

CENTRE D'ENCADREMENT SCOLAIRE LES MAJORANTS

34, Rue NKENI Talangaï (Arrêt Libanga)
Cours de Mr. Teddy Fiacre MOBEMOUANA M
Tél : 06 959 57 86 / 05 592 21 90

LES CONIQUES**GENERALITES**

Soit (\mathcal{D}) une droite, F un point non situé sur (\mathcal{D}) et e un nombre réel strictement positif.

1) Définition :

On appelle conique de foyer F , de direction (\mathcal{D}) et d'excentricité e , l'ensemble (Γ) des points

M du plan tel que : $\frac{MF}{MH} = e$, où H est le projeté orthogonal de M sur (\mathcal{D}) .

- Si $e = 1$, alors (Γ) est une parabole
- Si $0 < e < 1$, alors (Γ) est une ellipse
- Si $e > 1$, alors (Γ) est une hyperbole

2) Equation cartésienne de la conique (Γ)

Soit (Γ) une conique de foyer F , de direction (\mathcal{D}) et d'excentricité e d'axe focal (Δ)

L'équation cartésienne de (Γ) est de la forme :

$$Ax^2 + By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0, \quad (A, B \in \mathbb{R}^*) \text{ et } (C, D, E \in \mathbb{R})$$

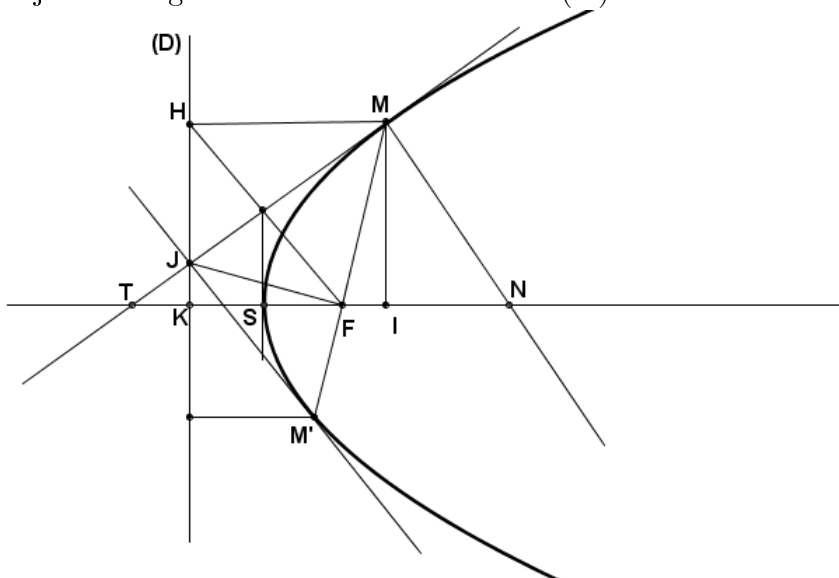
ETUDE DES CONIQUES**I- PARABOLE****A- ETUDE GEOMETRIQUE D'UNE PARABOLE****1) Définition :**

On appelle parabole de foyer F , de directrice (\mathcal{D}) et d'axe focal (Δ) , l'ensemble (P) des points

M du plan tels que : $\frac{MF}{MH} = 1 \Leftrightarrow MF = MH$ où H est le projeté orthogonal de M sur (\mathcal{D})

2) Construction point par point d'une parabole (P) :

Soit (P) la parabole de foyer F et de directrice (\mathcal{D}) passant par un point M du plan. où H est le projeté orthogonal de M sur la directrice (\mathcal{D})



- On trace la directrice (\mathcal{D}) et l'axe (Δ) tel que $(\mathcal{D}) \perp (\Delta)$ en un point K
 - On construit le point F sur (Δ) et le point H sur (\mathcal{D}) tels que $MF = MH$.
- Où H est le projeté orthogonal de M sur (\mathcal{D})
- On construit la médiatrice (T) du segment $[FH]$ passant par M . on note $J = (T) \cap (\mathcal{D})$
 - On construit le point S milieu du segment $[KF]$.
 - On construit le point H' , le symétrique de H par rapport à J
 - On prolonge (MF) de l'autre côté de (Δ)
 - La parallèle à (Δ) en H' rencontre (MF) en M'
 - La droite (JM') est la tangente à (P) en M' .

Ainsi on déduit la construction point par point de la parabole (P) de centre S , de foyer F , de directrice (\mathcal{D}) et l'axe focal (Δ). où (T) est la tangente à la parabole (P) en M .

(MT) : est la tangente à la parabole en M

(MN) : est la normale à la parabole en M

$[IN]$: est la sous-normale à la parabole

$[IT]$: est la sous-tangente à la parabole

$[MI]$: est la demi-corde à la parabole

$[MM']$: est une corde focale de la parabole

F : est le foyer de la parabole (milieu du segment $[TN]$)

S : est le sommet de la parabole (milieu de $[KF]$ ou de $[IT]$)

K : est le projeté orthogonal de F sur la directrice

3) Eléments de construction d'une parabole

a) Foyer d'une parabole

Le foyer d'une parabole est le symétrique du projeté orthogonal H d'un point M de la parabole sur la directrice par rapport à la tangente en M .

b) Sommet d'une parabole

► Le sommet d'une parabole est le milieu du segment formé par le foyer et son projeté orthogonal sur la directrice : c'est le milieu de $[KF]$.

► Le sommet d'une parabole est aussi le milieu de sa sous-tangente.

Propriété

Le projeté orthogonal du foyer sur la tangente, se projette orthogonalement sur l'axe focal de la parabole en son sommet.

c) Le paramètre ou le pas d'une parabole

Le paramètre ou le pas p d'une parabole est la distance du foyer et son projeté orthogonal sur la directrice (est aussi égal à la sous-normale) : $p = KF = IN$.

d) Tangente d'une parabole

La tangente d'une parabole en un point M , est la médiatrice du segment formé par le foyer et le projeté orthogonal de M sur la directrice (C'est la médiatrice de $[FH]$).

e) Sous-tangente d'une parabole

La sous-tangente d'une parabole est le segment formé par le projeté orthogonal de M sur l'axe focal et le point d'intersection de la tangente avec l'axe focal (c'est le cas de la droite (IT))

f) Normale à une parabole

C'est la droite qui est perpendiculaire à la tangente en un point M de la parabole (MN).

g) Sous-normale d'une parabole

La sous-normale d'une parabole est le segment formé par le projeté orthogonal de M sur l'axe focal et le point d'intersection de la normale avec l'axe focal (c'est le cas de [IN])

h) Directrice d'une parabole

La directrice d'une parabole est la perpendiculaire à l'axe focal passant par le symétrique du foyer par rapport à la tangente.

NB : Le symétrique du foyer par rapport à la tangente est un point de la directrice

i) Corde d'une parabole

C'est le segment qui joint deux points d'un arc d'une parabole.

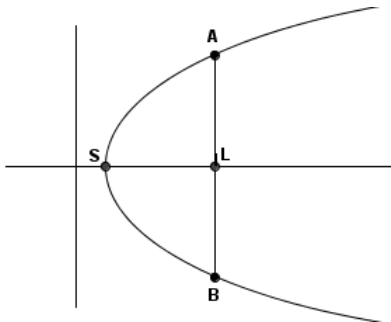
j) Corde focale d'une parabole

► C'est le segment qui joint deux points d'un arc d'une parabole en passant par son foyer.

[MM'] est une corde focale de la parabole (P). M' est un point de (P) situé sur la parallèle à (HM) passant par H' tel que $HJ = JH'$.

► Le **latus rectum** est la corde focale qui est perpendiculaire à l'axe focal.

AIRE D'UNE PARABOLE



• L'aire de l'arc (P) de la parabole limité par

SL et AB est telle que :

$$\mathcal{A} = \frac{SL \times AB}{3}$$

• L'aire de l'arc (P) de la parabole limité par SL et AL est telle que :

$$\mathcal{A} = \frac{SL \times AL}{6}$$

B- ETUDE ANALYTIQUE D'UNE PARABOLE

1) Equation réduite d'une parabole :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$, la parabole a pour équations réduites de la forme : $y^2 = 2ax$ ou $x^2 = 2ay$

2) Pour équation réduite de la forme $y^2 = 2ax$

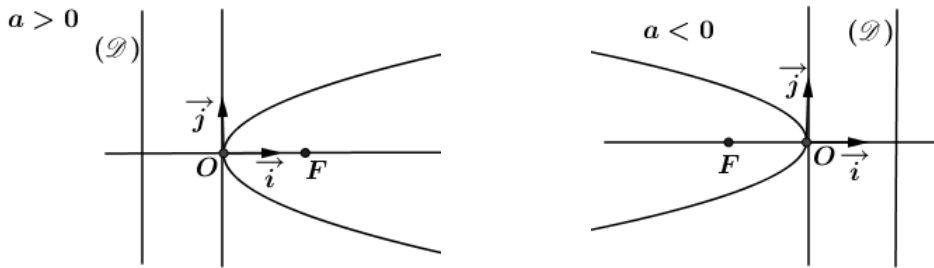
Soit (P) la parabole d'équation réduite de la forme : $y^2 = 2ax$

a) Eléments caractéristiques de la parabole :

Les éléments caractéristiques d'une parabole sont : Le foyer, la directrice, le sommet, l'axe focal et le paramètre ou le pas

Foyer	Directrice	Sommet	Axe focal	Paramètre
$F\left(\frac{a}{2}; 0\right)$	$(\mathcal{D}) : x = -\frac{a}{2}$	$O(0; 0)$	$(o \vec{i})$	$P = a $

b) Construction de la parabole (P)



c) Equation de la tangente en un point $M(x_0; y_0)$ de (P)

L'équation de la tangente à la parabole (P) en un point $M(x_0; y_0)$ est : $(T) : yy_0 = a(x + x_0)$

3) Pour équation réduite de la forme $x^2 = 2ay$

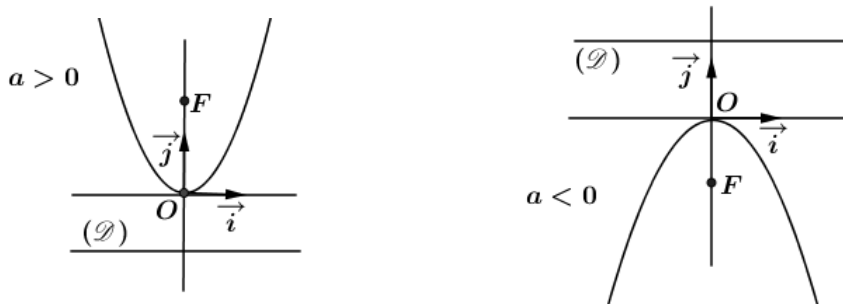
Soit (P) la parabole d'équation réduite de la forme : $x^2 = 2ay$

a) Eléments caractéristiques de la parabole :

Les éléments caractéristiques d'une parabole sont : Le foyer, la directrice, le sommet, l'axe focal et le paramètre ou le pas

Foyer	Directrice	Sommet	Axe focal	Paramètre
$F\left(0; \frac{a}{2}\right)$	$(D) : y = -\frac{a}{2}$	$O(0; 0)$	$(o \vec{j})$	$P = a $

b) Construction de la parabole (P)



c) Equation de la tangente en un point $M(x_0; y_0)$ de (P)

L'équation de la tangente à la parabole (P) en un point $M(x_0; y_0)$ est : $(T) : xx_0 = a(y + y_0)$

4) Pour l'équation réduite de la forme $(y - y_0)^2 = 2a(x - x_0)$

Soit (P) la parabole d'équation réduite de la forme : $(y - y_0)^2 = 2a(x - x_0)$

a) Eléments caractéristiques de la parabole :

Les éléments caractéristiques d'une parabole sont : Le foyer, la directrice, le sommet, l'axe focal et le paramètre ou le pas

Foyer	Directrice	Sommet	Axe focal	Paramètre
$F\left(\frac{a}{2} + x_0; y_0\right)$	$(D) : x = -\frac{a}{2} + x_0$	$S(x_0; y_0)$	$(S \vec{i})$	$P = a $

b) Equation de la tangente en un point $A(x_A; y_A)$ de (P)

L'équation de la tangente à la parabole (P) en un point $A(x_A; y_A)$ est : $(T) : YY_A = a(X + X_A)$

Avec : $\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$ et $\begin{cases} X_A = x_A - x_0 \\ Y_A = y_A - y_0 \end{cases}$

On a : $(T) : (y_A - y_0)(y - y_0) = a(x + x_A - 2x_0)$

5) Pour l'équation réduite de la forme $(x - x_0)^2 = 2a(y - y_0)$

Soit (P) la parabole d'équation réduite de la forme : $(x - x_0)^2 = 2a(y - y_0)$

a) Éléments caractéristiques de la parabole :

Les éléments caractéristiques d'une parabole sont : Le foyer, la directrice, le sommet, l'axe focal et le paramètre ou le pas

Foyer	Directrice	Sommet	Axe focal	Paramètre
$F(x_0; \frac{a}{2} + y_0)$	$(D) : y = -\frac{a}{2} + y_0$	$S(x_0; y_0)$	$(S\vec{j})$	$P = a $

b) Equation de la tangente en un point $A(x_A; y_A)$ de (P)

L'équation de la tangente à la parabole (P) en un point $A(x_A; y_A)$ est : $(T) : XX_A = a(Y + Y_A)$

Avec : $\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$ et $\begin{cases} X_A = x_A - x_0 \\ Y_A = y_A - y_0 \end{cases}$

On a : $(T) : (x_A - x_0)(x - x_0) = a(y + y_A - 2y_0)$

II- ELLIPSE

A- ETUDE GEOMETRIQUE D'UNE ELLIPSE

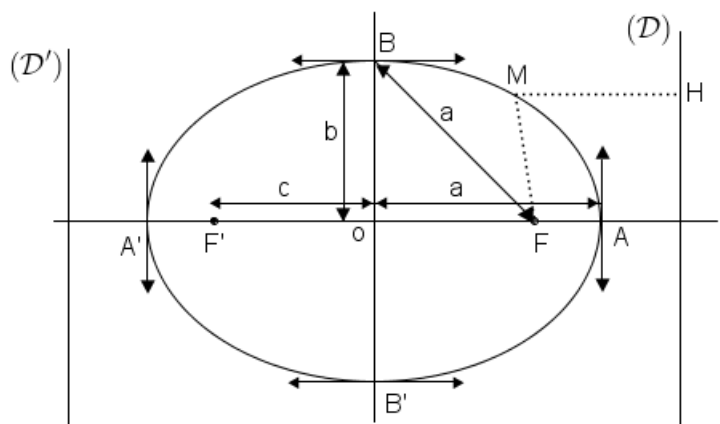
1) Définition :

On appelle ellipse de foyer F et F' , d'excentricité e de directrices (D) et (D') , l'ensemble (E) des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = e$ où $0 < e < 1$ et H est le projeté orthogonal de M sur (D)

2) Définition bifocale :

Soient F et F' deux points du plan distants de $2c$ $c \in \mathbb{R}_+^*$
 On appelle ellipse de foyers F et F' , l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $MF + MF' = 2a$ où $2a > 2c$

Soit (E) l'ellipse de centre O , de grand axe $AA' = 2a$, de petit axe $BB' = 2b$, des foyer F et F' , d'excentricité e et des directrices (D) et (D') . K est le projeté orthogonal de F sur (D)



Théorème :

Si A et A' sont les sommets situés sur l'axe focal d'une ellipse alors :

$A = \text{bar} \{(F, 1); (K, e)\}$ et $A' = \text{bar} \{(F, 1); (K, -e)\}$

3) Rectangle fondamental :

C'est le rectangle de longueur $[AA']$, de largeur $[BB']$ et de centre O de l'ellipse.

4) Aire d'une ellipse :

L'aire d'une ellipse est calculer par la formule : $\boxed{\mathcal{A} = \pi \cdot a \cdot b}$

5) Définitions des cercles d'une ellipse

Soit O le centre d'une ellipse de foyers F et F' . R est la distance entre le centre O et un sommet de l'ellipse situé sur l'axe focal et r la distance entre le centre O et un sommet de l'ellipse situé sur l'axe non focal

a) Cercle principal :

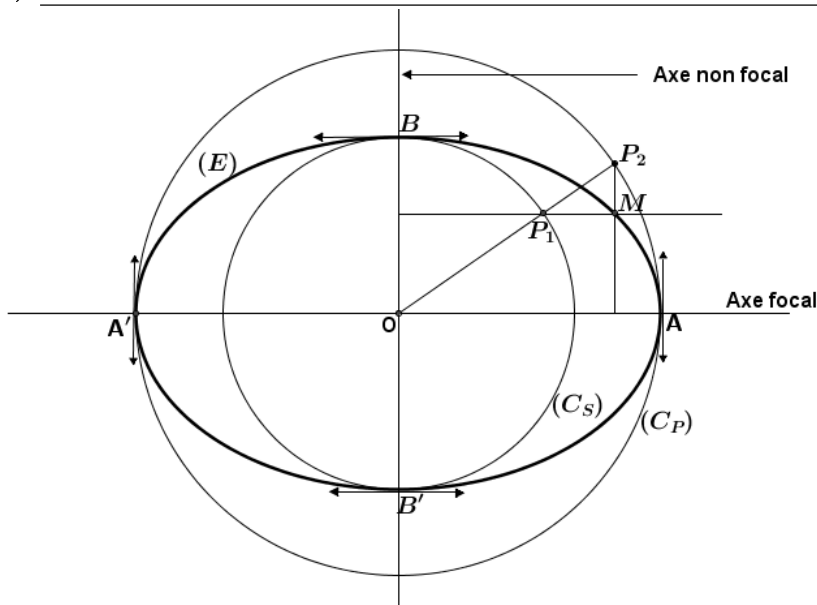
On appelle cercle principal noté (C_P) le cercle de centre O et de rayon $R = OA = a$.

b) Cercle secondaire :

On appelle cercle secondaire noté (C_S) le cercle de centre O et de rayon $r = OB = b$.

c) Cercle directeur :

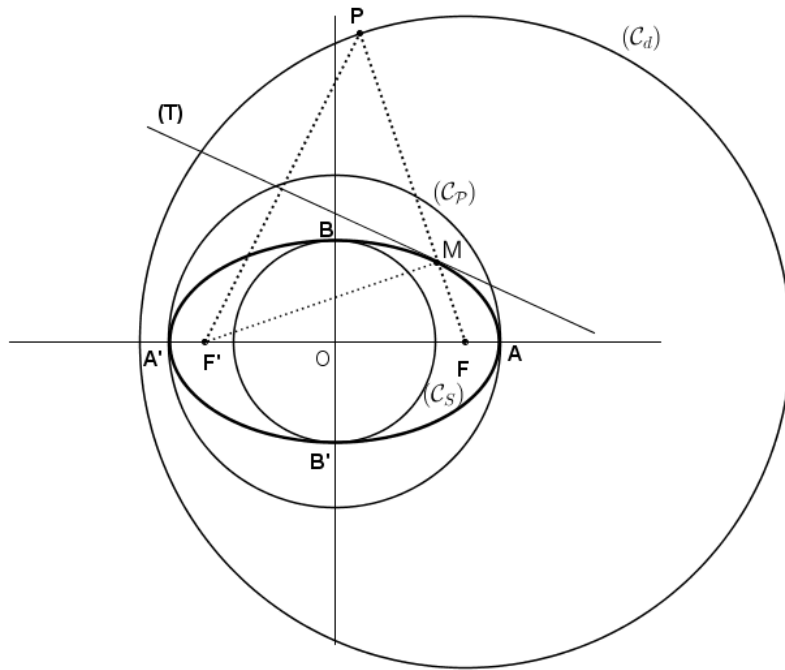
On appelle cercle directeur noté (C_d) le cercle de centre F ou F' et de rayon $AA' = 2a$.

6) Construction point par point par la méthode du paramétrage

- On trace le cercle secondaire (C_S) de centre O et de $OB = b$.
 - On trace le cercle principal (C_P) de centre O et de $OA = a$.
 - On trace une demi-droite oblique d'origine O , qui coupe (C_S) en P_1 et (C_P) en P_2 .
 - On trace la perpendiculaire à (OA) passant par P_2 et la parallèle à (OA) passant par P_1 .
- Le point d'intersection de la perpendiculaire à (OA) passant par P_2 et la parallèle à (OA) passant par P_1 est un point M de l'ellipse (E) de centre O et de grand axe $[AA']$.

Ainsi (E) est l'image de (C_P) par l'affinité orthogonale d'axe (AA') et de rapport $k = \frac{b}{a}$.

7) Construction point par point et cercle directeur



- On trace le cercle secondaire (\mathcal{C}_S)
 - On trace le cercle principal (\mathcal{C}_P)
 - On trace le cercle directeur (\mathcal{C}_d) de centre F .
 - On fixe un point P de (\mathcal{C}_d), on le relie aux foyers F et F'
 - On trace la médiatrice (T) du segment $[PF']$
- L'intersection de (T) avec le segment $[PF]$ est le point M de l'ellipse (E) situé entre (\mathcal{C}_P) et (\mathcal{C}_S) .
- On construit l'ellipse (E) passant par A, B et M . Où (T) est la tangente à (E) en M .

B- ETUDE ANALYTIQUE D'UNE ELLIPSE

1- Equation réduite d'une ellipse :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$, l'ellipse a pour équations réduites de la

forme : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

a) Éléments caractéristiques de l'ellipse :

Les éléments caractéristiques d'une ellipse sont : Les foyers, les sommets, le centre, l'excentricité et les directrices

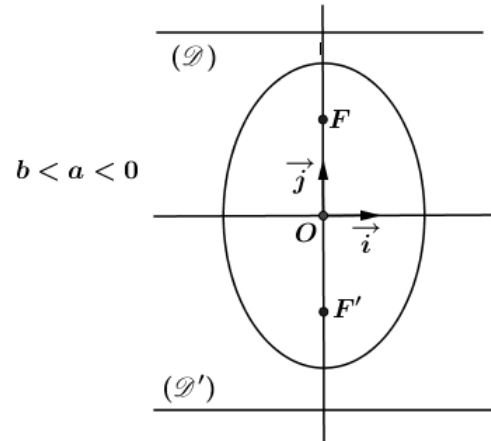
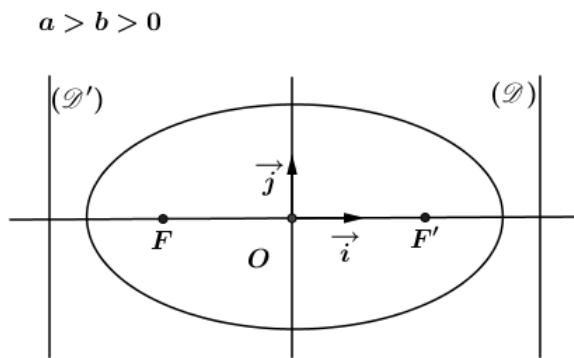
- Si $a > b > 0$ alors on a : $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Les foyers	Les sommets	Le centre	L'excentricité	Les directrices	l'axe focal
$F(c; 0)$	$A(a; 0), A'(-a; 0)$	$O(0; 0)$	$e = \frac{c}{a}$	$(\mathcal{D}) : x = \frac{a^2}{c}$	(AA')
$F(-c; 0)$	$B(0; b), B'(0; -b)$			$(\mathcal{D}') : x = -\frac{a^2}{c}$	

- Si $b > a > 0$ alors on a : $c = \sqrt{b^2 - a^2}$

Les foyers	Les sommets	Le centre	L'excentricité	Les directrices	l'axe focal
$F(0; c)$	$A(a; 0), A'(-a; 0)$	$O(0; 0)$	$e = \frac{c}{b}$	$(\mathcal{D}) : y = \frac{b^2}{c}$	(BB')
$F(0; -c)$	$B(0; b), B'(0; -b)$			$(\mathcal{D}') : y = -\frac{b^2}{c}$	

b) Construction de l'ellipse (E)



2- Equation de la tangente en un point $M(x_0; y_0)$ d'une ellipse (E)

L'équation de la tangente à une ellipse (E) en un point $M(x_0; y_0)$ est : $(T) : \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$

3- Représentation paramétrique d'une ellipse : $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

4- Ellipse d'équation de la forme :

Si une ellipse a pour équations réduites de la forme : $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$

alors les éléments caractéristiques sont tels que :

- Si $a > b > 0$ alors on a : $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Les foyers	Les sommets	Le centre	L'excentricité	Les directrices	l'axe focal
$F(c + x_0; y_0)$	$A(a + x_0; y_0)$ $B(x_0; b + y_0)$	$O(x_0; y_0)$	$e = \frac{c}{a}$	$(D) : x = \frac{a^2}{c} + x_0$	(AA')

- Si $b > a > 0$ alors on a : $c = \sqrt{b^2 - a^2}$

Les foyers	Les sommets	Le centre	L'excentricité	Les directrices	l'axe focal
$F(x_0; c + y_0)$	$A(a + x_0; y_0)$ $B(x_0; b + y_0)$	$O(x_0; y_0)$	$e = \frac{c}{b}$	$(D) : y = \frac{b^2}{c} + y_0$	(BB')

III- HYPERBOLE

A- ETUDE GEOMETRIQUE D'UNE HYPERBOLE

1- Définition :

On appelle hyperbole de foyer F et F' , d'excentricité e de directrices (D) et (D') , l'ensemble (E) des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = e$ où $e > 1$ et H est le projeté orthogonal de M sur (D)

2- Définition bifocale :

On appelle hyperbole de foyers F et F' , l'ensemble (H) des points M du plan tels que :

$$|MF - MF'| = 2a \quad \text{où } a > 0$$

3- Centre de l'hyperbole :

Le centre de l'hyperbole est le milieu des foyers F et F'

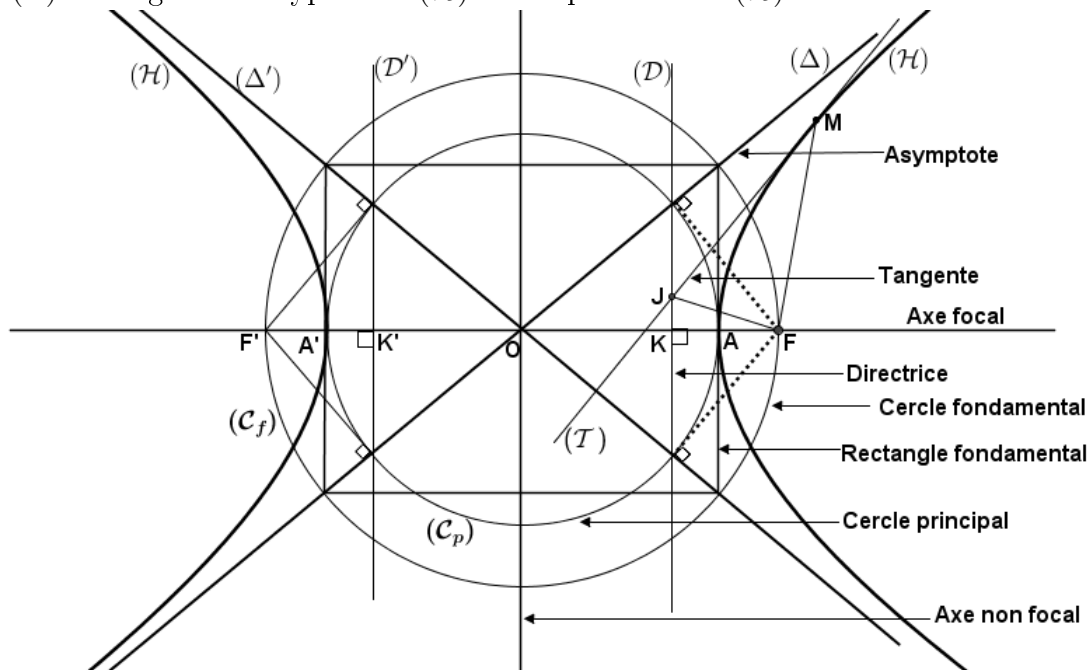
4- Cercle fondamental :

On appelle cercle fondamentale de l'hyperbole, le cercle circonscrit au rectangle fondamental de diagonales (Δ) et (Δ') .

5- Construction point par point d'une hyperbole (\mathcal{H}) :

Soient :

- O est le centre de l'hyperbole (\mathcal{H})
- F et F' les foyers de l'hyperbole (\mathcal{H})
- A et A' les sommets de l'hyperbole (\mathcal{H})
- (\mathcal{D}) une directrice de l'hyperbole (\mathcal{H})
- (Δ) et (Δ') les asymptotes de l'hyperbole (\mathcal{H})
- (T) la tangente à l'hyperbole (\mathcal{H}) en un point M de (\mathcal{H})



a) Foyer, directrice et tangente :

Le foyer F d'une hyperbole forme avec un point M de la tangente à l'hyperbole et le point d'intersection J de la tangente avec la directrice, un triangle rectangle en F d'hypoténuse $[MJ]$

b) Foyer, directrice et asymptote :

Le foyer F d'une hyperbole se projette orthogonalement sur l'asymptote au point d'intersection I de l'asymptote avec la directrice.

c) Cercle fondamental (C_f) d'une hyperbole :

On appelle cercle fondamental (C_f) , le cercle de centre O de rayon $[OF]$. C'est le cercle passant par les foyers de l'hyperbole (\mathcal{H}) .

d) Rectangle fondamental d'une hyperbole :

On appelle rectangle fondamental, le rectangle de centre o inscrit dans le cercle fondamental dont les côtés passent par les sommets de l'hyperbole et les asymptotes de l'hyperbole passent

par ses diagonales.

c) Cercle principal (\mathcal{C}_P) d'une hyperbole :

On appelle cercle fondamental (\mathcal{C}_P) d'une, le cercle de centre O de rayon $[OS_1]$. C'est le cercle passant par les sommets situés sur l'axe focal de l'hyperbole (\mathcal{H}).

- On trace un rectangle de centre O appelé rectangle fondamental et les droites (Δ) et (Δ') passant respectivement par les diagonales de ce rectangle
- On construit l'hyperbole (\mathcal{H}) de sommet A et A' d'asymptotes (Δ) et (Δ')

Théorème : Si A et A' sont les sommets situés sur l'axe focal d'une ellipse alors :

$$A = \text{bar} \{(F, 1); (K, e)\} \quad \text{et} \quad A' = \text{bar} \{(F, 1); (K, -e)\}$$

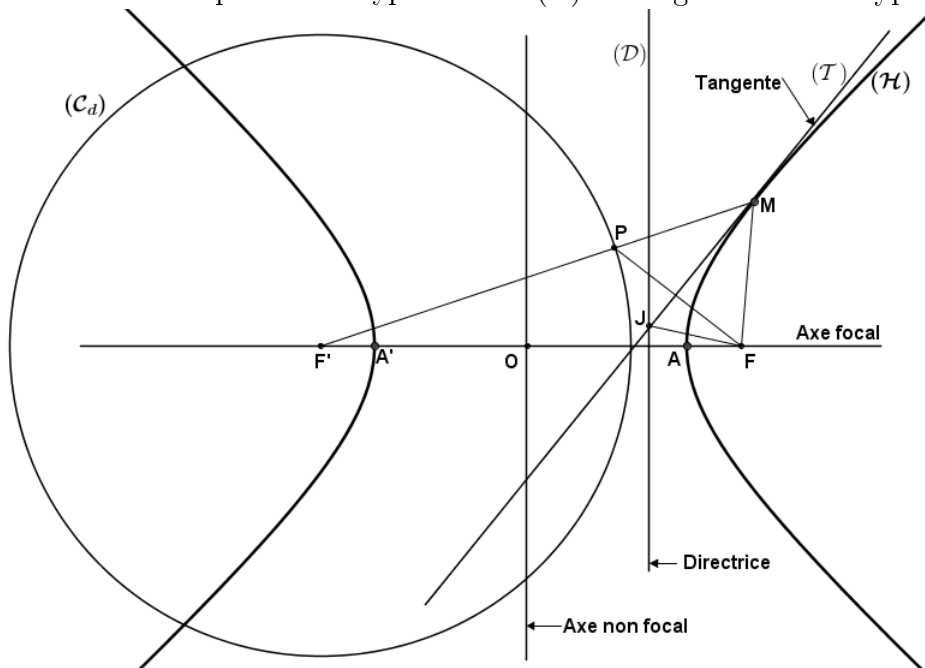
Remarque

Si les asymptotes (Δ) et (Δ') sont perpendiculaires, alors on parle de l'hyperbole équilatère.

6- Construction d'un point M d'une hyperbole et le cercle directeur :

- On trace le cercle de centre F' et de rayon $AA' = 2a$ appelé cercle directeur noté (\mathcal{C}_P) .
- On fixe un point P sur le cercle directeur (\mathcal{C}_P) .
- On trace la droite $(F'P)$ et la médiatrice (T) du segment $[PF]$.
- La médiatrice (T) de $[PF]$ coupe la droite $(F'P)$ en un point M .

Ainsi M est un point de l'hyperbole et (T) la tangente à cette hyperbole en M .



B- ETUDE ANALYTIQUE D'UNE HYPERBOLE

1- Equation réduite d'une hyperbole :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$

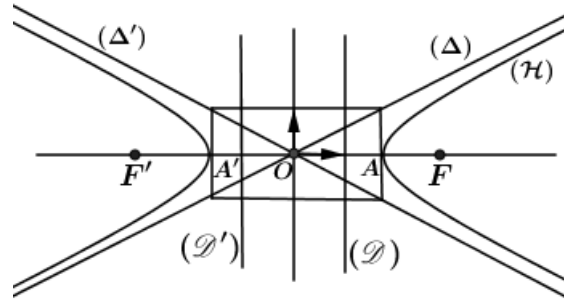
Si l'hyperbole a pour équations réduites de la forme : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

a) Eléments caractéristiques d'une hyperbole :

Les éléments caractéristiques d'une hyperbole sont : Les foyers, les sommets, le centre, l'excentricité et les directrices

Foyers	Sommets	Centre	Excentricité	Directrices	Asymptotes	axe focal
$F(c; 0)$	$A(a; 0)$	$O(0; 0)$	$e = \frac{c}{a}$	$(\mathcal{D}) : x = \frac{a^2}{c}$	$(\Delta) : y = \frac{b}{a}x$	(AA')
$F(-c; 0)$	$A'(-a; 0)$			$(\mathcal{D}') : x = -\frac{a^2}{c}$	$(\Delta') : y = -\frac{b}{a}x$	

b) Construction de l'hyperbole (\mathcal{H})



2- Equation réduite d'une hyperbole :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$

Si l'hyperbole a pour équations réduites de la forme : $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

a) Éléments caractéristiques d'une hyperbole :

Les éléments caractéristiques d'une hyperbole sont : Les foyers, les sommets, le centre, l'excentricité et les directrices

Foyers	Sommets	Centre	Excentricité	Directrices	Asymptotes	axe focal
$F(0; c)$	$B(0; b)$	$O(0; 0)$	$e = \frac{c}{b}$	$(\mathcal{D}) : y = \frac{b^2}{c}$	$(\Delta) : y = \frac{b}{a}x$	(BB')
$F(0; -c)$	$B'(0; -b)$			$(\mathcal{D}') : y = -\frac{b^2}{c}$	$(\Delta') : y = -\frac{b}{a}x$	

b) Construction de l'hyperbole (\mathcal{H})

