CENTRE D'ENCADREMENT SCOLAIRE LES MAJORANTS
34, Rue NKENI Talangaï (Arrêt Libanga)
Cours de Mr. Teddy Fiacre MOBEMOUANA M
Tél : 06 959 57 86/05 592 21 90

FONCTIONS NUMERIQUES D'UNE VARIABLE REELLE

I- GENERALITES

1) Définition :

On appelle fonction numérique d'une variable réelle x toute application f de $\mathbb{R}$ (ou d'une partie non vide de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}$(ou d'une partie non vide de $\mathbb{R}$).

2) Ensemble de définition :

a) Définition :

On appelle ensemble de définition d'une fonction numérique f, l'ensemble non vide qui est appliqué dans $\mathbb{R}$ par f noté Ef

b) Tableau récapitulatif

Soient $A(x)$ et $B(x)$ deux fonctions polynômes

Fonctions	Conditions d'existences
$f(x) = A(x)$	f est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Ef =]-\infty\,;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$	f est définie si et seulement si $B(x) \neq 0$
$f(x) = \sqrt{A(x)}$	f est définie si et seulement si $A(x) \geqslant 0$
$f(x) = \sqrt{\dfrac{A(x)}{B(x)}}$	f est définie si et seulement si $\begin{cases} \dfrac{A(x)}{B(x)} \geqslant 0 \\ B(x) \neq 0 \end{cases}$
$f(x) = \dfrac{\sqrt{A(x)}}{B(x)}$	f est définie si et seulement si $\begin{cases} A(x) \geqslant 0 \\ B(x) \neq 0 \end{cases}$
$f(x) = \dfrac{A(x)}{\sqrt{B(x)}}$	f est définie si et seulement si $B(x) > 0$
$f(x) = \sqrt{\lvert A(x)\rvert}$	f est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ $Ef =]-\infty\,;+\infty[$
$f(x) = \sqrt{\lvert A(x)\rvert + l}$; $l \in \mathbb{R}^*$	f est définie si et seulement si $\lvert A(x)\rvert + l \geqslant 0$

3) Parité d'une fonction

3) Parité d'une fonction : Soit f une fonction numérique d'une variable réelle, Ef l'ensemble de définition de f et (C) la courbe représentative de f

a) Fonction paire : f est paire si et seulement si pour tout $x \in Ef$, $\boxed{f(-x) = f(x)}$

b) Fonction impaire : f est impaire si et seulement si pour tout $x \in Ef$, $\boxed{f(-x) = -f(x)}$

4) Centre de symétrie d'une fonction

Le point $M(a;b)$ est centre de symétrie de la courbe (Cf) de la fonction f si et seulement si pour tout $x \in Ef$, $\boxed{f(2a - x) + f(x) = 2b}$

Propriété :

Si $f(-x) = -f(x)$ alors le $O(0\,;\,0)$ est le centre de symétrie de la courbe (C).

5) Axe de symétrie :

La droite d'équation $x = a$ est l'axe de symétrie de (C) si et seulement si pour tout $x \in Ef$, $\boxed{f(2a - x) = f(x)}$

Propriété :
Si $f(-x) = f(x)$ alors l'axe des ordonnées est l'axe de symétrie de la courbe (C).

II- LIMITE D'UNE FONCTION

Soient l et x_0 un nombre réel et f une fonction numérique de la variable réelle x

1- Définition

On dit que la fonction f a pour limite l lors que x tend vers x_0, si les valeurs de $f(x)$ peuvent être rendues aussi proche que l'on veut de l pour des valeurs x suffisamment proche de x_0. On écrit : $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = l}$

2- limite à gauche et limite à droite

•limite à gauche

Si l est la limite de f quand x tend vers x_0 à gauche alors on note : $\boxed{\lim_{x\to {x_0}^-} f(x) = l}$

•limite à droite

Si l est la limite de f quand x tend vers x_0 à droite alors on note : $\boxed{\lim_{x\to {x_0}^+} f(x) = l}$

3- Limites de référence ou limites classiques

Soient a un nombre réel et n un entier naturel non nul

Indiquons le signe de x à gauche et à droite. Si $x = 0$ on a :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de x	(à gauche de 0) **−**	**+**	(à droite de 0)

• Si $a > 0$ alors $\boxed{\lim_{x\to 0^-} \frac{a}{x} = -\infty}$ • Si $a < 0$ alors $\boxed{\lim_{x\to 0^-} \frac{a}{x} = +\infty}$

• Si $a > 0$ alors $\boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{a}{x} = +\infty}$ • Si $a < 0$ alors $\boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{a}{x} = -\infty}$ • $\boxed{\lim_{x\to \pm\infty} \frac{a}{x} = 0}$

4- Formes indéterminées

On distingue quatre formes indéterminées qui sont : $\boxed{\frac{0}{0} \;;\; \frac{\infty}{\infty} \;;\; (0)(\pm\infty) \;;\; -\infty + \infty}$

5-Calculs acceptables : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\boxed{\frac{0}{\pm\infty} = 0}$; $\boxed{\frac{\pm\infty}{0} = \pm\infty}$; $\boxed{\frac{a}{\pm\infty} = 0}$; $\boxed{\frac{a}{0} = \pm\infty}$

$\boxed{(-\infty)(+\infty) = -\infty}$; $\boxed{(-\infty)(-\infty) = +\infty}$; $\boxed{-\infty - \infty = -\infty}$; $\boxed{+\infty + \infty = +\infty}$

Théorèmes

• Soient f, g et h trois fonctions numériques, a représente un nombre réel ou infini et l un nombre réel tel que : $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$. On a : $\boxed{\lim_{x\to a} g(x) \leqslant \lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} h(x)}$.

Si $\boxed{\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l}$ alors $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = l}$

• Soient f et g deux fonctions et l un nombre réel telles que : $|f(x) - l| \leqslant g(x)$
Si $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ alors $\lim_{x\to a} f(x) = l$

• Soient f et g deux fonctions telles que : $f(x) \leqslant g(x)$
Si $\lim_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

• Soient f et g deux fonctions telles que : $f(x) \geqslant g(x)$
Si $\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

III- ETUDE DES BRANCHES INFINIES

On désigne par f une fonction numérique, Ef l'ensemble de définition de f et $(\mathcal{C})$ sa courbe

représentative.
Soient x_0 et l deux nombres réels.

A) Asymptotes

1-Asymptote verticale

Si $\boxed{\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \pm\infty}$
alors la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote verticale à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $\pm\infty$.

2- Asymptote horizontale

Si $\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l}$
alors la droite d'équation $y = l$ est asymptote horizontale à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $\pm\infty$.

3- Asymptote oblique

Soit la droite d'équation $y = ax + b$ où a et b sont deux nombres réels.
Si $\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - y] = 0}$
alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $\pm\infty$.

Théorème

Soient $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ respectivement les courbes représentatives des fonctions f et$g$.
Les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont dite asymptotiques si et seulement si

$$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - g(x)] = 0} \quad \text{ou} \quad \boxed{\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1}$$

B) Les branches infinie

Soit f une fonction et $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f.
Si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ alors on calcule $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

1-Branche parabolique de direction (ox) ou d'axe des abscisses

Si $\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0}$
alors la courbe$(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction (oy) au voisinage de $\pm\infty$

2-Branche parabolique de direction (oy) ou d'axe des ordonnées

Si $\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty}$
alors la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction (oy) au voisinage de $\pm\infty$

3-Branche parabolique et asymptote oblique

Si $\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ alors on calcule $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax]$

a) Branche parabolique

Si $\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty}$
alors la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction de la droite d'équation $y = ax$ au voisinage de $\pm\infty$

b)Asymptote oblique

Si $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax]=b}$ avec $b\in\mathbb{R}$

alors la droite d'équation $y=ax+b$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $\pm\infty$

c) Branche asymptotique

Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax]$ n'admet pas de limite, alors la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche asymptotique de direction de la droite d'équation $y=ax$ au voisinage de $\pm\infty$

IV- CONTINUITE

1) Continuité d'une fonction en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant x_0 et l un nombre réel telle que $f(x_0)=l$

On dit que f est continue en x_0 si $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=l}$

2) Continuité d'une fonction sur un intervalle

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

On dit que la fonction f est continue sur I si elle est continue en tout point de I

2) Prolongement par continuité

Soit f une fonction non définie en x_0 et l un nombre réel tel que $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$

On appelle prolongement de f par continuité en x_0, toute fonction g définie par :

$$\boxed{\begin{cases}g(x)=f(x)\text{ , si } x\in Ef\\ g(x_0)=l\end{cases}}$$

.

3) Image d'un intervalle par une fonction continue et monotone

Soit f une fonction continue et monotone.

- L'image d'un intervalle $I=[a;b]$ par f est l'intervalle $[f(a);f(b)]$;
- L'image d'un intervalle $I=]a;b[$ par f est l'intervalle $]\lim\limits_{x\to a^+}f(x);\lim\limits_{x\to b^-}f(x)[$;
- L'image d'un intervalle $I=[a;b[$ par f est l'intervalle $[f(a);\lim\limits_{x\to b^-}f(x)[$;
- L'image d'un intervalle $I=]a;b]$ par f est l'intervalle $]\lim\limits_{x\to a^+}f(x);f(a)]$;

Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est une fonction continue sur et strictement monotone sur un intervalle I contenant a et b $(a<b)$ de plus $f(a)\times f(b)<0$ alors il existe un nombre réel $\alpha\in[a\,;\,b]$ tel que l'équation $f(x)=0$ ou $f(\alpha)=0$.

V- DERIVATION

1- Dérivabilité d'une fonction en un point x_0

Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant x_0.

f est dérivable en x_0 si et seulement si $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l}$

Le nombre réel l est appelé le nombre dérivé de f en x_0 et se noté : $\underline{f'(x_0)=l}$.

2- Dérivabilité de f à gauche de x_0

f est dérivable à gauche en x_0 si et seulement si $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l_1}$

Le nombre réel l_1 est appelé le nombre dérivé à gauche en x_0 de f et se noté : $\underline{f'_g(x_0)=l_1}$.

3- Dérivabilité de f à droite de x_0

f est dérivable à droite en x_0 si et seulement si $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l_2}$

Le nombre réel l_2 est appelé le nombre dérivé à gauche en x_0 de f et se noté : $\underline{f'_d(x_0) = l_2}$.

Propriété

• f est dérivable en x_0 si et seulement si $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)}$.

• Si f est dérivable en x_0 alors $\boxed{EDf = ECf = Ef}$.

• Si une fonction f est dérivable sur un intervalle, alors elle est continue sur cet intervalle.

4- Interprétation géométrique (graphique) du nombre dérivé

• Si $\boxed{f'_g(x_0) = \pm\infty\,;\, f'_d(x_0) = \pm\infty}$ alors le point $M\,(x_0; f(x_0))$ est un point de rebroussement. En ce point la courbe $(\mathcal{C})$ de f admet une demi-tangente verticale.

• Si $\boxed{f'_g(x_0) = \pm\infty\,;\, f'_d(x_0) = 0}$ alors le point $M\,(x_0; f(x_0))$ est un point anguleux qui se comporte comme un point de rebroussement. En ce point la courbe $(\mathcal{C})$ de f admet deux demi-tangentes l'une verticale à gauche et l'autre horizontale à droite.

• Si $\boxed{f'_g(x_0) = l_1\,;\, f'_d(x_0) = l_2}$ où $l_1 \neq l_2$ et $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, alors le point $M\,(x_0; f(x_0))$ est un point anguleux. En ce point la courbe $(\mathcal{C})$ de f admet deux demi-tangentes obliques.

• Si $\boxed{f'_g(x_0) = l_1\,;\, f'_d(x_0) = 0}$ où $l_1 \in \mathbb{R}$, alors le point $M\,(x_0; f(x_0))$ est un point anguleux. En ce point la courbe $(\mathcal{C})$ de f admet deux demi-tangentes l'une obliques à gauche et l'autre horizontale à droite.

5- Fonctions dérivées

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

On appelle fonction dérivée de f, la fonction notée f'.

Tableau récapitulatif de calcul des fonctions dérivées

Soient U et V deux fonctions dérivables, a est une constante et n un nombre réel non nul.

Fonctions	Dérivées
$f(x) = a$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$
$f(x) = u^n$	$f'(x) = nu'u^{n-1}$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = u + v$	$f'(x) = u' + v'$
$f(x) = uv$	$f'(x) = u'v + v'u$
$f(x) = \dfrac{u}{v}$	$f'(x) = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$
$f(x) = \sqrt{u}$	$f'(x) = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \dfrac{1}{u}$	$f'(x) = -\dfrac{u'}{u^2}$

Fonctions	Dérivées
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos u$	$f'(x) = -u' \sin u$
$f(x) = \sin u$	$f'(x) = u' \cos u$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \tan u$	$f'(x) = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$f(x) = co\tan x$	$f'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$f(x) = co\tan u$	$f'(x) = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$

Equation de la tangente en x_0

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.
L'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ en x_0 est déterminer par la formule
(T) : $\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$

Théorème des accroissements finis

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $]a; b[$

- S'il existe un nombre réel k tel que pour tout $x \in [a; b]$, $|f'(x)| \leqslant k$

alors pour tout $\alpha \in [a; b]$, $\boxed{|f(x) - f(\alpha)| \leqslant k|x - \alpha|}$

- S'il existe deux nombres m et M tels que pour tout $x \in [a; b]$, $m \leqslant f'(x) \leqslant M$

alors $\boxed{m \leqslant \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leqslant M}$

Théorème de Rôle

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $]a; b[$

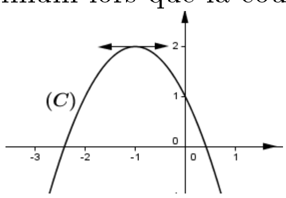
Si $f(a) = f(b)$ alors il existe au moins un nombre réel $\alpha \in [a; b]$ tel que $\boxed{f'(\alpha) = 0}$

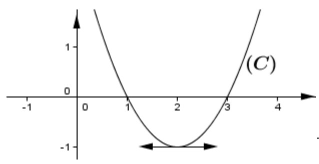
Extremum

On dit que la fonction f admet un extremum égal à b au point $x = a$
si et seulement si $\boxed{f(a) = b \text{ et } f'(a) = 0}$

NB : Un extremum peut être un maximum ou un minimum.

- Il est un maximum lors que la courbe passe en dessous de l'extremum ;
- Il est un minimum lors que la courbe passe au dessus de l'extremum.

Un maximum 



Un minimum

Point d'inflexion

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f.

- On dit que $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion en un point x_0 lors que la dérivée première f' de f s'annule sans changée de signe en x_0.
- On dit que $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion en un point x_0 lors que la dérivée seconde f'' de f s'annule en changeant de signe en x_0.

N.B : En un point d'inflexion la tangente coupe la courbe.

Fonction bijective et bijection réciproque

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f est bijective (ou f réalise une bijection) de l'intervalle I vers l'intervalle $f(I)$.
Ainsi f admet une bijection réciproque, notée f^{-1} qui aussi bijective de l'intervalle $f(I)$ vers l'intervalle I ; continue, monotone et de même sens de variation que f.

Détermination de la réciproque d'une fonction

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x.

- $\boxed{f^{-1}[f(x)] = x}$ • $\boxed{f[f^{-1}(x)] = x}$ • $f(x) = y \Rightarrow x = f^{-1}(y)$

- Pour expliciter la réciproque de $f(x)$ notée $f^{-1}(x)$, on pose $f(x) = y$ et on déduit l'expression de x en fonction de y.

Ainsi $f^{-1}(x)$ est égale à l'expression déduite de x en fonction de y.

Exemple : On donne $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

Explicitons $f^{-1}(x)$ puis calculons $f^{-1}(3)$: Posons $f(x) = y \Rightarrow \dfrac{2x+1}{x-1} = y \Rightarrow 2x+1 = xy-y$
$2x - xy = -y - 1 \Rightarrow x(2-y) = -y-1 \Rightarrow x = \dfrac{-y-1}{2-y} = \dfrac{-(y+1)}{-(y-2)} \Rightarrow x = \dfrac{y+1}{y-2}$.

Donc $\boxed{f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x-2}}$

• **Calcul de $f^{-1}(x_0)$ sans expliciter $f^{-1}(x)$**

Pour calculer $f^{-1}(x_0)$ sans expliciter $f^{-1}(x)$, on résout l'équation $f(x) = x_0$. Ainsi $f^{-1}(x_0)$ est égale à la valeur de x trouvée.

Exemple : On donne $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

Calculons $f^{-1}(3)$ sans expliciter $f^{-1}(x)$

Posons $f(x) = 3 \Rightarrow \dfrac{2x+1}{x-1} = 3 \Rightarrow 2x+1 = 3x-3 \Rightarrow 2x-3x = -3-1 \Rightarrow -x = -4 \Rightarrow x = 4$.

Donc $\boxed{f^{-1}(3) = 4}$

Dérivée de la réciproque d'une fonction

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x, continue et monotone sur un intervalle I.

La dérivée de la réciproque de la fonction f est calculer par la formule $\boxed{(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'[f^{-1}(x)]}}$

VI- POSITIONS D'UNE COURBE

1- Position d'une courbe par rapport à une droite

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f et (D) la droite d'équation $y = ax + b$

Etudier la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite (D) revient à étudier le signe de la fonction $\boxed{f(x) - y}$

• Si $\boxed{f(x) - y > 0}$ alors la courbe $(\mathcal{C})$ est au dessus de la droite (D)

• Si $\boxed{f(x) - y < 0}$ alors la courbe $(\mathcal{C})$ est en dessous de la droite (D)

2- Position relative de deux courbes

Soient $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ respectivement les courbes représentatives des fonction f et g.

Etudier la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la courbe $(\mathcal{C}')$ revient à étudier le signe de la fonction $\boxed{f(x) - g(x)}$

• Si $\boxed{f(x) - g(x) > 0}$ alors la courbe $(\mathcal{C})$ est au dessus de la courbe $(\mathcal{C}')$

• Si $\boxed{f(x) - g(x) < 0}$ alors la courbe $(\mathcal{C})$ est en dessous de la courbe $(\mathcal{C}')$

• Si $\boxed{f(x) = -g(x)}$ alors les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses

3- Points d'intersections d'une courbes par rapport aux axes du repère

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

a) Points d'intersections avec l'axe des abscisses

La courbe $(\mathcal{C})$ traverse l'axe des abscisses (ox) lorsque la fonction $f(x)$ change de signe dans un intervalle. Dans ce cas on résout l'équation $f(x) = 0$

En résolvant l'équation $f(x) = 0$, si on trouve $x = a$ ou $x = b$ avec $(a;b) \in \mathbb{R}^2$
alors $\boxed{(\mathcal{C}) \bigcap (ox) = \{A(a\,;\,0)\,;\,B(b\,;\,0)\}}$

b) Point d'intersection avec l'axe des ordonnées
La courbe $(\mathcal{C})$ traverse l'axe des ordonnées (oy) lorsque zéro (0) appartient à l'ensemble de définition Ef de f. Dans ce cas on calcule $f(0)$. Si $f(0) = a$ avec $a \in \mathbb{R}$, alors $\boxed{(\mathcal{C}) \bigcap (oy) = \{A(0\,;\, a)\}}$

c) Points d'intersections de deux courbes
Soient $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ respectivement les courbes représentatives des fonction f et g.
Pour déterminer les points d'intersections des courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$, on résout l'équation :
$\boxed{f(x) = g(x)}$

VII- ETUDE DES FONCTIONS CIRCULAIRES OU TRIGONOMETRIQUES

1) Définition :
On appelle fonction circulaire toute fonction numérique qui contient au moins une ligne trigonométrique
(sin, cos, tan et $co\tan$).

2) Plan d'étude
Le plan d'étude d'une fonction circulaire est identique à celui de n'importe autre fonction. Toute fois en étudiant la périodicité juste après avoir donner l'ensemble de définition.

3) Enseble de définition
Les fonctions de la forme $\sin(ax + b)$ et $\cos(ax + b)$ se comportent comme des fonctions polynômes, elles sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

4) Périodicité
a) Le but de la périodicité est de réduire l'intervalle d'étude de la fonction.
b) Une fonction numérique f est périodique de période T $(T > 0)$,
si pour tout $x \in Ef$, $\boxed{f(x + T) = f(x)}$
• Dans ce cas on peut étudier la fonction f sur l'intervalle de longueur T
c-à-d sur l'intervalle $\boxed{[-\frac{T}{2}\ ;\ \frac{T}{2}]}$ ou $\boxed{[0\ ;\ T]}$ ou encore $\boxed{[-T\ ;\ 0]}$
• Si la fonction est paire ou impaire alors on peut l'étudier sur l'intervalle $\boxed{[0\ ;\ \frac{T}{2}]}$
c) Pour déduire son étude sur tout son ensemble de définition, on effectue des translations successives de vecteur $(kT)\vec{i}$ où $k \in \mathbb{Z}$

5) Calcul de la période

.

Fonctions	Périodes
$f(x) = \cos(ax + b)$ $f(x) = \sin(ax + b)$	$T = \dfrac{2\pi}{\lvert a\rvert}$
$f(x) = \tan(ax + b)$ $f(x) = co\tan(ax + b)$	$T = \dfrac{\pi}{\lvert a\rvert}$

6)Limites classiques

$\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{x} = a}$ $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1}$ $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos ax - 1}{x} = 0}$ $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0}$

$\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin ax} = \dfrac{1}{a}}$ $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1}$ $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos ax}{x^2} = \dfrac{a^2}{2}}$ $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}}$

7)Equations trigonométriques

$\boxed{\cos a = 0 \Rightarrow a = \frac{\pi}{2} + k\pi}$, $(k \in \mathbb{Z})$ $\boxed{\sin a = 0 \Rightarrow a = k\pi}$, $(k \in \mathbb{Z})$

$\boxed{\cos a = 1 \Rightarrow a = 2k\pi}$, $(k \in \mathbb{Z})$ $\boxed{\sin a = 1 \Rightarrow a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$, $(k \in \mathbb{Z})$

$\boxed{\cos a = -1 \Rightarrow a = \pi + 2k\pi}$ $(k \in \mathbb{Z})$ $\boxed{\sin a = -1 \Rightarrow a = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$, $(k \in \mathbb{Z})$

$\boxed{\cos a = \cos b \Rightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi \\ a = -b + 2k\pi \end{cases}}$, $\boxed{\sin a = \sin b \Rightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi \\ a = \pi - b + 2k\pi \end{cases}}$, $(k \in \mathbb{Z})$

FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

1) Définition :

On appelle fonction logarithme népérien d'une variable réelle x a fonction notée $\ln x$, la primitive de la fonction $\dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$, qui prend la valeur 0 en 1.

2) Propriétés

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{Z}$ et $\alpha \in \mathbb{Q}$

$\boxed{\ln 1 = 0}$; $\boxed{\ln e = 1}$; $\boxed{\ln(ab) = \ln a + \ln b}$; $\boxed{\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b}$; $\boxed{\ln(\frac{1}{b}) = -\ln b}$

$\boxed{\ln a^n = n \ln a}$; $\boxed{\ln a^\alpha = \alpha \ln a}$; Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\ln x^n = n \ln |x|}$

3)Conditions d'existences

Soit u une fonction numérique

Fonctions	Conditions d'existences
$f(x) = \ln u$	f est définie si $u > 0$
$f(x) = \ln \lvert u \rvert$	f est définie si $u \neq 0$
$f(x) = \dfrac{1}{\ln u}$	f est définie si $\begin{cases} u > 0 \\ \ln u \neq 0 \end{cases}$
$f(x) = \dfrac{1}{u \ln u}$	f est définie si $\begin{cases} u > 0 \\ u \ln u \neq 0 \end{cases}$

4)Limites de référence ou limites classiques

$\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty}$; $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0}$; $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha \ln x = 0}$ $\alpha > 0$; $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} |x|^\alpha \ln x = 0}$;$\alpha > 0$

$\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1 + ax)}{x} = a}$; $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1}$; $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty}$; $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0}$

$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0}$; $\alpha > 0$; $\boxed{\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1} = 1}$

5) Fonctions dérivées et fonctions primitives

Soient u une fonction numérique, a et b deux nombres réels et c une constante

Fonctions	Dérivées
$f(x) = \ln u$	$f'(x) = \dfrac{u'}{u}$
$f(x) = \ln \lvert u \rvert$	$f'(x) = \dfrac{u'}{u}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$

Fonctions	Primitives
$\dfrac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert + c$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln \lvert u \rvert + c$
$\dfrac{1}{ax + b}$	$\dfrac{1}{a} \ln \lvert ax + b \rvert + c$
$\dfrac{1}{x + b}$	$\ln \lvert x + b \rvert + c$
$\ln x$	$-x + x \ln x + c$

EXERCICE : Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln x$
Etudier et représenter graphiquement la courbe de f dans le repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

6) FONCTION LOGARITHME DECIMAL
a) Définition On appelle fonction logarithme décimal de la variable réelle x, la fonction notée $\log x$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $\boxed{\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}}$

b) Fonction dérivée
Soit $f(x) = \log x \Rightarrow f(x) = \left(\dfrac{1}{\ln 10}\right)\ln x \Rightarrow f'(x) = \left(\dfrac{1}{\ln 10}\right)\left(\dfrac{1}{x}\right) \Rightarrow \boxed{f'(x) = \dfrac{1}{x\ln 10}}$

7)FONCTION LOGARITHME DE BASE a
a) Définition On appelle fonction logarithme de base a de la variable réelle x, la fonction notée $\log_a(x)$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $\boxed{\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}}$

Propriété : Pour tous éléments a, b de $]0\,;+\infty[$: $\boxed{\log_b(a) = \dfrac{1}{\log_a(b)}}$

b) Fonction dérivée
Soit $f(x) = \log_a(x) \Rightarrow f(x) = \left(\dfrac{1}{\ln a}\right)\ln x \Rightarrow f'(x) = \left(\dfrac{1}{\ln a}\right)\left(\dfrac{1}{x}\right) \Rightarrow \boxed{f'(x) = \dfrac{1}{x\ln a}}$

FONCTIONS EXPONENTIELLE NEPERIENNE

1) Définition :
On appelle fonction exponentielle de base e de la variable réelle x la fonction notée e^x ou exp(x), la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien de x définie sur $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$.

2) Propriétés : Pour tous $m, n, x, y \in \mathbb{R}$
$\boxed{e^m e^n = e^{m+n}}$; $\boxed{(e^m)^n = e^{m\times n}}$; $\boxed{\dfrac{e^m}{e^n} = e^{m-n}}$; $\boxed{e^{-n} = \dfrac{1}{e^n}}$; $\boxed{e^m = e^n \Rightarrow m = n}$
$\boxed{\ln e^x = x}$; $\boxed{e^x = y \Rightarrow x = \ln y}$; $\boxed{e^{\ln x} = x}$; $\boxed{\ln x = y \Rightarrow x = e^y}$
$\boxed{e^m \geqslant e^n \Rightarrow m \geqslant n}$; $\boxed{e^m \leqslant e^n \Rightarrow m \leqslant n}$

3) Ensemble de définition
Soient f et g deux fonctions numériques de la variable réelle x telle que : $f(x) = e^{g(x)}$.
L'ensemble de définition de la fonction f est le même que celui de la fonction g.

4) Limites de référence ou limites classiques
$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0}$; $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty}$; $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} x^\alpha e^x = 0}$, $\alpha > 0$; $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0}$
$\boxed{\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{ax}-1}{x} = a}$; $\boxed{\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1}$; $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty}$, $\alpha > 0$; $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty}$

5) Croissance comparées
La fonction exponentielle croit vite que la fonction polynôme, et la fonction polynôme croit vite que la fonction logarithme. Ainsi : Pour tout nombre réel $\alpha > 0$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0}$; $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} (x^\alpha - \ln x) = +\infty}$; $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^x} = 0}$; $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - x^\alpha) = +\infty}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{e^x} = 0}$; $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - \ln x) = +\infty}$; $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \ln x = 0}$; $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^\alpha e^x = 0}$

6) <u>Fonctions dérivées et fonctions primitives</u>

Soient u une fonction numérique, a et b deux nombres réels et c une constante.

Fonctions	Dérivées
$f(x) = e^u$	$f'(x) = u'e^u$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = e^{-x}$	$f'(x) = -e^{-x}$

Fonctions f	Primitives F
$f(x) = u'e^u$	$F(x) = e^u + c$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c$
$f(x) = e^{ax+b}$	$F(x) = \dfrac{1}{a}e^{ax+b} + c$
$f(x) = e^{-x}$	$F(x) = -e^{-x} + c$

<u>EXERCICE</u> : Soit f la fonction définie par $f(x) = e^x$

Etudier et représenter graphiquement la courbe de f dans le repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

7- <u>FONCTIONS EXPONENTIELLE DE BASE a OU FONCTION PUISSANCE</u>

a)<u>Définition</u> :

On appelle fonction exponentielle de base a ou fonction puissance de la variable réelle x, la fonction notée a^x, définie sur $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$ par : $\boxed{a^x = e^{x\ln x}}$ avec $a > 0$ et $a \neq 1$

b)<u>Limites de référence ou limites classiques</u>

Pour $0 < a < 1$: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0}$

Pour $a > 1$: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty}$

PRIMITIVE ET INTEGRALE

I- <u>PRIMITIVE D'UNE FONCTION</u>

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

1) <u>Définition</u> :

On appelle primitive de f sur I toute fonction F de I vers $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$, $\boxed{F'(x) = f(x)}$.

2) <u>Propriétés</u> :

◦ Si f est une fonction continue sur I alors f admet une primitive sur I.

◦ f admet une primitive F sur I alors toute primitive de f sur I est de la forme : $\boxed{f(x) = F(x) + c}$ où c est une constante.

◦ On note $\boxed{F(x) = \int f(x)dx}$

3) Tableau des primitives usuelles

Soient u une fonction dérivable sur I, et n deux nombres réels ($n \neq -1$).
a, b et c sont des constantes.

Fonctions f	Primitives F
$f(x) = a$	$F(x) = ax + c$
$f(x) = x$	$F(x) = \dfrac{x^2}{2} + c$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$f(x) = u'u^n$	$F(x) = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c$
$f(x) = (ax+b)^n$	$F(x) = \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$	$F(x) = \dfrac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$
$f(x) = \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$F(x) = 2\sqrt{u} + c$
$f(x) = \dfrac{u'}{u^2}$	$F(x) = -\dfrac{1}{u} + c$

Fonctions f	Primitives F
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$F(x) = -\dfrac{1}{x} + c$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + c$
$f(x) = u' \cos u$	$F(x) = \sin u + c$
$f(x) = u' \sin u$	$F(x) = -\cos u + c$
$f(x) = \cos(ax+b)$	$F(x) = \dfrac{1}{a}\sin(ax+b) + c$
$f(x) = \sin(ax+b)$	$F(x) = -\dfrac{1}{a}\cos(ax+b) + c$
$f(x) = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$	$F(x) = \tan u + c$
$f(x) = \dfrac{u'}{\sin^2 u}$	$F(x) = -co\tan u + c$
$f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x + c$
$f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = -co\tan x + c$

II- CALCUL INTEGRAL

1) Définition :

Soient f une fonction continue sur un intervalle I, et a et b deux éléments de I.
On appelle intégrale de a à b de f, le nombre réel $F(b) - F(a)$. F est une primitive de f sur I.

On note : $\boxed{\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$

2)Propriétés :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, et a, b et c trois éléments de I.

a) $\boxed{\int_a^a f(x)dx = 0}$ b) $\boxed{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx}$ c) $\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$

d) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\boxed{\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx}$

e) $\boxed{\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx}$; Si $f(x) \leqslant g(x) \Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx}$

f) Si f est paire, $\boxed{\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx}$ g) Si f est impaire, $\boxed{\int_{-a}^a f(x)dx = 0}$

3) Intégration directe

Si F est une primitive de f sur l'intervalle I contenant a et b alors :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

4) Intégration par parties

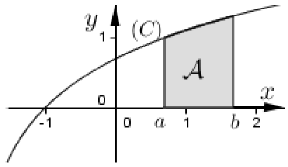
Soient u, v, u' et v' quatre fonctions continues sur $[a;b]$. Où u' et v' sont les dérivées de u et v.

On a : $\boxed{\int_a^b (uv')dx = [uv]_a^b - \int_a^b (u'v)dx}$ $\boxed{\int_a^b (u'v)dx = [uv]_a^b - \int_a^b (uv')dx}$

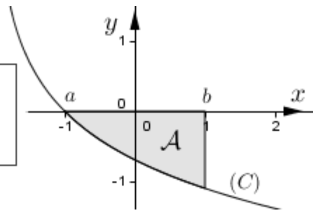
5) CALCUL D'AIRE

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ de courbe représentative respective (C) et (C') dans un repère orthonormé (O $\vec{i},\vec{j}$). Soit (d) la droite d'équation $y = ax + b$

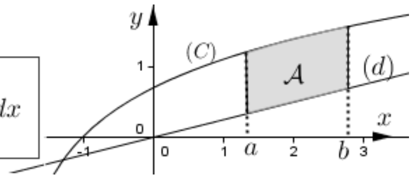
a) L'aire $\mathcal{A}$ du domaine du plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est telle que : $\boxed{\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx}$



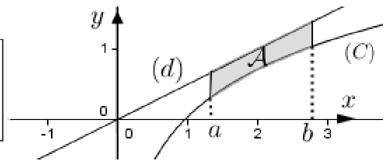
b) L'aire $\mathcal{A}$ du domaine du plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est telle que : $\boxed{\mathcal{A} = -\int_a^b f(x)dx}$



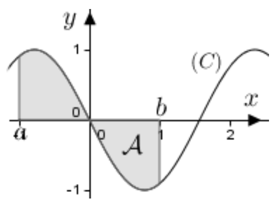
c) L'aire $\mathcal{A}$ du domaine du plan limité par la courbe (C), la droite (d) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est telle que : $\boxed{\mathcal{A} = \int_a^b [f(x) - y]dx}$



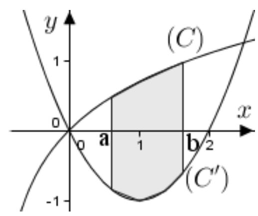
d) L'aire $\mathcal{A}$ du domaine du plan limité par la courbe (C), la droite (d) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est telle que : $\boxed{\mathcal{A} = \int_a^b [y - f(x)]dx}$



e) L'aire $\mathcal{A}$ du domaine du plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est telle que : $\boxed{\mathcal{A} = \int_a^0 f(x)dx - \int_0^b f(x)dx}$



e) L'aire $\mathcal{A}$ du domaine du plan limité par la courbe (C), la courbe (C') et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est telle que : $\boxed{\mathcal{A} = \int_a^b [\mathbf{f(x) - g(x)}]\mathbf{dx}}$



Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I avec $a < b$
si m et M sont deux nombres réels tels que pour tout $x \in [a\,;\,b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$,

alors $\boxed{m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a)}$

Valeur moyenne d'une fonction

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$, $a \neq b$

On appelle valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$, le nombre réel m tel que : $\boxed{m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$