200}{30} = 40$$

Donc **dans cette classe il y a 40% des filles**

Autres exemples :

⋮

2.5.3 Échelle

Définition

L'échelle d'un plan est le coefficient de proportionnalité entre les distances sur le plan et les distances réelles. On note : $e = \frac{\text{Distance sur le plan}}{\text{Distance réelle}}$

Exemple

Sur une carte à l'échelle $\frac{1}{50000}$, deux villes A et B sont séparées par 4,5cm.

Quelle est la distance réelle entre A et B ?

Réponse : A l'échelle $\frac{1}{50000}$, 1cm représente 50000cm, c'est à dire 500m dans la réalité.

Alors on a le tableau de proportionnalité suivant :

1	4,5
50000	x

$$\text{On a : } x = \frac{4,5 \times 50000}{1} = 225000\text{cm} = 2250\text{m} = 2,25\text{km}$$

Donc **la distance entre A et B est 2,25km**

2.6 Devoir libre 1 S₁

<p>Exercice 1 (9 pts)</p> <p>I) 1) Résoudre l'équation : $2x^2 - 6x + 4 = 0$ 2) Factorisé le trinôme $2x^2 - 6x + 4$ 3) a) Donner le tableau de signe de $2x^2 - 6x + 4$ b) Résoudre l'inéquation $2x^2 - 6x + 4 > 0$ c) Résoudre l'inéquation $2x^2 - 6x + 4 < 0$</p> <p>II) 1) Résoudre l'équation : $-x^2 - 2x + 3 = 0$ 2) Résoudre l'inéquation : $-x^2 - 2x + 3 \geq 0$</p>	
<p>Exercice 2 (9 pts)</p> <p>Résoudre les systèmes :</p> <p>1) $\begin{cases} 3x + 2y = 16 \\ -2x + 5y = 2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 7x + 3y = 22 \\ -3x + 2y = 7 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ -2x + y = -7 \end{cases}$</p>	
<p>Exercice 3 (2 pts)</p> <p>1) Dans une classe il y a 40 élèves dont 10 sont des garçons. Calculer le pourcentage des garçons dans cette classe.</p> <p>2) Dans une classe il y a 36 élèves dont 75% sont des filles. Calculer le nombre des filles dans cette classe.</p> <p>3) Sur une carte à $\frac{1}{600000}$, deux villes Boumalne dades et Kelaat mgouna sont séparées par 4cm. Quelle est la distance réelle entre les deux villes. ?</p>	
<p>Exercice 4 (2 pts)</p> <p>Déterminer la valeur de vérité des propositions :</p> <p>$P_1 : (\exists x \in \mathbb{R}) : -2x + 8 = 0$ $P_2 : (\forall x \in \mathbb{R}) : -2x + 8 < 0$</p>	

Soyez optimistes et tout ira pour le mieux !

Bon chance

2.7 Devoirs surveiller 1 S₂

<p>Exercice 1 (10.5 pts)</p> <p>I) 1) Résoudre l'équation : $2x^2 + 2x - 4 = 0$</p> <p>2) a) Donner le tableau de signe de : $2x^2 + 2x - 4$</p> <p>b) Résoudre l'inéquation : $2x^2 + 2x - 4 > 0$</p> <p>3) Factorisé le trinôme : $2x^2 + 2x - 4$</p> <p>II) 1) Résoudre l'équation : $-x^2 + 4x - 3 = 0$</p> <p>2) a) Donner le tableau de signe de : $-x^2 + 4x - 3$</p> <p>b) Résoudre l'inéquation : $-x^2 + 4x - 3 > 0$</p> <p>3) Factorisé le trinôme : $-x^2 + 4x - 3$</p>	<p>2</p> <p>1.25</p> <p>1</p> <p>1</p> <p>2</p> <p>1.25</p> <p>1</p> <p>1</p>
<p>Exercice 2 (7 pts)</p> <p>1) Dans une classe il y a 40 élèves dont 24 sont des garçons. Calculer le pourcentage des garçons dans cette classe.</p> <p>2) Dans une classe il y a 36 élèves dont 25% sont des filles. Calculer le nombre des filles dans cette classe.</p> <p>3) Sur une carte à $\frac{1}{60000}$, deux villes A et B sont séparées par 5cm. Quelle est la distance réelle entre les deux villes. (En kilomètre) ?</p> <p>4) Résoudre le système : $\begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ -2x + y = -7 \end{cases}$</p>	<p>1.5</p> <p>1.5</p> <p>1.5</p> <p>2.5</p>
<p>Exercice 3 (2.5 pts)</p> <p>1) Résoudre l'équation : $2x + 6 = 0$</p> <p>2) Déterminer la valeur de vérité des propositions :</p> <p>$P_1 : (\exists x \in \mathbb{R}) : 2x + 6 = 0$</p> <p>$P_2 : (\forall x \in \mathbb{R}) : 2x + 6 < 0$</p>	<p>0.5</p> <p>1</p> <p>1</p>

Soyez optimistes et tout ira pour le mieux !
Bon chance

Exercice 1 (6.5 pts)	
1) Dans une classe il y a 40 élèves dont 16 sont des garçons. Calculer le pourcentage des garçons dans cette classe.	1.5
2) Dans une classe il y a 32 élèves dont 25% sont des filles. Calculer le nombre des filles dans cette classe.	1.5
3) Sur une carte à $\frac{1}{50000}$, deux villes A et B sont séparées par 6cm. Quelle est la distance réelle entre les deux villes. (En kilomètre) ?	1.25
4) Résoudre le système : $\begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$	2.25
Exercice 2 (11 pts)	
I) 1) Résoudre l'équation : $x^2 - 6x + 8 = 0$ 2) a) Donner le tableau de signe de $x^2 - 6x + 8$ b) Résoudre l'inéquation $x^2 - 6x + 8 > 0$ c) Résoudre l'inéquation $x^2 - 6x + 8 \leq 0$ 3) Factorisé le trinôme $x^2 - 6x + 8$	2 1.25 0.75 0.75 1
II) 1) Résoudre l'équation : $-x^2 + 3x - 2 = 0$ 2) a) Donner le tableau de signe de $-x^2 + 3x - 2$ b) Résoudre l'inéquation $-x^2 + 3x - 2 \geq 0$ 3) Factorisé le trinôme $-x^2 + 3x - 2$	2 1.25 1 1
Exercice 3 (2.5 pts)	
1) Résoudre l'équation : $2x + 10 = 0$	0.5
2) Déterminer la valeur de vérité des propositions : $P_1 : (\exists x \in \mathbb{R}) : 2x + 10 = 0$ $P_2 : (\exists n \in \mathbb{N}) : 2n + 10 = 0$ $P_3 : (\forall x \in \mathbb{R}) : 2x + 10 < 0$	0.75 0.5 0.75

Soyez optimistes et tout ira pour le mieux !

Bon chance

CHAPITRE 3

LES FONCTIONS NUMÉRIQUES

3.1 L'ensemble de définition d'une fonction :

3.1.1 Activités :

Activité 1 :

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = \frac{1}{x-2}$

- 1) Déterminer : $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(-1)$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)$
- 2) Déterminer : $g(0)$; $g(1)$; $g(-1)$ et $f(-2)$
- 3) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .
- 4) Déterminer D_g l'ensemble de définition de la fonction g .

Activité 2 :

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivantes :

- a) $f(x) = \frac{1}{x}$; b) $f(x) = 3x + 1$; c) $f(x) = \sqrt{x-1}$;
d) $f(x) = \sqrt{x+2}$; e) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$; f) $f(x) = \frac{x+3}{x-5}$

Solution de l'activité 2 :

- a) $f(x) = \frac{1}{x}$: On a la fonction f est définie si : $x \neq 0$ donc $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$.
- b) $f(x) = 3x + 1$: la fonction f est définie sur \mathbb{R} , donc $D_f = \mathbb{R}$.
- c) $f(x) = \sqrt{x-1}$: la fonction est définie si : $x-1 \geq 0$ c-à-d : $x \geq 1$ donc : $D_f = [1; +\infty[$.
- d) $f(x) = \sqrt{x+2}$: la fonction est définie si : $x+2 \geq 0$ c-à-d : $x \geq -2$ donc : $D_f = [-2; +\infty[$.
- e) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$: la fonction f est définie si : $x+1 \neq 0$ c-à-d : $x \neq -1$ donc : $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$.
- f) $f(x) = \frac{x+3}{x-5}$: la fonction f est définie si : $x-5 \neq 0$ c-à-d : $x \neq 5$ donc : $D_f = \mathbb{R} - \{5\}$.

3.1.2 Définition

Définition 3.1

Soit $f : x \mapsto f(x)$ une fonction numérique d'une variable réelle x .

▷ On dit que $f(x)$ est l'image de x par la fonction f .

▷ L'ensemble constitué de tous les nombres x qui ont une image par la fonction f , est appelé **l'ensemble de définition** de f et se note D_f .

3.2 Fonction paire - fonction impaire

3.2.1 Activité :

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = 3x$

- 1) a) Déterminer D_f
- b) Montrer que : $f(-x) = f(x)$
- 2) a) Déterminer D_g
- b) Montrer que : $g(-x) = -g(x)$

Solution de l'activité :

- 1) a) On a : $D_f = \mathbb{R}$,
- b) On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) : -x \in \mathbb{R}$, et $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$
On dit dans ce cas que la fonction f est paire.
- 2) a) On a : $D_g = \mathbb{R}$,
- b) On a : $(\forall x \in \mathbb{R}) : -x \in \mathbb{R}$: et $(\forall x \in \mathbb{R}) : g(-x) = 3 \times (-x) = -3x = -g(x)$
On dit dans ce cas que la fonction g est impaire.

3.2.2 Définition

Définition 3.2

Soit f une fonction et D_f son ensemble de définition :

▷ On dit que la fonction f est paire si :

- $(\forall x \in D_f) : -x \in D_f$
- $(\forall x \in D_f) : f(-x) = f(x)$

▷ On dit que la fonction f est impaire si :

- $(\forall x \in D_f) : -x \in D_f$
- $(\forall x \in D_f) : f(-x) = -f(x)$

Exercice 15

1) Montrer que la fonction f est paire dans chacune des cas suivantes :

a) $f(x) = x^2 + 3$; b) $f(x) = -x^2 + 5$; c) $f(x) = x^4 + 2x^2$

2) Montrer que la fonction f est impaire dans chacune des cas suivantes :

a) $f(x) = 2x$; b) $f(x) = 3x + 5$; c) $f(x) = x^3 + 1$; d) $f(x) = -4x + 2$; e) $f(x) = \frac{1}{x}$

3.2.3 L'interprétation géométrique (La courbe d'une fonction) :

a) Activité :

1) Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2$

- a) Compléter le tableau suivant :
- | | | | | | |
|--------|----|----|---|---|---|
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $f(x)$ | • | • | • | • | • |

b) Représenter dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, (C_f) la courbe de la fonction f .

2) Soit g la fonction définie par : $g(x) = 2x$

a) Compléter le tableau suivant :

x	-1	0	1
$f(x)$	•	•	•

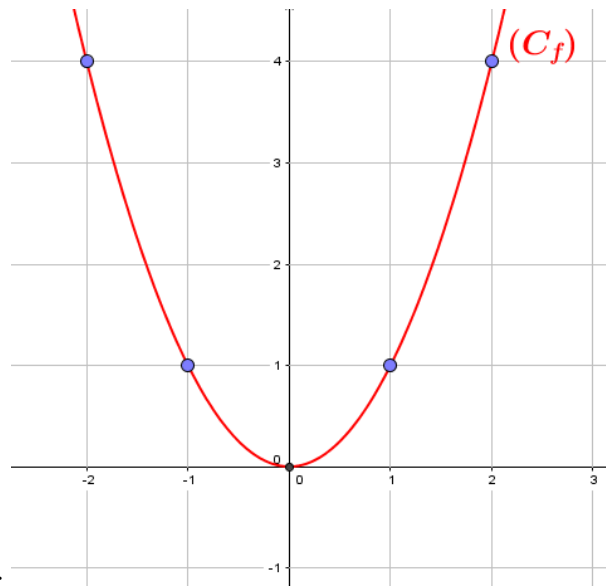
b) Représenter dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, (C_g) la courbe de la fonction g .

Solution de l'activité :

1) a) $f(x) = x^2$: $f(-2) = (-2)^2 = 4$ et $f(-1) = (-1)^2 = 1$ et $f(0) = 0$ et $f(1) = (1)^2 = 1$ et $f(2) = 4$

Donc :

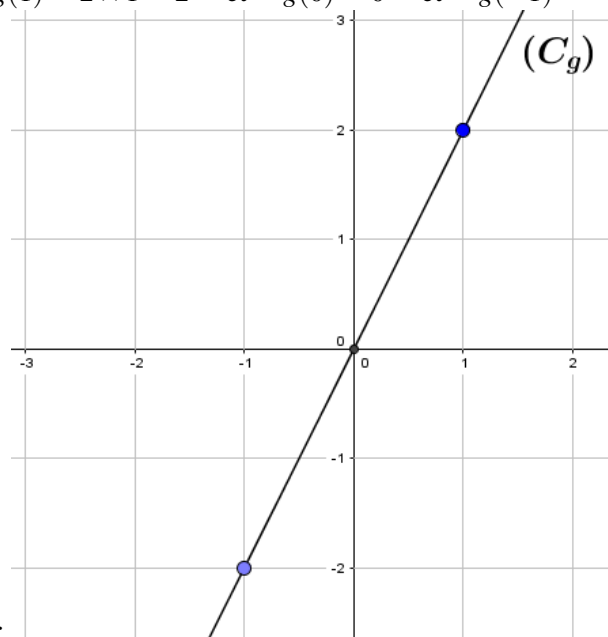
x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4



b) La courbe de f :

Remarque : Si f est une fonction paire alors (C_f) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2) a) $g(x) = 2x$ $g(1) = 2 \times 1 = 2$ et $g(0) = 0$ et $g(-1) = -2$



b) La courbe de g :

Remarque : Si f est une fonction impaire alors (C_f) est symétrique par rapport à l'origine $O(0;0)$.

3.3 La fonction majorée - la fonction minorée - la fonction bornée :

3.3.1 Activité :

- 1) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2 + 1$
 - a) Comparer le nombre 1 avec les nombres : $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(-1)$.
 - b) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) \geq 1$
- 2) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = -x^2 + 2$
 - a) Comparer le nombre 2 avec les nombres : $g(0)$; $g(1)$; $g(2)$.
 - b) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : g(x) \leq 2$
- 3) Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par : $h(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$
Montrer que : $0 \leq h(x) \leq 1$

3.3.2 Solution de l'activité :

- 1) a) On a : $f(0) = 0^2 + 1 = 1 \geq 1$ et $f(1) = 1^2 + 1 = 2 \geq 1$ et $f(2) = 2^2 + 1 = 5 \geq 1$
et $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2 \geq 1$.
b) On a : pour tout $x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ donc : $x^2 + 1 \geq 1$ et donc $f(x) \geq 1$
On dit dans ce cas que la fonction f est minorée par 1.
- 2) a) On a : $g(0) = -0^2 + 2 = 2 \leq 2$ et $g(1) = -1^2 + 2 = 1 \leq 2$ et $g(2) = -2^2 + 2 = -4 + 2 = -2 \leq 1$.
b) On a : pour tout $x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ donc : $-x^2 \leq 0$ donc $-x^2 + 2 \leq 2$ c'est à dire : $g(x) \leq 2$.
On dit dans ce cas que la fonction g est majorée par 2.
- 3) On a pour tout $x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ donc : $x^2 + 1 \geq 1$ et donc $\frac{1}{x^2 + 1} \leq 1$ c'est à dire $h(x) \leq 1$. (2)
On a aussi : $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 \geq 0$ donc $x^2 + 1 \geq 1$ et donc $\frac{1}{x^2 + 1} \geq 0$ c'est à dire $h(x) \geq 0$. (1)

de (1) et (2) on a pour tout $x \in \mathbb{R} : 0 \leq h(x) \leq 1$: on dit que la fonction h est bornée. (majorée et minorée).

Définition 3.3

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $m, M \in \mathbb{R}$:

- On dit que f est majorée par M sur I si : $(\forall x \in I) : f(x) \leq M$
- On dit que f est minorée par m sur I si : $(\forall x \in I) : f(x) \geq m$
- On dit que f est bornée sur I si f est majorée et minorée à la fois. c'est à dire :
 $(\forall x \in I) : m \leq f(x) \leq M$

Exercice 16

- 1) Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2x^2 + 3$, montrer que f est minorée par 3.
- 2) Soit h la fonction définie par : $h(x) = -3x^2 + 5$, montrer que h est majorée par 5.
- 3) Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{3}{x^2 + 6}$: montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : 0 \leq g(x) \leq \frac{1}{2}$

3.4 Comparaison de deux fonctions et l'interprétation géométrique :

3.4.1 Égalité de deux fonctions :

Définition 3.4

Soient f et g deux fonctions définies sur D_f et D_g .

On dit que f et g sont égaux et on écrit : $f = g$ si : $\begin{cases} D_f = D_g \\ (\forall x \in D_f) : f(x) = g(x) \end{cases}$

Exemple 3.1

1) Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = \frac{2x^2}{x}$ et $g(x) = 2x$:
 On a : $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ et $D_g = \mathbb{R}$ donc $D_f \neq D_g$ et donc $f \neq g$.

2) Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = \frac{1}{x} + 2x$ et $g(x) = \frac{1+2x^2}{x}$
 On a : $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ et $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$ donc : $D_f = D_g$ et
 $f(x) = \frac{1}{x} + 2x = \frac{1}{x} + \frac{2x^2}{x} = \frac{1+2x^2}{x} = g(x)$ donc : $f = g$.

3.4.2 La résolution graphique des équations et des inéquations :**Propriété 3.1**

Soit f et g deux fonctions définies sur D_f et D_g et I un intervalle inclus dans D_f et D_g .

- Pour résoudre graphiquement l'équation : $f(x) = g(x)$: il faut déterminer les abscisses des points d'intersections de (C_f) la courbe de f et (C_g) la courbe de g .

Exemple 3.2

Soit f et g deux fonctions définies par : $f(x) = x^2 - 2$ et $g(x) = x$

1) Compléter les tableaux suivants :

x	0	1
$g(x)$	•	•

x	0	1	2	-1	-2
$f(x)$	•	•	•	•	•

2) Représenter dans le même repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (C_f) (la courbe de f) et (C_g) (la courbe de g).

3) Résoudre graphiquement l'équation : $f(x) = g(x)$.

4) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \geq g(x)$

5) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \leq g(x)$

Solution :

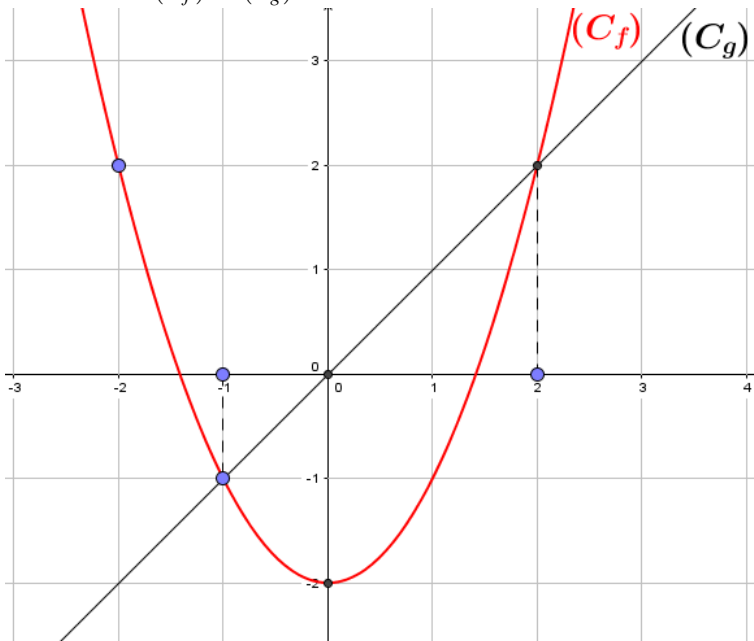
1) On a : $g(x) = x$ donc : $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$

x	0	1
$g(x)$	0	1

On a : $f(x) = x^2 - 2$ donc : $f(0) = 0^2 - 2 = -2$ et $f(1) = 1^2 - 2 = -1$ et ...

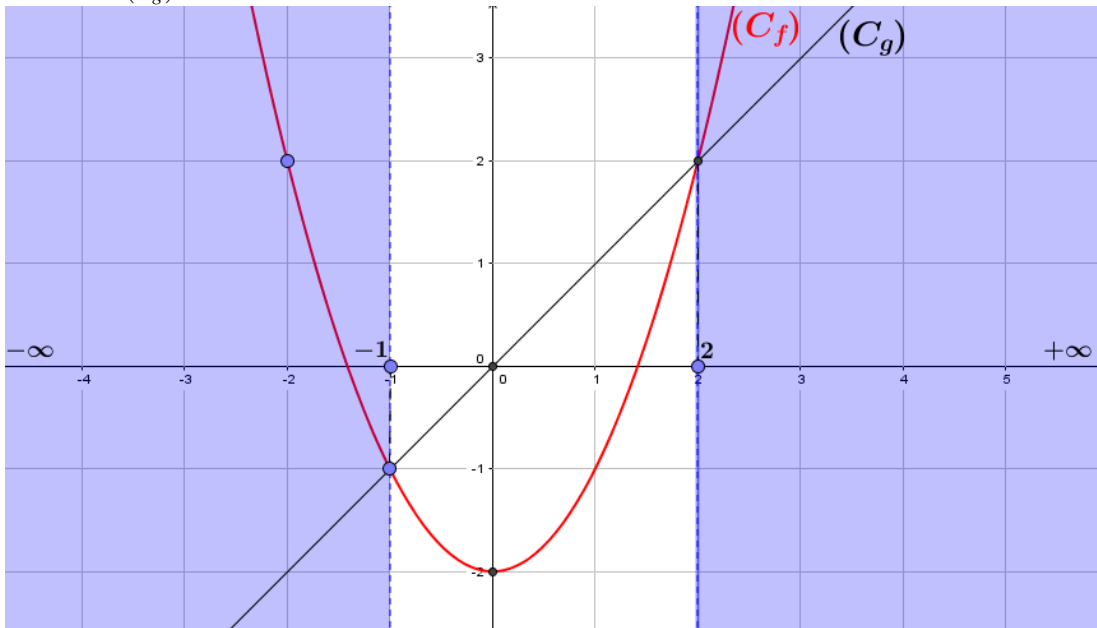
x	0	1	2	-1	-2
$f(x)$	-2	-1	2	-1	2

2) Les courbes (C_f) et (C_g) :



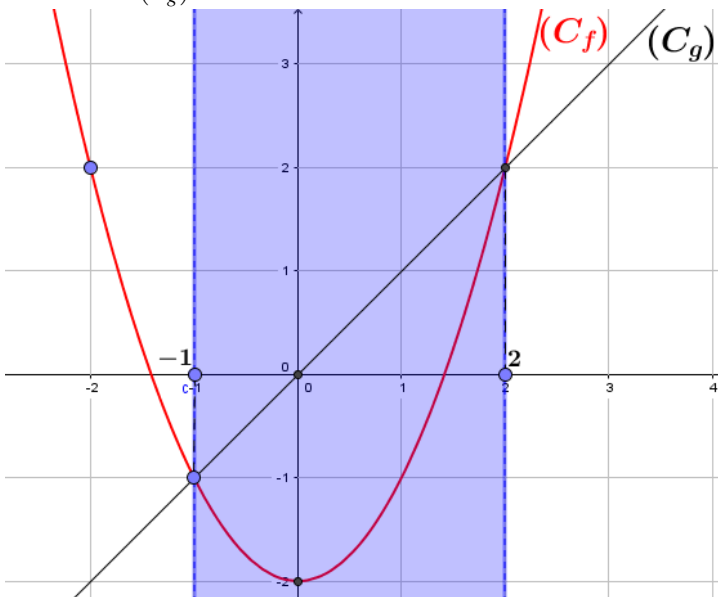
3) Les solutions graphiques de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersections de (C_f) et (C_g) alors les solutions sont : -1 et 2 .

- 4) Les solutions graphiques de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ sont les abscisses des points où (C_f) se trouve au dessus de (C_g) .



Alors les solutions sont : $S =]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$

- 5) Les solutions graphiques de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points où (C_f) se trouve au dessous de (C_g) .



Alors les solutions sont : $S = [-1; 2]$

Propriété 3.2

- Les solutions graphiques de l'inéquation : $f(x) \geq g(x)$ sont les abscisses des points où (C_f) se trouve au **dessus** de (C_g) .
- Les solutions graphiques de l'inéquation : $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points où (C_f) se trouve au **dessous** de (C_g) .

Exercice 17

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = -x^2 + 2$ et $g(x) = x^2$

- 1) Résoudre graphiquement l'équation : $f(x) = g(x)$
- 2) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \geq g(x)$

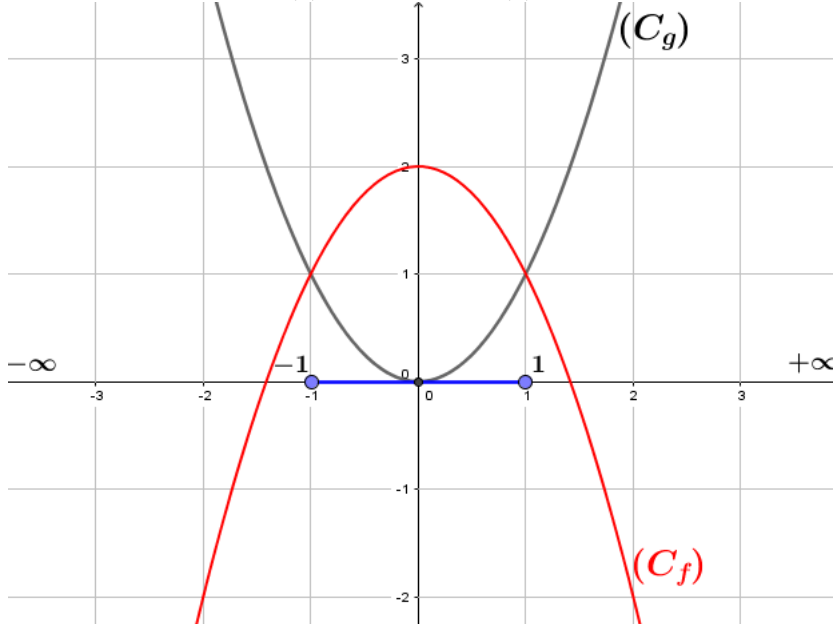
Exercice 18

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = x^2 - 2$ et $g(x) = -x$

- 1) Résoudre graphiquement l'équation : $f(x) = g(x)$
- 2) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \leq g(x)$

Solution de l'exercice 3 :

- 1) Pour résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ il faut représenter graphiquement (C_f) et (C_g) les courbes de f et g : ($f(x) = -x^2 + 2$ et $g(x) = x^2$) :

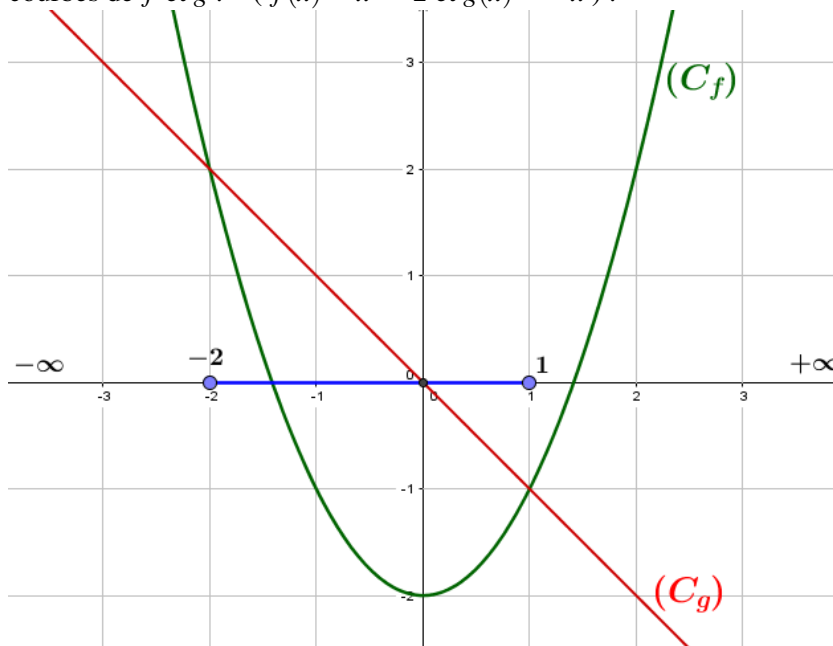


Les solutions graphiques de l'équation : $f(x) = g(x)$ sont : -1 et 1 .

- 2) Les solutions de l'inéquation : $f(x) \geq g(x)$ sont : $S = [-1; 1]$. (les abscisses des points où (C_f) se trouve au dessus de (C_g)).

Solution de l'exercice 4 :

- 1) Pour résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ il faut représenter graphiquement (C_f) et (C_g) les courbes de f et g : ($f(x) = x^2 - 2$ et $g(x) = -x$) :



Les solutions graphiques de l'équation : $f(x) = g(x)$ sont : -2 et 1 .

- 2) Les solutions de l'inéquation : $f(x) \leq g(x)$ sont : $S = [-2; 1]$. (les abscisses des points où (C_f) se trouve au dessous de (C_g)).

3.5 Les variations d'une fonction :

3.5.1 Définitions :

Définition 3.5

Soit f une fonction définie sur un intervalle I :

- (f est croissante sur I) \Leftrightarrow pour tous $x; y \in I$: si $x \geq y$ alors $f(x) \geq f(y)$
- (f est décroissante sur I) \Leftrightarrow pour tous $x; y \in I$: si $x \geq y$ alors $f(x) \leq f(y)$

Exemple 3.3

1) Soit f la fonction définie par : $f(x) = 3x - 1$; soient $x; y \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} x < y &\Rightarrow 3x < 3y \\ &\Rightarrow 3x - 1 < 3y - 1 \\ &\Rightarrow f(x) < f(y) \end{aligned}$$

alors f est croissante sur \mathbb{R} .

2) Soit f la fonction définie par : $f(x) = -2x + 3$; soient $x; y \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} x < y &\Rightarrow -2x > -2y \quad (\text{car : } -2 < 0) \\ &\Rightarrow -2x + 3 > -2y + 3 \\ &\Rightarrow f(x) > f(y) \end{aligned}$$

alors f est décroissante sur \mathbb{R} .

3) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{x+3}$; soient $x; y \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$\begin{aligned} x < y &\Rightarrow x + 3 < y + 3 \\ &\Rightarrow \frac{1}{x+3} > \frac{1}{y+3} \\ &\Rightarrow f(x) > f(y) \end{aligned}$$

alors f est décroissante sur \mathbb{R}_+ .

4) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{-1}{x+2}$; soient $x; y \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$\begin{aligned} x < y &\Rightarrow x + 2 < y + 2 \\ &\Rightarrow \frac{1}{x+2} > \frac{1}{y+2} \quad (\text{L'inverse}) \\ &\Rightarrow \frac{-1}{x+2} < \frac{-1}{y+2} \quad (\text{La multiplication par } -1 < 0) \\ &\Rightarrow f(x) < f(y) \end{aligned}$$

alors f est croissante sur \mathbb{R}_+ .

5) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{-x+5}$; soient $x; y \in \mathbb{R}_-$ on a :

$$\begin{aligned} x < y &\Rightarrow -x > -y \quad (\text{La multiplication par } -1 < 0) \\ &\Rightarrow -x + 5 > -y + 5 \\ &\Rightarrow \frac{1}{-x+5} < \frac{1}{-y+5} \\ &\Rightarrow f(x) < f(y) \end{aligned}$$

alors f est croissante sur \mathbb{R}_- .

Exercice 19

Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle I dans les suivants (f est il croissante ou décroissante ?) :

1) $f(x) = 5x - 4$; $I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = -3x - 1$; $I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = \frac{2}{-2x+1}$; $I = \mathbb{R}_-$

4) $f(x) = \frac{x}{x+1}$; $I = \mathbb{R}_+$

5) $f(x) = x^2 + 2$; $I = \mathbb{R}_+$

3.5.2 Taux de variations :**Définition 3.6**

Soient I un intervalle et $x, y \in I$ tels que : $x \neq y$:

Le nombre $T = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ est appelé **Le taux de variations** de f entre x et y .

Propriété 3.3

- Si : $T = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq 0$ pour tous $x, y \in I$ alors : f est croissante I .
- Si : $T = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq 0$ pour tous $x, y \in I$ alors : f est décroissante I .

Exemple 3.4

1) Soit f la fonction définie par : $f(x) = 4x + 2$, calculons le taux de variation entre x et y sur \mathbb{R} : on a :

$$T = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{4x + 2 - (4y + 2)}{x - y} = \frac{4x - 4y}{x - y} = \frac{4(x - y)}{x - y} = 4 > 0 \text{ donc } f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}.$$

2) Soit f la fonction définie par : $f(x) = -5x + 7$, calculons le taux de variation entre x et y sur \mathbb{R} : on a :

$$T = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{-5x + 7 - (-5y + 7)}{x - y} = \frac{-5x + 7 + 5y - 7}{x - y} = \frac{-5x + 5y}{x - y} = \frac{-5(x - y)}{x - y} = -5 < 0$$

donc f est décroissante sur \mathbb{R} .

3) Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2$, calculons le taux de variation entre x et y sur \mathbb{R} : on a :

$$T = \frac{x^2 - y^2}{x - y} = \frac{(x - y)(x + y)}{x - y} = x + y$$

- si $x, y \in \mathbb{R}_+$ alors $x + y \geq 0$ donc : f est croissante sur \mathbb{R}_+
- si $x, y \in \mathbb{R}_-$ alors $x + y \leq 0$ donc : f est décroissante sur \mathbb{R}_-

Exercice 20

En utilisant le taux de variations entre x et y étudie les variations de la fonction f sur l'intervalle I dans les cas suivants :

1) $f(x) = 2x + 3$; $I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = -3x + 4$; $I = \mathbb{R}$

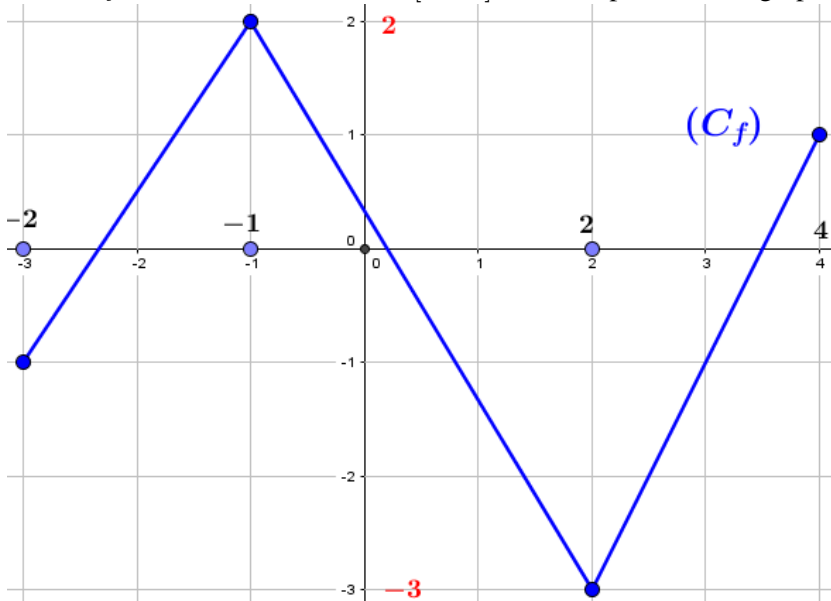
3) $f(x) = x^2 + 3$; si $I = \mathbb{R}_+$ puis si $I = \mathbb{R}_-$

4) $f(x) = -x^2 + 1$; si $I = \mathbb{R}_+$ puis si $I = \mathbb{R}_-$

3.6 Extremums d'une fonction : (Valeur minimale - Valeur maximale) :

3.6.1 Activité :

Soit f une fonction définie sur $[-3;4]$ dont la représentation graphique est le suivant :



- 1) Déterminer la valeur minimale de f sur $[-3;4]$
- 2) Déterminer la valeur maximale de f sur $[-3;4]$
- 3) Donner le tableau de variations de f sur $[-3;4]$

Solution de l'activité :

- 1) La valeur minimale de f sur $[-3;4]$ est le plus petit valeur de f sur $[-3;4]$ d'après la courbe de f la valeur minimale est : -3 .
- 2) La valeur maximale de f sur $[-3;4]$ est le plus grand valeur de f sur $[-3;4]$ d'après la courbe de f la valeur maximale est : 2 .

3) Le tableau de variation de f est :

x	-2	-1	2	4
f	-1	2	-3	1

f est croissante sur $[-2; -1]$ et croissante aussi sur $[2; 4]$ et décroissante sur $[-1; 2]$

Exercice 21

Soit f une fonction dont le tableau de variations est le suivants :

x	0	2	3	5
f	1	-1	3	0

- 1) Déterminer : $f(0)$; $f(2)$; $f(3)$ et $f(5)$.
- 2) Déterminer la valeur maximale de f sur $[0;5]$.
- 3) Déterminer la valeur minimale de f sur $[0;5]$

Solution :

- 1) D'après le tableau des variations de f on a : $f(0) = 1$; $f(2) = -1$; $f(3) = 3$ et $f(5) = 0$
- 2) La valeur maximale de f sur $[0;5]$ est : $f(3) = 3$.
- 3) La valeur minimale de f sur $[0;5]$ est : $f(2) = -1$.

Définition 3.7

Soit f une fonction définie sur un intervalle I :

- On a dit que f admet une valeur minimale sur I s'il existe $a \in I$ tel que : $(\forall x \in I) : f(x) \geq f(a)$, $f(a)$ est appelée la valeur minimale de f sur I
- On a dit que f admet une valeur maximale sur I s'il existe $b \in I$ tel que : $(\forall x \in I) : f(x) \leq f(b)$, $f(b)$ est appelée la valeur maximale de f sur I

Exercice 22

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2 - 1$

- 1) Compléter le tableau suivant :

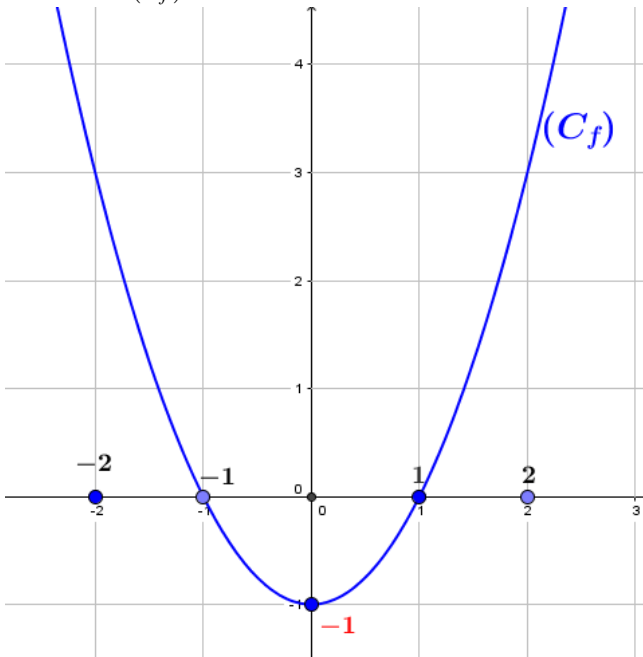
x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	•	•	•	•	•
- 2) Construire la courbe (C_f) de la fonction f .
- 3) Déduire la valeur minimale de la fonction f sur \mathbb{R} .

Solution :

- 1) On a : $f(x) = x^2 - 1$ donc : $f(-2) = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$ et $f(-1) = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$ et $f(0) = 0^2 - 1 = -1$ et ...

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	3	0	-1	0	3

- 2) La courbe (C_f) :



- 3) D'après la courbe la valeur minimale de la fonction f sur \mathbb{R} est : -1 .

Exercice 23

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = -x^2 + 3$

- 1) Compléter le tableau suivant :

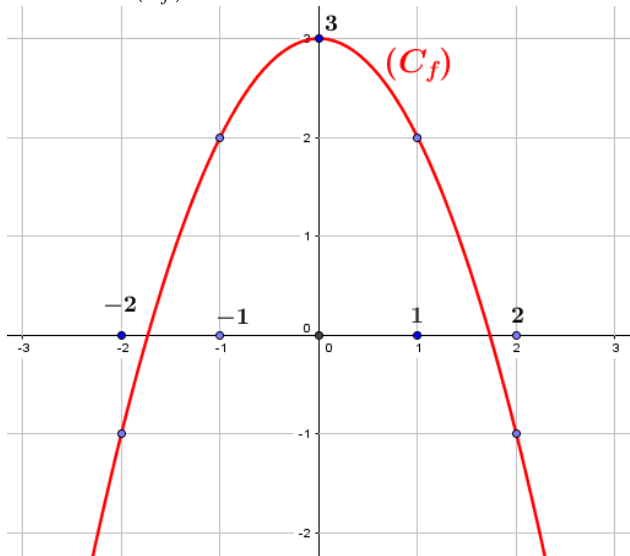
x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	•	•	•	•	•
- 2) Construire la courbe (C_f) de la fonction f .
- 3) Déduire la valeur maximale de la fonction f sur \mathbb{R} .

Solution :

- 1) On a : $f(x) = -x^2 + 3$ donc : $f(-2) = -(-2)^2 + 3 = -4 + 3 = -1$ et $f(-1) = -(-1)^2 + 3 = -1 + 3 = 2$ et $f(0) = -0^2 + 3 = 3$ et ...

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	2	3	2	-1

2) La courbe (C_f) :



3) D'après la courbe la valeur maximale de la fonction f sur \mathbb{R} est : 3.

Exercice 24

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2 - 2x$

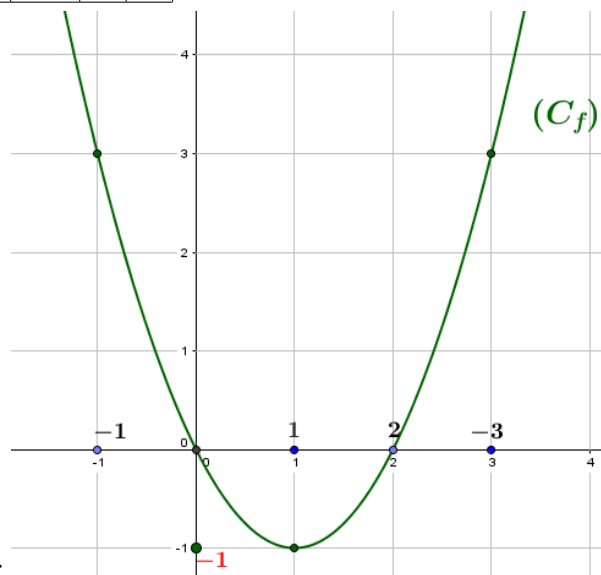
- 1) Compléter le tableau suivant :

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	•	•	•	•	•
- 2) Construire la courbe (C_f) de la fonction f .
- 3) Déduire la valeur minimale de la fonction f sur $[-1; 3]$.
- 4) Donner le tableau de variation de f sur $[-1; 3]$.

Solution :

- 1) On a : $f(x) = x^2 - 2x$ donc : $f(-1) = (-1)^2 - 2 \times -1 = 1 + 2 = 3$ et $f(0) = 0^2 - 2 \times 0 = 0$ et $f(1) = 1^2 - 2 \times 1 = 1 - 2 = -1$ et $f(2) = 2^2 - 2 \times 2 = 4 - 4 = 0$ et $f(3) = 3^2 - 2 \times 3 = 9 - 6 = 3$

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	3	0	-1	0	3



- 2) La courbe (C_f) :
- 3) D'après la courbe la valeur minimale de la fonction f sur \mathbb{R} est : -1.

4) Le tableau des variations de f sur $[-1; 3]$ est :

x	-1	0	3
f	3		3
		↘	↗
		-1	

CHAPITRE 4

LES SUITES NUMÉRIQUES

4.1 Définitions :

4.1.1 Activité :

- 1) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 2x + 1$
 - a) Déterminer : $f(0)$; $f(1)$; $f(-1)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f(\sqrt{2})$
 - b) Déterminer en fonction de x : $f(x+1)$ et $f(x-1)$ et $f(x) + 1$
- 2) Soit U la fonction définie sur \mathbb{N} par : $U(n) = 3n - 1$, on note $U(n)$ par U_n
 - a) Calculer : U_0 ; U_1 ; U_2 et U_{10}
 - b) Déterminer U_{n+1} en fonction de n .

Solution de l'activité

- 1) $f(x) = 2x + 1$
 - a) $f(0) = 2 \times 0 + 1 = 1$; $f(1) = 2 \times 1 + 1 = 2 + 1 = 3$; $f(-1) = 2 \times -1 + 1 = -2 + 1 = -1$
 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} + 1 = 1 + 1 = 2$; $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 1$
 - b) $f(x) = 2x + 1$ donc : $f(x+1) = 2(x+1) + 1 = 2x + 2 + 1 = 2x + 3$
et $f(x-1) = 2(x-1) + 1 = 2x - 2 + 1 = 2x - 1$ et $f(x) + 1 = 2x + 1 + 1 = 2x + 2$
- 2) Si on pose : $U(n) = U_n$ alors : $U_n = 3n - 1$
 - a) $U_0 = 3 \times 0 - 1 = 0 - 1 = -1$; $U_1 = 3 \times 1 - 1 = 3 - 1 = 2$; $U_2 = 3 \times 2 - 1 = 6 - 1 = 5$;
 $U_3 = 3 \times 3 - 1 = 9 - 1 = 8$; $U_{10} = 3 \times 10 - 1 = 30 - 1 = 29$;
 - b) $U_n = 3n - 1$ donc : $U_{n+1} = 3(n+1) - 1 = 3n + 3 - 1 = 3n + 2$

4.1.2 Définition et exemples :

Définition 4.1

On dit une suite numérique toute fonction définie sur \mathbb{N} (ou une partie de \mathbb{N}).

$$\begin{aligned} U : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto U(n) = U_n \end{aligned}$$

On note l'image de n par la fonction U par : U_n (au lieu de $U(n)$).

Exemple 4.1

Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = 5n - 3$

- 1) Déterminer U_0 ; U_1 ; U_2 et U_3
- 2) Déterminer U_{n+1} en fonction de n .

Solution :

- 1) $U_0 = 5 \times 0 - 3 = -3$; $U_1 = 5 \times 1 - 3 = 5 - 3 = 2$; $U_2 = 5 \times 2 - 3 = 10 - 3 = 7$
- 2) $U_{n+1} = 5(n+1) - 3 = 5n + 5 - 3 = 5n + 2$

Exercice 25

Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = 4n - 5$

- 1) Calculer : U_0 ; U_1 et U_{20}
- 2) Déterminer U_{n+1} en fonction de n
- 3) Déterminer U_{n+1} en fonction de U_n

4.2 La suite arithmétique**Définition 4.2**

Soit $r \in \mathbb{R}$,

- Toute suite définie par : $U_{n+1} = U_n + r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est une suite **Arithmétique** .
- Le nombre r ne dépend pas de n est appelé la raison de la suite (U_n) .

Exemple 4.2

- 1) Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = 3n + 2$:
Montrons que la suite (U_n) est arithmétique de raison $r = 3$: On a :

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= 3(n+1) + 2 \\ &= 3n + 3 + 2 \\ &= 3n + 2 + 3 \\ &= U_n + 3 \end{aligned}$$

Donc : (U_n) est une arithmétique de raison $r = 3$.

- 2) Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = 6n + 3$:
Montrons que la suite (U_n) est arithmétique On a :

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= 6(n+1) + 3 \\ &= 6n + 6 + 3 \\ &= 6n + 3 + 6 \\ &= U_n + 6 \end{aligned}$$

Donc : (U_n) est une arithmétique de raison $r = 6$.

- 3) Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = -7n + 8$:
Montrons que la suite (U_n) est arithmétique de raison $r = -7$: On a :

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= -7(n+1) + 8 \\ &= -7n - 7 + 8 \\ &= -7n + 8 - 7 \\ &= U_n - 7 \end{aligned}$$

Donc : (U_n) est une arithmétique de raison $r = -7$.

Remarque 4.1

Pour montrer qu'une suite (U_n) est arithmétique de raison r il suffit de calculer $U_{n+1} - U_n$ et que $U_{n+1} - U_n = r$.

Exemple 4.3

Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = -2n + 5$

on a : $U_{n+1} - U_n = -2(n+1) + 5 - [-2n + 5] = -2n - 2 + 5 + 2n - 5 = -2$

donc (U_n) est arithmétique de raison $r = -2$

Exercice 26

Montrer que (U_n) est une suite arithmétique de raison r (a déterminera) dans les cas suivants :

- 1) $U_n = 9n + 5$
- 2) $U_n = -3n + 1$
- 3) $U_n = \frac{1}{2}n + 4$
- 4) $U_n = -\frac{1}{3}n + 2$

Exercice 27

Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = U_n + 4 \end{cases}$

- 1) Calculer U_1 ; U_2 et U_4 .
- 2) Qu'on peut dire sur la nature de la suite (U_n)

4.2.1 Le terme général d'une suite arithmétique :**Propriété 4.1**

Si (U_n) est une suite arithmétique de raison r alors :

- $U_n = U_0 + n \times r$
- $U_n = U_1 + (n - 1)r$
- Pour tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$: $U_n = U_p + (n - p)r$

Exemple 4.4

1) Soit (U_n) une suite arithmétique de raison $r = 5$ et de premier terme $U_0 = 2$:

On a : $U_n = U_0 + n \times r$ donc : $U_n = 2 + 5n = 5n + 2$

2) Soit (U_n) une suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $U_1 = 8$:

On a : $U_n = U_1 + (n - 1)r$ donc : $U_n = 8 + 3(n - 1) = 8 + 3n - 3 = 3n + 5$

3) Soit (U_n) une suite arithmétique de raison $r = -2$ et $U_5 = 6$:

On a : $U_n = U_5 + (n - 5)r$ donc : $U_n = 6 - 2(n - 5) = 6 - 2n + 10 = -2n + 16$

Exercice 28

Suite (U_n) une suite arithmétique de raison : r , déterminer U_n en fonction de n dans les suivants :

- 1) $r = 4$ et $U_0 = 8$
- 2) $r = \frac{1}{2}$ et $U_1 = 2$
- 3) $r = -5$ et $U_2 = 1$
- 4) $\begin{cases} U_3 = 8 \\ U_{n+1} = U_n + 4 \end{cases}$

4.2.2 La somme des termes successives d'une suite arithmétique

Propriété 4.2

Soit (U_n) une suite arithmétique alors on a : $U_0 + U_1 + \dots + U_n = (n+1) \left(\frac{U_0 + U_n}{2} \right)$

c'est à dire :

La somme des termes = (le nombre des termes) $\left(\frac{\text{le premier terme} + \text{le dernier terme}}{2} \right)$

On a aussi : $U_1 + U_2 + \dots + U_n = n \left(\frac{U_1 + U_n}{2} \right)$

et $U_p + U_{p+1} + \dots + U_n = (n-p+1) \left(\frac{U_p + U_n}{2} \right)$

Exemple 4.5

1) Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = 2n$, on a (U_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$, et on a :

$$U_0 + U_1 + \dots + U_n = (n+1) \left(\frac{U_0 + U_n}{2} \right) = (n+1) \left(\frac{0 + 2n}{2} \right) = (n+1)n, \text{ car : } U_0 = 0 \text{ et } U_n = 2n$$

$$\text{On a aussi : } U_0 + U_1 + \dots + U_{20} = 21 \left(\frac{U_0 + U_{20}}{2} \right) = 21 \left(\frac{0 + 40}{2} \right) = 21 \times 20 = 420,$$

2) Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = 3n + 1$, on a (U_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3$.

a) Déterminons la somme : $U_0 + U_1 + \dots + U_n$ en fonction de n .

b) Déterminons la somme : $U_1 + U_2 + \dots + U_n$ en fonction de n .

c) Déterminons la somme : $U_5 + U_6 + \dots + U_n$ en fonction de n .

d) Calculons la somme : $U_1 + U_2 + \dots + U_{14}$.

e) Calculons la somme : $U_4 + U_5 + \dots + U_{16}$.

Solution :

$$\text{a) } U_0 + U_1 + \dots + U_n = (n+1) \left(\frac{U_0 + U_n}{2} \right) = (n+1) \left(\frac{1 + 3n + 1}{2} \right) = (n+1) \left(\frac{3n + 2}{2} \right) \text{ car : } U_0 = 3 \times 0 + 1 = 1$$

$$\text{b) } U_1 + U_2 + \dots + U_n = n \left(\frac{U_1 + U_n}{2} \right) = n \left(\frac{4 + 3n + 1}{2} \right) = n \left(\frac{3n + 5}{2} \right) \text{ car : } U_1 = 4$$

$$\text{c) } U_5 + U_6 + \dots + U_n = (n-5+1) \left(\frac{U_5 + U_n}{2} \right) = (n-4) \left(\frac{16 + 3n + 1}{2} \right) = (n-4) \left(\frac{3n + 17}{2} \right) \text{ car : } U_5 = 16$$

$$\text{d) } U_1 + U_2 + \dots + U_{14} = (14-1+1) \left(\frac{U_1 + U_{14}}{2} \right) = 14 \left(\frac{4 + 43}{2} \right) = 14 \left(\frac{47}{2} \right) = 329$$

$$\text{e) } U_4 + U_5 + \dots + U_{16} = (16-4+1) \left(\frac{U_4 + U_{16}}{2} \right) = 13 \left(\frac{17 + 49}{2} \right) = 13 \left(\frac{64}{2} \right) = 416$$

Exercice 29

Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = 4n - 2$,

1) Déterminer : U_0 et U_{25}

2) Montrer que (U_n) est une suite arithmétique,

3) Calculer la somme : $U_0 + U_1 + \dots + U_{25}$

4) Calculer la somme : $U_8 + U_9 + \dots + U_{30}$

5) Déterminer en fonction de n la somme : $U_3 + U_4 + \dots + U_n$

4.3 La suite géométrique :

4.3.1 Définitions :

Définition 4.3

- Toute suite définie par : $U_{n+1} = U_n \times q$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est une suite **géométrique**
- Le nombre q ne dépend pas de n est appelé la raison de la suite (U_n) .

Exemple 4.6

- 1) Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = 3 \times 2^n$, on a
 $U_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} = 3 \times 2^n \times 2 = U_n \times 2$: donc (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$.
- 2) Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = 5 \times 3^n$, on a
 $U_{n+1} = 5 \times 3^{n+1} = 5 \times 3^n \times 3 = U_n \times 3$: donc (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$.
- 3) Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$, on a
 $U_{n+1} = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2} = U_n \times \frac{1}{2}$:
 donc (U_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

Remarque 4.2

Pour montrer que (U_n) est une suite géométrique de raison q il suffit de montrer que : $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$.

- 4) Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = -2 \times 4^n$, on a :
 $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{-2 \times 4^{n+1}}{-2 \times 4^n} = 4^{n+1-n} = 4$: donc (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 4$.

Exercice 30

Montrer que la suite (U_n) est géométrique dans les cas suivants :

- 1) $U_n = -3 \times 5^n$
- 2) $U_n = 3 \times 6^n$
- 3) $U_n = 5 \times \frac{1}{3^n}$
- 2) $U_n = \frac{1}{2} \times 7^n$

4.3.2 Le terme général d'une suite géométrique :

Propriété 4.3

Si (U_n) est une suite arithmétique de raison q alors :

- $U_n = U_0 \times q^n$
- $U_n = U_1 \times q^{n-1}$
- Pour tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$: $U_n = U_p \times q^{n-p}$

Exemple 4.7

- 1) Soit (U_n) une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $U_0 = 3$,
 déterminons U_n en fonction de n : On a : $U_n = U_0 \times q^n = 3 \times 2^n$, donc : $U_n = 3 \times 2^n$
- 2) Soit (U_n) une suite géométrique de raison $q = 5$ et $U_1 = 10$,
 déterminons U_n en fonction de n : On a : $U_n = U_1 \times q^{n-1} = 10 \times 5^{n-1} = 10 \times \frac{5^n}{5} = 2 \times 5^n$
 donc : $U_n = 2 \times 5^n$
- 3) Soit (U_n) une suite géométrique de raison $q = 3$ et $U_4 = 20$,
 déterminons U_n en fonction de n : On a : $U_n = U_4 \times q^{n-4} = 20 \times 3^{n-4}$, donc : $U_n = 20 \times 3^{n-4}$

Exercice 31

Soit (U_n) une suite géométrique, déterminer U_n en fonction de n dans les cas suivants :

- 1) $U_0 = 2$ et $q = 7$
- 2) $U_0 = -3$ et $q = 4$
- 3) $U_0 = 4$ et $q = \frac{1}{2}$
- 4) $U_1 = \frac{1}{3}$ et $q = 6$
- 5) $U_5 = 16$ et $q = 2$

4.3.3 La somme des termes successives d'une suite géométrique**Propriété 4.4**

Soit (U_n) une suite géométrique alors on a : $U_0 + U_1 + \dots + U_n = U_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$

c'est à dire :

La somme des termes = (le premier terme) $\left(\frac{1 - q^{\text{le nombre des termes}}}{1 - q} \right)$

On a aussi : $U_1 + U_2 + \dots + U_n = U_1 \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right)$

et $U_p + U_{p+1} + \dots + U_n = U_p \left(\frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \right)$

Exemple 4.8

- 1) Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = 3 \times 2^n$, on a (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et $U_0 = 3$ et $U_1 = 6$ et $U_3 = 24$:

a)

$$\begin{aligned} U_0 + U_1 + \dots + U_{10} &= U_0 \left(\frac{1 - 2^{10+1}}{1 - 2} \right) \\ &= 3 \left(\frac{1 - 2^{11}}{-1} \right) \\ &= 6141 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} U_1 + U_2 + \dots + U_{15} &= U_1 \left(\frac{1 - 2^{15}}{1 - 2} \right) \\ &= 6 \left(\frac{1 - 2^{15}}{-1} \right) \\ &= 6(2^{15} - 1) = \dots \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} U_3 + U_4 + \dots + U_{11} &= U_3 \left(\frac{1 - 2^{11-3+1}}{1 - 2} \right) \\ &= 24 \left(\frac{1 - 2^9}{-1} \right) \\ &= 24(2^9 - 1) = \dots \end{aligned}$$

- 2) Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = 2 \times 5^n$, on a (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 5$ et $U_0 = 2$ et $U_1 = 10$ et $U_4 = 1250$:

a)

$$\begin{aligned}
 U_0 + U_1 + \dots + U_8 &= U_0 \left(\frac{1 - 5^{8+1}}{1 - 5} \right) \\
 &= 2 \left(\frac{1 - 5^9}{-4} \right) \\
 &= 2 \left(\frac{5^9 - 1}{4} \right) = \frac{5^9 - 1}{2} = \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 U_1 + U_2 + \dots + U_{11} &= U_1 \left(\frac{1 - 5^{11}}{1 - 5} \right) \\
 &= 10 \left(\frac{1 - 5^{11}}{-4} \right) \\
 &= 5 \left(\frac{5^{11} - 1}{2} \right) = \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 U_4 + U_5 + \dots + U_{10} &= U_4 \left(\frac{1 - 5^{10-4+1}}{1 - 5} \right) \\
 &= 1250 \left(\frac{1 - 5^7}{-4} \right) \\
 &= 625 \left(\frac{5^7 - 1}{2} \right) = \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Exercice 32

Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = \frac{1}{2} \times 4^n$

- 1) Calculer : U_0 ; U_1 et U_2 .
- 2) Montrer que (U_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison.
- 3) a) Calculer : $U_0 + U_1 + \dots + U_6 = \dots\dots\dots$
 b) Calculer : $U_2 + U_3 + \dots + U_9 = \dots\dots\dots$
 c) Calculer : $U_1 + U_2 + \dots + U_{10} = \dots\dots\dots$

Résumer :

	La suite arithmétique	La suite géométrique
La relation	$U_{n+1} = U_n + r; \quad r \in \mathbb{R}$	$U_{n+1} = U_n \times q; \quad q \in \mathbb{R}$
Le terme U_n	$U_n = U_0 + n \times r$	$U_n = U_0 \times q^n$
Le terme U_n (en général)	$U_n = U_p + (n - p)r$	$U_n = U_p \times q^{n-p}$
La somme	$U_0 + U_1 + \dots + U_n = (n + 1) \left(\frac{U_0 + U_n}{2} \right)$	$U_0 + U_1 + \dots + U_n = U_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$
La somme (en général)	$U_p + U_{p+1} + \dots + U_n = (n - p + 1) \left(\frac{U_p + U_n}{2} \right)$	$U_p + U_{p+1} + \dots + U_n = U_p \left(\frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \right)$

Série des exercices :

Exercice 1 :

Régional 2015

Soit (V_n) la suite définie par : $V_0 = 2$ et $V_{n+1} = 2V_n$, pour n de \mathbb{N} .

- 1) Calculer V_1 et V_2 .
- 2) Déterminer la nature de la suite (V_n) .
- 3) Déterminer V_n en fonction de n .
- 4) Considérons la somme : $S = V_0 + V_1 + \dots + V_9$
Montrer que : $S = 2046$

Exercice 2 :

Régional 2017

- 1) Soit
- $(U_n)_{n \geq 0}$
- la suite définie par :

 $U_n = 5n + 6$ pour tout n de \mathbb{N} .

- a) Calculer U_0 .
 - b) Est-ce que 2017 est un terme de la suite (U_n) ? (justifier).
 - c) Montrer que la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ est arithmétique de raison 5.
 - d) Calculer la somme : $S = U_0 + U_1 + \dots + U_{403}$
- 2) Soit $(V_n)_{n \geq 0}$ une suite géométrique de premier terme $V_0 = 3$ et de raison $q = 2$.
- a) Déterminer V_n en fonction de n .
 - b) Calculer la somme : $S' = V_0 + V_1 + \dots + V_{20}$

Exercice 3 :

Rational 2015 normal

- 1) Soit
- $(U_n)_{n \geq 0}$
- la suite arithmétique telle que :

 $U_4 = 13$ et $U_7 = 22$.

- a) Montrer que la raison de la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ est égale 3 et de premier terme : $U_0 = 1$
 - b) Vérifier que : $U_{99} = 298$ puis calculer la somme : $U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{98} + U_{99} = \dots$
- 2) Soit $(V_n)_{n \geq 0}$ La suite géométrique telle que : $V_3 = 1$ et $V_5 = 4$ et de raison.
Déterminer la raison de la suite $(V_n)_{n \geq 0}$ et montrer que : $V_0 = \frac{1}{8}$,
puis déterminer V_n en fonction de n .

Exercice 4 :

Régional 2013 Ratt

Considérons la suite géométrique $(U_n)_n$ définie par : le premier terme $U_0 = 5$ et de raison $q = 2$

- 1) Calculer les deux termes : U_1 et U_{10} .
- 2) Calculer la somme : $S = U_0 + U_1 + \dots + U_9$.

Exercice 5 :

Régional 2014 Ratt

Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = U_n + 6$, pour tout n de \mathbb{N} .

- 1) Calculer : U_1 et U_2 .
- 2) Déterminer la nature de la suite (U_n) .
- 3) a) Écrire (U_n) en fonction de n .
- b) Vérifier que : $U_{99} = 597$.
- 4) Calculer la somme : $S = U_0 + U_1 + \dots + U_{99}$.

Exercice 6 :

Régional 2019

- 1) Soit
- $(U_n)_{n \geq 0}$
- une suite numérique de premier terme
- $U_0 = -1$
- et de raison
- $r = \frac{1}{2}$
- :

a) Déterminer U_n en fonction de n et montrer que : $U_2 = 0$ et $U_{22} = 10$ b) Montrer que : $U_2 + U_3 + \dots + U_{22} = 105$

- 2) Soit
- $(V_n)_{n \geq 0}$
- la suite définie par :
- $V_n = 5^{n+1}$
- pour tout
- $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que $(V_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q = 5$ et de premier terme $V_0 = 5$ b) Calculer la somme : $S = V_0 + V_1 + \dots + V_9$

exercice 7 :

- 1) Soient (U_n) une suite arithmétique tel que : $U_6 = 13$ et $U_{10} = 21$
 - a) Vérifier que la raison de la suite (U_n) est : $r = 2$ et le premier terme $U_0 = 1$
 - b) Déterminer U_n en fonction de n .
 - c) Calculer la somme : $U_0 + U_1 + \dots + U_{2013}$
- 2) Soit (V_n) la suite définie par : $V_n = 2^{2n+1}$
 - a) Vérifier que : $V_n = 4^n \times 2$
 - b) Montrer que la suite (V_n) est géométrique de raison $q = 4$.
 - c) Calculer la somme : $V_0 + V_1 + \dots + V_8$

exercice 8 :

- 1) Soient (U_n) une suite arithmétique telle que : $U_4 = 13$ et $U_7 = 22$
 - a) Vérifier que la raison de la suite (U_n) est : $r = 3$ et le premier terme $U_0 = 1$
 - b) Déterminer U_n en fonction de n .
 - c) Calculer la somme : $U_0 + U_1 + \dots + U_{99}$
- 2) Soit (V_n) la suite géométrique telle que :
 $V_2 = 1$ et $V_5 = 27$ et sa raison positive.
 - a) Déterminer la raison de la suite (V_n) et montrer que : $V_0 = \frac{1}{9}$.
 - b) Déterminer V_n en fonction de n
 - c) Calculer la somme : $V_2 + V_3 + \dots + V_9$

4.4 Devoir libre 2 S_1

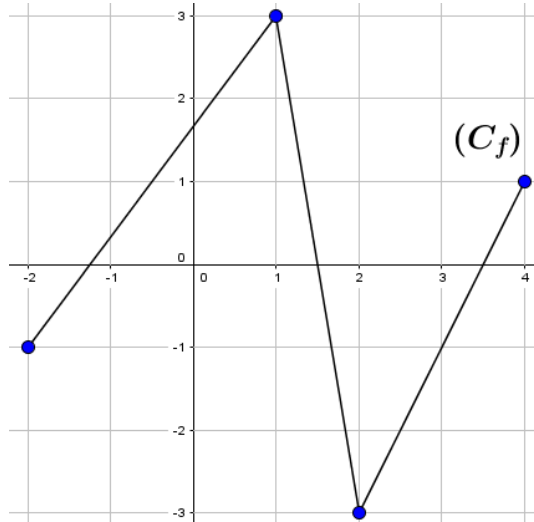
Exercice 1 (... pts)

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = 2x - 1$, (C_f) et (C_g) les courbes de f et g respectivement dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a) Calculer : $f(-2)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$ et $f(2)$.
b) Calculer : $g(0)$ et $g(1)$
- 2) Représenter (C_f) et (C_g) dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$: (par deux couleurs différents).
- 3) Résoudre graphiquement l'équation : $f(x) = g(x)$.
- 4) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \leq g(x)$.
- 5) Résoudre graphiquement l'équation : $f(x) = 0$.
- 6) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \leq 0$.
- 7) a) Donner le tableau de variations de la fonction f sur $[-2; 2]$
b) En déduire la valeur minimale de la fonction f .
- 8) a) Montrer que la fonction g est croissante sur \mathbb{R}
b) Montrer que la fonction f est croissante sur \mathbb{R}_+

Exercice 2 (... pts)

I) Soit f une fonction définie sur $[-2; 4]$ dont la représentation graphique est le suivants :



- 1) Donner le tableau de variation de la fonction f .
 - 2) Déterminer la valeur minimale de la fonction f sur $[-2; 4]$
 - 3) Déterminer la valeur maximale de la fonction f sur $[-2; 4]$
- II) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction dans les cas suivants :
- 1) $f(x) = \sqrt{3x-6}$
 - 2) $f(x) = \frac{1}{3x-6}$
 - 3) $f(x) = 3x-6$

Exercice 3 (... pts)

Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = 5n + 6$

- 1) Calculer U_0 ; U_1 et U_{20}
- 2) Montrer que (U_n) est une suite arithmétique et déterminer la raison
- 3) Calculer la somme : $U_0 + U_1 + \dots + U_{20}$

Soit (V_n) la suite définie par : $V_n = 5 \times 2^n$

- 1) Calculer V_0 ; U_1 et V_9
- 2) Montrer que (V_n) est une suite Géométrique et déterminer la raison
- 3) Calculer la somme : $V_0 + V_1 + \dots + V_9$

Soyez optimistes et tout ira pour le mieux !

Bon chance

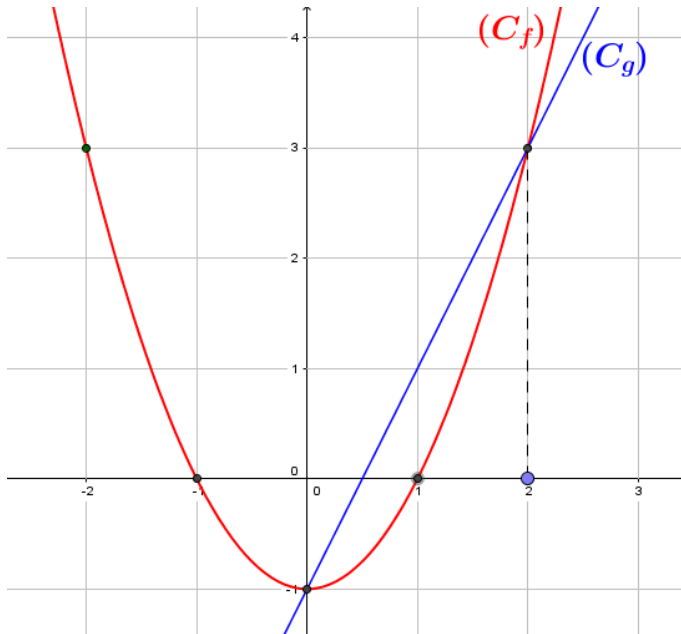
Correction du devoir libre :**Exercice 1 :**

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = 2x - 1$.

1) a) $f(-2) = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$; $f(-1) = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$; $f(0) = 0^2 - 1 = -1$;
 $f(1) = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$; $f(2) = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$.

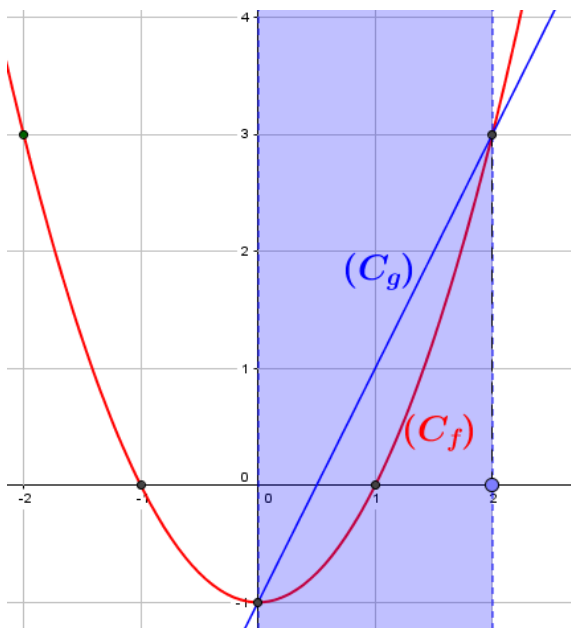
b) $g(0) = 2 \times 0 - 1 = -1$; $g(1) = 2 \times 1 - 1 = 1$.

2) Les courbes (C_f) et (C_g) :

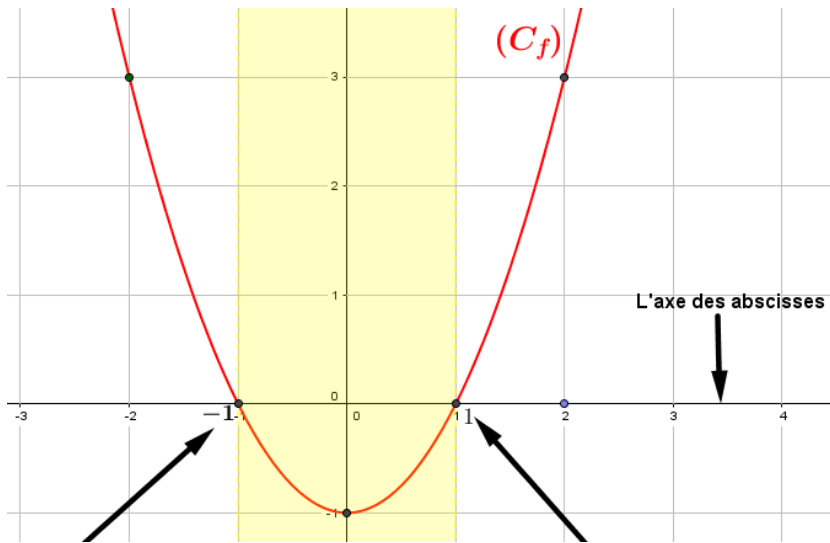


3) Les solutions de l'équation : $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) avec (C_g) , donc les solutions sont 0 et 2 (d'après les courbes), $S = \{0; 2\}$

4) Les solutions de l'équation : $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points où (C_f) se trouve **au dessous** de (C_g) , (d'après les courbes), on a : $S = [0; 2]$



- 5) Les solutions de l'équation : $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses, donc les solutions sont -1 et 1 (d'après les courbes), $S = \{-1; 1\}$
- 6) Les solutions de l'équation : $f(x) \leq 0$ sont les abscisses des points où (C_f) se trouve **au dessous** de (C_g) , (d'après les courbes), on a : $S = [-1; 1]$



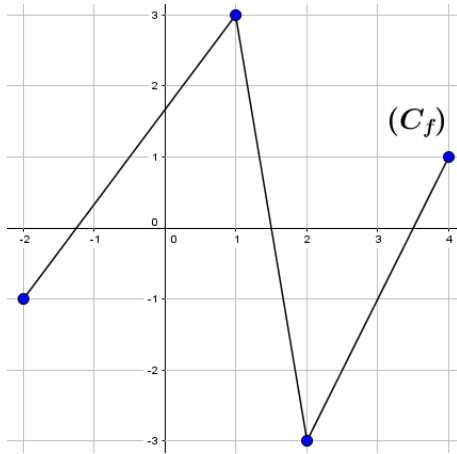
- 7) a) Le tableau des variations de la fonction f sur $[-2; 2]$,

x	-2	0	2
f	3	-1	3

\swarrow \nearrow
 (Arrows indicate the function is decreasing from x=-2 to x=0 and increasing from x=0 to x=2.)

f est décroissante sur $[-2; 0]$, et croissante sur $[0; 2]$

- b) D'après le tableau des variations : -1 est la valeur minimale de la fonction f sur $[-2; 2]$
 D'après la courbe (C_f) : -1 est la valeur minimale de la fonction f sur \mathbb{R}
- 8) a) Soit $x; y \in \mathbb{R}$, on a : $\frac{g(x) - g(y)}{x - y} = \frac{2x - 1 - (2y - 1)}{x - y} = \frac{2x - 2y}{x - y} = \frac{2(x - y)}{x - y} = 2 > 0$;
 donc g est croissante sur \mathbb{R} .
- b) Soit $x; y \in \mathbb{R}_+$: on a :
 $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{x^2 - 1 - (y^2 - 1)}{x - y} = \frac{x^2 - y^2}{x - y} = \frac{(x - y)(x + y)}{x - y} = x + y > 0$;
 donc f est croissante sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 2 :

I)

1) Le tableau des variations de f est :

x	-2	1	2	4
f	-1	3	-3	1

2) La valeur minimale de f sur $[-2; 4]$ est : -3 3) La valeur maximale de f sur $[-2; 4]$ est : 3

II) L'ensemble de définition des fonctions :

1) $f(x) = \sqrt{3x-6}$: la fonction est définie si : $3x-6 \geq 0$ c-à-d : $x \geq 2$ donc : $D_f = [2; +\infty[$.2) $f(x) = \frac{1}{3x-6}$: la fonction f est définie si : $3x-6 \neq 0$ c-à-d : $x \neq 2$ donc : $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$.3) $f(x) = 3x-6$: la fonction f est définie sur \mathbb{R} , donc : $D_f = \mathbb{R}$ **Exercice 3 :**I) Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = 5n + 6$ 1) $U_0 = 5 \times 0 + 6 = 6$; $U_1 = 5 \times 1 + 6 = 5 + 6 = 11$ et $U_{20} = 5 \times 20 + 6 = 100 + 6 = 106$ 2) On a : $U_{n+1} = 5(n+1) + 6 = 5n + 5 + 6 = 5n + 6 + 5 = U_n + 5$
donc (U_n) est une suite arithmétique de raison $r = 5$.3) $= U_0 + U_1 + \dots + U_{20} = (20+1) \left(\frac{U_0 + U_{20}}{2} \right) = 21 \left(\frac{6+106}{2} \right) = 21 \times 56 = 1176$ II) Soit (V_n) la suite définie par : $V_n = 5 \times 2^n$ 1) $V_0 = 5 \times 2^0 = 5 \times 1 = 5$; $V_1 = 5 \times 2^1 = 5 \times 2 = 10$; $V_9 = 5 \times 2^9 = 5 \times 512 = 2560$.2) On a : $V_{n+1} = 5 \times 2^{n+1} = 5 \times 2^n \times 2 = V_n \times 2$
donc (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$.3) $V_0 + V_1 + \dots + V_9 = V_0 \left(\frac{1-q^{10}}{1-q} \right) = 5 \left(\frac{1-2^{10}}{1-2} \right) = 5 \times \frac{2^{10}-1}{2-1} = 5115$

Devoir surveiller 2 S_1 Modèle A

Exercice 1 (8.5 pts)

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = x^2 - 2$ et $g(x) = x$,
 (C_f) et (C_g) les courbes de f et g respectivement dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

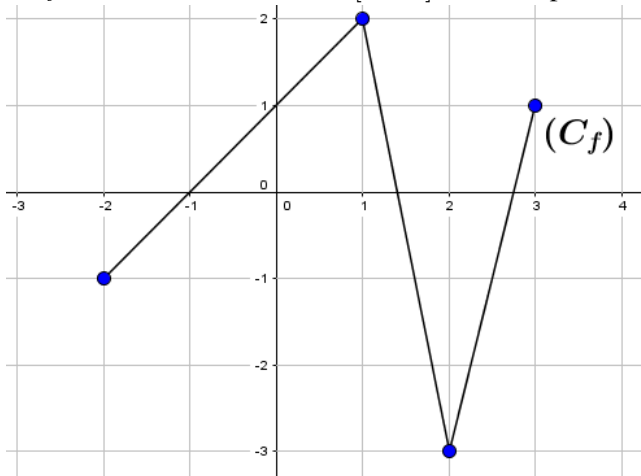
- | | |
|---|-----|
| 1) a) Calculer : $f(-2)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$ et $f(2)$. | 2.5 |
| b) Calculer : $g(0)$ et $g(1)$ | 1 |
| 2) Représenter (C_f) et (C_g) dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$: (par deux couleurs différents). | 2.5 |
| 3) Résoudre graphiquement l'équation : $f(x) = g(x)$. | 1 |
| 4) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \leq g(x)$. | 1.5 |

Exercice 3 (6 pts)

- | | |
|---|-----|
| 1) Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = 3n + 7$ | |
| a) Calculer U_0 ; U_1 et U_{30} | 1.5 |
| b) Montrer que (U_n) est une suite arithmétique et déterminer la raison | 1 |
| c) Calculer la somme : $U_0 + U_1 + \dots + U_{30}$ | 1.5 |
| 2) Soit (V_n) la suite définie par : $V_n = 4 \times 3^n$ | |
| a) Calculer V_0 ; V_1 . | 1 |
| b) Montrer que (V_n) est une suite Géométrique et déterminer la raison | 1 |

Exercice 2 (5.5 pts)

1) Soit f une fonction définie sur $[-2; 3]$ dont la représentation graphique est le suivants :



- | | |
|---|------|
| a) Donner le tableau de variation de la fonction f . | 2 |
| b) Déterminer la valeur minimale de la fonction f sur $[-2; 3]$ | 0.75 |
| c) Déterminer la valeur maximale de la fonction f sur $[-2; 3]$ | 0.75 |
| 2) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction dans les cas suivants : | |
| a) $f(x) = \sqrt{2x-6}$ b) $f(x) = \frac{1}{2x-6}$ c) $f(x) = 2x-6$ | 2 |

Devoir surveiller 2 S_1 Modèle B

Exercice 1 (8.5 pts)

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = -x^2 + 2$ et $g(x) = x$,
 (C_f) et (C_g) les courbes de f et g respectivement dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

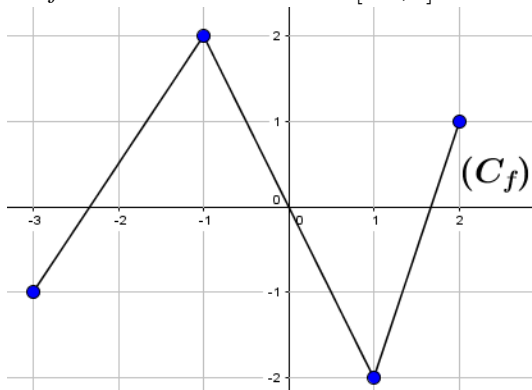
- | | |
|---|-----|
| 1) a) Calculer : $f(-2)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$ et $f(2)$. | 2.5 |
| b) Calculer : $g(0)$ et $g(1)$ | 1 |
| 2) Représenter (C_f) et (C_g) dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$: (par deux couleurs différents). | 2.5 |
| 3) Résoudre graphiquement l'équation : $f(x) = g(x)$. | 1 |
| 4) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \geq g(x)$. | 1.5 |

Exercice 3 (6 pts)

- | | |
|---|-----|
| 1) Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = 6n + 12$ | |
| a) Calculer U_0 ; U_1 et U_{10} | 1.5 |
| b) Montrer que (U_n) est une suite arithmétique et déterminer la raison | 1 |
| c) Calculer la somme : $U_0 + U_1 + \dots + U_{10}$ | 1.5 |
| 2) Soit (V_n) la suite définie par : $V_n = 2 \times 5^n$ | |
| a) Calculer V_0 ; V_1 . | 1 |
| b) Montrer que (V_n) est une suite Géométrique et déterminer la raison | 1 |

Exercice 2 (5.5 pts)

1) Soit f une fonction définie sur $[-3; 2]$ dont la représentation graphique est le suivants :



- | | |
|---|------|
| a) Donner le tableau de variation de la fonction f . | 2 |
| b) Déterminer la valeur minimale de la fonction f sur $[-3; 2]$ | 0.75 |
| c) Déterminer la valeur maximale de la fonction f sur $[-3; 2]$ | 0.75 |
| 2) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction dans les cas suivants : | |
| a) $f(x) = \sqrt{x-2}$ b) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ c) $f(x) = x-2$ | 2 |

Devoir surveiller 2 S_1 Modèle C

Exercice 1 (8.5 pts)

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = -x^2 + 2$ et $g(x) = -x$,
 (C_f) et (C_g) les courbes de f et g respectivement dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

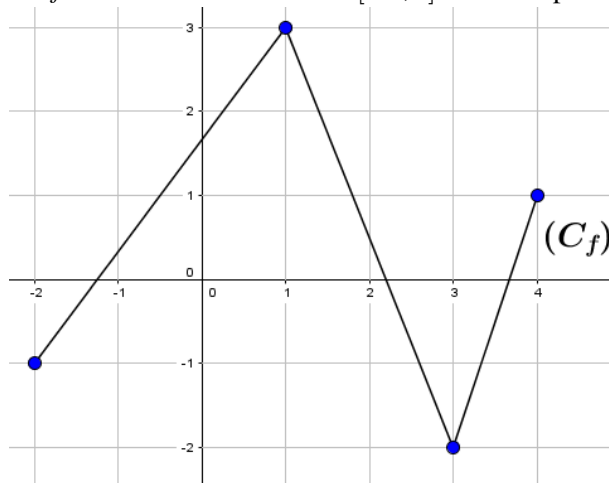
- | | |
|---|-----|
| 1) a) Calculer : $f(-2)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$ et $f(2)$. | 2.5 |
| b) Calculer : $g(0)$ et $g(1)$ | 1 |
| 2) Représenter (C_f) et (C_g) dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$: (par deux couleurs différents). | 2.5 |
| 3) Résoudre graphiquement l'équation : $f(x) = g(x)$. | 1 |
| 4) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \geq g(x)$. | 1.5 |

Exercice 3 (6 pts)

- | | |
|---|-----|
| 1) Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = 5n + 10$ | |
| a) Calculer U_0 ; U_1 et U_{15} | 1.5 |
| b) Montrer que (U_n) est une suite arithmétique et déterminer la raison | 1 |
| c) Calculer la somme : $U_0 + U_1 + \dots + U_{15}$ | 1.5 |
| 2) Soit (V_n) la suite définie par : $V_n = 5 \times 4^n$ | |
| a) Calculer V_0 ; V_1 . | 1 |
| b) Montrer que (V_n) est une suite Géométrique et déterminer la raison | 1 |

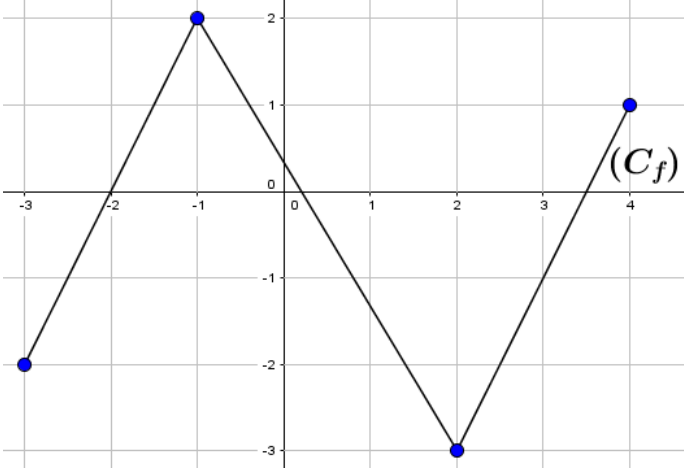
Exercice 2 (5.5 pts)

1) Soit f une fonction définie sur $[-2; 4]$ dont la représentation graphique est le suivants :



- | | |
|---|------|
| a) Donner le tableau de variation de la fonction f . | 2 |
| b) Déterminer la valeur minimale de la fonction f sur $[-2; 4]$ | 0.75 |
| c) Déterminer la valeur maximale de la fonction f sur $[-2; 4]$ | 0.75 |
| 2) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction dans les cas suivants : | |
| a) $f(x) = \sqrt{2x-2}$ b) $f(x) = \frac{1}{2x-2}$ c) $f(x) = 2x-2$ | 2 |

Devoir surveiller 2 S_1 Modèle D

<p>Exercice 1 (8.5 pts)</p> <p>Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = x^2 + 2$ et $g(x) = -x$, (C_f) et (C_g) les courbes de f et g respectivement dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.</p> <p>1) a) Calculer : $f(-2)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$ et $f(2)$. b) Calculer : $g(0)$ et $g(1)$</p> <p>2) Représenter (C_f) et (C_g) dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$: (par deux couleurs différents).</p> <p>3) Résoudre graphiquement l'équation : $f(x) = g(x)$.</p> <p>4) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \geq g(x)$.</p>	<p>2.5 1 2.5 1 1.5</p>
<p>Exercice 3 (6 pts)</p> <p>1) Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = 7n + 3$</p> <p>a) Calculer U_0 ; U_1 et U_{20}</p> <p>b) Montrer que (U_n) est une suite arithmétique et déterminer la raison</p> <p>c) Calculer la somme : $U_0 + U_1 + \dots + U_{20}$</p> <p>2) Soit (V_n) la suite définie par : $V_n = 7 \times 3^n$</p> <p>a) Calculer V_0 ; V_1.</p> <p>b) Montrer que (V_n) est une suite Géométrique et déterminer la raison</p>	<p>1.5 1 1.5 1 1</p>
<p>Exercice 2 (5.5 pts)</p> <p>1) Soit f une fonction définie sur $[-3; 4]$ dont la représentation graphique est le suivants :</p>  <p>a) Donner le tableau de variation de la fonction f.</p> <p>b) Déterminer la valeur minimale de la fonction f sur $[-3; 4]$</p> <p>c) Déterminer la valeur maximale de la fonction f sur $[-3; 4]$</p> <p>2) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction dans les cas suivants :</p> <p>a) $f(x) = \sqrt{3x-3}$ b) $f(x) = \frac{1}{3x-3}$ c) $f(x) = 3x-3$</p>	<p>2 0.75 0.75 2</p>

Devoir surveiller 2 S₁ Modèle E

Exercice 1 (8.5 pts)

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = -x^2 + 3$ et $g(x) = -x + 1$,
 (C_f) et (C_g) les courbes de f et g respectivement dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

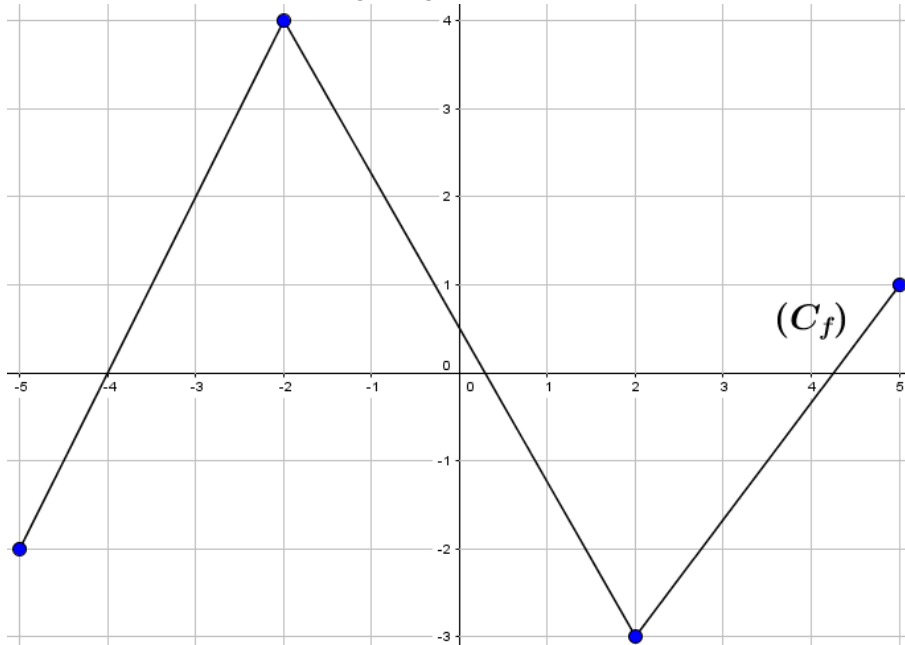
- 1) a) Calculer : $f(-2)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$ et $f(2)$. ..
- b) Calculer : $g(0)$ et $g(1)$..
- 2) Représenter (C_f) et (C_g) dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$: (par deux couleurs différents). ..
- 3) Résoudre graphiquement l'équation : $f(x) = g(x)$. ..
- 4) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \geq g(x)$. ..
- 5) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \leq g(x)$. ..

Exercice 3 (6 pts)

- 1) Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = 8n + 6$
 - a) Calculer U_0 ; U_3 et U_{40} ..
 - b) Montrer que (U_n) est une suite arithmétique et déterminer la raison ..
 - c) Calculer la somme : $U_0 + U_1 + \dots + U_{40}$..
- 2) Soit (V_n) la suite définie par : $V_n = 5 \times 7^n$
 - a) Calculer V_0 ; V_1 et v_5 ..
 - b) Montrer que (V_n) est une suite Géométrique et déterminer la raison ..

Exercice 2 (5.5 pts)

1) Soit f une fonction définie sur $[-5; 5]$ dont la représentation graphique est le suivants :



- a) Donner le tableau de variation de la fonction f . ..
 - b) Déterminer la valeur minimale de la fonction f sur $[-5; 5]$..
 - c) Déterminer la valeur maximale de la fonction f sur $[-5; 5]$..
- 2) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction dans les cas suivants :
- a) $f(x) = \sqrt{5x - 15}$ b) $f(x) = \frac{1}{5x - 15}$ c) $f(x) = 5x - 15$..

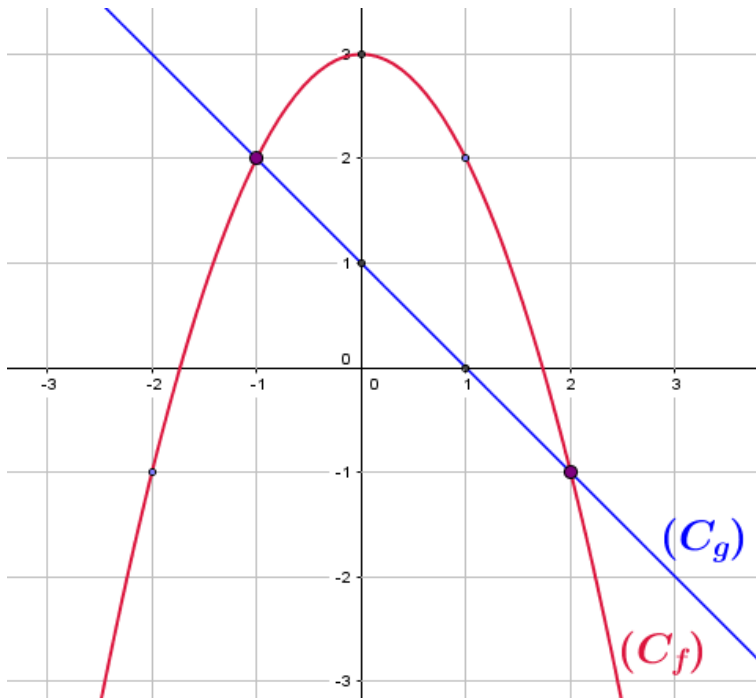
Correction du devoir : Modèle E :

1) a) $f(x) = -x^2 + 3$

- $f(2) = -2^2 + 3 = -4 + 3 = -1$ (2; -1)
- $f(1) = -1^2 + 3 = -1 + 3 = 2$ (1; 2)
- $f(0) = -0^2 + 3 = 0 + 3 = 3$ (0; 3)
- $f(-1) = -(-1)^2 + 3 = -1 + 3 = 2$ (-1; 2)
- $f(-2) = -(-2)^2 + 3 = -4 + 3 = -1$ (-2; -1)

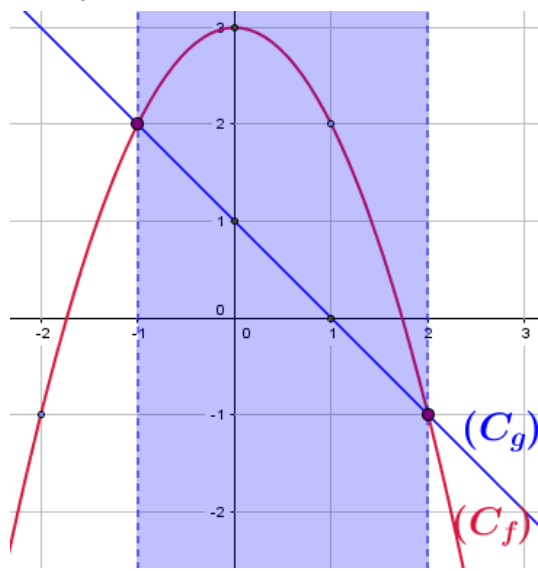
b) $g(x) = -x + 1$

- $g(0) = -0 + 1 = 1$ (0; 1)
- $g(1) = -1 + 1 = 0$ (1; 0)

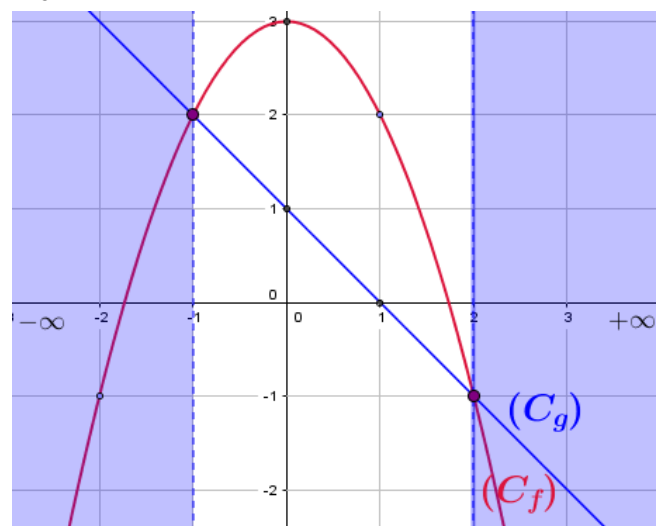


3) Les solutions de l'équation : $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) avec (C_g) , donc les solutions sont -1 et 2 (d'après les courbes), $S = \{-1; 2\}$

4) Les solutions de l'équation : $f(x) \geq g(x)$ sont les abscisses des points où (C_f) se trouve **au dessus** de (C_g) , (d'après les courbes), on a : $S = [-1; 2]$



5) Les solutions de l'équation : $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points où (C_f) se trouve **au dessous** de (C_g) , (d'après les courbes), on a : $S =]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$



CHAPITRE 5

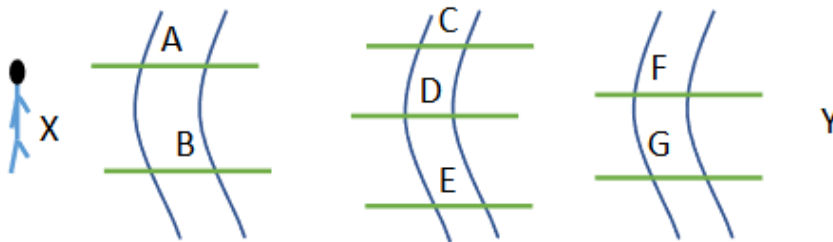
DÉNOMBREMENT

5.1 Le principe fondamental du dénombrement

5.1.1 Activités

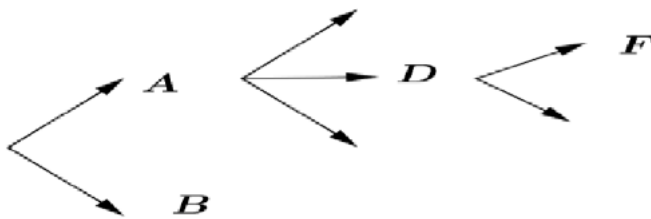
Activité 1 :

Une personne veut atteindre le point Y à partir du point X par le passage de trois vallées comme le montre la figure ci-dessous :

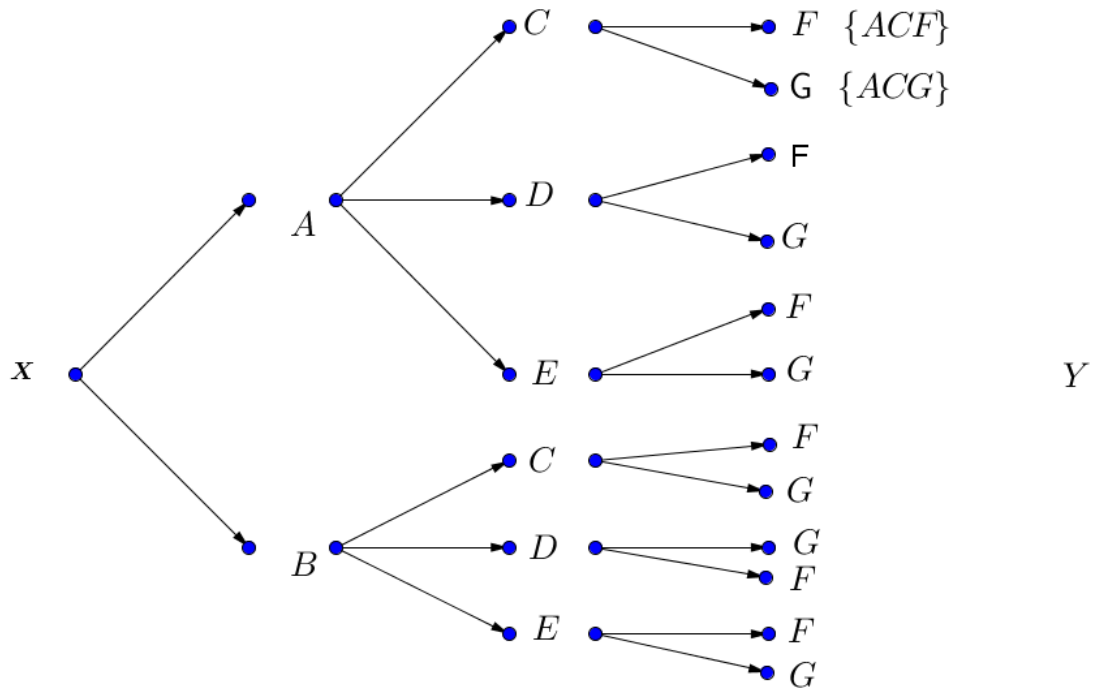


L'écriture ADF signifie que cette personne est passée par le pont A , le pont D puis le pont F .

1) Compléter l'arbre suivant, puis déduire tous les chemins menant au point Y .



2) Calculer le nombre de chemins que cette personne.

Solution de l'activité :

1)

Les chemins possibles sont : $\{ACF; ACG; ADF; ADG; AEF; AEG; BCF; BCG; BDF; BDG; BEF; BEG\}$

2) Le nombre de choix possible est 12.

Remarque 5.1

- Pour la première vallée on a : 2 chemins
- Pour la deuxième on a : 3 chemins
- Pour la troisième on a : 2 chemins

donc d'après le principe fondamentale de dénombrement le nombre des chemins possibles : $2 \times 3 \times 2 = 12$

Définition 5.1**Le principe fondamentale de dénombrement**

Considérons trois choix :

- Si la première choix se fait de n manières différentes
- et la deuxième choix se fait de m manières différentes
- et la troisième choix se fait de p manières différentes

alors le nombre de façons dont tous ces choix sont faits est : $n \times m \times p$

Remarque 5.2

On peut généralisé cette principe en quatre ou cinq ou choix (ou deux choix).

Exemple 5.1

On considère les chiffres suivantes : 1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 7 et 8

On veut former un code de 3 chiffres distincts deux à deux parmi les chiffres précédents :

- ▷ Choix du premier chiffre : on a 6 choix possibles
- ▷ Choix du deuxième chiffre : on a 5 choix possibles
- ▷ Choix du troisième chiffre : on a 4 choix possibles

Donc d'après le principe fondamentale de dénombrement le nombre des codes possibles est : $6 \times 5 \times 4 = 120$



Exercice 33

On considère les chiffres suivantes : 2 ; 4 ; 6 ; 7 et 9

On veut former un code de 4 chiffres distincts deux à deux parmi les chiffres précédents :

Déterminer le nombre de choix possibles.

Exercice 34

On lance une pièce de monnaie à deux face  et  (P et F)

Le nombre de résultats possibles est : 2

→ lorsque on lance cette pièce deux fois :

1) Combien des résultats possibles ?

→ lorsque on lance cette pièce trois fois :

2) Combien des résultats possibles ?

→ lorsque on lance cette pièce quatre fois :

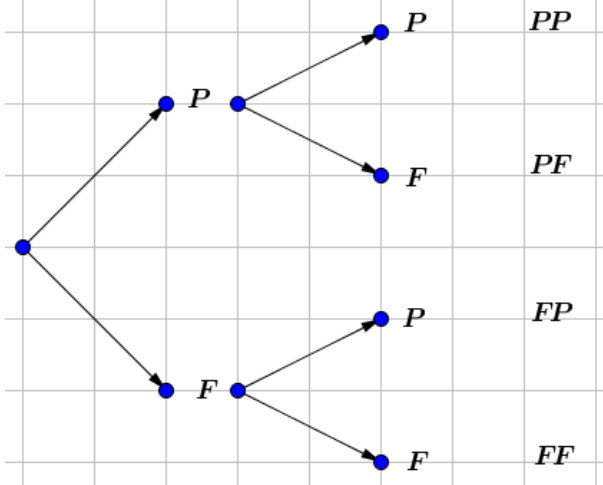
3) Combien des résultats possibles ?

Solution de l'exercice

1) ▷ Pour la première lancement on a : 2 résultats. (P ou F)

▷ Pour la deuxième lancement on a : 2 résultats. (P ou F)

Donc le nombre des résultats possibles est : $2 \times 2 = 4$

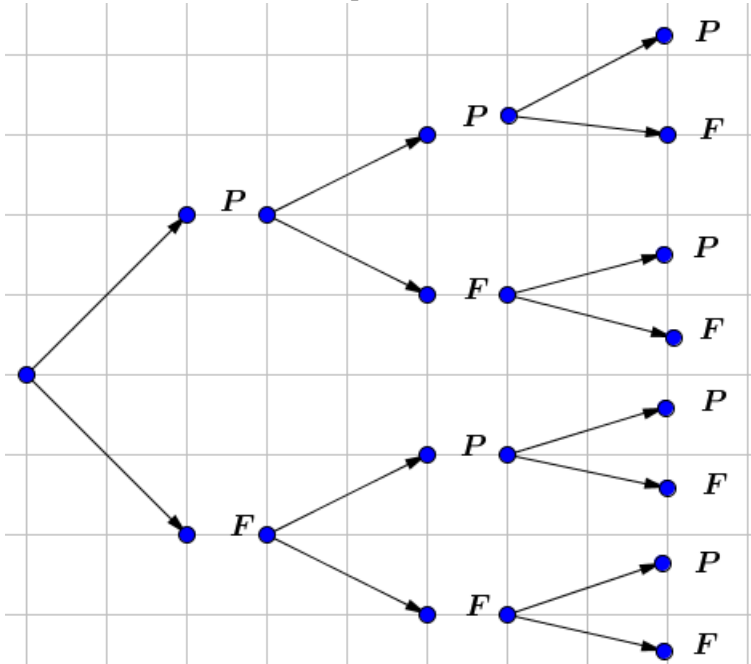


2) ▷ Pour la première lancement on a : 2 résultats. (P ou F)

▷ Pour la deuxième lancement on a : 2 résultats. (P ou F)

▷ Pour la troisième lancement on a : 2 résultats. (P ou F)

Donc le nombre des résultats possibles est : $2 \times 2 \times 2 = 8$



- 3) ▷ Pour la première lancement on a : 2 résultats. (P ou F)
 ▷ Pour la deuxième lancement on a : 2 résultats. (P ou F)
 ▷ Pour la troisième lancement on a : 2 résultats. (P ou F)
 ▷ Pour la quatrième lancement on a : 2 résultats. (P ou F)

Donc le nombre des résultats possibles est : $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

Exercice 35

On considère les chiffres suivantes : 2; 5; 7

On veut former un code de 2 chiffres parmi les chiffres précédents :

Déterminer le nombre de choix possibles.

Exercice 36

Une personne possède **trois** chemises, **deux** cravates et **trois** pantalons.

Déterminons le nombre de costumes que cette personne peut porter.

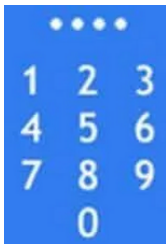
(Chaque costume se compose d'une chemise, d'une cravate et d'un pantalon)

5.2 Arrangements et permutations et combinaisons :

5.2.1 Arrangements et permutations :

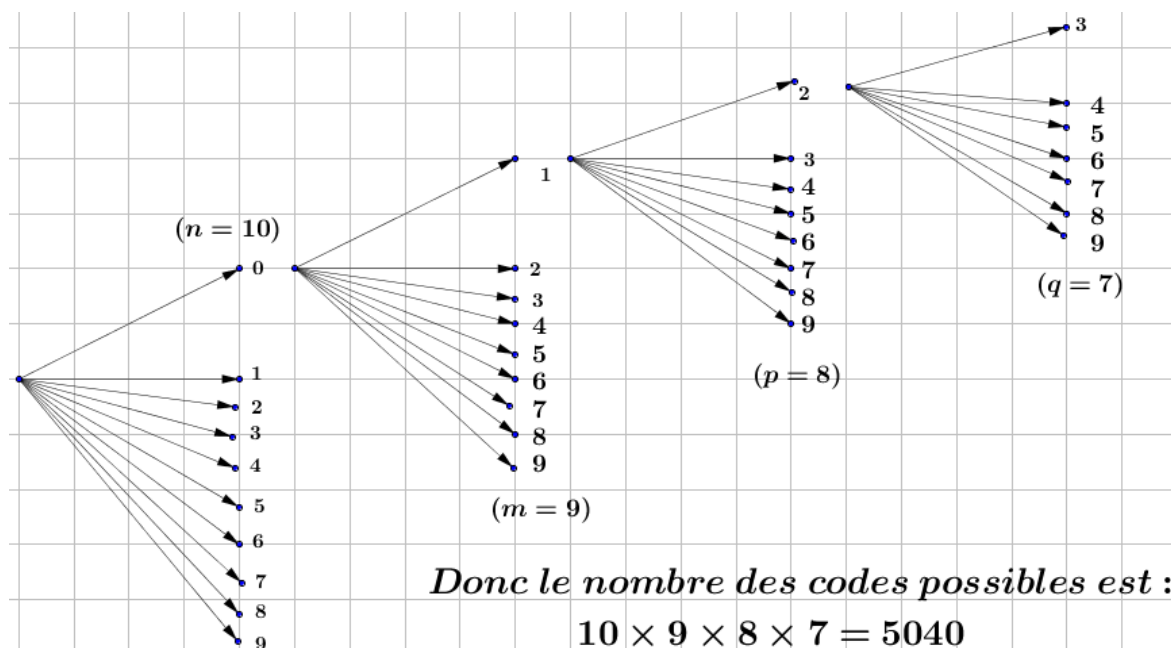
Activité :

Pour allumer un téléphone il faut appuyer sur les boutons qui portant **les quatre chiffres** du code secret.



- Supposons que les quatre chiffres de code sont différents deux à deux : Déterminer le nombre de code possibles.
- Supposons que les quatre chiffres des codes sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 : Déterminer le nombre des codes possibles.

Solutions :



1)

- Pour le premier chiffre on a : 10 choix possibles parmi les nombres : 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9
- Pour le deuxième chiffre on a : 9 choix possibles car les chiffres sont distincts.
- Pour le troisième chiffre on a : 8 choix possibles.
- Et pour le quatrième chiffre on a : 7 choix possibles.

donc d'après le principe de dénombrement les nombres des choix possibles est :

$10 \times 9 \times 8 \times 7$ et ce produit sera noté : A_{10}^4

$$A_{10}^4 = \underbrace{10 \times 9 \times 8 \times 7}_{\text{le nombre de facteurs est 4}} = 5040, \text{ et le produit commence par } 10.$$

2)

- Pour le premier chiffre on a : 4 choix possibles parmi les nombres : 1; 2; 3; 4
- Pour le deuxième chiffre on a : 3 choix possibles car les chiffres sont distincts.
- Pour le troisième chiffre on a : 2 choix possibles.
- Et pour le quatrième chiffre on a : 1 choix possibles.

donc d'après le principe de dénombrement les nombres des choix possibles est :

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = A_4^4 = 24; \text{ et ce produit sera noté : } A_4^4 \text{ ou } 4!$$

Exemple 5.2

$$1) A_6^3 = \underbrace{6 \times 5 \times 4}_{\text{le nombre de facteurs est 3}} = 120; \text{ et le produit commence par } 6.$$

$$2) A_7^2 = \underbrace{7 \times 6}_{\text{le nombre de facteurs est 2}} = 42; \text{ et le produit commence par } 7.$$

Propriété 5.1

Soient p et n deux entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$, on note le nombre des arrangements de p éléments parmi n : par A_n^p et on a : $A_n^p = n(n-1) \cdots (n-p+1)$

Remarque 5.3

Par convention : $A_n^0 = 1$

Exercice 37

Calculer les nombres suivants : A_5^3 ; A_9^4 ; A_7^1 ; A_6^2 ; A_6^6 ; A_8^5 ; A_{10}^3 ; A_5^2 et A_8^3

Propriété et Définition 5.1

Soient n un entier naturel tout arrangement de n éléments parmi n : est appelé une **permutation**. On note le nombre de permutations de n par $n!$ et on a : $n! = A_n^n = n(n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$

Exemple 5.3

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24; \quad 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Remarque 5.4

Par convention : $0! = 1$

Exercice 38

Calculer les nombres suivants : $5!$; $6!$; $9!$; $2!$; $7!$; $8!$; $1!$; $10!$ et A_6^6

Exercice 39

Combien de nombre de trois chiffres peut-on écrire avec les chiffres : 1, 3, 5, 7 et 9 tous distincts ?

Exercice 40

Combien de nombre de trois chiffres peut-on écrire avec les chiffres : 1; 2 et 3 tous distincts ?

Exercice 41

On veut former des mots à deux lettres distinctes, avec les lettres : A ; B ; C ; D ; E et F
Déterminer le nombre de mots possibles.

Exercice 42

On veut former des mots à quatre lettres distinctes deux à deux, avec les lettres : A ; B ; C et D
Déterminer le nombre de mots possibles.

Exercice 43

Dans une classe de 10 élèves. Le professeur voulait choisir les 3 premiers élèves.
Déterminer le nombre de choix possibles.

5.2.2 Combinaisons**Définition 5.2**

Soient $n \in \mathbb{N}$ et E un ensemble fini de n éléments et p un entier vérifiant : $1 \leq p \leq n$:
On appelle combinaison de p éléments parmi n éléments de E : toute partie de E possédant p éléments.
Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n est égal à C_n^p et on a : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$

Exemple 5.4

$$C_4^2 = \frac{A_4^2}{2!} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = \frac{12}{2} = 6 ; \quad C_6^3 = \frac{A_6^3}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = \frac{120}{6} = 20 ; \quad C_8^4 = \frac{A_8^4}{4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \dots\dots$$

Exercice 44

Calculer les nombres suivantes :

$$C_5^2 ; C_5^3 ; C_9^3 ; C_{10}^2 ; C_4^4 ; C_6^4 ; C_8^3 ; C_5^1 ; C_7^2 ; C_4^3 \text{ et } C_{12}^3$$

Remarque 5.5

- 1) $C_n^0 = 1$
- 2) C_n^p représente le nombre de façons de choisir p objets parmi n (L'ordre n'est pas important et il n'y a pas de répétition)

Exemple 5.5

Considérons 6 personnes :
Combien de groupes de 2 personnes peuvent être formés.

Exercice 45

Dans une classe est composée de 4 filles et 6 garçons. Le professeur voulait choisir 3 élèves pour faire un exposé.

- 1) Déterminer le nombre de groupes que le professeur peut créer.
- 2) Déterminer le nombre de groupes composés par les garçons uniquement.
- 3) Déterminer le nombre de groupes qui contiennent deux filles exactement.
- 4) Déterminer le nombre de groupes qui contiennent au moins un garçon.
- 5) Déterminer le nombre de groupes qui contiennent aux plus trois filles.

5.3 Types de tirages**1) Activité :**

Une urne contient 5 boules. On tire au hasard 3 boules de l'urne.
Déterminer le nombre de tirages possibles si :

- 1) Le tirage est **simultané**,
- 2) Le tirage est **successif sans remise**,
- 3) Le tirage est **successif avec remise**,

Solution :

1) Le tirage est **simultané** alors : chaque tirage est une combinaison de 3 élément parmi 5 :

$$\text{donc le nombre de tirage est : } C_5^3 = \frac{A_5^3}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10.$$

2) Le tirage est **successif sans remise** alors : chaque tirage est une permutation de 3 élément parmi 5 :

$$\text{donc le nombre de tirage est : } A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60.$$

Autre méthode :

- ▷ Pour la première boule on a 5 choix.
- ▷ Pour la deuxième boule on a 4 choix. (le tirage est sans remis).
- ▷ Pour la troisième boule on a 3 choix. (le tirage est sans remis).

Donc d'après le principe de dénombrement le nombre de tirages est : $5 \times 4 \times 3 = 60$

3) Le tirage est **successif avec remise** alors : le nombre de tirage est : $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$.

Autre méthode :

- ▷ Pour la première boule on a 5 choix.
- ▷ Pour la deuxième boule on a 5 choix. (le tirage est avec remis).
- ▷ Pour la troisième boule on a 5 choix. (le tirage est avec remis).

Donc d'après le principe de dénombrement le nombre de tirages est : $5 \times 5 \times 5 = 125$

2) Résumer :

On tire p éléments parmi n .

Type de Tirage	Nombre de tirages possible	L'ordre
Simultané	C_n^p	Pas important
Successif sans remise	A_n^p	Important
Successif avec remise	n^p	Important

**Exercice 46**

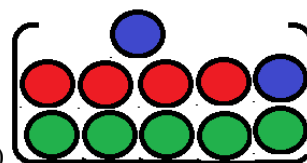
Une urne contient 5 boules blanches et 3 boules noires.

I) On tire simultanément au hasard 2 boules de l'urne.

- 1) Quel est le nombre de tirages possibles ?
- 2) Quel est le nombre de tirages comportant 2 boules de mêmes couleurs ?
- 3) Quel est le nombre de tirages comportant 2 boules de couleurs différents ?
- 4) Quel est le nombre de tirages comportant au moins une boule blanche ?

II) Répéter les mêmes questions précédentes au cas où le tirage est successif et avec remise.

III) Répéter les mêmes questions précédentes au cas où le tirage est successif et sans remise.

**Exercice 47**

Une urne contient n boules ($n = 11$); (4 Rouges); (5 verts) et (2 bleus)

I) On tire **simultanément** $p = 3$ boules de l'urne,

- 1) Quel est le nombre de tirages possible ?

- 2) Quel est le nombre de tirages de 3 boules rouge ?
 - 3) Quel est le nombre de tirages de 3 boules de même couleur ?
 - 4) Quel est le nombre de tirages de 3 boules de couleurs différents ?
 - 5) Quel est le nombre de tirages de 3 boules de couleurs différents deux à deux ?
 - 6) Quel est le nombre de tirages de 2 boules rouges et un boule bleu ?
- II) On tire **successivement** et **sans remis** $p = 3$ boules de l'urne, (Répondez aux mêmes questions) ?
- III) On tire **successivement avec remis** $p = 3$ boules de l'urne, (Répondez aux mêmes questions) ?

La série des exercices :

Devoir libre 1 S₂ Modèle A

Exercice 1

- 1) Soit (U_n) une suite arithmétique de raison $r = 5$ et $U_3 = 13$
- Déterminer U_n en fonction de n .
 - Calculer U_{100} en déduire la somme : $S = U_3 + U_4 + \dots + U_{100}$
- 2) Soit (V_n) une suite géométrique de raison $q = 3$ et $V_2 = 27$
- Déterminer V_n en fonction de n .
 - Calculer V_0 et V_7 en déduire la somme : $S' = V_0 + V_1 + \dots + V_7$

Exercice 2 (pts)



Une urne contient 10 boules ($n = 10$) ; (3 verts) ; (5 rouges) et (2 bleus)

- On tire **simultanément** $p = 3$ boules de l'urne,
 - Quel est le nombre de tirages possible ?
 - Quel est le nombre de tirages de 3 boules rouge ?
 - Quel est le nombre de tirages de 3 boules de même couleur ?
 - Quel est le nombre de tirages de 3 boules de couleurs différents ?
 - Quel est le nombre de tirages de 3 boules de couleurs différents deux à deux ?
 - Quel est le nombre de tirages de 2 boules rouges au moins ?
 - Quel est le nombre de tirages de 2 boules rouges exactement ?
- On tire **successivement et sans remis** $p = 3$ boules de l'urne, (Répondez aux mêmes questions) ?
- On tire **successivement avec remis** $p = 3$ boules de l'urne, (Répondez aux mêmes questions) ?

Exercice 3

Dans une classe est composée de 4 filles et 6 garçons. Le professeur voulait choisir 3 élèves pour faire un exposé.

- Déterminer le nombre de groupes que le professeur peut créer .
- Déterminer le nombre de groupes composés par les garçons uniquement.
- Déterminer le nombre de groupes qui contiennent deux filles exactement.
- Déterminer le nombre de groupes qui contiennent au moins un garçon.
- Déterminer le nombre de groupes qui contiennent aux plus trois filles.

Exercice 4

Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3$; 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3$; 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4$; 4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4$; 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^3$; 7) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -5x^3$; 8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^4$; 9) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^4$; 10) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 10x$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^3 + 5x^2$; 12) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3}$; 13) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3}$; 14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$

Correction du devoir libre modèle A

Exercice 1 :

- 1) a) On a : $U_n = U_p + (n-p) \times r$, dans ce cas : $p = 3$ et $r = 5$ donc :
 $U_n = U_3 + (n-3) \times 5 = 13 + 5n - 15 = 5n - 2$
- b) On a : $U_n = 5n - 2$ donc : $U_{50} = 5 \times 100 - 2 = 498$ et :
 $U_3 + U_4 + \dots + U_{100} = (100 - 3 + 1) \left(\frac{U_3 + U_{100}}{2} \right) = 98 \left(\frac{13 + 498}{2} \right) = 25039$

- 2) a) On a : $V_n = V_p \times q^{n-p}$, dans ce cas : $p = 2$ et $q = 3$ donc :
 $V_n = V_2 \times q^{n-2} = 27 \times 3^{n-2}$
- b) $V_0 = 27 \times 3^{0-2} = 27 \times 3^{-2} = \frac{27}{3^2} = \frac{27}{9} = 3$ et :

$$\begin{aligned} V_0 + V_1 + \dots + V_7 &= V_0 \left(\frac{1 - q^{7+1}}{1 - q} \right) \\ &= 3 \left(\frac{1 - 3^8}{1 - 3} \right) \\ &= 3 \left(\frac{1 - 6561}{-2} \right) \\ &= 9840 \end{aligned}$$

Exercice 2 :



I) On tire **simultanément** 3 boules de l'urne :

1) Le nombre de tirages possibles est : $C_{10}^3 = \frac{A_{10}^3}{3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = \frac{720}{6} = 120$

2) Le nombre de tirages de 3 boules rouges est : $C_5^3 = \frac{A_5^3}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = \frac{60}{6} = 10$

3) ou Le nombre de tirages de 3 boules de même couleurs est :
 $C_5^3 + C_3^3 = 10 + 1 = 11$

4) Le nombre de tirages possibles = Le nombre de tirages de boules de même couleurs + Le nombre de tirages de boules de couleurs différentes
 Donc le nombre de tirages de 3 boules couleurs différentes est : $120 - 11 = 109$

5) et et : Le nombre de tirages de 3 boules de couleurs différentes deux à deux est : $C_5^1 \times C_2^1 \times C_2^1 = 5 \times 3 \times 2 = 30$



6) Le nombre de tirages de 2 boules rouges au moins ou ou est :
 $(C_5^2 \times C_3^1) + (C_5^2 \times C_2^1) + C_5^3 = (10 \times 3) + (10 \times 2) + 10 = 60$

7) Le nombre de tirages de 2 boules rouges exactement ou est :
 $(C_5^2 \times C_3^1) + (C_5^2 \times C_2^1) = (10 \times 3) + (10 \times 2) = 50$




II) On tire **successivement sans remis** 3 boules de l'urne : (l'ordre est important) :

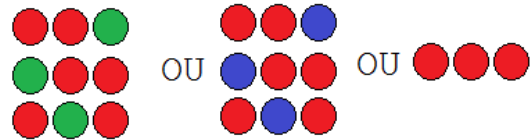
1) Le nombre de tirages possibles est : $A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$

2) Le nombre de tirages de 3 boules rouges est : $A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$

- 3)  ou  Le nombre de tirages de 3 boules de même couleurs est :
 $A_5^3 + A_3^3 = 60 + 6 = 66$

- 4) Le nombre de tirages Possibles = Le nombre de tirages de boules de même couleurs + Le nombre de tirages de boules de couleurs différentes
 Donc le nombre de tirages de 3 boules couleurs différentes est : $720 - 66 = 654$

- 5) Le nombre de tirages de 3 boules de couleurs différentes deux à deux :
 (L'ordre est important) : ( et  et ) $\times 3!$:
 donc le nombre est : $(A_5^1 \times A_3^1 \times A_2^1) \times 6 = (5 \times 3 \times 2) \times 6 = 30 \times 6 = 180$



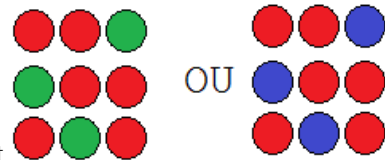
- 6) Le nombre de tirages de 2 boules rouges au moins

Remarque : Au moins deux boules rouges La troisième boule peut ou non être rouge

S'il n'est pas rouge, l'ordre est important

La boule non rouge peut être la première, la deuxième ou la troisième


Le nombre est : $(A_5^2 \times A_3^1) \times 3 + (A_5^2 \times A_2^1) \times 3 + A_5^3 = (20 \times 3) \times 3 + (20 \times 2) \times 3 + 60 = 360$






- 7) Le nombre de tirages de 2 boules rouges exactement
 $(A_5^2 \times A_3^1) \times 3 + (A_5^2 \times A_2^1) \times 3 = (20 \times 3) \times 3 + (20 \times 2) \times 3 = 300$ est :

III) On tire **successivement avec remis** 3 boules de l'urne : (l'ordre est important et il y a de répétition) :

- 1) Le nombre de tirages possibles est : $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$




- 2)  Le nombre de tirages de 3 boules rouges est : $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$

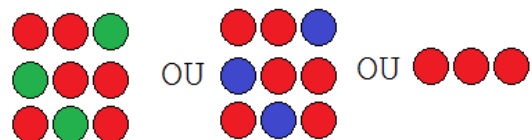
- 3)  ou  ou  Le nombre de tirages de 3 boules de même couleurs est :
 $5^3 + 3^3 + 2^3 = 125 + 27 + 8 = 160$

Remarque : On a 2 boules bleus mais on peut tirer 3, car la tirage est avec remis

Il y a de répétition on peut tirer la même boule plusieurs fois

- 4) Le nombre de tirages Possibles = Le nombre de tirages de boules de même couleurs + Le nombre de tirages de boules de couleurs différentes
 Donc le nombre de tirages de 3 boules couleurs différentes est : $1000 - 160 = 840$

- 5) Le nombre de tirages de 3 boules de couleurs différentes deux à deux :
 (L'ordre est important) : ( et  et ) $\times 3!$:
 donc le nombre est : $(5^1 \times 3^1 \times 2^1) \times 6 = (5 \times 3 \times 2) \times 6 = 30 \times 6 = 180$



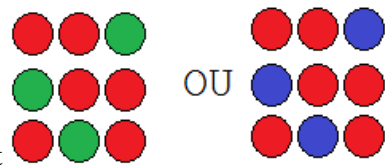
- 6) Le nombre de tirages de 2 boules rouges au moins

Remarque : Au moins deux boules rouges La troisième boule peut ou non être rouge

S'il n'est pas rouge

La boule non rouge peut être la première, la deuxième ou la troisième

Le nombre est : $(5^2 \times 3^1) \times 3 + (5^2 \times 2^1) \times 3 + 5^3 = (25 \times 3) \times 3 + (25 \times 2) \times 3 + 125 = 500$



- 7) Le nombre de tirages de 2 boules rouges exactement est :
- $$(5^2 \times 3^1) \times 3 + (5^2 \times 2^1) \times 3 = (22 \times 3) \times 3 + (25 \times 2) \times 3 = 375$$

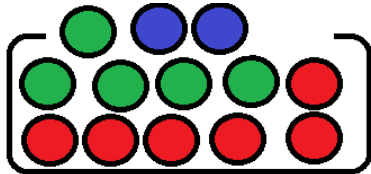
Devoir libre modèle B

Exercice 1

- 1) Soit (U_n) une suite arithmétique de raison $r = 8$ et $U_3 = 18$
 - a) Déterminer U_n en fonction de n .
 - b) Calculer U_{50} en déduire la somme : $S = U_3 + U_4 + \dots + U_{50}$
- 2) Soit (V_n) une suite géométrique de raison $q = 5$ et $V_2 = 25$
 - a) Déterminer V_n en fonction de n .
 - b) Calculer V_0 , en déduire la somme : $S' = V_0 + V_1 + \dots + V_7$

Exercice 2 (pts)

Une urne contient 13 boules ($n = 13$); (5 verts); (6 rouges) et (2 bleus)



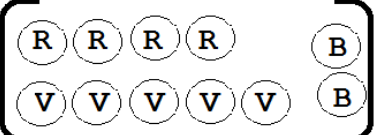
- I) On tire **simultanément** $p = 3$ boules de l'urne,
 - 1) Quel est le nombre de tirages possible ?
 - 2) Quel est le nombre de tirages de 3 boules de même couleur ?
 - 3) Quel est le nombre de tirages de 3 boules de couleurs différents ?
 - 4) Quel est le nombre de tirages de 3 boules de couleurs différents deux à deux ?
 - 5) Quel est le nombre de tirages de 2 boules bleus au plus ?
 - 6) Quel est le nombre de tirages de 2 boules rouges exactement ?
 - 7) Quel est le nombre de tirages de 2 boules vertes au moins ?
- II) On tire **successivement et sans remis** $p = 3$ boules de l'urne, (Répondez aux mêmes questions) ?
- III) On tire **successivement avec remis** $p = 3$ boules de l'urne, (Répondez aux mêmes questions) ?

Exercice 3

Dans une classe est composée de 8 filles et 10 garçons. Le professeur voulait choisir 3 élèves pour faire un exposé.

- 1) Déterminer le nombre de groupes que le professeur peut créer .
- 2) Déterminer le nombre de groupes composés par les garçons uniquement.
- 3) Déterminer le nombre de groupes qui contiennent deux filles exactement.
- 4) Déterminer le nombre de groupes qui contiennent au moins un garçon.
- 5) Déterminer le nombre de groupes qui contiennent un garçon exactement.

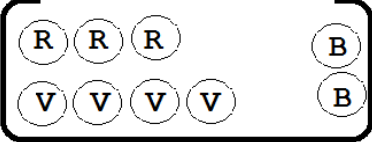
Devoir surveiller 1 S₂ Modèle A

<p>Exercice 1 (6 pts)</p> <p>1) Soit (U_n) une suite arithmétique de raison $r = 4$ et $U_5 = 18$</p> <p>a) Déterminer U_n en fonction de n. 1.25</p> <p>b) Calculer U_{50} en déduire la somme : $S = U_5 + U_6 + \dots + U_{50}$ 1.75</p> <p>2) Soit (V_n) une suite géométrique de raison $q = 2$ et $V_3 = 16$</p> <p>a) Déterminer V_n en fonction de n. 1.25</p> <p>b) Calculer V_0, en déduire la somme : $S' = V_0 + V_1 + \dots + V_7$ 1.75</p>	
<p>Exercice 2 (14 pts)</p> <p>Une urne contient 11 boules ($n = 11$); (5 verts); (4 rouges) et (2 bleus)</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; margin: 10px 0;">  </div> <p>On tire simultanément $p = 3$ boules de l'urne,</p> <p>1) Quel est le nombre de tirages possible ? 1.5</p> <p>2) Quel est le nombre de tirages de 3 boules de même couleur ? 2</p> <p>3) Quel est le nombre de tirages de 3 boules de couleurs différents ? 1.5</p> <p>4) Quel est le nombre de tirages de 3 boules de couleurs différents deux à deux ? 1.5</p> <p>5) Quel est le nombre de tirages de 2 boules rouges exactement ? 2</p> <p>6) Quel est le nombre de tirages de 2 boules vertes au moins ? 2</p> <p>7) Quel est le nombre de tirages d'une boule vertes et deux blues ? 1.5</p> <p>8) Quel est le nombre de tirages d'une boule blue au plus ? 2</p>	

Soyez optimistes et tout ira pour le mieux !

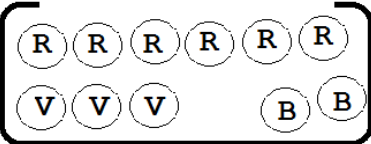
Bon chance

Devoir surveiller 1 S_2 Modèle B

<p>Exercice 1 (6 pts)</p> <p>1) Soit (U_n) une suite arithmétique de raison $r = 5$ et $U_4 = 21$</p> <p>a) Déterminer U_n en fonction de n. 1.25</p> <p>b) Calculer U_{50} en déduire la somme : $S = U_4 + U_5 + \dots + U_{50}$ 1.75</p> <p>2) Soit (V_n) une suite géométrique de raison $q = 3$ et $V_2 = 9$</p> <p>a) Déterminer V_n en fonction de n. 1.25</p> <p>b) Calculer V_0, en déduire la somme : $S' = V_0 + V_1 + \dots + V_7$ 1.75</p>	
<p>Exercice 2 (14 pts)</p> <div style="text-align: right; margin-right: 50px;">  </div> <p>Une urne contient 9 boules ($n = 9$) ; (4 verts) ; (3 rouges) et (2 bleus) On tire simultanément $p = 3$ boules de l'urne,</p> <p>1) Quel est le nombre de tirages possible ? 1.5</p> <p>2) Quel est le nombre de tirages de 3 boules de même couleur ? 2</p> <p>3) Quel est le nombre de tirages de 3 boules de couleurs différents ? 1.5</p> <p>4) Quel est le nombre de tirages de 3 boules de couleurs différents deux à deux ? 1.5</p> <p>5) Quel est le nombre de tirages de 2 boules rouges exactement ? 2</p> <p>6) Quel est le nombre de tirages de 2 boules vertes au moins ? 2</p> <p>7) Quel est le nombre de tirages d'une boule vertes et deux blues ? 1.5</p> <p>8) Quel est le nombre de tirages d'une boule blue au plus ? 2</p>	

Soyez optimistes et tout ira pour le mieux !
Bon chance

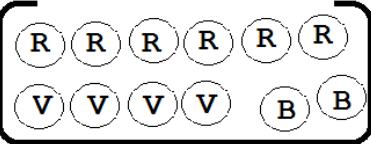
Devoir surveiller 1 S_2 Modèle C

<p>Exercice 1 (6 pts)</p> <p>1) Soit (U_n) une suite arithmétique de raison $r = 6$ et $U_4 = 22$</p> <p>a) Déterminer U_n en fonction de n. 1.25</p> <p>b) Calculer U_{30} en déduire la somme : $S = U_4 + U_5 + \dots + U_{30}$ 1.75</p> <p>2) Soit (V_n) une suite géométrique de raison $q = 2$ et $V_3 = 24$</p> <p>a) Déterminer V_n en fonction de n. 1.25</p> <p>b) Calculer V_0, en déduire la somme : $S' = V_0 + V_1 + \dots + V_7$ 1.75</p>	
<p>Exercice 2 (14 pts)</p> <p>Une urne contient 11 boules ($n = 11$); (3 verts); (6 rouges) et (2 bleus)</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;">  </div> <p>On tire simultanément $p = 3$ boules de l'urne,</p> <p>1) Quel est le nombre de tirages possible ? 1.5</p> <p>2) Quel est le nombre de tirages de 3 boules de même couleur ? 2</p> <p>3) Quel est le nombre de tirages de 3 boules de couleurs différents ? 1.5</p> <p>4) Quel est le nombre de tirages de 3 boules de couleurs différents deux à deux ? 1.5</p> <p>5) Quel est le nombre de tirages de 2 boules vertes exactement ? 2</p> <p>6) Quel est le nombre de tirages de 2 boules rouges au moins ? 2</p> <p>7) Quel est le nombre de tirages d'une boule bleue et deux rouges ? 1.5</p> <p>8) Quel est le nombre de tirages d'une boule verte au plus ? 2</p>	

Soyez optimistes et tout ira pour le mieux !

Bon chance

Devoir surveiller 1 S_2 Modèle D

<p>Exercice 1 (6 pts)</p> <p>1) Soit (U_n) une suite arithmétique de raison $r = 3$ et $U_5 = 19$</p> <p>a) Déterminer U_n en fonction de n. 1.25</p> <p>b) Calculer U_{30} en déduire la somme : $S = U_5 + U_6 + \dots + U_{30}$ 1.75</p> <p>2) Soit (V_n) une suite géométrique de raison $q = 3$ et $V_2 = 18$</p> <p>a) Déterminer V_n en fonction de n. 1.25</p> <p>b) Calculer V_0, en déduire la somme : $S' = V_0 + V_1 + \dots + V_7$ 1.75</p>	
<p>Exercice 2 (14 pts)</p> <p>Une urne contient 12 boules ($n = 12$); (4 verts); (6 rouges) et (2 bleus)</p> <div style="border: 2px solid black; border-radius: 15px; padding: 5px; display: inline-block; margin: 10px 0;">  </div> <p>On tire simultanément $p = 3$ boules de l'urne,</p> <p>1) Quel est le nombre de tirages possible ? 1.5</p> <p>2) Quel est le nombre de tirages de 3 boules de même couleur ? 2</p> <p>3) Quel est le nombre de tirages de 3 boules de couleurs différents ? 1.5</p> <p>4) Quel est le nombre de tirages de 3 boules de couleurs différents deux à deux ? 1.5</p> <p>5) Quel est le nombre de tirages de 2 boules vertes exactement ? 2</p> <p>6) Quel est le nombre de tirages de 2 boules rouges au moins ? 2</p> <p>7) Quel est le nombre de tirages d'une boule bleue et deux vertes ? 1.5</p> <p>8) Quel est le nombre de tirages d'une boule rouge au plus ? 2</p>	

Soyez optimistes et tout ira pour le mieux !
Bon chance

CHAPITRE 6

LES LIMITES DES FONCTIONS :

6.1 Activités :

6.1.1 Activité (Limite infinie en 0) :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par : $f(x) = \frac{1}{x^2}$

1) Recopier et compléter le tableau suivant :

x	-1	-0,1	-0,01	-0,001	0,001	0,1	1
$f(x)$							

2) Qu'en déduisez-vous pour les valeurs de $f(x)$: Quand x prend des valeurs proches de 0 (c-à-d quand x tend vers 0).

Solution :

1)

x	-1	-0,1	-0,01	-0,001	0,001	0,1	1
$f(x)$	1	100	10000	10^6	10^6	100	1

2) On remarque que lorsque x se rapproche de 0 : $f(x)$ prend des grandes valeurs :
On dit que la limite lorsque x tend vers 0 de $f(x)$ est $+\infty$:

et on écrit : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$. C'est à dire : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Remarque 6.1

- On a aussi : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^6} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^8} = +\infty$.
- On généralise : si n est pair alors : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$.

6.1.2 Activité (Limite finie en 0) :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2$

1) Recopier et compléter le tableau suivant :

x	-1	-0,1	-0,01	-0,001	0,001	0,1	1
$f(x)$							

2) Qu'en remarquez-vous pour les valeurs de $f(x)$: Quand x tend vers 0.

Solution :

1)

x	-1	-0,1	-0,01	-0,001	0,001	0,1	1
$f(x)$	1	0,01	0,0001	10^{-6}	10^{-6}	0,01	1

2) On remarque que lorsque x tend 0 : $f(x)$ tend vers 0 :
On a donc : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. C'est à dire : $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$.

Remarque 6.2

- On a aussi : $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} x^5 = 0$.
- On général : si $n \in \mathbb{N}$ alors : $\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$.

6.1.3 Activité (Limite infinie en $+\infty$ et en $-\infty$) :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x$; $g(x) = x^2$ et $h(x) = x^3$

I) 1) Recopier et compléter le tableau suivant :

x	10	100	10^3	10^4	10^5	10^8	10^{10}	...	$+\infty$
$f(x)$...	
$g(x)$...	
$h(x)$...	

- 2) a) Qu'en remarquez-vous pour les valeurs de $f(x)$: Quand x tend vers $+\infty$.
 b) Qu'en remarquez-vous pour les valeurs de $g(x)$: Quand x tend vers $+\infty$.
 c) Qu'en remarquez-vous pour les valeurs de $h(x)$: Quand x tend vers $+\infty$.

II) 1) Recopier et compléter le tableau suivant :

x	-10	-100	-10^3	-10^4	-10^5	-10^8	-10^{10}	...	$-\infty$
$f(x)$...	
$g(x)$...	
$h(x)$...	

- 2) a) Qu'en remarquez-vous pour les valeurs de $f(x)$: Quand x tend vers $-\infty$.
 b) Qu'en remarquez-vous pour les valeurs de $g(x)$: Quand x tend vers $-\infty$.
 c) Qu'en remarquez-vous pour les valeurs de $h(x)$: Quand x tend vers $-\infty$.

Solution :

I) 1) Le tableau :

x	10	100	10^3	10^4	10^5	10^8	10^{10}	...	$+\infty$
$f(x)$	10	100	10^3	10^4	10^5	10^8	10^{10}	...	$+\infty$
$g(x)$	100	10^4	10^6	10^8	10^{10}	10^{16}	10^{20}	...	$+\infty$
$h(x)$	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{24}	10^{30}	...	$+\infty$

2) a) Lorsque x tend vers $+\infty$: on a $f(x)$ tend vers $+\infty$, on écrit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$: c'est à dire :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

b) Lorsque x tend vers $+\infty$: on a $g(x)$ tend vers $+\infty$, on écrit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$: c'est à dire :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

c) Lorsque x tend vers $+\infty$: on a $h(x)$ tend vers $+\infty$, on écrit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$: c'est à dire :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

II) 1) Le tableau :

x	-10	-100	-10^3	-10^4	-10^5	-10^8	-10^{10}	...	$-\infty$
$f(x)$	-10	-100	-10^3	-10^4	-10^5	-10^8	-10^{10}	...	$-\infty$
$g(x)$	100	10^4	10^6	10^8	10^{10}	10^{16}	10^{20}	...	$+\infty$
$h(x)$	-10^3	-10^6	-10^9	-10^{12}	-10^{15}	-10^{24}	-10^{30}	...	$-\infty$

2) a) Lorsque x tend vers $-\infty$: on a $f(x)$ tend vers $-\infty$, on écrit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$: c'est à dire :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

b) Lorsque x tend vers $-\infty$: on a $g(x)$ tend vers $+\infty$, on écrit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$: c'est à dire :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

c) Lorsque x tend vers $-\infty$: on a $h(x)$ tend vers $-\infty$, on écrit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$: c'est à dire :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

Propriété 6.1

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$
On général : pour tous $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$
On général : soit $n \in \mathbb{N}^*$: si n est pair alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$
si n est impair alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$

6.1.4 Limite finie d'une fonction en $+\infty$ et en $-\infty$

Propriété 6.2

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} = 0$
On général : pour tous $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^4} = 0$
On général : soit $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

6.2 Définitions et propriétés :

6.2.1 Limite finie d'une fonction en un point :

Définition 6.1

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$ et soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme : $I =]a - r; a + r[$ où $r > 0$, ou sur un intervalle de la forme $(I =]a - r; a + r[-\{a\})$.

Si $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a alors on note : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ ou $(\lim_a f = l)$

Exemple 6.1

- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = x + 1 = 3$, car si x tend vers 2 (par exemple : $x = 1,99$) on a : $f(x) = 1,99 + 1 = 2,99$ tend vers 3.
- $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2x + 1 = 7$, car si x tend vers 3 (par exemple : $x = 2,9$) on a : $f(x) = 2 \times 2,9 + 1 = 6,8$ tend vers 7.

Exercice 48

Calculer les limites suivantes :

- 1) $\lim_{x \rightarrow 3} 2x + 5$; 2) $\lim_{x \rightarrow 2} 8x - 5$; 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{x+1}$; 4) $\lim_{x \rightarrow 0} 2x + 5$; 5) $\lim_{x \rightarrow -1} 2x + 5$; 6) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2x+5}$.

Remarque 6.3

Limite infinie en un point	Limite infinie en $\pm\infty$	Limite finie en $\pm\infty$	Limite finie en un point
↓	↓	↓	↓
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

6.2.2 La limite de la fonction : $x \mapsto x^n$ en 0

Propriété 6.3

On a : $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$

En général : pour tous $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$

6.2.3 Quelques opérations sur les limites :

Remarque 6.4

(Un nombre strictement positif) $\times +\infty = +\infty$

(Un nombre strictement positif) $\times -\infty = -\infty$

(Un nombre strictement négatif) $\times +\infty = -\infty$

(Un nombre strictement négatif) $\times -\infty = +\infty$

Exercice : (Les limites de la forme : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} a \cdot x^n$) :

Calculer les limites suivantes :

1). $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^3$; 2). $\lim_{x \rightarrow -\infty} -4x^3$; 3). $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^2$; 4). $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^2$; 5). $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3$

Solution :

1) Calcul de la limite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^3$. on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ et $-2 < 0$ donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^3 = -\infty$.

2) Calcul de la limite : $\lim_{x \rightarrow -\infty} -4x^3$. on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ et $-4 < 0$ donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} -4x^3 = +\infty$.

3) Calcul de la limite : $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^2$. on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ et $-3 < 0$ donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^2 = -\infty$.

4) Calcul de la limite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^2$. on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $5 > 0$ donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^2 = +\infty$.

5) Calcul de la limite : $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3$. on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ et $2 > 0$ donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty$.

6.2.4 Limite d'une fonction polynôme en un point - limite d'une fonction rationnelle en un point :

★ Rappelle : (Polynôme)

- La fonction polynôme de degré 2 c'est toute fonction de la forme : $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).
Exemples : $P(x) = 3x^2 - 4x + 1$; $P(x) = x^2 + 2x - 1$; $P(x) = x^2 + 1$;... donner les autres exemples ?...
- La fonction polynôme de degré 3 c'est toute fonction de la forme : $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$).
Exemples : $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 1$; $P(x) = 5x^3 + x^2 + 2x - 1$; $P(x) = 2x^3 - 1$;... donner les autres exemples ...
- La fonction polynôme de degré 5 c'est toute fonction de la forme : $P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ ($a \neq 0$).
Exemple : $P(x) = 4x^5 - 4x + 1$; $P(x) = x^5 + 2x - 1$; $P(x) = x^5 + 8$;... donner des autres exemples ...
- La fonction polynôme de degré 1 c'est toute fonction de la forme : $P(x) = ax + b$ ($a \neq 0$). et s'appelle aussi la fonction affine.
Exemple : $P(x) = 4x + 1$; $P(x) = 2x - 1$; $P(x) = x + 2$;... donner des autres exemples ...

Propriété 6.4

Soient P et Q deux fonctions polynômes $x_0 \in \mathbb{R}$: on a :

• $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$.

• Si $Q(x_0) \neq 0$ alors : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

Exemples :

1) Soit P la fonction définie par : $P(x) = x^2 + x + 1$ on a :
 $\lim_{x \rightarrow 1} P(x) = P(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$ et $\lim_{x \rightarrow 2} P(x) = P(2) = 2^2 + 2 + 1 = 7$

2) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$ on a : ($D_f = \mathbb{R} - \{1\}$)

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = \frac{2+3}{2-1} = 5 \quad (\text{car : } 2 \in D_f)$$

6.3 La limite à droite - la limite à gauche :**Activité (Activité 9 page 110)**

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par : $f(x) = \frac{1}{x}$, ($\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$)

1) Construire la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

2) a) Recopier et compléter le tableau suivant :

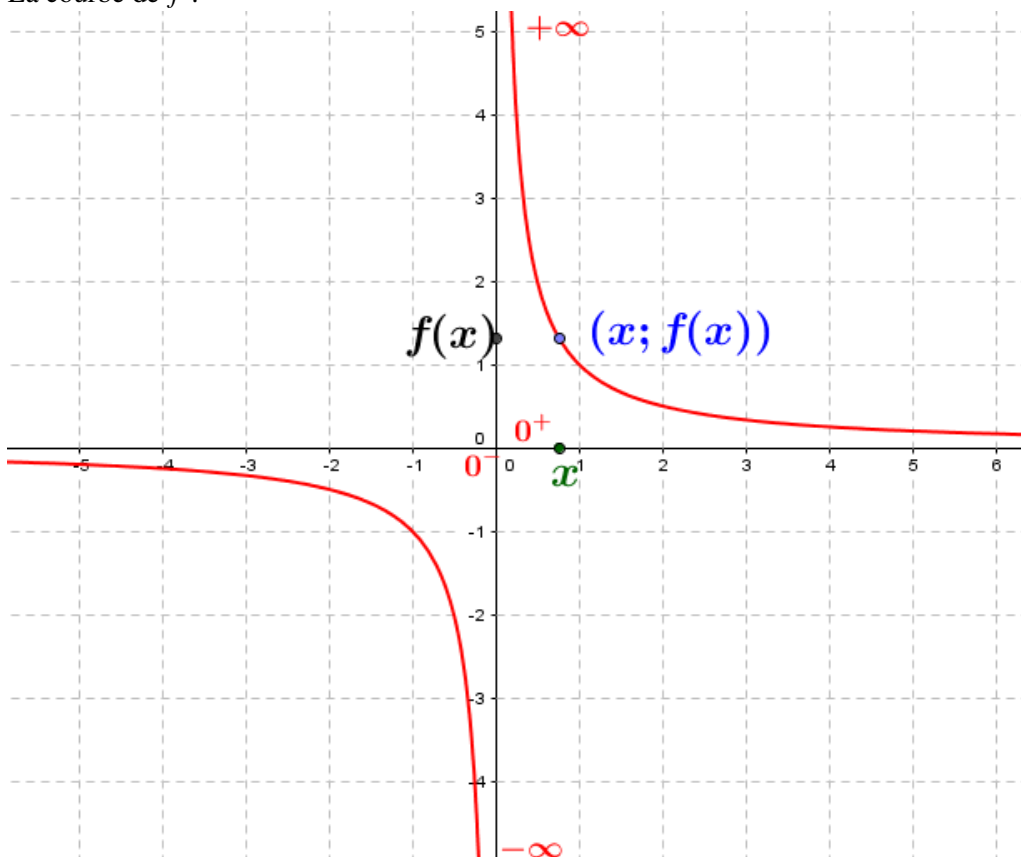
	à gauche de 0						à droite de 0				
x	-0.01	-0.001	-0.0001	-0.00001	...	0	...	0.00001	0.0001	0.001	0.01
$f(x)$...	X	...				

b) Que remarquez-vous pour les valeurs de $f(x)$: Quand x tend vers 0 et $x > 0$: (c'est à dire quand x tend vers 0 à droite).

c) Que remarquez-vous pour les valeurs de $f(x)$: Quand x tend vers 0 et $x < 0$: (c'est à dire quand x tend vers 0 à gauche).

Solution :

1) La courbe de f :



2) a) Le tableau :

x	-0.01	-0.001	-0.0001	-0.00001	...	0	...	0.00001	0.0001	0.001	0.01
$f(x)$	-100	-1000	-10000	-100000	...	X	...	100000	10000	1000	100

b) On remarque que $f(x)$ prend des valeurs plus grands (c'est à dire : $f(x) \mapsto +\infty$) quand x vers 0 à droite.

On dit que limite de $f(x)$ est : $+\infty$ quand x tend vers 0 à droite : on écrit :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty \quad \text{c'est à dire :} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ ou } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

c) On remarque que $f(x)$ prend des valeurs négatives (c'est à dire : $f(x) \mapsto -\infty$) quand x vers 0 à gauche.

On dit que limite de $f(x)$ est : $-\infty$ quand x tend vers 0 à gauche : on écrit :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \text{ ou } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty \quad \text{c'est à dire :} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ ou } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

Remarque 6.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$: On a déjà vu si : n est pair alors : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$ donc :

- Si : n est pair alors : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$
- Si : n est impair alors : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$

Exemple 6.2

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^5} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^5} = -\infty$$

Exercice 49

Calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^4} = \dots & \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^4} = \dots & \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = \dots & \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = \dots \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{x^2} = \dots & \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-4}{x^2} = \dots & \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{x^5} = \dots & \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{x^5} = \dots \end{aligned}$$

6.4 Opérations sur les limites :

On admet toutes les opérations suivantes :

Limite d'une somme :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Remarque : « F.I. » signifie « **Forme Indéterminée** ». Ceci veut dire que l'on ne peut pas conclure directement à l'aide du tableau. Il faut étudier plus en détail la fonction pour « **lever l'indétermination** » et trouver la limite.

Limite d'un produit :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \times g(x)]$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	F.I.

Il s'agit de la règle des signes

Limite de l'inverse :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	0 et $f(x) > 0$	0 et $f(x) < 0$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)}$	$\frac{1}{l}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

Limite d'un quotient :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	l	$l \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0	0	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	F.I.	F.I.

Il faut étudier le signe de g règle des signes

Remarque 6.6

- Ces opérations restent valables pour : $x \rightarrow a^+$ ou $x \rightarrow a^-$ ou $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$.
- Les formes indéterminées : " $\frac{0}{0}$ "; " $\frac{\infty}{\infty}$ "; " $(+\infty) + (-\infty)$ "; " $0 \times \infty$ ".

Exercice 50

Calculer les limites suivantes :

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + \frac{1}{x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x$; 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + \frac{1}{x}$; 5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x + \frac{7}{x}$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3}$; 7) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{x-2}$; 8) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{2}{x-5}$; 9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x$;
- 10) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1) \times \frac{1}{x}$; 11) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+1}{x-1}$; 12) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x+1}{x-2}$; 13) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

Limite d'une fonction polynôme et d'une fonction rationnelle en $+\infty$ et $-\infty$ **Propriété 6.5**

Soient P et Q deux fonctions polynômes telles que : $P(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + \lambda$ avec ($a \neq 0$)
et $Q(x) = a'x^m + b'x^{m-1} + \dots + \lambda'$ avec ($a' \neq 0$) on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n$$

Exemple 6.3

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 10x + 7 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 + 10x^2 - 17x + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty$ (3 est impair et $2 > 0$).
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^3 + 10x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^3 = -\infty$ (car : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ et $-5 < 0$)

La limite d'une fonction polynôme quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ est la limite de terme du plus grand degré.

On a aussi : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^n}{a'x^m}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n}{a'x^m}$

Exemple 6.4

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 + 3x + 1}{x^2 - 10x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3}{x^2} \lim_{x \rightarrow +\infty} 5x = +\infty$. (car $5 > 0$ et $x \rightarrow +\infty$)
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-7x^3 + 10}{-x^2 - 8x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-7x^3}{-x^2} \lim_{x \rightarrow -\infty} 7x = -\infty$. (car $7 > 0$ et $x \rightarrow -\infty$)

Techniques de calcul des limites

Remarque 6.7

- Si P est une fonction polynôme et $a \in \mathbb{R}$ alors : $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$.

Exemple 6.5

Si : $P(x) = x^2 + x + 4$ alors : $\lim_{x \rightarrow 2} P(x) = P(2) = 2^2 + 2 + 4 = 10$.

- Si f est une fonction rationnelle et $a \in D_f$:

Exemple 6.6

Si : $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$ alors : $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = \frac{2 \times 3 + 1}{3 + 1} = \frac{7}{4}$.

- Limite d'une fonction polynome et d'une fonction rationnelle en $+\infty$ et en $-\infty$

▷ Si P est une fonction polynôme de degré 3 c'est à dire : $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; ($a \neq 0$) car :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^3 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^3$$
Exemple 6.7

Posons : $P(x) = -2x^3 + 5x^2 + 4x + 1$ alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^3 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 = +\infty$$

▷ Si : P est une polynôme de degré 2 c'est à dire : $P(x) = ax^2 + bx + c$; ($a \neq 0$) alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^2$$
Exemple 6.8

Si : $P(x) = 3x^2 - 2x + 1$ alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2 = +\infty$$

On aussi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} ax + b = \lim_{x \rightarrow +\infty} ax = \begin{cases} +\infty; & (a > 0) \\ -\infty; & (a < 0) \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} ax + b = \lim_{x \rightarrow -\infty} ax = \begin{cases} -\infty; & (a > 0) \\ +\infty; & (a < 0) \end{cases}$$

Propriété 6.6

$x \mapsto f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ avec : ($a \neq 0$) et ($c \neq 0$).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}$$

Exemple 6.9

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{3x+5} = \frac{2}{3} \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+b}{x-1} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-2}{x+1} = \dots? \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{-x+2} = \dots? \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x+3}{2x} = \dots?$$

Propriété 6.7

La limite de la fonction : $x \mapsto f(x) = \frac{a}{cx+d}$ avec ($c \neq 0$).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{cx+d} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a}{cx+d} = 0$$

Exemple 6.10

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{4x+1} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{2x+1} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8}{x+1} = 0$$

Autres exemples : (en général)

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2+4x+2}{-x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x^2+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = +\infty$.

Propriété 6.8

Soit $l \in \mathbb{R}$ avec : ($l \neq 0$)

- Si $l > 0$ alors : $\frac{l}{0^+} = +\infty$ et $\frac{l}{0^-} = -\infty$
- Si : $l < 0$ alors : $\frac{l}{0^+} = -\infty$ et $\frac{l}{0^-} = +\infty$

Exemple 6.11

- 1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{0^+} = +\infty$
- 2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{0^-} = -\infty$
- 3) $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{-1}{x-2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$
- 4) $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{-1}{x-2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$
- 5) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{2x-1}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$
- 6) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{2x-1}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$
- 7) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{3x-1}{-x+1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$
- 8) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{3x-1}{-x+1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$

6.5 Autres méthodes de calcul :**1) La forme indéterminée : $\frac{0}{0}$**

Par exemple calculons la limite : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-6}{x-2}$ Si on substitue, on obtient $\frac{0}{0}$, donc on ne peut pas calculer cette limite directement. alors il faut factorisé par : $x-2$: cette méthode est appelé la méthode de la factorisation).

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-6}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)}{x-2} = 3$$

Autres exemples :

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x-5}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x-1)}{x-1} = 5$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-6}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-3)}{x-3} = 2.$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x+1 = 2.$

CHAPITRE 7

LA DÉRIVATION

7.1 Le nombre dérivé en un point - l'interprétation géométrique du nombre dérivé - la droite tangente en un point

7.1.1 Activités et définitions

Activité 1 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 3x + 2$

- 1) Calculer : $f(1)$
- 2) Déterminer : $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$
- 3) Calculer : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

Solution :

- 1) on a : $f(1) = 3 \times 1 + 2 = 3 + 2 = 5$
- 2) $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{3x + 2 - 5}{x - 1} = \frac{3x - 3}{x - 1} = \frac{3(x - 1)}{x - 1} = 3$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x - 1)}{x - 1} = 3$

Remarque 7.1

Le nombre 3 est appelé le nombre dérivé de la fonction f en 1 on le note par : $f'(1)$.

on a donc : $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ dans ce cas : $f'(1) = 3$

Activité 2 :

Calculer : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ dans les cas suivantes :

- 1) $f(x) = -2x + 1$; $a = 2$
- 2) $f(x) = x^2 + 1$; $a = 1$
- 3) $f(x) = \frac{1}{x}$; $a = -1$

Solution :

1) On a : $a = 2 \Rightarrow f(a) = f(2) = -2 \times 2 + 1 = -3$

et : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x + 1 - (-3)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-2x + 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2(x - 2)}{x - 2} = -2$

On dit que la fonction f est dérivable en 2 et $f'(2) = -2$

2) $f(x) = x^2 + 1$ et $f(1) = 2$

et : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 1 + 1 = 2$

La fonction f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.

Définition 7.1

Soit f une fonction et $a \in D_f$:

On dit que la fonction f est dérivable en le nombre : a si la limite : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est finie.

cette limite s'appelle **Le nombre dérivé** de la fonction f en a on le note par : $f'(a)$:

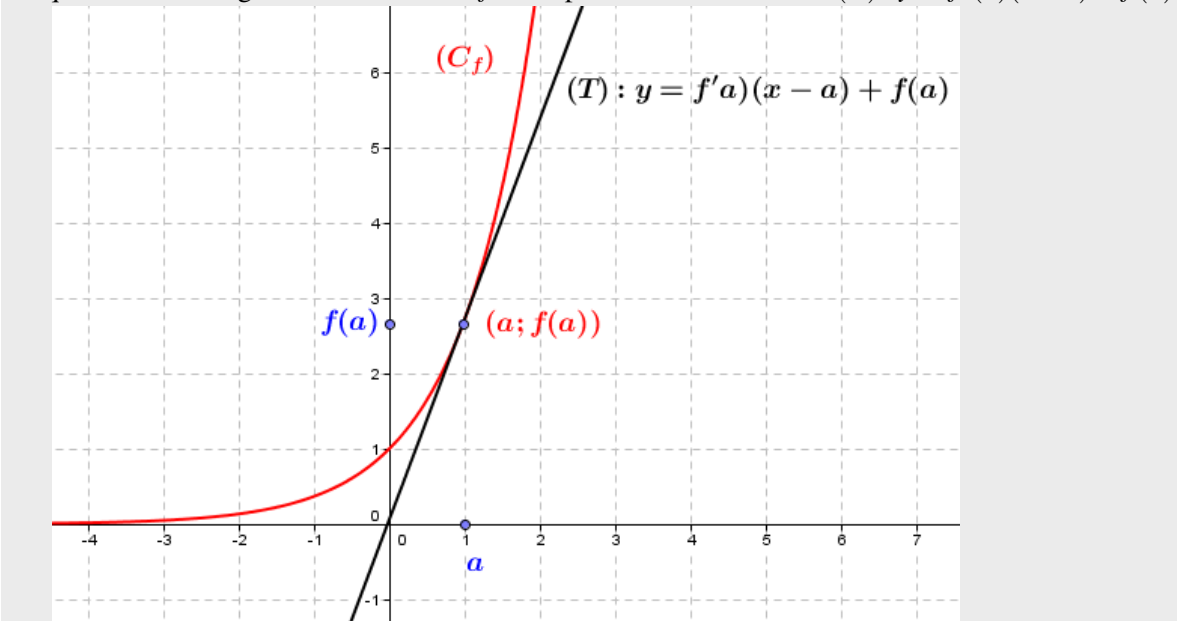
$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

7.1.2 L'équation de la tangente à la courbe en un point :

Propriété 7.1

Soit f une fonction dérivable en un point a :

L'équation de la tangente à la courbe de f en le point d'abscisse a est : $(T) : y = f'(a)(x - a) + f(a)$



Par exemple $a = 1$: alors l'équation de la tangente à la courbe de f en le point d'abscisse 1 est :

$$(T) : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

Exemple 7.1

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2$

Pour déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f en le point d'abscisse 1 :

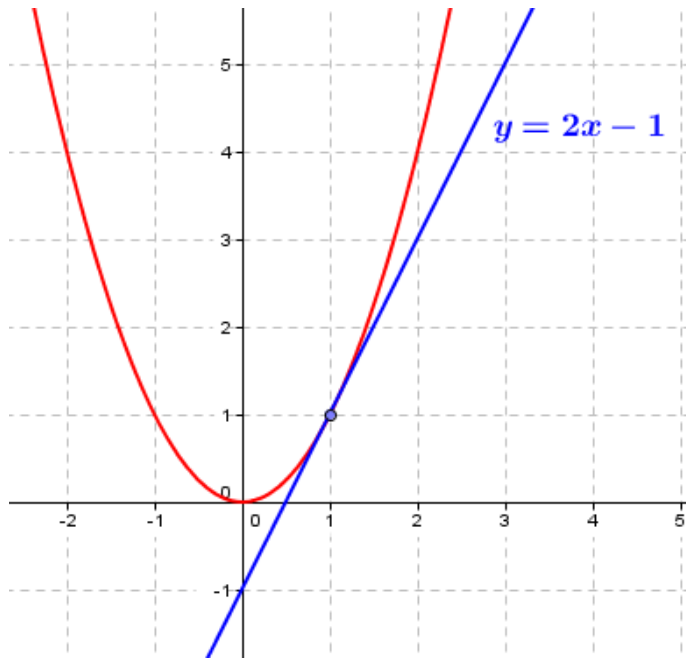
• **Premièrement** : Calculons : $f(1)$ et $f'(1)$: on a : $f(1) = 1^2 = 1$ et

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 1 + 1 = 2$$

• **Deuxièmement** : L'équation de la tangente à la courbe de f en le point d'abscisse 1 est :

$$(T) : y = f'(1)(x - 1) + f(1) \text{ c'est à dire : } (T) : y = 2(x - 1) + 1 \text{ c'est à dire : } (T) : y = 2x - 1$$

La construction de la courbe s'il est demandé :

**Exercice 51**

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction f en le point d'abscisse a dans les cas suivants :

- 1) $f(x) = x^2 + x$; $a = 0$
- 2) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 1$; $a = 0$
- 3) $f(x) = \frac{x}{x-1}$; $a = 2$

Solution :

- 1) on a : $f(x) = x^2 + x$ donc : $f(0) = 0$ et :

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x + 1 = 0 + 1 = 1$$

L'équation de la tangente à la courbe de la fonction f en le point d'abscisse 0 est :

$$(T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0) \text{ c'est à dire : } (T) : y = 1(x - 0) + 0 \text{ c'est à dire : } (T) : y = x$$

7.2 La fonction dérivée :**7.2.1 Définition****Définition 7.2**

On dit que la fonction f est dérivable sur un intervalle ouvert I si f est dérivable en tous les points de I . et la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f' : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

s'appelle **la dérivée** de la fonction f sur I on le note par f' .

7.2.2 La dérivation de quelques fonctions usuelles

Soient a et b deux nombres réelles :

La fonction $x \mapsto f'(x)$	La fonction $x \mapsto f(x)$	L'ensemble de définition D_f
La fonction nulle $x \mapsto f'(x) = 0$	La fonction constante $x \mapsto f(x) = a$ avec $(a \in \mathbb{R})$	\mathbb{R}
$x \mapsto f'(x) = a$ avec $(a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto f(x) = ax$ avec $(a \in \mathbb{R})$	\mathbb{R}
$f'(x) = a$	$x \mapsto f(x) = ax + b$	\mathbb{R}
$f'(x) = 2x$	$x \mapsto f(x) = x^2$	\mathbb{R}
$f'(x) = nx^{n-1}$	$x \mapsto f(x) = x^n$ avec $(n \in \mathbb{N}^*)$	\mathbb{R}
$f'(x) = 3x^2$	$x \mapsto f(x) = x^3$	\mathbb{R}
$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$

Exemple 7.2

- 1) Si : $f(x) = 3x$ alors : $f'(x) = 3$
- 2) Si : $f(x) = 4x + 1$ alors : $f'(x) = 4$
- 3) Si : $f(x) = 5$ alors : $f'(x) = 0$
- 4) Si : $f(x) = x^4$ alors : $f'(x) = 4x^3$
- 5) Si : $f(x) = x^5$ alors : $f'(x) = 5x^4$
- 6) Si : $f(x) = x$ alors : $f'(x) = 1$

7.2.3 Les opérations sur les fonctions dérivables :

Les opérations	La fonction $x \mapsto f(x)$	La fonction $x \mapsto f'(x)$	La condition
La somme	$f + g$	$(f + g)' = f' + g'$
La multiplication par un nombre	$k \cdot f$ avec $k \in \mathbb{R}$	$(k \cdot f)' = k \cdot f'$
Le produit	$f \times g$	$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$
L'inverse	$\frac{1}{f}$	$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$	$f \neq 0$
La quotient	$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$	$g \neq 0$
Le carré	f^2	$(f^2)' = 2 \cdot f' \cdot f$
La puissance	f^n	$(f^n)' = n \cdot f' \cdot f^{n-1}$

Exercice 52

Déterminer la dérivée de la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x) = 4x^2$

2) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 1$

3) $f(x) = (2x+1)(3x-1)$

4) $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

5) $f(x) = (x^2 - 1)^5$

6) $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^6$

7) $f(x) = \frac{1}{3x+2}$

Solution :

1) $f(x) = 4x^2$ donc : $f'(x) = (4x^2)' = 4(x^2)' = 4 \times 2x = 8x$

2) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 1$ donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3 + 4x^2 + 5x + 1)' \\ &= (x^3)' + 4(x^2)' + (5x + 1)' \\ &= 3x^2 + (4 \times 2x) + 5 \\ &= 3x^2 + 8x + 5 \end{aligned}$$

3) $f(x) = (2x+1)(3x-1)$ donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((2x+1)(3x-1))' \\ &= (2x+1)'(3x-1) + (2x+1)(3x-1)' \\ &= 2(3x-1) + (2x+1) \cdot 3 \\ &= 6x - 2 + 6x + 3 \\ &= 12x + 1 \end{aligned}$$

4) $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)' \\ &= \frac{(2x+1)'(x-1) - (2x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2'(x-1) - (2x+1) \times 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x - 2 - 2x - 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{-3}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

5) $f(x) = (x^2 - 1)^5$ donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((x^2 - 1)^5)' \\ &= 5 \cdot (x^2 - 1)^4 \cdot (x^2 - 1)' \\ &= 5(x^2 - 1)^4 \cdot 2x \\ &= 10x(x^2 - 1)^4 \end{aligned}$$

$$6) \quad f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^6 \quad \text{donc : } f'(x) = \left(\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^6\right)' = 6 \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^5 \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)'$$

donc il faut calculer : $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'$

$$7) \quad f(x) = \frac{1}{3x+2} \quad \text{donc : } f'(x) = \left(\frac{1}{3x+2}\right)' = \frac{-(3x+2)'}{(3x+2)^2} = \frac{-3}{(3x+2)^2}$$

7.3 Les variations d'une fonction et le signe de la dérivée :

Propriété 7.2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I inclus dans D_f :

- f est croissante sur $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) : f'(x) \geq 0$
- f est décroissante sur $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) : f'(x) \leq 0$
- f est constante sur $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) : f'(x) = 0$

Exemple 7.3

- **Exemple 1 :** Soit f la fonction définie par : $f(x) = 3x + 1$, on a la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} : et pour tous $x \in \mathbb{R} : f'(x) = (3x + 1)' = 3 > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} .
- **Exemple 2 :** Soit f la fonction définie par : $f(x) = -2x + 3$, on a la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} : et pour tous $x \in \mathbb{R} : f'(x) = (-2x + 3)' = -2 < 0$ donc la fonction f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .
- **Exemple 3 :** Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 + 4x$, on a la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} : et pour tous $x \in \mathbb{R} : f'(x) = (x^2 + 4x)' = (x^2)' + (4x)' = 2x + 4$
Pour déterminer les variations de la fonction f il faut déterminer le signe de $f'(x)$: c'est à dire : $2x + 4$.
on a le tableau de signe de $2x + 4$ est :

La solution de l'équation $2x + 4 = 0$ est $x = -2$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x) = 2x + 4$	-	0	+

- on a pour tout x de $[-2; +\infty[: f'(x) \geq 0$ donc la fonction f est croissante sur $[-2; +\infty[$
 - et pour tout x de $] -\infty; -2] : f'(x) \leq 0$ donc la fonction f est décroissante sur $] -\infty; -2]$
- On va résumer ces résultats dans un tableau s'appelle le tableau des variations de la fonction f

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$f(-2) = (-2)^2 + 4 \times -2 = -4$$

-4 est la valeur minimale de f sur \mathbb{R}

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x) = 2x + 4$	-	0	+
Les variations de f	$+\infty$	-4	$+\infty$

- **Exemple 4 :**

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3 - 3x$

On a la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} :

et pour tout $x \in \mathbb{R} : f'(x) = (x^3 - 3x)' = (x^3)' - (3x)' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$
 Pour étudier les variations de la fonction f il faut déterminer le signe de $f'(x)$: c'est à dire : $x^2 - 1$.
 on a le tableau de signe de $f'(x)$ est :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
f	$-\infty$	2	-2	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$f(1) = 1^3 - 3 \times 1 = -2 ; \quad f(-1) = (-1)^3 - 3 \times -1 = 2$$

Exercice 53

Déterminer les variations de la fonction f dans les cas suivants :

- 1) $f(x) = 5x - 1$
- 2) $f(x) = -3x + 2$
- 3) $f(x) = x^2 - 2x$
- 4) $f(x) = x^3 - 3x^2$

CHAPITRE 8

L'ÉTUDE DES FONCTIONS

8.1 L'asymptote verticale et l'asymptote horizontale :

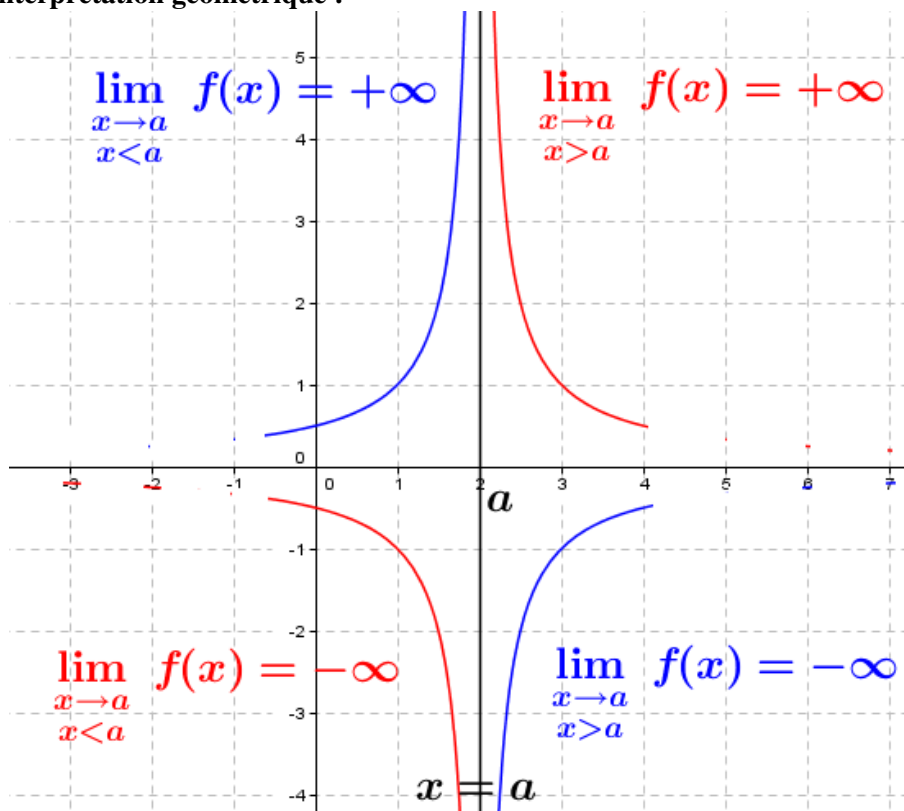
8.1.1 L'asymptote verticale :

Propriété 8.1

Si : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \pm\infty$

alors on dit que la droite d'équation : $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe de f (C_f).

L'interprétation géométrique :



Remarque 8.1

- Dans toute la suite on note la courbe de la fonction f par : (C_f)
- La courbe de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation : $x = a$ ça veut dire que la courbe de f se rapproche de la droite : $x = a$ quand x tend vers a . (Voir la courbe).

Exemple 8.1

Calculons les limites : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{x-1}$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{x-1}$ et déterminons l'interprétation géométrique des résultats.

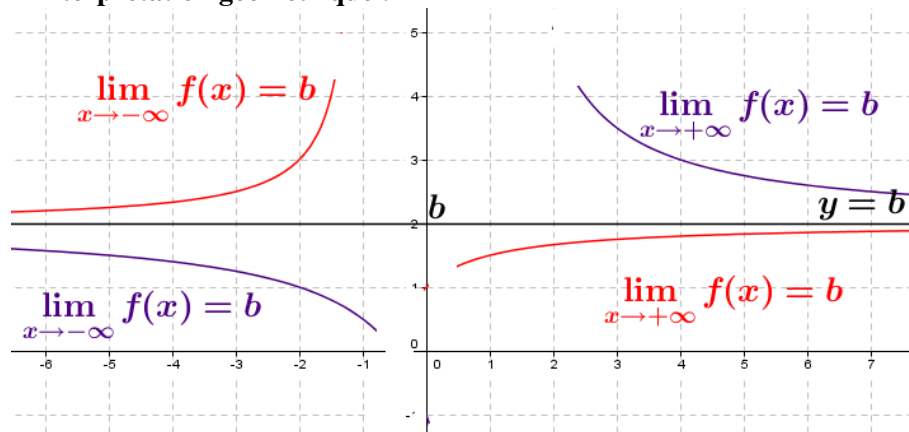
on a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} x - 1 = 0^+$ donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{x-1} = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} x - 1 = 0^-$ donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{x-1} = -\infty$

l'interprétation géométrique :

La droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f) ; avec : $f(x) = \frac{1}{x-1}$

8.1.2 L'asymptote horizontale :**Propriété 8.2**

- si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$: alors la droite d'équation : $y = b$ est une asymptote horizontale à la courbe de $f(C_f)$ au voisinage de : $+\infty$
- si : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$: alors la droite d'équation : $y = b$ est une asymptote horizontale à la courbe de $f(C_f)$ au voisinage de : $-\infty$

L'interprétation géométrique :**Exemple 8.2**

Calculons les limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x+2}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x+2}$ et déterminons l'interprétation géométrique des résultats :

on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2$

on pose : $f(x) = \frac{2x}{x+2}$ on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

alors la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation : $y = 2$ au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$

Exercice 54

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$

- 1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .
- 2) Calculer les limites : $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
et donner l'interprétation géométrique des résultats trouver :

Solution :

1) $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ (la fonction f est définie si : $x - 2 \neq 0$) c'est à dire : $x \neq 2$, donc : $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$.

2) On a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} x - 2 = 0^+$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} 3x + 1 = 7$ donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{3x+1}{x-2} = \left(\frac{7}{0^+} \right) = +\infty$
et on a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} x - 2 = 0^-$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} 3x + 1 = 7$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{3x+1}{x-2} = \left(\frac{7}{0^-} \right) = -\infty$

L'interprétation géométrique : la courbe de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation : $x = 2$.

on a aussi : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{x-2} = \frac{3}{1} = 3$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+1}{x-2} = \frac{3}{1} = 3$

L'interprétation géométrique : La courbe de la fonction f admet une asymptote horizontale : $y = 3$ au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$.

8.2 Étude de la fonction de seconde degré : $x \mapsto f : ax^2 + bx + c$

Exemple : examen régional 2019

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 - 6x + 5$

- 1) Montrer que : $D_f =]-\infty; +\infty[$.
- 2) Calculer les limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 3) Soit f' la fonction dérivée de la fonction f : montrer que : pour tout x de \mathbb{R} : $f'(x) = 2(x - 3)$ et donner le tableau des variations de la fonction f .
- 4) Montrer que la fonction f admet une valeur minimale à déterminer
- 5) a) Montrer que pour tout x de \mathbb{R} : $f(x) = (x - 1)(x - 5)$, en déduire les points d'intersections de (C_f) avec l'axe des abscisses.
b) Déterminer le point d'intersection de (C_f) avec l'axe des ordonnées.
- 6) Déterminer l'équation de (Δ) la tangente à la courbe (C_f) en le point d'abscisse 0.
- 7) Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Solution :

- 1) On a f est une fonction polynôme alors : $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$
- 2) on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 6x + 5 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$
et
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 6x + 5 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$
- 3) La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} car c'est une fonction polynôme et pour tout x de \mathbb{R} :

$$f'(x) = (x^2 - 6x + 5)' = (x^2)' - (6x)' + (5)' = 2x - 6 = 2(x - 3)$$

Les variations de f dépend au signe de $f'(x)$ on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\text{حل المعادلة } f'(x) = 0 \text{ هو } x=3$$

$$f(3) = 3^2 - 6 \times 3 + 5 = -4$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x) = 2(x - 3)$	-	0	+
f	$+\infty$	-4	$+\infty$

- 4) D'après le tableau des variations de la fonction f on a :
 $f(3) = -4$ est la valeur minimale de la fonction f sur \mathbb{R} c'est à dire pour tout x de \mathbb{R} : $f(x) \geq -4$
- 5) a) On a : $(x - 1)(x - 5) = x^2 - x - 5x + 5 = x^2 - 6x + 5 = f(x)$ (le développement suffisant)
 Pour déterminer les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses il faut résoudre l'équation : $f(x) = 0$:
 c'est à dire : $(x - 1)(x - 5) = 0$ c-a-d : $x - 1 = 0$ ou $x - 5 = 0$ c-a-d : $x = 1$ ou $x = 5$
 donc les points d'intersections de (C_f) avec l'axe des abscisses est : $A(1;0)$ et $B(5;0)$

- b) Pour déterminer le point d'intersection de (C_f) avec l'axe des ordonnées : il faut calculer : $f(0)$, on a : $f(0) = 0^2 - 6 \times 0 + 5 = 5$
donc le point d'intersection de (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $C(0;5)$
- 6) L'équation de la tangente (Δ) à la courbe (C_f) en le point d'abscisse 0 est : $(\Delta) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$
on a : $f(0) = 5$ et $f'(0) = 2(0-3) = -6$ (car : $f'(x) = 2(x-3)$) et donc : $(\Delta) : y = -6x + 5$
- 7) La courbe (C_f) et la tangente (Δ) :

لإنشاء منحنى الدالة f:

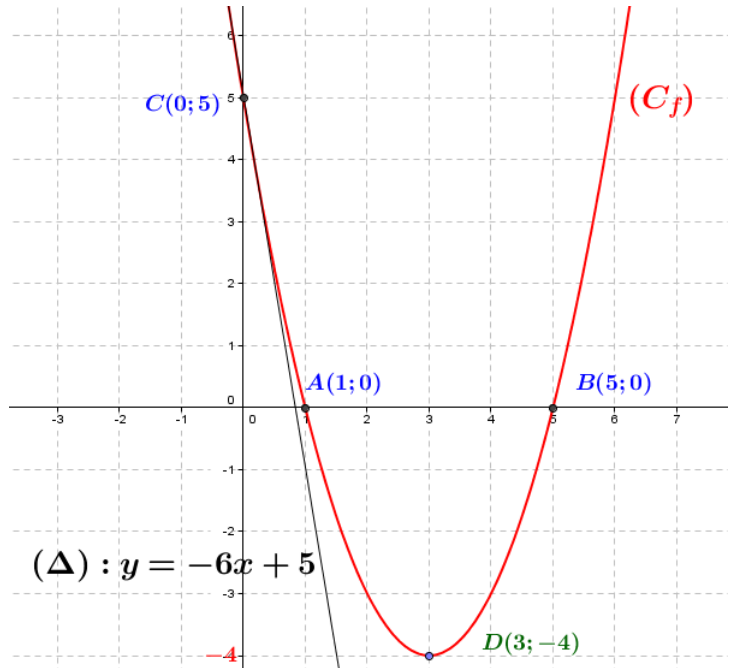
ننشئ النقاط الأساسية:

نقط التقاطع مع محور الافاصيل

نقطة التقاطع مع محور الاراتيب

ثم تمثيل نقط أخرى

لتمثيل المستقيم $(\Delta) : y = -6x + 5$
نمثل نقطتين
من نقطتين يمر مستقيم



Pour construire la courbe de f il faut représenter les points particuliers :

- les points d'intersections avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées, puis autres points
- Pour construire la droite $(\Delta) : y = -6x + 5$, il suffit de construire deux points.

Exercice : examen régional 2017

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 - 4x + 3$

- 1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .
- 2) Calculer les limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 3) Soit f' la fonction dérivée de la fonction f : montrer que : pour tout x de \mathbb{R} : $f'(x) = 2(x-3)$
- 4) Étudier le signe de $f'(x)$ et donner le tableau des variations de la fonction f .
- 5) Montrer que pour tout x de \mathbb{R} : $f(x) = (x-1)(x-5)$,
- 6) Déterminer les points d'intersections de (C_f) avec l'axe des abscisses. et avec l'axe des ordonnées.
- 7) Déterminer l'équation de (Δ) la tangente à la courbe (C_f) en le point d'abscisse 3.
- 8) Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Exercice : examen régional 2016

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = -x^2 + 4x$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 1) Calculer : $f(2)$ et $f(4)$
- 2) Calculer les limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

- 3) Soit f' la fonction dérivée de la fonction f : montrer que : pour tout x de \mathbb{R} : $f'(x) = -2(x-2)$
- 4) Étudier le signe de $f'(x)$ et donner le tableau des variations de la fonction f .
- 5) Montrer que pour tout x de \mathbb{R} : $f(x) = -x(x-4)$,
- 6) Déterminer les points d'intersections de (C_f) avec l'axe des abscisses. et avec l'axe des ordonnées.
- 7) Déterminer l'équation de (Δ) la tangente à la courbe (C_f) en le point d'abscisse 0.
- 8) Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

8.3 Étude de la fonction : $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$

1) Exemple :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ et (C_f) sa courbe représentative.

- 1) Montrer que : $D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.
- 2) Calculer les limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$. En déduire les équations des asymptotes à (C_f) .
- 3) Montrer que : $f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}$ pour tout $x \neq 1$, puis donner le tableau des variations de la fonction f .
- 4) Déterminer l'équation de la tangente (Δ) à (C_f) en le point d'abscisse 0.
- 5) Construire la courbe (C_f) et les asymptotes et la tangente (Δ) dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Solution :

- 1) La fonction f est définie si : $x-1 \neq 0$ c'est à dire : $x \neq 1$
donc : $D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.
- 2) On a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} x-1 = 0^+$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} 2x+1 = 3 > 0$ donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{2x+1}{x-1} = +\infty$
et on a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} x-1 = 0^-$ avec $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} 2x+1 = 3 > 0$ donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{2x+1}{x-1} = -\infty$

L'interprétation géométrique : La droite d'équation $x = 1$ est une asymptote à (C_f) la courbe de f

et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2$

L'interprétation géométrique : la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$

- 3) Montrons que : $f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}$. On a la fonction f est dérivable sur D_f et :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)' = \frac{(2x+1)'(x-1) - (2x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2(x-1) - (2x+1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x-2-2x-1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{-3}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

On a pour tout $x \neq 1$: $(x-1)^2 > 0$ et $-3 < 0$ donc : $f'(x) < 0$ alors la fonction f est décroissante sur chaque intervalle de D_f .

→ La fonction f n'est pas définie en 1 : il faut noté dans le tableau des variations.

Le tableau des variations de f est :

لا تنسى أيضا أن:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$ إشارة	—		—
تغيرات الدالة f	2	$-\infty$	2

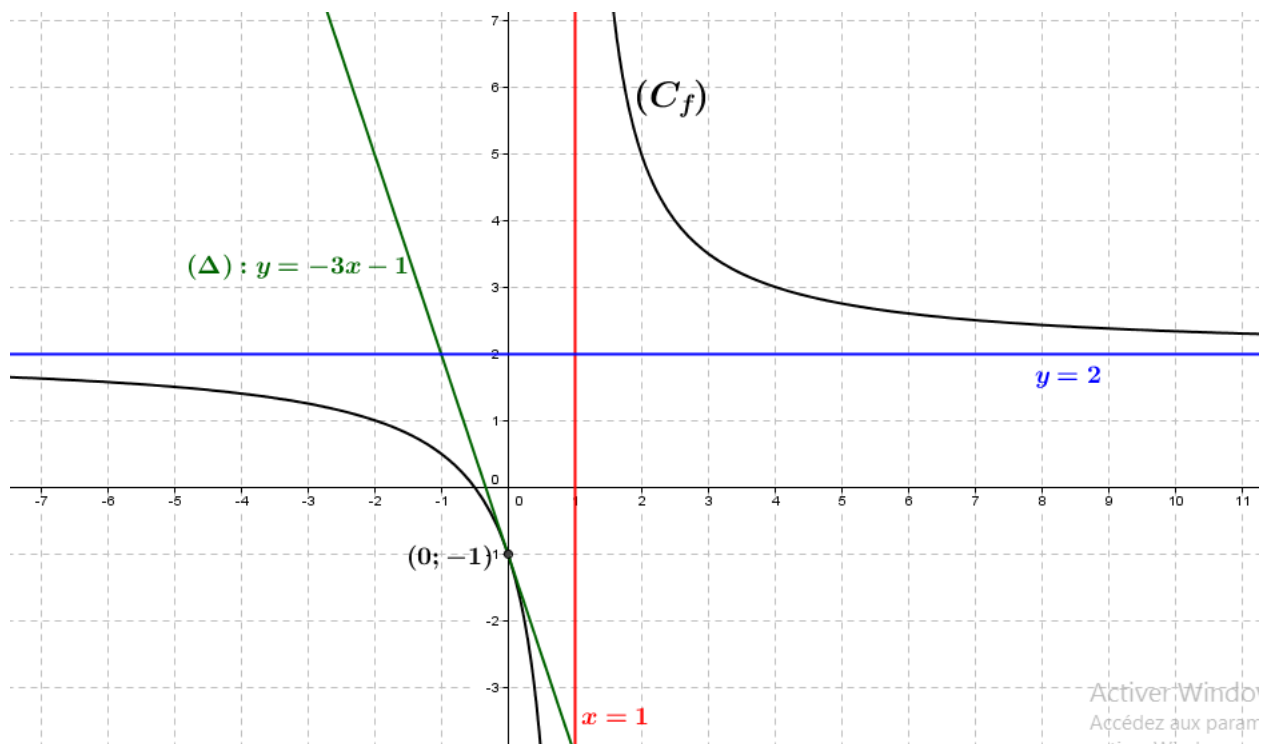
هذا الرمز يعني أن الدالة f غير معرفة في تلك النقطة

4) L'équation de la tangente à la courbe de f en le point d'abscisse 0 est : $(\Delta) : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

on a : $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ donc $f(0) = \frac{1}{-1} = -1$

et $f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}$ donc $f'(0) = \frac{-3}{(-1)^2} = \frac{-3}{1} = -3$ et donc : $(\Delta) : y = -3x - 1$

5) La courbe de f et les asymptotes et la tangente :



2) Exercice : examen régional 2018

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ et (C_f) sa courbe représentative

1) Montrer que : $D_f =]-\infty; +\infty[$

2) Calculer les limites : Calculer les limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$. En déduire les équations des asymptotes à (C_f) .

3) Montrer que : $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$ pour tout $x \neq 1$, puis donner le tableau des variations de la fonction f .

- 4) Déterminer l'équation de la tangente (Δ) à (C_f) en le point d'abscisse 0.
- 5) Construire la courbe (C_f) et les asymptotes et la tangente (Δ) dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

8.4 Étude de la fonction polynôme degré 3 : $x \mapsto f : ax^3 + bx^2 + cx + d$

Exemple : Régional 2008

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3 + 3x^2$ et (C_f) sa courbe représentative

- 1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .
- 2) Calculer les limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 3) Calculer : $f(-3)$ et $f(-2)$ et $f(0)$.
- 4) a) Montrer que : $f'(x) = 3x(x+2)$ pour tout x de \mathbb{R} .
b) Donner le tableau des variations de la fonction f
- 5) Construire la courbe (C_f)
- 6) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \geq 0$.

Solution :

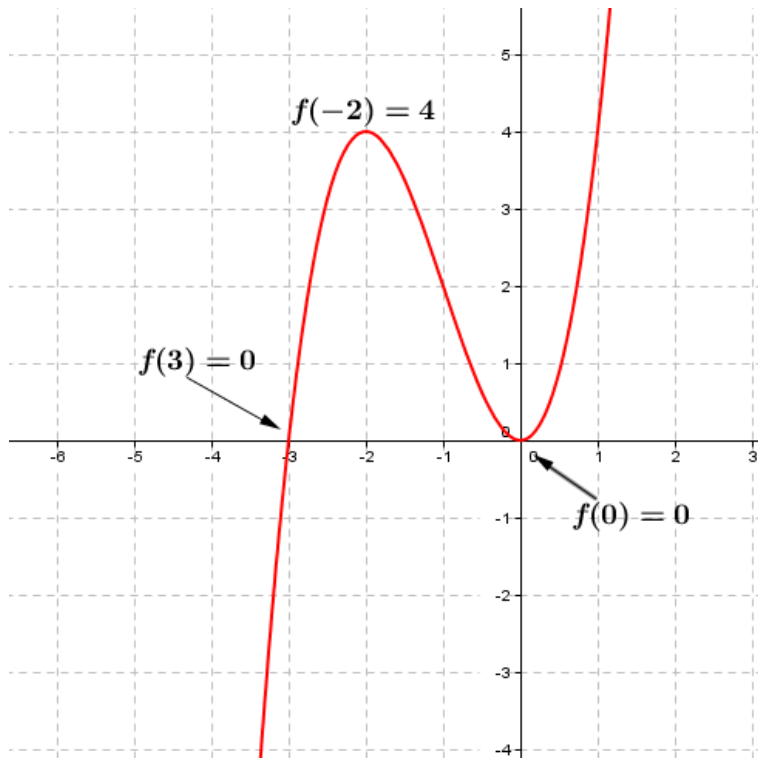
- 1) f est une fonction polynôme alors elle est définie sur \mathbb{R} , c'est à dire : $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$
- 3) $f(-3) = (-3)^3 + 3 \times (-3)^2 = -27 + 27 = 0$ et $f(-2) = (-2)^3 + 3 \times (-2)^2 = -8 + 12 = 4$ et $f(0) = (0)^3 + 3 \times (0)^2 = 0$
- 4) a) f est dérivable sur \mathbb{R} car c'est une fonction polynôme et pour tout x de \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3 + 3x^2)' = (x^3)' + 3(x^2)' \\ &= 3x^2 + 3 \times 2x \\ &= 3x^2 + 6x \\ &= 3x(x+2) \end{aligned}$$

- b) Les variations de f dépend au signe de : $f'(x) = 3x(x+2)$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$3x$ إشارة	—		—	+
$x+2$ إشارة	—	0	+	+
$f'(x)$ إشارة	+	0	—	+
تغيرات الدالة f	$-\infty$	↗ 4	↘ 0	↗ $+\infty$

- 5) La construction de la courbe de f :



6) Les solutions graphique de l'inéquation $f(x) \geq 0$: est les abscisses des points où (C_f) est au dessus de l'axe des abscisses donc : $S = [-3; +\infty[$.

2) Exercice :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ et (C_f) sa courbe représentative

- 1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .
- 2) Calculer les limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 3) Montrer que : $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$ pour tout x de \mathbb{R} .
- 4) Étudier le signe de $f'(x)$ et donner le tableau des variations de la fonction f
- 5) Montrer que : $f(x) = (x+1)^2(x-1)$ pour tout x de \mathbb{R}
- 6) Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère.
- 7) Construire la courbe (C_f)

Solution :

- 1) f est une fonction polynôme donc : $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$
- 3) f est dérivable sur \mathbb{R} car c'est une fonction polynôme et pour tout x de \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3 + x^2 - x - 1)' = (x^3)' + (x^2)' - x' - 1' \\ &= 3x^2 + 2x - 1 \end{aligned}$$

- 4) Les variations de f dépend au signe de : $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$; pour déterminer le signe de $f'(x)$ il faut résoudre l'équation : $3x^2 + 2x - 1 = 0$; on a : $\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times -1 = 4 + 12 = 16 > 0$
donc les solutions de l'équation sont :

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \times 3} = \frac{-2 - 4}{6} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times 3} = \frac{-2 + 4}{6} = \frac{1}{3}$$

- Le tableau de signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$3x^2 + 2x - 1$	+	0	-	+

• le tableau des variations de f :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$f(-1) = 0 \quad \text{و} \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-10}{9}$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
تغيرات f	$-\infty$	↗ 0	↘ $-\frac{10}{9}$	↗ $+\infty$

5) on a pour tout x de \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} (x+1)^2(x-1) &= (x^2+2x+1)(x-1) \\ &= x^3 - x^2 + 2x^2 - 2x + x - 1 \\ &= x^3 + x^2 - x - 1 = f(x) \end{aligned}$$

6) Pour déterminer les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisse il faut résoudre l'équation : $f(x) = 0$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow (x+1)^2(x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \quad \text{ou} \quad x-1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x+1 = 0 \quad \text{ou} \quad x-1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 1 \end{aligned}$$

et donc les points d'intersections de (C_f) avec l'axe des abscisses sont : $A(-1;0)$ et $B(1;0)$

• Pour déterminer le point d'intersection de (C_f) avec l'axe des ordonnées il faut calculer : $f(0)$, on a : $f(0) = -1$ donc le point d'intersection est : $C(0;-1)$

7) la courbe de f :

