

---



---

## Table des matières

---



---

<b>1</b>	<b>ANGLES ORIENTÉS</b>	<b>3</b>
1.1	Angles orientés de vecteurs . . . . .	3
1.1.1	Préliminaires . . . . .	3
1.1.2	Propriétés . . . . .	4
1.1.3	Détermination d'un angle orienté de vecteurs . . . . .	5
1.1.4	Double d'un angle orienté . . . . .	5
1.2	Angles orientés de vecteurs et cercles . . . . .	6
1.2.1	Angle inscrit-angle au centre . . . . .	6
1.2.2	Angle tangente – corde . . . . .	7
1.3	Cocyclicité des points . . . . .	8
1.3.1	Définition . . . . .	8
1.3.2	Propriété . . . . .	8
1.3.3	Quadrilatères inscrits . . . . .	8
1.3.4	Points alignés . . . . .	10
1.3.5	Droite de Simson et droite Steiner . . . . .	10
1.3.6	Activité 1 . . . . .	10
1.4	Angles orientés de droites . . . . .	11
1.4.1	Activité 2 . . . . .	11
1.4.2	Mesure d'un angle orienté de droites . . . . .	11
1.4.3	Notation $x = \theta[\pi]$ . . . . .	11
1.4.4	Détermination d'un angle orienté de droites . . . . .	12
1.4.5	Angles à côtés perpendiculaires . . . . .	12
1.4.6	Angles adjacents supplémentaires . . . . .	13
1.4.7	Angle au centre et angle inscrit . . . . .	13
1.4.8	Angle tangente – corde . . . . .	13
1.4.9	Alignement des points . . . . .	13

---

1.4.10 Cocyclicité des points . . . . .	13
1.5 Ensemble des points . . . . .	14

## ANGLES ORIENTÉS

### 1.1 Angles orientés de vecteurs

#### 1.1.1 Préliminaires

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls du plan orienté.

- L'angle de vecteurs formé par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est le couple  $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ .
- Une mesure de l'angle  $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$  est notée  $\overline{(\vec{u}, \vec{v})}$
- Si  $\alpha$  est une mesure de l'angle  $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ , les autres mesures sont  $\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

On note  $\overline{(\vec{u}, \vec{v})} = \alpha[2\pi]$

**N.B :** Parmi toutes les mesures  $\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$  de l'angle  $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ , il existe une et une seule valeur  $\theta \in ]-\pi; \pi]$  appelée **mesure principale** de l'angle  $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$  et on écrit :

$$\boxed{\overline{(\vec{u}, \vec{v})} = \theta[2\pi]}$$

#### Exercice 1

Déterminer la mesure principale des angles orientés dont les mesures sont :

$$\frac{7\pi}{3}; \frac{201\pi}{12}; -\frac{45\pi}{8}; \frac{2017\pi}{3}; -4\pi; 5\pi$$

#### Remarque 1.1.1.

Soit  $\theta$  la mesure d'un angle orienté.

- $\theta$  est une mesure de l'angle orienté nul si et seulement si, il existe un nombre relatif  $k$  tel que  $\theta = k2\pi$ .
- $\theta$  est une mesure de l'angle orienté plat si et seulement si, il existe un nombre relatif  $k$  tel que  $\theta = (2k + 1)\pi$ .

- $\theta$  est une mesure de l'angle droit direct ou indirect si et seulement si, il existe un nombre relatif  $k$  tel que  $\theta = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

### 1.1.2 Propriétés

Soient  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}$  quatre vecteurs non nuls,  $k$  et  $k'$  deux réels non nuls.

1.  $\overline{(\vec{u}, \vec{u})} = 0[2\pi]$
2.  $\overline{(\vec{u}, -\vec{u})} = \overline{(-\vec{u}, \vec{u})} = \pi[2\pi]$
3.  $\overline{(\vec{u}, \vec{v})} = -\overline{(\vec{v}, \vec{u})}[2\pi]$
4.  $\overline{(-\vec{u}, \vec{v})} = \overline{(\vec{u}, -\vec{v})} = \pi + \overline{(\vec{u}, \vec{v})}[2\pi]$
5.  $\overline{(-\vec{u}, -\vec{v})} = \overline{(\vec{u}, \vec{v})}[2\pi]$
6.  $\overline{(k\vec{u}, k'\vec{v})} = \begin{cases} \overline{(\vec{u}, \vec{v})}[2\pi], & \text{si } k.k' > 0 \\ = \pi + \overline{(\vec{u}, \vec{v})}[2\pi], & \text{si } k.k' < 0 \end{cases}$
7.  $\overline{(\vec{u}, \vec{v})} = 0[2\pi]$  si et seulement si les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires de même sens.
8.  $\overline{(\vec{u}, \vec{v})} = \pi[2\pi]$  si et seulement si les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires de sens contraire.
9. **Relation de Chasles :**

$$\overline{(\vec{u}, \vec{w})} = \overline{(\vec{u}, \vec{v})} + \overline{(\vec{v}, \vec{w})}[2\pi]$$
10.  $\overline{(\vec{u}, \vec{v})} = \begin{cases} \overline{(\vec{u}, \vec{v})} = \overline{(\vec{x}, \vec{v})}[2\pi], & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{x} \text{ sont colinéaires de même sens} \\ \pi + \overline{(\vec{x}, \vec{v})}[2\pi], & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{x} \text{ sont colinéaires de sens contraire} \end{cases}$
11. Dire que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux revient à dire que :
  - l'angle  $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$  est un angle droit direct c'est-à-dire  $\overline{(\vec{u}, \vec{v})} = \frac{\pi}{2}[2\pi]$
  - l'angle  $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$  est un angle droit indirect c'est-à-dire  $\overline{(\vec{u}, \vec{v})} = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

### Exercice 2

Montrer que la somme des mesures positives des trois angles d'un triangle est égale à  $\pi$ .

**Exercice 3**

$ACE$  est un triangle isocèle direct de sommet principal  $A$  et tel que  $AC = 5\text{cm}$  et  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) = \frac{2\pi}{5}[2\pi]$

1. Tracer le triangle équilatéral direct  $AEF$  et le triangle  $ABC$  rectangle isocèle direct en  $A$ .
2. Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :

$$(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}); (\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{BC}); (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{CB}); (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EC})$$

**1.1.3 Détermination d'un angle orienté de vecteurs**

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère les vecteurs  $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$  et  $\vec{v} = a'\vec{i} + b'\vec{j}$  où  $a; b; a'; b'$  sont des réels tous non nuls. Soit  $\theta$  une mesure de l'angle  $(\vec{u}, \vec{v})$ . On a :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} \\ \sin \theta = \frac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} \end{cases}$$

**Exercice 4**

On donne les vecteurs  $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$  et  $\vec{v} = -2\vec{i} - \vec{j}$ .

Déterminer la mesure de l'angle  $(\vec{u}, \vec{v})$ .

**1.1.4 Double d'un angle orienté**

Soit  $(\vec{u}, \vec{v})$  un angle orienté.

On appelle double de l'angle  $(\vec{u}, \vec{v})$  et on note  $2(\vec{u}, \vec{v})$  l'angle défini par :

$$2(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{u}, \vec{v})$$

**Remarque 1.1.2.**

- Le double d'un angle orienté de mesure  $\alpha$  a pour mesure  $2\alpha$ .
- Soit  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$  deux angles orientés. On a :

$$2\hat{\alpha} + 2\hat{\beta} = 2(\hat{\alpha} + \hat{\beta})$$

**Propriété 1.1.1.**

Soient  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  et  $\vec{t}$  quatre vecteurs non nuls du plan. On a :

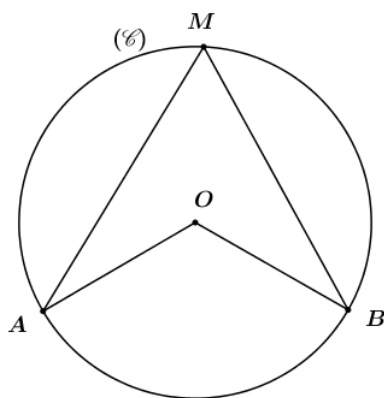
$$1. 2(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \widehat{0} \iff \begin{cases} (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \widehat{0} \\ \text{ou} \\ (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \widehat{\pi} \end{cases}$$

$$2. 2(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 2(\widehat{\vec{w}, \vec{t}}) \iff \begin{cases} (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{\vec{w}, \vec{t}}) \\ \text{ou} \\ (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \widehat{\pi} + (\widehat{\vec{w}, \vec{t}}) \end{cases}$$

$$3. 2(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \widehat{\pi} \iff \begin{cases} (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\widehat{\pi}}{2} \\ \text{ou} \\ (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -\frac{\widehat{\pi}}{2} \end{cases}$$

**1.2 Angles orientés de vecteurs et cercles****1.2.1 Angle inscrit-angle au centre****Propriété 1.2.1.**

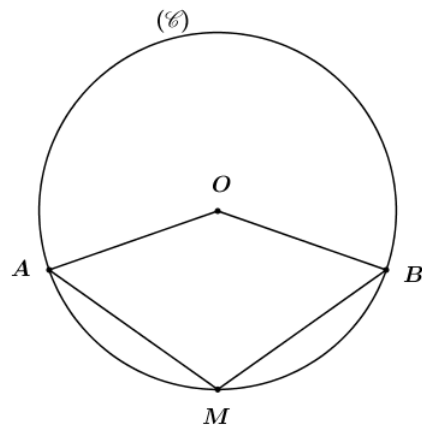
Soit  $(\mathcal{C})$  un cercle de centre  $O$ ,  $A$  et  $B$  deux points distincts de ce cercle.



Pour tout point  $M$  distinct de  $A$  et  $B$ , On a :

$$M \in (\mathcal{C}) \iff \overline{(\vec{OA}, \vec{OB})} = 2\overline{(\vec{MA}, \vec{MB})} [2\pi]$$

Ou



Pour tout point  $M$  distinct de  $A$  et  $B$ , On a :

$$M \in (\mathcal{C}) \iff \overrightarrow{(\overline{MA}, \overline{MB})} = \pi + \frac{1}{2} \overrightarrow{(\overline{OA}, \overline{OB})} [2\pi]$$

### Caractérisation d'un cercle

Soit  $(\mathcal{C})$  un cercle de centre  $O$ ,  $A$  et  $B$  deux points distincts de ce cercle.

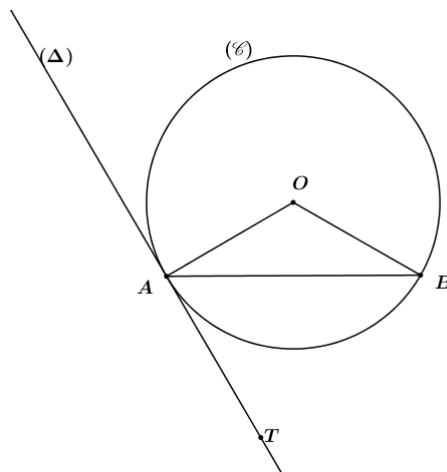
Pour tout point  $M$  distinct de  $A$  et  $B$ , On a :

$$M \in (\mathcal{C}) \iff \overrightarrow{(\overline{OA}, \overline{OB})} = 2 \overrightarrow{(\overline{MA}, \overline{MB})} [2\pi]$$

### 1.2.2 Angle tangente – corde

#### Théorème de la tangente

Soit  $(\mathcal{C})$  un cercle de centre  $O$ ,  $A$  et  $B$  deux points de ce cercle.  $(\Delta)$  la tangente à  $(\mathcal{C})$  en  $A$ .



Pour tout point  $T$  distinct de  $A$  et  $B$ , On a :

$$T \in (\Delta) \iff (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TB})[2\pi]$$

### 1.3 Cocyclicité des points

#### 1.3.1 Définition

Des points sont cocycliques, s'ils sont situés sur un même cercle.

#### 1.3.2 Propriété

Soit  $A, B, C$  et  $D$  quatre points distincts du plan tel que trois quelconques d'entre eux ne sont pas alignés.  $A, B, C$  et  $D$  sont cocycliques si et seulement si :

$$2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})[2\pi]$$

NB : La relation  $2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})[2\pi]$  n'est pas unique.

#### 1.3.3 Quadrilatères inscrits

##### Définition 1.3.1.

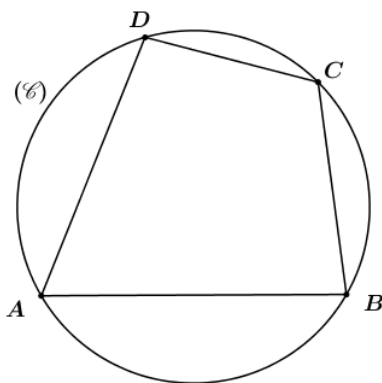
Un quadrilatère est inscrit si ses quatre sommets sont cocycliques.

##### Exercice 1.3.1.

Le rectangle, le carré, le trapèze isocèle sont des quadrilatères inscrits.

##### Théorème 1.3.1.

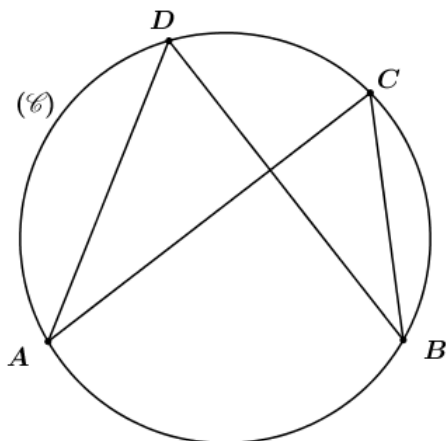
Un quadrilatère convexe est inscrit si et seulement si ses angles opposés sont supplémentaires.



$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}) = \pi[2\pi] \text{ ou } (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) = \pi[2\pi]$$

**Théorème 1.3.2.**

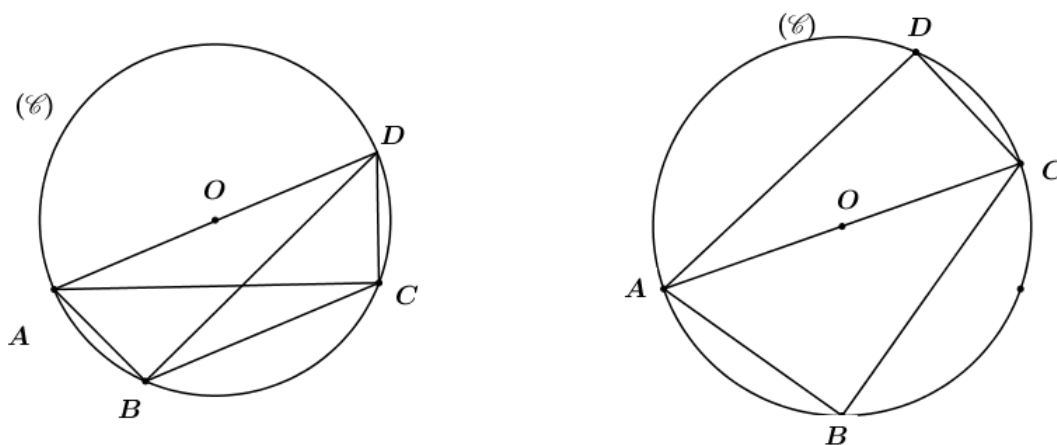
Un quadrilatère croisé est inscriptible si et seulement si ses angles opposés sont égaux.



$$\overrightarrow{(\overline{AC}, \overline{AD})} = \overrightarrow{(\overline{CA}, \overline{CB})}[2\pi] \text{ ou } \overrightarrow{(\overline{DA}, \overline{DB})} = \overrightarrow{(\overline{BC}, \overline{BD})}[2\pi]$$

**Théorème 1.3.3.**

Tout quadrilatère formé de deux triangles rectangles de même hypoténuse est inscriptible.

**Exercice 5**

Soit  $(\mathcal{C})$  et  $(\mathcal{C}')$  deux cercles sécants en deux points  $A$  et  $B$ . Soit  $I$  un point quelconque de  $(\mathcal{C})$  distinct de  $A$  et de  $B$ ,  $J$  un point quelconque de  $(\mathcal{C}')$  distinct de  $A$  et de  $B$  tels que  $I, J$  et  $A$  ne soient pas alignés. Une droite passant par  $B$  non tangente à  $(\mathcal{C})$  ni à  $(\mathcal{C}')$  coupe  $(\mathcal{C})$  en  $M$  et  $(\mathcal{C}')$  en  $N$ . On suppose que les droites  $(IM)$  et  $(JN)$  sont sécantes en un point  $K$ .

Démontrer que les points  $A, I, J$  et  $K$  sont cocycliques.

### Exercice 6

( $\mathcal{C}$ ) est un cercle de diamètre  $[BC]$ ,  $A$  étant un point extérieur de cerce ( $\mathcal{C}$ ). La droite ( $AB$ ) coupe ( $\mathcal{C}$ ) en  $P$  et la droite ( $AC$ ) coupe ( $\mathcal{C}$ ) en  $Q$ . Les droites ( $PC$ ) et ( $BQ$ ) se coupent en  $M$ .

1. Faire une figure
2. Montrer que les points  $A, P, M$  et  $Q$  sont cocycliques, puis tracer le cercle ( $\Gamma$ ) passant par ces quatre points.
3. Démontrer que les droites ( $AM$ ) et ( $BC$ ) sont perpendiculaires.
4. La tangente à ( $\mathcal{C}$ ) en  $B$  et la tangente à ( $\mathcal{C}$ ) en  $P$  se coupent en  $H$ .
  - (a) Démontrer que le triangle  $BHP$  est isocèle.
  - (b) En déduire  $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{PH}, \overrightarrow{PB})[\pi]$

#### 1.3.4 Points alignés

Trois points distincts  $A, B$ , et  $C$  sont alignés si et seulement si :

$$2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0[2\pi] \text{ ou } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0[\pi]$$

#### 1.3.5 Droite de Simson et droite Steiner

#### 1.3.6 Activité 1

Soit  $ABC$  un triangle quelconque et  $M$  un point quelconque du plan non situé sur les droites ( $AB$ ), ( $BC$ ) et ( $AC$ ). on désigne par  $P, Q$  et  $R$  les projetés orthogonaux de  $M$  respectivement sur ( $BC$ ), ( $AC$ ), ( $AB$ ).

1. Démontrer que :

$$\clubsuit 2(\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RM}) = 2(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BM})[2\pi]$$

$$\clubsuit 2(\overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{RM}) = 2(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM})[2\pi]$$

2. Montrer que les points  $P, Q$  et  $R$  sont alignés si et seulement si le point  $M$  appartient au cercle circonscrit au triangle  $ABC$ .

**La droite ( $\Delta$ ) contenant les points  $P, Q$  et  $R$  est appelée " droite de Simson" associée au point  $M$  relativement au triangle  $ABC$**

3. On suppose que  $M$  appartient au cercle circonscrit au triangle  $ABC$ . La droite ( $MP$ )

recoupe ce cercle en un point  $K$ .

- Par quelle transformation simple du plan, les points  $A', B'$  et  $C'$  se déduisent-elles des points  $P, Q$  et  $R$  respectivement ?
- En déduire que les points  $A', B'$  et  $C'$  sont alignés.

**La droite  $(\Delta')$  contenant les points  $A', B'$  et  $C'$  est appelée " droite de Steiner" associée au point  $M$  relativement au triangle  $ABC$ .**

- Montrer que quelque soit le point  $M$  appartenant au cercle circonscrit au triangle  $ABC$ , la droite  $(\Delta')$  passe par l'orthocentre  $H$  de ce triangle.

En déduire que la droite  $(\Delta)$  passe par le milieu de  $[MH]$

## 1.4 Angles orientés de droites

### 1.4.1 Activité 2

Soit deux droites  $(\mathcal{D}_1)$  et  $(\mathcal{D}_2)$  du plan orienté, sécantes en  $O$ .  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  deux vecteurs directeurs de  $(\mathcal{D}_1)$  d'origine  $O$  et de sens contraire,  $\vec{v}$  et  $\vec{v}'$  deux vecteurs directeurs de  $(\mathcal{D}_2)$  d'origine  $O$  et de sens contraire.

- Faire la figure.
- Exprimer les angles  $(\widehat{\vec{u}', \vec{v}'})$  et  $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}'})$  en fonction de  $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}'})$
- En déduire l'angle  $(\widehat{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2})$  en fonction de l'angle  $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}'})$

### Résumé

L'angle orienté des droites  $(\mathcal{D}_1)$  et  $(\mathcal{D}_2)$  est la paire  $\left\{ (\widehat{\vec{u}, \vec{v}'}) ; \pi + (\widehat{\vec{u}, \vec{v}'}) \right\}$

### 1.4.2 Mesure d'un angle orienté de droites

L'angle orienté de droites  $(\mathcal{D}_1)$  et  $(\mathcal{D}_2)$  se note  $(\widehat{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2})$  et sa mesure se note  $\overline{(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)}$ .

Les angles orientés de droites se mesurent en modulo  $\pi$ .

Ainsi si  $\alpha$  est une mesure de l'angle  $(\widehat{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2})$  alors  $\overline{(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)} = \alpha[\pi]$ .

Lorsque  $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$  alors  $\alpha$  est la mesure principale de l'angle  $(\widehat{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2})$ .

### 1.4.3 Notation $x = \theta[\pi]$

$$x = \theta[\pi] \iff \exists k \in \mathbb{Z} / x = \theta + k\pi$$

**Propriété 1.4.1.**

Soit  $(\mathcal{D}_1)$ ,  $(\mathcal{D}_2)$ ,  $(\mathcal{D}_3)$  et  $(\mathcal{D}_4)$  quatre droites distinctes du plan.

1.  $\overline{(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_1)} = 0[\pi]$
2.  $(\mathcal{D}_1) \parallel (\mathcal{D}_2) \iff \overline{(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)} = 0[\pi]$
3.  $(\mathcal{D}_1) \perp (\mathcal{D}_2) \iff \overline{(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)} = \frac{\pi}{2}[\pi]$
4.  $\overline{(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)} = -\overline{(\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_1)}[\pi]$
5. **Relation de Chasles**  

$$\overline{(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_3)} = \overline{(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)} + \overline{(\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3)}[\pi]$$
6. Si  $(\mathcal{D}_1) \parallel (\mathcal{D}_2)$  alors  $\overline{(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_3)} = \overline{(\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3)}[\pi]$
7.  $\overline{(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)} = \overline{(\mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4)}[\pi] \iff \overline{(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_3)} = \overline{(\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_4)}[\pi]$

**1.4.4 Détermination d'un angle orienté de droites**

Dans un plan rapporté à un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . On considère les droites  $(\mathcal{D}_1)$  et  $(\mathcal{D}_2)$  d'équation respectives  $y = mx + p$  et  $y = m'x + p'$ .

Notons  $\theta = \overline{(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)}[\pi]$

On a :  $\tan \theta = \frac{m' - m}{1 + m.m'}$ , avec  $1 + m.m' \neq 0$

**Exercice 7**

On donne les droites  $(\mathcal{D}_1) : 3x - y + 3 = 0$  et  $(\mathcal{D}_2) : x - 2y + 1 = 0$ .

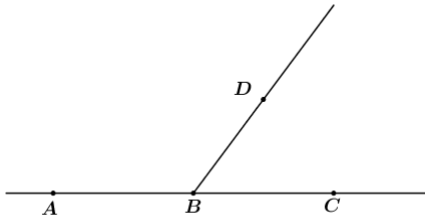
Déterminer la mesure de l'angle  $\widehat{(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)}$

**1.4.5 Angles à côtés perpendiculaires**

Soit  $(\mathcal{D}_1)$ ,  $(\mathcal{D}_2)$ ,  $(\Delta_1)$  et  $(\Delta_2)$  quatre droites d'un plan orienté.

Si  $\begin{cases} (\mathcal{D}_1) \perp (\Delta_1) \\ (\mathcal{D}_2) \perp (\Delta_2) \end{cases}$  alors  $\overline{(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)} = \overline{(\Delta_1, \Delta_2)}[\pi]$

### 1.4.6 Angles adjacents supplémentaires



On a  $\overline{(BA, BD)} = \overline{(BC, BD)}[\pi]$  ou  $\overline{(BA, BD)} = \overline{(AC, BD)}[\pi]$

### 1.4.7 Angle au centre et angle inscrit

#### Activité 3

Dans le plan orienté, on considère un triangle  $ABM$  et  $(\mathcal{C})$  son cercle circonscrit de centre  $O$ .  $(\Delta_1)$  et  $(\Delta_2)$  sont deux droites issues de  $O$  respectivement perpendiculaires à  $(MA)$  et à  $(MB)$ .

1. Montrer que  $\overline{(OA, OB)} = 2\overline{(\Delta_1, \Delta_2)}[\pi]$ . On pourra décomposer  $\widehat{(OA, OB)}$  en introduisant la droite  $(OM)$ .
2. Justifier que  $\overline{(MA, MB)} = \overline{(\Delta_1, \Delta_2)}[\pi]$
3. En déduire que  $\overline{(MA, MB)} = \frac{1}{2}\overline{(OA, OB)}[\pi]$

### 1.4.8 Angle tangente – corde

#### Activité 4

Dans un plan orienté, on considère un triangle  $ABM$  et  $(\mathcal{C})$  son cercle circonscrit de centre  $O$ . La droite  $(AT)$  est la tangente à  $(\mathcal{C})$  en  $A$ .  $I$  est le milieu de  $[AB]$ .

1. Justifier que  $\overline{(TA, TB)} = \overline{(OA, OI)}[\pi]$  puis que  $\overline{(TA, TB)} = \frac{1}{2}\overline{(OA, OB)}[\pi]$
2. En déduire que  $\overline{(TA, TB)} = \overline{(MA, MB)}[\pi]$

### 1.4.9 Alignement des points

Trois points  $A, B$  et  $C$  du plan orienté sont alignés si et seulement si  $\overline{(AB, AC)} = 0[\pi]$

### 1.4.10 Cocyclicité des points

Quatre points  $A, B, C$  et  $D$  du plan deux à deux distincts tels que  $\overline{(AB, AC)} \neq 0[\pi]$  et  $\overline{(DB, DC)} \neq 0[\pi]$  sont cocycliques si et seulement si  $\overline{(AB, AC)} = \overline{(DB, DC)}[\pi]$

**Exercice 8**

Deux cercles  $(\mathcal{C})$  et  $(\mathcal{C}')$  de centres respectifs  $O$  et  $O'$  se coupent en  $A$  et  $B$ . Soit  $C$  un point de  $(\mathcal{C})$  et  $D$  un point de  $(\mathcal{C}')$  non situé sur la droite  $(AC)$ . Une droite passant par  $B$  recoupe  $(\mathcal{C})$  en  $M$  et  $(\mathcal{C}')$  en  $N$ ; les droites  $(CM)$  et  $(DN)$  se coupe en  $R$ .

1. Faire la figure
2. Démontrer que les points  $A, C, R$  et  $D$  sont cocycliques puis tracer le cercle  $(\Gamma)$  passant par ces points.
3. La droite  $(AC)$  coupe  $(\mathcal{C}')$  en  $P$ .

Démontrer que les droites  $(CM)$  et  $(NP)$  sont parallèles.

4. Démontrer que les droites  $(OO')$  et  $(AB)$  sont perpendiculaires.

**Exercice 9**

On considère deux droites  $(\mathcal{D})$  et  $(\mathcal{D}')$  sécantes en  $E$ . Soit  $A$  et  $B$  deux points distincts de  $(\mathcal{D})$  autres que  $E$  tels que  $A \in [EB]$  et soit  $A'$  et  $B'$  deux points distincts de  $(\mathcal{D}')$  autres que  $E$  tels que  $B' \in [EA']$ . On désigne par  $R$  un point de  $[BA']$  tel que les cercles circonscrits aux triangles  $ABR$  et  $A'B'R$  se coupent en  $S$ .

1. Montrer que  $(\overline{AE}, \overline{AS}) = (\overline{RA'}, \overline{RS})[\pi]$
2. Montrer que les points  $A, E, B'$  et  $S$  sont cocycliques.

**1.5 Ensemble des points**

1. Ensemble  $(\Gamma)$  des points  $M$  du plan  $\mathcal{P}$  tels que  $(\overline{MA}, \overline{MB}) = \theta[2\pi]$

Soit  $A$  et  $B$  deux points fixes du plan orienté  $\mathcal{P}$  et  $\theta$  un réel.

Notons  $(\Gamma) : \left\{ M \in \mathcal{P} / (\overline{MA}, \overline{MB}) = \theta[2\pi] \right\}$

Discutons suivant les valeurs de  $\theta$

Premier cas :  $\theta = 0[2\pi]$

$$M \in (\Gamma) \iff (\overline{MA}, \overline{MB}) = 0[2\pi]$$

$$\iff \overline{MA} \text{ et } \overline{MB} \text{ sont colinéaires de même sens.}$$

Donc  $(\Gamma)$  est la droite  $(AB)$  privée du segment  $[AB]$

Deuxième cas :  $\theta = \pi[2\pi]$

$$M \in (\Gamma) \iff (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pi[2\pi]$$

$$\iff \overrightarrow{MA} \text{ et } \overrightarrow{MB} \text{ sont colinéaires de sens contraire.}$$

Donc  $(\Gamma)$  est le segment  $[AB]$  privée des points  $A$  et  $B$ .

Troisième cas :  $\theta \neq \pi[2\pi]$  et  $\theta \neq 0[2\pi]$

$(\Gamma)$  est l'arc capable d'angle de mesure  $\theta$  relatif au segment  $[AB]$  privé des points  $A$  et  $B$ .

**Principe de construction de  $(\Gamma)$**

\* Tracer le segment  $[AB]$

\* Tracer la demi-droite  $[AT)$  passant par  $A$  telle que  $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = 0[2\pi]$ .

\* Tracer la perpendiculaire  $(\Delta)$  à  $(TA)$  en  $A$

\* Tracer la médiatrice  $(\Delta')$  de  $[AB]$

\* Tracer l'arc capable  $(\Gamma)$  de centre  $O$  passant par  $A$  et  $B$  situé dans le plan ne contenant pas la demi-droite  $[AT)$  avec  $\{O\} = (\Delta) \cap (\Delta')$

**Exercice 10**

On donne  $AB = 4cm$ . Déterminer et construire les ensembles des points suivants :

$$(\Gamma_1) : \left\{ M \in \mathcal{P} / (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -\frac{2\pi}{3}[2\pi] \right\}$$

$$(\Gamma_2) : \left\{ M \in \mathcal{P} / (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{3\pi}{4}[2\pi] \right\}$$

2. Ensemble  $(\Gamma)$  des points  $M$  du plan  $\mathcal{P}$  tels que  $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \theta[\pi]$

Soit  $A$  et  $B$  deux points fixes du plan orienté  $\mathcal{P}$  et  $\theta$  un réel.

$$\text{Notons } (\varepsilon) : \left\{ M \in \mathcal{P} / (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \theta[\pi] \right\}$$

**Discutons suivant les valeurs de  $\theta$**

Premier cas :  $\theta = 0[2\pi]$

$$M \in (\varepsilon) \iff (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0[\pi]$$

$$\iff \text{les points } M, A \text{ et } B \text{ sont alignés}$$

Donc  $(\varepsilon)$  est la droite  $(AB)$  privée des points  $A$  et  $B$

Deuxième cas :  $\theta \neq 0[\pi]$

$(\varepsilon)$  est le cercle capable d'angle de mesure  $\theta$  relatif au segment  $[AB]$  privé des points  $A$  et  $B$ .

### Exercice 11

$ABC$  est un triangle rectangle isocèle direct en  $A$ . Déterminer et construire les ensembles des points suivants :

$$(\Gamma_1) : \left\{ M \in \mathcal{P} / (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{6}[\pi] \right\}$$

$$(\Gamma_2) : \left\{ M \in \mathcal{P} / (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{8}[\pi] \right\}$$

### Exercice 12

Dans le plan orienté, on considère deux points  $A$  et  $B$  tels que  $AB = 6$ .

1. Construire le point  $D$  tel que  $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ . En déduire la valeur du réel  $k$  tel que  $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{AB}$
2. Construire les points  $G_1$  et  $G_2$  tels que  $G_1 = \text{bar}\{(A, 1); (B, -3)\}$  et  $G_2 = \text{bar}\{(A, 1); (B, 3)\}$
3. Construire la demi-droite  $[AT)$  telle que  $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{3}[\pi]$
4. Reconnaitre et construire les ensembles suivants :
 
$$(\mathcal{E}) : \left\{ M \in \mathcal{P} / \frac{MA}{MB} = 3 \right\}$$

$$(\Gamma) : \left\{ M \in \mathcal{P} / (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{3}[2\pi] \right\}$$
5. Soit  $\{K\} = (\mathcal{E}) \cap (\Gamma)$ .

Déterminer la mesure principale de l'angle  $(\widehat{KA}, \widehat{KB})$

6. Tracer la demi-droite  $[AT')$  opposée à  $[AT)$ .

Soit  $C$  le point de  $[AT')$  tel que  $AC = AB$ .

Déterminer la mesure de chacun des angles suivants :  $(\widehat{AC}, \widehat{BD})$  et  $(\widehat{CB}, \widehat{CA})$