CENTRE D'ENCADREMENT SCOLAIRE LES MAJORANTS

34, Rue NKENI Talangaï (Arrêt Libanga)
Cours de Mr. Teddy Fiacre MOBEMOUANA M
Tél : 06 959 57 86/05 592 21 90/01 130 18 80

HOMOTHETIES ET AFFINITES

I-HOMOTHETIES

Soit f une application du plan dans lui-même et $k$un nombre réel différent de 0 et de 1.

1) Définition :

On appelle homothétie de rapport k toute application h du plan dans lui-même qui à tous points M et N associe les points M' et N' tels que $\boxed{\begin{cases} h(M) = M' \\ h(N) = N' \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}}$

2)Eléments caractéristiques :

Les éléments caractéristiques d'une homothéties sont : le centre et le rapport

a)Le centre : Le centre est le point invariant de l'homothétie.

Soit Ω le centre de l'homothétie h, on a : $\begin{cases} h(M) = M' \\ h(N) = N' \end{cases} \Rightarrow \boxed{(MM') \cap (NN') = \{\Omega\}}$

b)Le rapport : Soit k le centre de l'homothétie h, on a : $\begin{cases} h(M) = M' \\ h(N) = N' \end{cases} \Rightarrow \boxed{k = \frac{\overrightarrow{M'N'}}{\overrightarrow{MN}}}$

3)Existence d'une homothétie :

Pur montrer qu'il existe une homothétie h qui transforme M en M' et N en N', il suffit de constater que les droites (MN) et $(M'N')$ ne sont pas parallèles et que $k = \frac{\overrightarrow{M'N'}}{\overrightarrow{MN}} \neq 1$

4)Expression analytique

Soit $h(\Omega\,,\,k)$ l'homothétie de centre Ω et de rapport k qui transforme M en M'
avec $M(x;y)$, $M'(x';y')$ et $\Omega(x_0;y_0)$

$$\begin{cases} h(\Omega) = \Omega \\ h(M) = M' \end{cases} \Longleftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' - x_0 \\ y' - y_0 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases}}$$

5)La réciproque d'une homothétie

Soit $h(\Omega\,;k)$ l'homothétie de centre Ω et de rapport k.

La réciproque de $h(\Omega\,;k)$ est une homothétie notée h^{-1} telle que $h^{-1}(\Omega\,;\frac{1}{k})$

Remarque

Soit $h(\Omega\,;k)$ l'homothétie de centre Ω et de rapport k.
- Si $k = 1$ alors h est une identité du plan : $h(\Omega\,;k) = Id_{\mathcal{P}}$
- Si $k = -1$ alors h est la symétrie centrale de centre Ω : $h(\Omega\,;k) = S_\Omega$

6)La composée de deux homothéties de même centre

Soient h et h' deux homothéties de même centre Ω et de rapport respectifs k et k'.
La composée de h et h' est une homothétie de centre Ω et de rapport kk'

$\boxed{h(\Omega\,;k) \circ h'(\Omega\,;k') = h(\Omega\,;k \times k')}$

- Si $kk' = 1$ alors h est une identité du plan : $h(\Omega\,;k) = Id_{\mathcal{P}}$
- Si $kk' = -1$ alors h est la symétrie centrale de centre Ω : $h(\Omega\,;k) = S_\Omega$

7)La composée de deux homothéties de centre distinct

Soient h_1 et h_2 deux homothéties respectivement de centre A et B, et de rapport k et k'.
La composée de h_1 et h_2 est une homothétie de centre Ω et de rapport kk'
. $\boxed{h_2(B\,;k')\circ h_1(A\,;k)=h(\Omega\,;kk')}$

On distingue deux cas possibles :
Premier cas : Si $kk'=1$ et $h(B\,;k')\circ h(A\,;k)(M)=M'$ alors $\boxed{h'(B\,;k')\circ h(A\,;k)=t_{\overrightarrow{MM'}}}$
Le vecteur de cette translation est déterminé par la formule : $\boxed{\overrightarrow{U}=(1-k)\overrightarrow{AB}}$. Où $\overrightarrow{U}=\overrightarrow{MM'}$

Démonstration
Soient les points M, M_1 et M' tels que :
$h_2(B\,;k')\circ h_1(A\,;k)(M)=M'$ soit $h_1(A\,;k)(M)=M_1$ et $h_2(B\,;k')(M_1)=M'$

$h_1(A\,;k)(M)=M_1 \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM_1}=k\overrightarrow{AM}$ et $h_2(B\,;k')(M_1)=M' \Longleftrightarrow \overrightarrow{BM'}=k'\overrightarrow{BM_1}$
On a : $\begin{cases}\overrightarrow{AM_1}=k\overrightarrow{AM} & (1)\\ \overrightarrow{BM'}=k'\overrightarrow{BM_1} & (2)\end{cases}$
Fixons A dans (2) : $\overrightarrow{BM'}=k'\overrightarrow{BM_1}\Rightarrow \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM'}=k'\overrightarrow{BA}+k'\overrightarrow{AM_1}$
Remplaçons (1) dans (2) : $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM'}=k'\overrightarrow{BA}+kk'\overrightarrow{AM}$ or $kk'=1$
$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM'}=k'\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}\Rightarrow \overrightarrow{BA}-k'\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AM'}+\overrightarrow{AM}\Rightarrow (1-k')\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{M'A}+\overrightarrow{AM}$
$(1-k')\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{M'M}\Rightarrow (1-k')\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MM'}\Rightarrow \overrightarrow{MM'}=(1-k')\overrightarrow{AB}$ or $\overrightarrow{U}=\overrightarrow{MM'}$
D'où $\boxed{\overrightarrow{U}=(1-k)\overrightarrow{AB}}$

Deuxième cas : Si $kk'\neq 1$
alors h est une homothétie de centre Ω et de rapport kk' : $\boxed{h_2(B\,;k')\circ h_1(A\,;k)=h(\Omega\,;kk')}$
Le centre Ω de h se construit par la formule : $\boxed{\overrightarrow{A\Omega}=\left(\dfrac{1-k'}{1-kk'}\right)\overrightarrow{AB}}$

Démonstration
Soient les points M, M_1 et M' tels que : $h_2(B\,;k')\circ h_1(A\,;k)(M)=M'$
$h(\Omega\,;kk')(M)=M' \Longleftrightarrow \underline{\overrightarrow{\Omega M'}=kk'\overrightarrow{\Omega M}}$
Soit $h_1(A\,;k)(M)=M_1$ et $h_2(B\,;k')(M_1)=M'$

$h_1(A\,;k)(M)=M_1 \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM_1}=k\overrightarrow{AM}$ et $h_2(B\,;k')(M_1)=M' \Longleftrightarrow \overrightarrow{BM'}=k'\overrightarrow{BM_1}$
On a : $\begin{cases}\overrightarrow{AM_1}=k\overrightarrow{AM} & (1)\\ \overrightarrow{BM'}=k'\overrightarrow{BM_1} & (2)\end{cases}$
Fixons A dans (2) : $\overrightarrow{BM'}=k'\overrightarrow{BM_1}\Rightarrow \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM'}=k'\overrightarrow{BA}+k'\overrightarrow{AM_1}$
Remplaçons (1) dans (2) : $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM'}=k'\overrightarrow{BA}+kk'\overrightarrow{AM}\Rightarrow \overrightarrow{AM'}-kk'\overrightarrow{AM}=k'\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BA}$
Fixons Ω dans $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM'}$
$\overrightarrow{A\Omega}+\overrightarrow{\Omega M'}-kk'\overrightarrow{A\Omega}-kk'\overrightarrow{\Omega M}=(k'-1)\overrightarrow{BA}$ or $\overrightarrow{\Omega M'}=kk'\overrightarrow{\Omega M}$
$\overrightarrow{A\Omega}+kk'\overrightarrow{\Omega M}-kk'\overrightarrow{A\Omega}-kk'\overrightarrow{\Omega M}=(k'-1)\overrightarrow{BA}\Rightarrow (1-kk')\overrightarrow{A\Omega}=(1-k')\overrightarrow{AB}$
D'où $\boxed{\overrightarrow{A\Omega}=\left(\dfrac{1-k'}{1-kk'}\right)\overrightarrow{AB}}$

Remarque
Si $kk'\neq 1$ et $h(A\,;k)\circ h'(B\,;k')(M)=M'$ alors alors $\boxed{\Omega=(AB)\cap(MM')}$

II-AFFINITES DU PLAN

Soit $(\mathcal{D})$ une droite, Δ une direction de droite distincte de celle de $(\mathcal{D})$ et k un nombre réel.

1) Définition :

On appelle affinité d'axe $(\mathcal{D})$ de direction Δ et de rapport k, l'application f qui à tout point M du plan associe le point M' tel que : $f_{(\mathcal{D},\Delta,k)}(M) = M' \Longleftrightarrow \boxed{\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}}$
où H est le projeté de M sur la droite $(\mathcal{D})$ suivant la direction Δ.

Remarque

Lorsque la direction Δ est orthogonale à l'axe $(\mathcal{D})$ de l'affinité f alors f est l'affinité orthogonale d'axe $(\mathcal{D})$ et de rapport k.

- Si $k = 0$ alors f est la projection sur $(\mathcal{D})$ suivant la direction Δ.
- Si $k = 1$ alors f est l'application identique du plan
- Si $k = -1$ et si la direction Δ est orthogonale à l'axe $(\mathcal{D})$ alors f est la réflexion d'axe $(\mathcal{D})$.
- L'ensemble des points invariant d'une affinité est son axe.

2) Expression analytique :

Dans le repère orthonormé $(o\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,)$

f est une affinité orthogonale d'axe $(o\,\overrightarrow{i}\,)$(l'axe des abscisses) et de rapport k.

avec $(\mathcal{D}) = (o\,\overrightarrow{i}\,)$, $M(x\,,\,y)$, $M'(x'\,,y')$ et $H(x_H\,,\,y_H)$

H étant le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses : $H \in (o\,\overrightarrow{i}\,) \Rightarrow x_H = x$ et $y_H = 0$

$$f(M) = M' \Longleftrightarrow \overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' - x_H \\ y' - y_H \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x - x_H \\ y - y_H \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' - x_H = k(x - x_H) \\ y' - y_H = k(y - y_H) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' - x = k(x - x) \\ y' - 0 = k(y - 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' - x = 0 \\ y' = ky \end{cases} \Rightarrow \boxed{f\ :\ \begin{cases} x' = x \\ y' = ky \end{cases}} \quad \text{et} \quad \boxed{f^{-1}\ :\ \begin{cases} x = x' \\ y = \dfrac{1}{k}y' \end{cases}}$$

Remarques

- Tout point situé sur l'axe des abscisses a pour ordonnée zéro (0)
- Tout point situé sur l'axe des ordonnées a pour abscisse zéro (0).

EXERCICE 1 :

Dans le plan orienté, ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de coté 6 cm.
On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.

1- Faire la figure. On tracera BC horizontalement.

2- Montrer que les points B, C, I et K sont cocycliques. Tracer leur cercle de cocyclicité.

3- Soit (E) l'ensemble des points points M du plan tels que : $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

a) Déterminer et construire l'ensemble (E)

b) Montrer que A appartient à l'ensemble (E).

4- Soit G l'isobarycentre des points A, B et C c'est-à-dire que : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{IC}$

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation du plan qui permet d'obtenir le point G à partir du point C.

5- Soit h l'application du plan qui à tout point M associe le point M' tels que :
. $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

Démontrer que h est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

6- Soit h et h' les homothétie de centre et de rapport respectifs I et G , $\dfrac{1}{3}$ et -2

On considère l'application f telles que : $f = h\left(I\,,\dfrac{1}{3}\right) \circ h(G\,,-2)$

a) Donner la nature de f

b) Montrer que le centre O de f est le barycentre des points G et I affectés des coefficients respectifs a et b dont on précisera.

c) Construire le centre O de f.

EXERCICE 2 :

Soit $ABCD$ un carré de sens direct et de centre O. I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$et $[BC]$.

1- Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de la similitude plane directe f de centre A qui transforme I en D.

2- Soit g l'application définie par : $g = h(B\,;\,2) \circ R(O\,;\,\frac{\pi}{2})$

a) Donner la nature de g.

b) Déterminer les images des points O et A par g.

c) Déterminer et construire le centre Ω de g.

3- On considère l'application $\varphi = h(O\,;\,\frac{1}{2}) \circ S_{BC}$.

a) Donner la nature de l'application φ.

b) Déterminer et construire le centre Ω_1 et l'axe (Δ) de φ.