

CENTRE D'ENCADREMENT SCOLAIRE LES MAJORANTS

34, Rue NKENI Talangaï (Arrêt Libanga)

Cours de M. Teddy Fiacre MOBEMOUANA-MONKESSA

Tél : 06 959 57 86/05 592 21 90

COURBES PARAMETREES

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

Soient x et y deux fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, t est un paramètre réel.

1- Définition

On appelle courbe paramétrée, l'ensemble (Γ) des points $M(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t))$ dont

une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Exemples :

$$1) \begin{cases} x(t) = 1 - \sin t \\ y(t) = 2 \cos 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad 2) \begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{1-t} \\ y(t) = 2t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

2- Fonction vectorielle associée

On appelle fonction vectorielle associée à une courbe paramétrée (Γ) , la fonction notée $\overrightarrow{F(t)}$

telle que : $\overrightarrow{F(t)} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ ou $\overrightarrow{OM(t)} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$

Exemples :

Soit (Γ) la courbe dont la représentation paramétrique dans le repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ est :

$$\begin{cases} x(t) = 1 + \sin 2t \\ y(t) = \frac{1}{2}t - \cos t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

La fonction vectorielle associée à (Γ) est :
$$\overrightarrow{F(t)} = (1 + \sin 2t)\vec{i} + \left(\frac{1}{2}t - \cos t\right)\vec{j}$$

3- Plan d'étude

Le plan d'étude d'une courbe paramétrée est identique à celui de n'importe autre fonction numérique.

a) Ensemble de définition

L'ensemble de définition est tel que : $E = E_x \cap E_y$

E_x est l'ensemble de définition de x et E_y est celui de y

Remarque :

Pour les courbes paramétrées des fonctions circulaires, on étudiera la périodicité pour réduire l'intervalle d'étude.

b) Périodicité

$x(t)$ et $y(t)$ sont périodique de période T si et seulement si :
$$\begin{cases} x(t+T) = x(t) \\ y(t+T) = y(t) \end{cases}$$

c) Calcul de la période commune à x et à y

Si x est périodique de période T_1 et x est périodique de période T_2 alors la période commune à x et y est telle que : $T = PPCM(T_1, T_2)$

Si $x(t)$ et $y(t)$ sont périodique de période T alors on peut les étudier sur un intervalle de

longueur T , c-à-d : $[0, T]$, $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ ou $[-T, 0]$

EXERCICE :

Soit (Γ) la courbe dont la représentation paramétrique dans le repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ est :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} \cos 2t \\ y(t) = 2 + \sin 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- 1- Calculer la période de x et la période de y .
- 2- Déterminer la période T commune à x et à y .
- 3- En déduire l'intervalle d'étude de (Γ)

4- Parité et symétries

a) Symétrie par rapport à l'axe des abscisses

La courbe paramétrée plane (Γ) est symétrique par rapport à l'axe des abscisses, si et seulement

$$\text{si : } \boxed{\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}} \text{ ou } \boxed{\begin{cases} x(\pi - t) = x(t) \\ y(\pi - t) = -y(t) \end{cases}} \text{ ou encore } \boxed{\begin{cases} x(\pi + t) = x(t) \\ y(\pi + t) = -y(t) \end{cases}}$$

Alors les points $M(-t)$, $M(\pi - t)$ et $M(\pi + t)$ se déduisent du point $M(t)$ par la symétrie orthogonale d'axe des abscisses.

b) Symétrie par rapport à l'axe des ordonnées

La courbe paramétrée plane (Γ) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, si et seulement

$$\text{si : } \boxed{\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}} \text{ ou } \boxed{\begin{cases} x(\pi - t) = -x(t) \\ y(\pi - t) = y(t) \end{cases}} \text{ ou encore } \boxed{\begin{cases} x(\pi + t) = -x(t) \\ y(\pi + t) = y(t) \end{cases}}$$

Alors les points $M(-t)$, $M(\pi - t)$ et $M(\pi + t)$ se déduisent du point $M(t)$ par la symétrie orthogonale d'axe des ordonnées.

c) Symétrie par rapport à l'origine du repère

La courbe paramétrée plane (Γ) est symétrique par rapport à l'origine du repère, si et seulement

$$\text{si : } \boxed{\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}} \text{ ou } \boxed{\begin{cases} x(\pi - t) = -x(t) \\ y(\pi - t) = -y(t) \end{cases}} \text{ ou encore } \boxed{\begin{cases} x(\pi + t) = -x(t) \\ y(\pi + t) = -y(t) \end{cases}}$$

Alors les points $M(-t)$, $M(\pi - t)$ et $M(\pi + t)$ se déduisent du point $M(t)$ par la symétrie centrale de centre l'origine du repère.

d) Symétrie par rapport à la première bissectrice ($y = x$)

La courbe paramétrée plane (Γ) est symétrique par rapport à la première bissectrice, si et

$$\text{seulement si : } \boxed{\begin{cases} x(-t) = y(t) \\ y(-t) = x(t) \end{cases}} \text{ ou } \boxed{\begin{cases} x(\pi - t) = y(t) \\ y(\pi - t) = x(t) \end{cases}} \text{ ou encore } \boxed{\begin{cases} x(\pi + t) = y(t) \\ y(\pi + t) = x(t) \end{cases}}$$

Alors les points $M(-t)$, $M(\pi - t)$ et $M(\pi + t)$ se déduisent du point $M(t)$ par la symétrie orthogonale d'axe d'équation $y = x$.

e) Symétrie par rapport à la seconde bissectrice ($y = -x$)

La courbe paramétrée plane (Γ) est symétrique par rapport à la seconde bissectrice, si et

$$\text{seulement si : } \boxed{\begin{cases} x(-t) = -y(t) \\ y(-t) = -x(t) \end{cases}} \text{ ou } \boxed{\begin{cases} x(\pi - t) = -y(t) \\ y(\pi - t) = -x(t) \end{cases}} \text{ ou encore } \boxed{\begin{cases} x(\pi + t) = -y(t) \\ y(\pi + t) = -x(t) \end{cases}}$$

Alors les points $M(-t)$, $M(\pi - t)$ et $M(\pi + t)$ se déduisent du point $M(t)$ par la symétrie orthogonale d'axe d'équation $y = -x$.

Propriétés

Si x et y sont paires ou impaires alors l'intervalle d'étude $[0; T]$ peut être réduit de moitié. Soit $[0; \frac{T}{2}]$

5- Tableau de variations

* On étudie séparément les variations de x et y sur un intervalle d'étude commune $I \subset \mathbb{R}$.

* On dresse le tableau récapitulatif ou conjoint des variations de x et y .

a) Tableau de variations de x et de y

Pour x

t	valeurs de t ; ($t \in I$)
$x'(t)$	Signe de $x'(t)$
$x(t)$	Sens de variations

Pour y

t	valeurs de t ; ($t \in I$)
$y'(t)$	Signe de $y'(t)$
$y(t)$	Sens de variations

b) Tableau de variations de x et de y

t	Valeurs de t ; ($t \in I$)
$x'(t)$	Signe de $x'(t)$
$x(t)$	Sens de variations
$y(t)$	Sens de variations
$y'(t)$	Signe de $y'(t)$

6- Tangentes à une courbe paramétrique en un point $M(t_0)$

Soit (Γ) une courbe paramétrée de représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$

a) Tangente verticale à (Γ) en $M(t_0)$

$$\text{Si } \begin{cases} x'(t_0) = 0 \\ y'(t_0) \neq 0 \end{cases} ; t_0 \in \mathbb{R}$$

La tangente à (Γ) en $M(t_0)$ est verticale et dirigée par le vecteur $\vec{V}(0; y'(t_0))$

b) Tangente horizontale à (Γ) en $M(t_0)$

$$\text{Si } \begin{cases} x'(t_0) \neq 0 \\ y'(t_0) = 0 \end{cases} ; t_0 \in \mathbb{R}$$

La tangente à (Γ) en $M(t_0)$ est horizontale et dirigée par le vecteur $\vec{V}(x'(t_0); 0)$

c) Tangente oblique à (Γ) en $M(t_0)$

$$\text{Si } \begin{cases} x'(t_0) \neq 0 \\ y'(t_0) \neq 0 \end{cases} ; t_0 \in \mathbb{R}$$

La tangente à (Γ) en $M(t_0)$ est oblique et dirigée par le vecteur $\vec{V}(x'(t_0); y'(t_0))$

NB : Si $\begin{cases} x'(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = 0 \end{cases} ; t_0 \in \mathbb{R}$ alors on distingue trois cas suivants :

- Si $\frac{x'(t_0)}{y'(t_0)} = \infty$: alors la tangente à (Γ) en $M(t_0)$ est verticale.
- Si $\frac{x'(t_0)}{y'(t_0)} = 0$: alors la tangente à (Γ) en $M(t_0)$ est horizontale.
- Si $\frac{x'(t_0)}{y'(t_0)} = a ; a \neq 0$

alors la tangente à (Γ) en $M(t_0)$ est oblique et dirigée par le vecteur $\vec{V}[ax(t_0) - y(t_0) ; a]$.

L'équation de la tangente à (Γ) en $M(t_0)$ est : $y = a[x - x(t_0)] + y(t_0)$

7- Points d'intersections de (Γ) avec les axe du repère

Soit (Γ) une courbe paramétrée de représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$

a) Points d'intersections de (Γ) avec l'axe des abscisses

Pour déterminer les points d'intersections de (Γ) avec l'axe des abscisses, on résout l'équation $y(t) = 0$. En résolvant $y(t) = 0$, on trouve un réel t_0 . Ainsi : $(\Gamma) \cap (ox) = \{(x(t_0) ; 0)\}$

b) Points d'intersections de (Γ) avec l'axe des ordonnées

Pour déterminer les points d'intersections de (Γ) avec l'axe des abscisses, on résout l'équation $x(t) = 0$. En résolvant $x(t) = 0$, on trouve un réel t_0 . Ainsi : $(\Gamma) \cap (oy) = \{(0 ; y(t_0))\}$

8- Représentation graphique d'une courbe paramétrée

- * On étudie les branches infinies s'il existe.
- * On détermine les points d'intersection de la courbe avec les axes du repère s'il existe.
- * On place dans le repère, les points de la courbe qui figurent dans le tableau de variations.
- * On trace les demi-tangentes à la courbe en ces points.
- * On trace la courbe, en lisant le tableau de variation de la gauche vers la droite en suivant le sens de variation de y .

9- Point singulier ou stationnaire

Un point $M(t_0)$ est dit singulier, lors que sa demi-tangente est dirigée par le vecteur $\vec{V}(0, 0)$

10- Point régulier

Un point $M(t_0)$ est dit régulier, lors que sa demi-tangente est dirigée par le vecteur $\vec{V}(x'(t_0), y'(t_0))$.
où $x'(t_0)$ et $y'(t_0)$ sont non tous nuls.