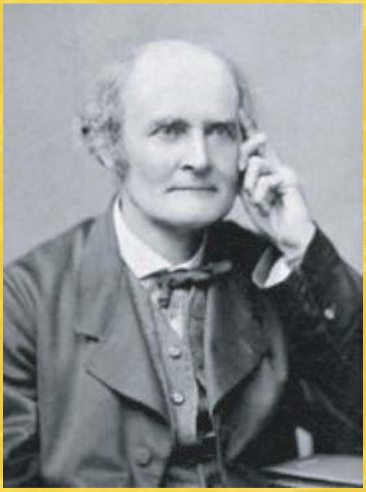
Chapitre 11

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES



Arthur Cayley (1821 - 1895) mathématicien anglais, connu, surtout, pour avoir été l'inventeur de la théorie des matrices

I.Matrices et opérations sur les matrices

Activités de découverte

Activité 1 :

Ce tableau donne les quantités (en litres) de carburants vendues au cours d'une semaine,

	lundi	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi	dimanche
sans plomb	2000	1500	1000	1800	1500	2500	2400
super	1800	1500	1100	1500	1400	1500	2100
gazole	3000	2500	3200	2700	3500	3300	3500

1) Représenter les ventes de chaque jour par une colonne de 3 nombres.
2) Représenter les quantités de gazole vendues pendant la semaine.
3) Traduire, les quantités de carburants vendues au cours de cette semaine, par un tableau.

➢ Le tableau obtenu est une matrice de dimension 3 x 7 .

Une matrice A de dimension $n \times p$ est un tableau rectangulaire dont les éléments sont rangés en n **lignes** et p **colonnes** et on écrit : $A=(a_{ij})$ $1 \leq i \leq n$; $1 \leq j \leq p$.
Les réels a_{ij} sont **les coefficients** de A. a_{ij} est le **coefficient** d'indice (i , j).
Une matrice comportant une ligne et p colonnes s'appelle un vecteur-ligne de dimension p.
Une matrice comportant une colonne et n lignes s'appelle un vecteur-colonne de dimension n.

Activité 2 :

Une entreprise de matériel audiovisuel possède quatre magasins A, B, C, D. La matrice S représente l'état des stocks de chacun d'eux en téléviseurs (t), magnétoscopes (m) et chaînes hi-fi (c). Elle décide de réapprovisionner leurs stocks selon la matrice R.
Quelle est la matrice M représentant le nouvel état des stocks ?
La matrice M est la **somme** de S et R.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ S = & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} t \\ m \\ c \end{array} \end{array}$$

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} t \\ m \\ c \end{array}$$

➢ De façon générale la somme de deux matrices de même dimension $n \times p$ s'effectue en additionnant les coefficients de même indice et la matrice obtenue est aussi de dimension $n \times p$.

Activité 3 :

La matrice M ci-contre

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ M = & \begin{pmatrix} 1000 & 1500 & 800 \\ 200 & 100 & 250 \\ 130 & 110 & 130 \end{pmatrix} \begin{array}{c} t \\ e \\ p \end{array} \end{array}$$

donne la quantité de travail (t), d'énergie (e), de matière première (p) pour fabriquer une unité de chacun des produits semis-finis A, B, C qu'un atelier fabrique.
Un autre atelier utilise les produits semis-finis A, B, C pour fabriquer les produits finis X et Y

selon la matrice N ci-contre. $N=\begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 5 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}\begin{array}{l} A \\ B \\ C \end{array}$

Quelles quantités de travail, d'énergie et de matière première faut-il pour fabriquer une unité de X ? Une unité de Y ?.

➢ La quantité de travail est le produit d'un vecteur ligne par un vecteur -colonne.

Plus généralement le produit de $(a_1, a_2, ..., a_n)$ par $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ .b_n \end{pmatrix}$ est le réel $a_1b_1 + a_2b_2 + ..., + a_nb_n$

➢ On appelle produit d'une matrice A de dimension $n \times p$ par une matrice B de dimension $p \times q$ la matrice notée $A \times B$ de dimension $n \times q$ obtenue de la façon suivante :
le cœfficient de la ligne l et de la colonne c de $A \times B$ est le produit du vecteur-ligne l de A par le vecteur-colonne c de B. par exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times(-1)+3\times1 & 2\times7+3\times(-2) & 2\times0+3\times6 \\ 4\times(-1)+5\times1 & 4\times7+5\times(-2) & 4\times0+5\times6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 18 \\ 1 & 18 & 30 \end{pmatrix}$$

Activité 4 :

1) Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$

2) Soient A et B deux matrices de dimension 3×3 , vérifier que $A + B = B + A$.

3) Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, calculer $A + A$, $A + A + A$.

➢ Plus généralement le produit d'une matrice M de dimension $n \times p$ par un réel k est la matrice de dimension $n \times p$, notée $k\,A$, obtenue en multipliant par k chaque coefficient de A.

4) Soient A, B et C trois matrices de dimension 3×3 .
a) vérifier que $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$.
b) vérifier que $k\,(A + B) = kA + kB$.

Activité 5 :

1) Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ que peut-on remarquer ?

2) Calculer $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ que peut-on remarquer ?

3) Calculer $(\ 3\ 0\ )\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}(\ 3\ 0)$.

4) Calculer $\begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}8 & 1{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

A retenir

Définitions

n et p désignent des entiers naturels non nuls,

une matrice de dimension $n \times p$ est un tableau de nombres réels à n lignes et p colonnes.

Notation : Toute matrice M est notée (a_{ij}) et représentée comme ci-dessous.

a_{ij} désigne le cœfficient de la i éme ligne et de j éme colonne, avec $1 \le i \le n$ et $1 \le j \le p$

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) a introduit la notation matricielle.

Colonnes ⟶ 1 j p

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ . & & . & & . \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ . & & . & & . \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & & a_{np} \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ . \\ i \\ . \\ n \end{array}$$

Lignes

Une matrice comportant une ligne et p colonnes s'appelle **un vecteur-ligne** de dimension p.

Une matrice comportant une colonne et n lignes s'appelle **un vecteur-colonne** de dimension n

Lorsque n = m, on dit que la matrice est **carrée** d'ordre n.

A retenir

Une matrice carrée dont tous les cœfficients sont nuls sauf les a_{ij} formant la diagonale s'appelle **matrice diagonale**.
Une matrice diagonale dont tous les coefficients de la diagonale sont égaux à 1 est appelée **matrice unité**, notée I_n .
Une matrice dont tous les cœfficients sont nuls est appelée **matrice nulle**, notée θ .
Deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont égales si et seulement si, elles sont de

même dimension et si $a_{ij} = b_{ij}$ pour tout i et j.

Opérations sur les matrices
Définitions

A et B sont deux matrices qui ont n lignes et p colonnes.

- La somme de A et B est la matrice $n \times p$, notée $A+B$, obtenue en additionnant deux à deux les termes qui ont la même position (ou ayant le même indce)
- Le produit de la matrice A par un réel k est la matrice $n \times p$, notée kA, obtenue en multipliant par k chaque coefficient de A.

Propriétés

Soient A, B et C trois matrices de dimensions n x p et k un réel alors :

1) $A + B = B + A$
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$
3) $k(A + B) = kA + kB$

Définition

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice à n lignes et p colonnes et $B = (b_{jk})$ une matrice à $\boldsymbol{p}$

lignes et q colonnes. Le produit de la matrice A par la matrice B est la matrice, notée $A \times B = (c_{ik})$ à n lignes et q colonnes, définies par :

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{ip}b_{pk}$$

Remarques

- La multiplication de deux matrices n'est possible que si le nombre de colonnes de la première est égal au nombre de lignes de la deuxiéme.
- La disposition ci-dessous est très pratique : elle permet de calculer facilement le « produit d'une ligne de A par une colonne de B »

$$\times \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = B$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2\times 0 + 1\times(-1) + 5\times 4 & 2\times 1 + 1\times 2 + 5\times(-2) \\ 3\times 0 + 4\times(-1) + 1\times 4 & 3\times 1 + 4\times 2 + 1\times(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = A \times B$$

Le produit d'une matrice 2 x 3 par une matrice 3 x 2 est une matrice 2 x 2.

Propriétés

Soient A, B et C trois matrices, alors on a :

- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$

Applications

1 A est une matrice 3x 3 dont voici certains termes : $a_{21} = 4$, $a_{32} = 5$, $a_{23} = 1$, $a_{13} = -5$, $a_{12} = 7$, $a_{31} = 3$

Recopier et compléter $A = \begin{pmatrix} 6 & . & . \\ . & 1 & . \\ . & . & 0 \end{pmatrix}$

2 Calculer les produits de matrices suivants :

a. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ f. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

3 Calculer : $A = 2\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ $B = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$

$C = -2\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -1 & 6 & -3 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

4 Calculer $A^2 = A \times A$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

5 Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Chercher la matrice $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $M \times N = I_2$.

II. Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2 ou 3

Activités de découverte

Activité 1 :

Soit A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice donnée où a, b, c et d sont des réels non tous nuls. On se propose de chercher une matrice A' = $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ telle que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Montrer que le problème revient à résoudre les deux systèmes suivants :

$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} ay + bt = 0 \\ cy + dt = 1 \end{cases}$ d'inconnues x, y, z et t.

2) Dans quelle condition ces systèmes admettent - ils une unique solution ?

3) Vérifier que la solution est $x = \dfrac{d}{ad - bc}$; $y = \dfrac{-b}{ad - bc}$; $z = \dfrac{-c}{ad - bc}$ et $t = \dfrac{a}{ad - bc}$.

➢ Le réel ad - bc est appelé **déterminant** de la matrice A, on le note :

dét (A) = $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, et A' ainsi définie est la matrice inverse de A, notée A^{-1}.

Activité 2 :

Pour tout nombre réel a, on considère le système (S) $\begin{cases} ax + y + z = 3 \\ ax + a2 + az = -1 \\ x + y + az = 7 \end{cases}$

1) Résoudre ce système pour $a = 0$, $a = 1$ et $a = 2$.
2) Écrire le système (S) sous la forme A X = B où A est la matrice de ce système.

3) Calculer que Δ défini par $a\begin{vmatrix} a^2 & a \\ 1 & a \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & a \end{vmatrix}$

4) Vérifier que $\Delta = a(a + 2)(a - 1)^2$ puis conclure s'il y a un lien entre valeurs de a pour lesquels $\Delta = 0$ et les ensembles de solutions de (S).

➢ Δ est appelé déterminant du système (S) ou de la matrice A du système. Plus généralement si M = $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ son déterminant est $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ que l'on calcule ainsi : $\Delta = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

Activité 3 :

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

1) Vérifier que dét (M) = $a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$.

➢ On dit qu'on a développé le déterminant de M suivant la 1ére ligne. En général, on peut développer le déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3 suivant n'importe quelle ligne ou colonne,en multipliant chaque déterminant d'ordre 2 par $(-1)^{i+j}$ où i est le numéro de la ligne et j le numéro de la colonne, mais on préfère développer un déterminant suivant la ligne ou la colonne qui contient le plus de zéros.

2) a) Vérifier que $\begin{vmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 7 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}$

b) Montrer que $r\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ra & rb \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & rb \\ c & rd \end{vmatrix}$

c) En déduire que si deux colonnes ou deux lignes d'un déterminant d'ordre 2 ou 3 sont proportionnelles, alors ce déterminant est nul.

3) Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Par quelle transformation élémentaire a-t-on passé de A à B ?

b) Vérifier que dét (A) = dét (B).

➢ La valeur d'un déterminant ne change pas si on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes ou à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes .

A retenir

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2

Définition

Soit M = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Le déterminant de M est le réel, noté dét (M), définit par :

$$\text{dét (M)} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3

Définition

Le déterminant d'une matrice carrée M d'ordre 3 est le réel défini par :

$$\text{dét (M)} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1}a_1 det(A_{11}) + (-1)^{2+1}a_2 det(A_{21}) + (-1)^{3+1}a_3 det(A_{31}) \text{ où } A_{ij}$$

obtenue en supprimant la i^e ligne et la j^e colonne de A.

Remarque

On peut développer le déterminant suivant une autre ligne ou une autre colonne.

Propriétés

- La valeur d'un déterminant change de signe si on permute deux lignes ou deux colonnes entre elles.
- Un déterminant qui posséde deux lignes ou deux colonnes identiques est nul.
- Dans un déterminant, on peut mettre en évidence un facteur commun à tous les éléments d'une ligne ou d'une colonne.
- La valeur d'un déterminant ne change pas si on lui applique la transformation élémentaire $L_1 \leftarrow L_1 + a_2L_2 + a_3L_3$.

Applications

1 Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

2 Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ v & x & 0 \\ w & y & z \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

Quelles conclusions peut-on déduire ?

3 Soit A une matrice carrée d'ordre 3. Posons $det(A) = \delta$ et soit k un réel.
Que vaut le déterminant de la matrice

a) $B = k A$?

b) C obtenue en multipliant les termes de la $1^{\text{ére}}$ colonne de A par $3k$, ceux de la $2^{\text{éme}}$ colonne par $-5k^2$ et en divisant ceux de la $3^{\text{éme}}$ colonne par 4 ?

4 Vérifier, sur un exemple, que si M et N sont deux matrices carrées d'ordres 2 ou 3, alors

$$det(M \times N) = det(M).det(N)$$

III. Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2 ou 3

Activités de découverte

Activité 1 :

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice donnée où a, b, c et d sont des réels non tous nuls. On se propose de chercher une matrice $A' = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ telle que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Montrer que le problème revient à résoudre les deux systèmes suivants :

$$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} ay + bt = 0 \\ cy + dt = 1 \end{cases}$$ d'inconnues x, y, z et t.

2) Dans quelle condition ces systèmes admettent une unique solution ?

3) Vérifier que la solution est : $x = \dfrac{d}{ad - bc}$; $y = \dfrac{-b}{ad - bc}$; $z = \dfrac{-c}{ad - bc}$; $t = \dfrac{a}{ad - bc}$

➢ La A' ainsi définie est la matrice **inverse** de A, notée A^{-1} .

Activité 2 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

1) Ecrire la matrice B obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de même indice de A.
➢ La matrice B est appelée **transposée** de A et se note A^t.
2) Vérifier que $det(A) = det(A^t)$.

Activité 3 :

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} -10 & 5 & -4 \\ \frac{13}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calculer dét (A) et dét (A').
b) Calculer $A \times A'$ puis $A' \times A$. Que peut-on conclure ?
➢ La matrice A' est la matrice **inverse** de A, on la note A^{-1} . La matrice A est dite **inversible**

2) a) Soit B = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer dét ($B$).

b) Vérifier que $B^3 + I_3 = \theta$ où $B^3 = B \times B \times B$

En déduire que B est inversible et déterminer B^{-1} .

➢ Plus généralement, on montre qu'une matrice carrée M d'ordre 3, est inversible si et seulement si, son déterminant est non nul et dans ce cas il existe une matrice carrée d'ordre 3, notée M^{-1}, telle que $M \times M^{-1} = M^{-1} \times M = I_3$

➢ Pour calculer l'inverse d'une matrice carrée $A = (a_{ij})$, $1 \le i, j \le 3$, d'ordre 3, dont le déterminant est non nul, on considère la matrice (A_{ij}) où chaque coefficient est otenu en supprimant la i^e ligne et la j^e colonne de A.

On appelle **mineur** de a_{ij} dans A le déterminant de la matrice (A_{ij}).

Le réel $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} det(A_{ij})$ est appelé **cofacteur** du coefficient a_{ij} .

On appelle aussi comatrice de A et on note $Com\,A$ la matrice carrée d'ordre 3 de terme général (α_{ij}) , $1 \le i, j \le 3$. La matrice inverse de A est alors donnée par :

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}(ComA)^t$$

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Vérifier que dét(A) = -1.

A est alors inversible. Calculons la matrice des cofacteurs de A. vérifier que l'on obtient :

$$ComA = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En transposons la matrice obtenue, on obtient : $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Il reste à diviser chaque terme de cette matrice par le déterminant de A.

on obtient la matrice inverse de A qui est : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

A retenir

Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

Définition

Soit $M = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre 2 ou 3. l'inverse de M, si elle existe, est la matrice, notée M^{-1} telle que $M \times M^{-1} = M^{-1} \times M = I_n$ où I_n est la matrice unité(n = 2 ou 3)

Remarques

1) Une matrice n'admet pas forcément d'inverse, dans ce cas on dit qu'elle n'est pas inversible.
2) Si une matrice est inversible, alors l'inverse est unique.

Théorème

Une matrice carrée M d'ordre 2 est inversible si et seulement si, dét $(M) \neq 0$, dans ce cas

$$\text{si } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ alors } M^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Théorème

Une matrice carrée M d'ordre 3 est inversible si et seulement si, dét $(M) \neq 0$

Applications

1 1) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ Vérifier que $ComA = \begin{pmatrix} -8 & -24 & 16 \\ -16 & 8 & -8 \\ 8 & 0 & -8 \end{pmatrix}$

2) Calculer dét(A), en déduire A^{-1} .

2 Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et déterminer leurs inverses.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3 Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Vérifier que $(I_3 - M)^3 = \theta$ où θ est la matrice nulle.

En déduire que M est inversible et préciser son inverse.

4 Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -5 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 19 & -18 & 7 \\ -14 & 12 & -2 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculer *dét(A), dét(B), A* x *B* puis *dét(A* x *B)*

5 Montrer que si M est une matrice carrée inversible alors $det(M^{-1}) = \dfrac{1}{det(M)}$

IV. Applications

Activités préliminaires

1. Résolution de systèmes linéaires

Activité 1 :

1) Vérifier que les deux systèmes suivants sont équivalents.

$$(S)\ \begin{cases} x-3y+2z=1 \\ 2x-y+3z=9 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases} \qquad (S')\ \begin{cases} x-3y+2z=1 \\ 5y-z=7 \\ z=3 \end{cases}$$

Activité 2 :

On considére le système suivant $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=1 & (L_1) \\ x_1 \quad -x_2+x_3=2 & (L_2) \\ 4x_1+3x_2+x_3=1 & (L_3) \end{cases}$

1) Ecrire la matrice de ce système et calculer son déterminant.

2) Ecrire la matrice complète de ce système puis par les opérations élémentaires suivantes : $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ écrire la nouvelle matrice compléte du systéme.

3) Supprimer x_2 dans la troisième ligne puis déterminer la solution du système.

La méthode utilisée précédemment pour résoudre le système est appelée méthode du **pivot**

➢ **de Gauss**

Activités de découverte

Activité 1 :

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer son déterminant. En déduire que A est inversible.
2) Etant donné un triplet (X,Y,Z), on se propose de chercher un triplet (x,y,z) tel que :

$$\begin{cases} x \quad -z=X \\ 2x+y+3z=Y \\ \quad -y+z=Z \end{cases}$$

a) Vérifier que ce système s'écrit sous la forme $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$.

➢ On dit qu'on a exprimé le système d'équations sous forme matricielle.

b) On doit donc résoudre le système de matrice $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & X \\ 2 & 1 & 3 & Y \\ 0 & -1 & 1 & Z \end{array}\right)$

Par la méthode du pivot de Gauss, vérifier les calculs successifs suivants :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & X \\ 0 & 1 & 5 & -2X+Y \\ 0 & -1 & 1 & Z \end{array}\right) ; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & X \\ 0 & 1 & 5 & -2X+Y \\ 0 & 0 & 6 & -2X+Y+Z \end{array}\right) ; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & X \\ 0 & 1 & 5 & -2X+Y \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3}X+\frac{1}{6}Y+\frac{1}{6}Z \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3}X+\frac{1}{6}Y+\frac{1}{6}Z \\ 0 & 1 & 5 & -2X+Y \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3}X+\frac{1}{6}Y+\frac{1}{6}Z \end{array}\right) \text{ ; puis } \left(\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c|}{I_3} & \\ 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3}X+\frac{1}{6}Y+\frac{1}{6}Z \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{3}X+\frac{1}{6}Y+\frac{-5}{6}Z \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3}X+\frac{1}{6}Y+\frac{1}{6}Z \end{array}\right)$$

c) Vérifier que $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{-5}{6} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

➢ De façon générale, si une matrice M est inversible, il est possible, par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes, de passer de M à I_3.

Activité 2 :

On peut constater, à partir de l'activité précédente, qu'appliquer une transformation élémentaire de lignes à une matrice M revient à multiplier à gauche cette matrice par la matrice identité I_3 dans laquelle on a effectué la même transformation. Pour la recherche de

l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ on peut alors procéder ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Compléter ce procédé en appliquant les transformations indiquées.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \qquad \begin{pmatrix} .. & .. & .. \\ .. & .. & .. \\ .. & .. & .. \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} .. & .. & .. \\ .. & .. & .. \\ .. & .. & .. \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 5L_3 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} -10 & 5 & -4 \\ -13 & 6 & -5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow \frac{L_2}{(-2)} \qquad \begin{pmatrix} .. & .. & .. \\ .. & .. & .. \\ .. & .. & .. \end{pmatrix}$$

2) Déduire l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

3) On veut maintenant résoudre le système suivant $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

a) Vérifier que $\begin{pmatrix} -10 & 5 & -4 \\ \frac{13}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) En déduire que la solution du système est $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

A retenir

Théorème

Soit une matrice carrée A d'ordre 2 ou 3 telle que dét(A) $\neq 0$.

Un système, qui s'écrit matriciellement $A \times X = B$, a une solution et une seule, définie par $X = A^{-1} \times B$, où A^{-1} est l'inverse de A.

Remarque

Lorsqu'un système $A \times X = B$ n'a pas de solution ou une infinité de solutions, la matrice A n'admet pas de matrice inverse.

1 Soit $P = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Calculer le déterminant de P, en déduire qu'elle est inversible.

2) Utiliser le procédé utilisé dans les activités de découvertes précédentes pour vérifier que

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 10 \\ 3 & -4 & 12 \end{pmatrix}$$

3) Résoudre alors le système $P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

2 Déterminer, si elle existe, l'inverse de la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3 Résoudre le système $\begin{cases} -x + 3y + z = 1 \\ 2x + 5y = 3 \\ 3x + y - 2z = -2 \end{cases}$

4 Considérons la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$

1) Calculer $A^2 = A \times A$.
2) Montrer que $A^2 - 3A + 2I = \theta$ (θ étant la matrice nulle d'ordre 3).
3) Déduire que A est inversible et calculer A^{-1}

2. systèmede Cramer

Considérons le système carré suivant (S) $\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 2y + 4z = 1 \end{cases}$

1) Ecrire la matrice M de (S) et calculer dét (M). En déduire que le système (S) admet une unique solution.

➢ On appelle **système de cramer** tout système carré dont la matrice est inversible.

2) Vérifier que l'on peut écrire le système (S) sous la forme : $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) En revenant au paragraphe III. 1. vérifier qu'on peut exprimer la solution du système de la manière suivante :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 9 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}} \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 9 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}} \quad ; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 9 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}}$$

➢ Plus généralement considérons le système d'équations (S) $\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = k_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = k_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = k_3 \end{cases}$

C'est important d'exprimer ce système d'équations sous forme matricielle, puisque les calculatrices qui résolvent ce genre de problème demandent souvent qu'on leur donne les coefficients sous forme matricielle. On va donner une méthode de résolution qui fait appel à cette notation : c'est la méthode de *Cramer*.

Gabriel Cramer (1704-1752)
Mathématicien suisse ; nous lui sommes redevables de la résolution complète des systèmes carrés par les déterminants

Nous supposons que (S) est de *Cramer*, il s'écrit :

$A \times X = K$ où $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

la matrice des inconnues et $K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$ la matrice des constantes.

Nous noterons A_i $(i = 1, 2, 3)$ la matrice A des coefficients dans laquelle on a remplacé la i^e colonne par la matrice des constantes. La solution du système, par la méthode de *Cramer*, est donnée par :

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \quad x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad x_3 = \frac{det(A_3)}{det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

➢ Remarquer qu'il s'agit de la même méthode, déjà vue, pour les systèmes carrés d'ordre 2 :

A retenir

Définition

On appelle **système de Cramer** tout système linéaire de n équations à n inconnues ($n = 2$ ou 3) : $M \times X = K$ tel que dét $(M) \neq 0$.

Théorème

Tout système de Cramer d'ordre 3 a une unique solution (x_1, x_2, x_3) donnée

par $x_i = \dfrac{det(M_i)}{det(M)}$ où M_i est la matrice obtenue en remplaçant la $i^{\text{éme}}$

colonne de la matrice M par celle des constantes.

Applications

1 Soit le système $\begin{cases} x + y - z = 10 \\ x + 10z = 10 \\ x + y + 9z = 20 \end{cases}$

1) Vérifier que ce système est de *Cramer*.

2) Vérifier que la solution de ce système est $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$

2 Résoudre le système $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = -7 \\ 5x + 7y - 3z = 16 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$ par la méthode de *Cramer*.

3 Résoudre les systèmes suivants, d'abord en employant une méthode algébrique (substitution ou réduction), puis par la méthode de Cramer.

$$\begin{cases} u + v + w = 1 \\ 2u - v - w = 5 \\ -u + 2v - 3w = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y = 11 \\ 3x - 4z = -1 \\ 3x + 4y - z = 0 \end{cases}$$

Apprendre à chercher

Situation 1 : Un problème d'Euler

« Trois personnes jouent ensemble trois parties. *A* chaque partie, le perdant double l'avoir de chacun des deux autres joueurs. Ils se retirent du jeu avec 24 louis chacun. On demande combien chaque joueur avait d'argent au début de jeu, sachant que chacun d'eux a perdu une partie.»

Vers une solution : mise en équation

	Avoir des joueurs		
Parties	1^{er} joueur	2^{e} joueur	3^{e} joueur
Au début	x	y	z
Aprés la $1^{ére}$ partie	$x- y -z$	$2y$	$2z$
Aprés la $2^{éme}$ partie	$2(x-y -z)$	$3 y- x -z$	$4z$
Aprés la $3^{éme}$ partie	$4(x -y-z)$	$2(3y-x -z)$	$7z-x -y$

Nous sommes donc ramenés à résoudre le système: $\begin{cases} 4(x-y-z)=24 \\ 2(3y-x-z)=24 \\ 7z-x-y \quad =24 \end{cases}$

La solution est $x=39,\quad y=21,\quad z=12.$

Situation 2

A partir du système(S) $\begin{cases} x-y=0 & (1) \\ y-z=1 & (2) \\ z-x=0 & (3) \end{cases}$ on forme le système(S') $\begin{cases} x-z \quad =1 & (1)+(2) \\ z-y \quad =0 & (1)+(3) \\ x+y-2z=1 & (2)-(3) \end{cases}$

obtenu par les combinaisons indiquées.

Il est clair que le système(S) est sans solution alors que (1, 0 , 0) est une solution de (S').

D'où vient l'erreur ?

Situation 3

Soit à résoudre le système $\begin{cases} ax+y+z=0 \\ x+ay+z=0 \\ x+y+az=0 \end{cases}$ où a est un réel arbitraire.

La matrice de ce système est $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ qu'on peut écrire, après permutations de lignes,

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ qu'on transforme (quelles sont les transformations ?) en $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a \end{pmatrix}$

Si $a=1$, déterminer les solutions du système.

Si $a \neq 1$, la matrice devient $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1+a \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1+a \\ 0 & 0 & 2+a \end{pmatrix}$, comment ?

Si $a=-2$, le système est équivalent à $\begin{cases} x+y=2z \\ \quad y=z \end{cases}$; quelles sont alors les solutions du système ?

Si $a \neq -2$, montrer que l'unique solution du système est $(0,0,0)$.

Avec EXCEL

• Une matrice A à n lignes et p colonnes est identifiée de la façon suivante : nom de la cellule contenant le terme a_{11} : nom de la cellule contenant le terme a_{np} (par exemple A1 : C3).

• Pour définir le nom A à cette matrice, sélectionner les cellules A1 : C3 puis, dans la barre d'outils cliquer **Insertion** / **Nom** / **Définir** et, dans la boite de dialogue nommer A.

• Pour toute opération sur des matrices A et B préalablement nommées, on prévoit la forme du résultat et on sélectionne la plage de cellules vides qui va recevoir ce résultat. Dans la barre de formule on écrit : = suivi du calcul et on valide par les touches **Ctrl Maj Entrée**

• Pour obtenir la somme A+B, on écrit : = A+B

• Pour obtenir 3A-B, on écrit : = 3*A-B

• Pour obtenir le produit A x B, on écrit : = PRODUITMAT (A ; B)

• Pour obtenir A^n (n = 2,3,…), on écrit : = A^n

• Pour obtenir la matrice inverse de A, on écrit : = INVERSEMAT(A)

Résolution d'un système avec un tableur

1) (S) est le système $\begin{cases} 3x+2y+6z=24 \\ 2x+4y+3z=23 \\ 5x+3y+4z=33 \end{cases}$

a) Ecrire ce système sous la forme $AX = B$ en précisant la matrice A et les vecteurs X et B.

b) Comme sur la feuille de calcul ci-contre, entrer la matrice A dans la plage A1 : C3 et la matrice B dans la plage E1 : E3.

	A	B	C	D	E
1	3	2	6		24
2	2	4	3		23
3	5	3	4		33

c) Dans la cellule A5, taper la formule :
= INDEX(INVERSEMAT($A$1 :$C$3) ;1 ;1)
Dans la cellule A5 s'affiche le terme a_{11} de la matrice inverse de A.

d) Sélectionner la plage A5 : C5 et recopier à droite la formule précédente de façon à obtenir les termes a_{12} et a_{13} de la matrice inverse de A (on sélectionne les termes des cellules a_{12} et a_{13} et on remplace les indices (1 ; 1) de la formule par (1 ; 2) et (1 ; 3)).

e) Sélectionner la plage A5 : C7 et recopier vers le bas de façon à obtenir comme précédemment les autres termes de la matrice inverse de A.

f) Dans la cellule E5, taper la formule :
= INDEX(PRODUITMAT($A$5 :$C$7 ;$E$1 ;$E$3) ;1 ;1)

g) Sélectionner la plage E5:E7 et recopier en bas la formule précédente afin d'obtenir comme dans le c) les termes a_{21} , a_{22} et a_{23} de A^{-1} B.

Conclure sur la solution de (S).

2) Résoudre avec Excel le système: $\begin{cases} 3a-2b+6c=0 \\ 24a-12b+41c=2 \\ -17a+9b-5c=5 \end{cases}$

1 Indiquer la réponse exacte

1) le vecteur $u = (-4;2;-1)$ est de dimension

□ 1 □ 2 □ 3

2) une matrice de dimension 3 x 2 a

□ 3 lignes et 2 colonnes

□ 2 lignes et 3 colonnes

□ 6 lignes et 6 colonnes

3) $u = (1;2;3)$ et $v = (-2;3;2)$

Alors $2u + v$ est le vecteur-ligne

□ (0 ; 7 ; 8) □ (-2 ; 10 ; 10) □ (-3 ; 8 ; 7)

4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

□ $A + X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ □ $A + X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

□ On ne peut pas additionner A et X

5) $X = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

□ $X \times Y = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ □ $X \times Y = (-3 \quad -3)$

□On peut pas multiplier X et Y.

6) l'égalité $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est l'écriture matricielle du systéme

□ $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$ □ $\begin{cases} 2x = 1 \\ -2y = 2 \end{cases}$ □ $\begin{cases} x + y = 1 \\ -2x = 2 \end{cases}$

2 Dire si l'affirmation est vraie ou fausse. Justifier la réponse

1) un vecteur-colonne de dimension 4 est une matrice de dimension 2 x 2.

2) si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

alors $A + B = \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix}$

3) si $A = (1 \quad 2 \quad 3)$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

alors $A \times B = \theta$

4) le système $\begin{cases} 2x - y + z = -3 \\ 3x + 2y + z = 7 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$

s'écrit sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

5)

$$\begin{cases} 7x + 3y - 3z = a \\ -8x + 5y - 4z = b \\ 5x - 7y + 5z = c \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 3 & -6 & -3 \\ -20 & -50 & -52 \\ -31 & -64 & -59 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

3 Lire ci-dessous l'énoncé et la solution d'un éléve. Corriger les erreurs et rédiger la bonne solution.

Enoncé

a) Résoudre le système $\begin{cases} 5x + 2y = a \\ 4x + y = b \end{cases}$

où a et b sont des réels donnés.

b) En déduire l'inverse de la matrice.

Solution $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

a) Avec a = 1 et b = 3 le système s'écrit

$\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ 4x + y = 3 \end{cases}$ On trouve $x = \dfrac{5}{3}$ et $y = \dfrac{-11}{3}$

b) On trouve $A^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}33 & 0{,}66 \\ 1{,}33 & -1{,}66 \end{pmatrix}$

4 Posons $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

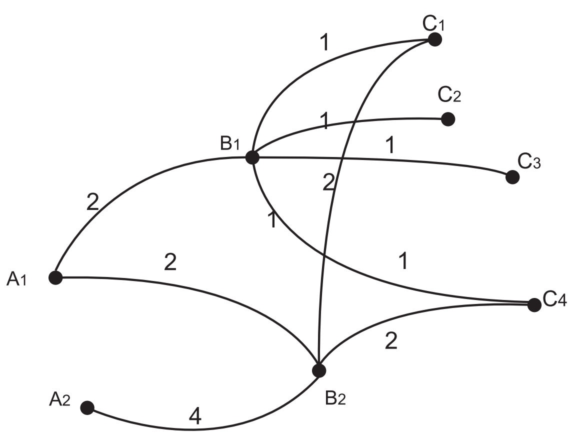
1) Calculer $M\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $M^2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ puis $M^n\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

où $M^n = M \times M \times \ldots \times M$(n fois) pour $n \geq 2$

2) Refaire la même question avec $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ au lieu de $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

5 Le schéma ci-dessous représente le nombre de liaisons aériennes quotidiennes entre les aéroports de trois pays A, B, C.
Par exemple : il y a 4 vols entre les aéroports A_2 et B_2.
a) Ecrire les matrices M , N et P représentant les liaisons de A vers B, de B vers C et de A vers C.

b) Vérifier que $P = M \times N$. Interpréter ce résultat.



6 Soit $A = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

a) Calculer A^2, A^3 et A^4 ($A \times A = A^2$ ...)
b) En déduire une expression générale, en fonction de $n \in \mathbb{N}$, de A^n .

7 Calculer $A \times B$ *et* $B \times A$ avec

$$A = \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\2 & 1\end{pmatrix} \text{ et } \quad B = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -1\\1 & 2\end{pmatrix}$$

Le produit des matrices carrées est-il commutatif ?

8 Calculer les produits de matrices suivants :

a) $\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}2 & -3\\0 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}5 & 10\\2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}$ **d).** $\begin{pmatrix}2 & 4 & -2\\0 & 1 & 1\\3 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\8\\4\end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\0 & 1 & 1\\2 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\1 & 2 & 1\end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\6 & 7 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\0 & 1 & 1\\2 & 2 & -1\end{pmatrix}$

9 Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 3 & 0\end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix}0 & -2 & -3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

a) Calculer $A + B$; $4A - 3B$;

b) Peut-on faire le produit $A \times B$?

10 Soient $a \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix}-a & 0 & 0\\0 & a & 1\\0 & -1 & a\end{pmatrix}$

et $B = \begin{pmatrix}-2 & -1 & 0\\-1 & 0 & 1\\0 & 1 & 2\end{pmatrix}$

1) Donner la condition sur a pour que A soit inversible.
2) Trouver les réels a pour lesquels la matrice $B - a\,I_3$ n'est pas inversible.

11 Une entreprise de confection de vêtements fabrique des jupes, des robes et pantalons. Pour fabriquer une jupe, il faut 0,75 m de tissu, 4 boutons et une fermeture ; la confection d'une robe nécessite 1,50 m de tissu, 6 boutons et une fermeture ; pour confectionner un pantalon, on utilise 1,25 m de tissu, 2 boutons et une fermeture. On appelle x, y et z les quantités respectives de jupes, de robes et de pantalons confectionnés et a, b et c les quantités de tissus (en métres), de boutons et de fermetures utilisés pour leur fabrication.

On appelle $M = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 1{,}50 & 1{,}25 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

1) a) Vérifier que $B = M \times A$.
b) Déterminer a, b et c pour la fabrication de 200 jupes, 120 robes et 320 pantalons.
2) On considére la

matrice $M' = \begin{pmatrix} -1{,}6 & 0{,}1 & 1{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}2 & -1{,}4 \\ 0{,}8 & -0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $M' \times M$.
b) Ecrire la matrice A en fonction de B et de M'.
c) En déduire x, y et z quand on a utilisé 735 mêtres de tissu, 2400 boutons et 620 fermetures.

12 L'inventaire des calculatrices de type A et de type B, en stock dans trois points de ventes d'une grande surface, est donné

par la matrice : $M = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 17 & 5 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$ où les

lignes indiquent les stocks de calculatrices disponibles dans chacun des trois points de ventes. Le prix de vente en dinars des calculatrices de type A et de type B est donné par la matrice à une seule colonne

$N = \begin{pmatrix} 45 \\ 60 \end{pmatrix}$

1) Calculer $M \times N$.
2) Que représentent les nombres obtenus dans la matrice $M \times N$?

13 Déterminer dans chaque cas la matrice A qui vérifie :

$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $A\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = I_3$

14

Soient $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Vérifier que
$A = T + I_3$ et $A \times I_3 = I_3 \times A = A$
2) Calculer T^2 puis T^3 en déduire T^n puis A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

15 Soit

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1) Calculer A^3 en déduire A^{-1}

2) Résoudre le système $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

16 On considére la matrice : $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculer A^2 puis $B = 4A - A^2$ et le produit $A \times B$ En déduire A^{-1} .
2) Résoudre par un calcul matriciel, le système d'équations suivant :

17 Résoudre, par la méthode des déterminants, les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ -3x + y - z = 5 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$$

18 Déterminer toutes les matrices carrées d'ordre 2 vérifiant : $A^2 = A$.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -2 \\ 4x + 5y + 6z = 1 \\ 7x + 8y + 9z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x + 3y - 3z = 2 \\ -8x + 5y - 4z = -1 \\ 5x - 7y + 5z = 6 \end{cases}$$

19 Dans une entreprise, le secrétariat, la comptabilité et l'atelier ont estimé leurs besoins pour le premier trimestre en crayons, stylos et surligneurs :

	crayons	stylos	Surligneurs
Secrétariat	100	200	100
Comptabilité	200	300	180
Atelier	500	300	120

1) Ecrire la matrice A associée à ce tableau. Que représentent les matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} A \text{ et } A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ?$$

2) Les prix unitaires, en dinars, proposés par trois fournisseurs A, B et C sont les suivants

	A	B	B
Crayons	0,250	0,280	0,300
Stylos	0,120	0,110	0,110
Surligneurs	0500	0,450	0,420

A l'aide de produit de deux matrices, présenter les dépenses estimées de chacun des services suivants le fournisseur qu'il aura choisi. En déduire

a) Quel sera le choix le plus économique pour le secrétariat ?

b) Les trois services ont-ils intérêt à faire une commande commune ?

20 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On définit par récurrence: $A^0 = I_3$, $A^1 = A$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $A^{n+1} = A^n \times A$. Montrer que pour tout entier n, $A^{n+1} = 3^n.A$.

21 Dans une île, les mouvements de population peuvent être modélisés ainsi : chaque année, 40% des habitants de la capitale quittent celle-ci tandis que 20% des habitants du reste de l'île viennent y habiter. On néglige les autres échanges. Partant d'une population $E_0 = (c_0, b_0)$

1) Quelle est la population un, deux, trois ans aprés ?

2) Notons $E_1 = (c_1, b_1)$ $E_2 = (c_2, b_2)$ $\ldots E_n = (c_n, b_n)$ la population un, deux,…, n ans après.

a) Vérifier que $\begin{pmatrix} c_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & 0,8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$

soit $E_1 = A \times E_0$.

b) Montrer que $E_n = A^n \times E_0$.

c) Etudier l'évolution sur n années ($n < 30$), suivant certains états initiaux, et chercher si le nombre d'habitants respectifs de la capitale et du reste de l'île est stable au cours du temps.

22 Considérons les 3 systèmes

$$(1) \begin{cases} x - 3y = -1 \\ 2x - 6y = -3 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} x - 2,999y = -1 \\ 2x - 6y = -3 \end{cases}$$

$$\text{et } (3) \begin{cases} x - 2,9995y = -1 \\ 2x - 6y = -3 \end{cases}$$

1) Le système(1) admet-il des solutions ?

2) Vérifier que (1498,5 ; 500) (respectivement (2998,5 ; 1000)) est la solution de (2) (respectivement (3)).

3) Quelle remarque peut-on déduire?

23 Une usine fabrique chaque jour trois types de cartes d'ordinateur : le modéle I, le modèle B et le modèle M. pour chaque modèle, on utilise des puces électroniques de types P_1,P_2 et P_3 avec la répartition suivante :

modéle / puce	I	B	M
$P1$	5	2	7
$P2$	3	8	6
$P3$	3	4	5

a) Ecrire la matrice A déduite de ce tableau.
b) A l'aide d'un vecteur colonne X à définir et la matrice A, calculer le nombre de puces de chaque modèle nécessaire fabriquer 20 cartes I, 12 cartes B et 18 cartes M.
c) Un certain jour, on utilise 588 puces P_1, 630 puces P_2 et 470 puces P_3 . On note x, y et z les nombres respectifs de cartes I, B et M fabriquées.

Compléter l'égalité $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ... \\ ... \\ ... \end{pmatrix}$

Déterminer x, y et z en utilisant la matrice A^{-1}.

25 Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $M \times M$, notée M^2 .
2) Vérifier que $M^2 - M - 2I_3 = \theta$
En déduire que la matrice M est inversible et donner l'expression de M^{-1} .

3) Résoudre le système $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

25 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -15 & 10 & 8 \\ -8 & 6 & 4 \\ -24 & 15 & 13 \end{pmatrix}$$

1)Calculer $A \times A$, notée A^2 .
2)Vérifier que $A^2 - 3A + 2I_3 = \theta$; en déduire que A est inversible et donner l'expression de sa matrice inverse.
3) Résoudre le système suivant :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Pour chacune des matrices suivantes calculer son déterminant, puis déterminer sa matrice inverse si elle existe.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

26 Considérons les matrices

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

1) Vérifier qu'on a : $A = B + 4I_3$.
2) Trouver une relation entre A et A^2.
3) Trouver une relation entre B, B^2 et I_3.
4) Montrer que B est inversible et déterminer B^{-1}.
5) Résoudre le système $B \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

LES CARRÉS MAGIQUES

Un carré magique est un tableau de nombres entiers qui posséde les propriétés suivantes :
1. la somme des entiers de chaque ligne vaut n.
2. la somme des entiers de chaque colonne vaut n.
3. la somme des entiers de chaque diagonale vaut n.

De tout temps les carrés magiques ont exercé une fascination sur l'homme. Par exemple un carré magique 4 x 4 figure sur la gravure au burin (ci-contre) la Mélancolie d'Albrecht Dérer (1514).De nos jours les carrés magiques sont utilisés dans divers domaines, comme la réalisation d'emploi du temps, .
On peut montrer que tout carré magique 3 x 3 peut s'écrire de manière unique sous la forme suivante où m, n, p sont des entiers.

$$m\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour les carrés magiques normaux d'ordre n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, … la constante magique vaut ainsi : 15, 34, 65, 111, 175, 260, ….

Ordre3		
8	1	6
3	5	7
4	9	2

Ordre4			
16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Ordre5				
17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Si l'on relie les nombres du carré magique dans l'ordre croissant, on obtient une figue symétrique.