CENTRE D'ENCADREMENT SCOLAIRE LES MAJORANTS

34, Rue NKENI Talangaï (Arrêt Libanga)

Cours de Mr. Teddy Fiacre MOBEMOUANA M

Tél : 06 959 57 86/05 592 21 90

ISOMETRIES DU PLAN

Définition :

On appelle isométrie du plan, toute application du plan qui conserve les distances et l'aire

Propriéte :

Soit f une isométrie du plan. Pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par f, on a : $\boxed{\begin{cases} f(M) = M' \\ f(N) = N' \end{cases} \Rightarrow M'N' = MN}$

I) Déplacements ou retournements

Un déplacement est une isométrie qui conserve la mesure des angles orientés.

Soit f un déplacement et A, B et C trois points non alignés tels que :

$$\boxed{\begin{cases} f(A) = A' \\ f(B) = B' \\ f(C) = C' \end{cases} \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right) [2\pi]}$$

NB

Tout déplacement est soit une rotation, soit une translation.

1) Identité du plan

On appelle identité du plan noté $Id_{\mathcal{P}}$ est une isométrie qui laisse tous les points du plan invariants.

Pour tout point M du plan, on a : $\boxed{Id_{\mathcal{P}}(M) = M' \Longleftrightarrow M' = M}$

Remarques

- L'identité du plan est l'élément neutre dans la composition des isométries.
- Tout isométrie qui admet trois points au moins invariants non alignés est une identité du plan.
- L'identité du plan est une bijection égale à sa réciproque. Elle est donc involutive.

A) La translation

1- Définition :

On appelle translation du vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul, la transformation du plan dans lui-même noté $t_{\overrightarrow{u}}$ tel que :

pour tout point M du plan, on a : $\boxed{t_{\overrightarrow{u}}(M) = M' \Longleftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}}$

$$M \xrightarrow{\overrightarrow{u}} M'$$

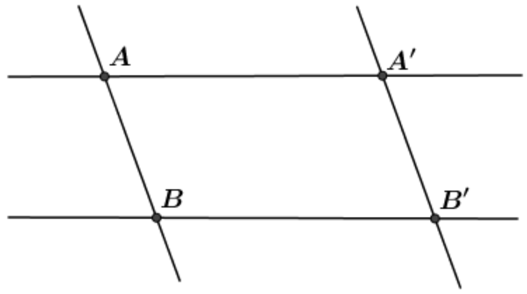
NB : La translation n'admet pas de point invariant.

2- Expression analytique

Pour tout point $M(x;y)$ du plan associe le point $M'(x';y')$ et le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ tel que :

$$t_{\overrightarrow{u}}(M) = M' \Longleftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u} \Rightarrow \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x' = x+a \\ y' = y+b \end{cases}}$$

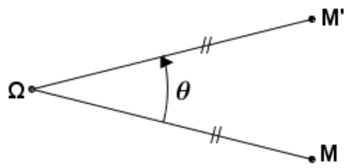
3- Existence d'une translation définie par deux couples des points homologues :
Il existe une translation f qui transforme A en A' et B en B', si et seulement si :
$\boxed{AB = A'B' \text{ et } \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}}$



NB
- On prouve que $AB = A'B'$.
- L'égalité $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{A'B'}$ s'affirme par simple observation de la figure.

B)La rotation
1- Définition :
On appelle rotation de centre Ω et d'angle θ noté $R_{(\Omega,\theta)}$, est une isométrie du plan qui à tout point M du plan associe le point M' telle que :

$$\boxed{R_{(\Omega,\theta)}(M) = M' \Longleftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta[2\pi] \end{cases}}$$



NB : Le centre est le point invariant de la rotation : $R(\Omega) = \Omega$.

2- Expression analytique
Soit R la rotation de centre $\Omega(x_0; y_0)$ et d'angle θ.
Pour tout point $M(x;y)$ du plan associe le point $M'(x';y')$ telle que :

$$R_{(\Omega,\theta)}(M) = M' \Longleftrightarrow \boxed{\begin{cases} x' = (x-x_0)\cos\theta - (y-y_0)\sin\theta + x_0 \\ y' = (x-x_0)\sin\theta + (y-y_0)\cos\theta + y_0 \end{cases}}$$

Si R la rotation de centre $(0;0)$ et d'angle θ.
Pour tout point $M(x;y)$ du plan associe le point $M'(x';y')$ telle que :

$$R_{(O,\theta)}(M) = M' \Longleftrightarrow \boxed{\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}}$$

3-Rotation définie par un couple de points homologues
Soit f la rotation de centre Ω et d'angle θ qui transforme A en B.

$$\begin{cases} f(\Omega) = \Omega \\ f(A) = B \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \Omega A = \Omega B \\ \left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}\right) = \theta[2\pi] \end{cases}$$

- $\Omega A = \Omega B$: Signifie que Ω appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.

- $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) = \theta[2\pi]$: Signifie que Ω appartient à l'arc capable (Γ) d'angle θ de corde $[AB]$ privé des points A et B.

Donc $\boxed{\Omega = (\Gamma) \cap \text{med}[AB]}$

4-Rotation définie par deux couples des points homologues

Soit f la rotation qui transforme A en A' et B en B'.

$$\begin{cases} f(A) = A' \\ f(B) = B' \end{cases}$$

a) existence d'une rotation

Il existe une rotation qui transforme A en A' et B en B', si et seulement si :

$\boxed{AB = A'B' \text{ de plus les vecteurs } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{A'B'} \text{ ne sont pas colinéaires}}$.

NB

- On prouve que $AB = A'B'$.
- Le non colinéarité de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ s'affirme par simple observation de la figure.

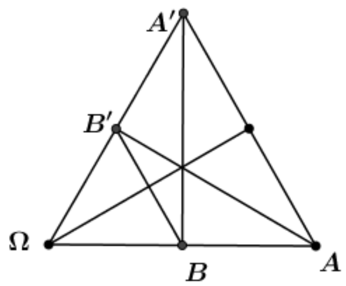
b) Construction du centre Ω de la rotation

Soit f la rotation de centre Ω qui transforme A en A' et B en B'.

$$\begin{cases} f(A) = A' \\ f(B) = B' \end{cases}$$ On distingues deux cas possibles :

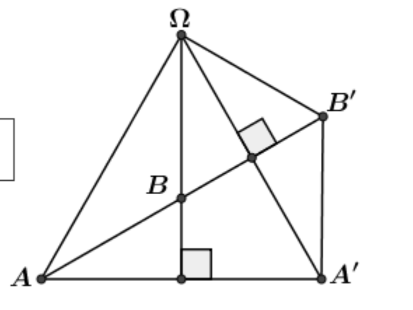
- Si les droites (AA') et (BB') sont parallèles, alors : $\boxed{\{\Omega\} = (AB) \cap (A'B')}$.

$\boxed{\{\boldsymbol{\Omega}\} = (\boldsymbol{AB}) \cap (\boldsymbol{A'B'})}$



- Si les droites (AA') et (BB') ne sont pas parallèles, alors : $\boxed{\{\Omega\} = \text{méd}[AA'] \cap \text{méd}[BB']}$.

$\boxed{\{\boldsymbol{\Omega}\} = \textbf{méd}\,[\mathbf{AA'}] \cap \textbf{méd}\,[\mathbf{BB'}]}$



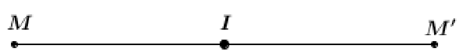
c) Détermination de l'angle θ de la rotation

$$\begin{cases} f(A) = A' \\ f(B) = B' \end{cases} \Rightarrow \boxed{\theta = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) \theta[2\pi]}$$

3)Symétrie centrale

La symétrie du centre I noté S_I est une isométrie du plan qui à tout point M du plan associe le point M' telle que :

$\boxed{S_I(M) = M' \Longleftrightarrow \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{IM'}}$



II) Antidéplacements ou antiretournements

Un antidéplacement est une isométrie qui transforme la mesure d'un angles orientés en son opposé.

Soit f un déplacement et A, B et C trois points non alignés tels que :

$$\boxed{\begin{cases} f(A) = A' \\ f(B) = B' \\ f(C) = C' \end{cases} \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = -\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right) [2\pi]}$$

NB

Tout antidéplacement est soit une la réflexion(symétrie orthogonale), soit une symétrie glissée.

A) Réflexion ou symétrie orthogonale

1- Définition :

On appelle réflexion d'axe (Δ) est une isométrie du plan qui à tout point M associe le point M' telle que : $\boxed{S_\Delta(M) = M' \Longleftrightarrow (MM') \perp (\Delta)}$ Où (Δ) est la médiatrice du segment $[MM']$

NB :

- Tout point situé sur l'axe d'une réflexion est invariant par cette réflexion.

Si $M \in (\Delta)$ alors $\boxed{S_\Delta(M) = M}$

- Toute droite perpendiculaire à l'axe d'une réflexion est globalement invariante par cette réflexion. Si $(\mathcal{D}) \perp (\Delta)$ alors $\boxed{S_\Delta(\mathcal{D}) = (\mathcal{D})}$

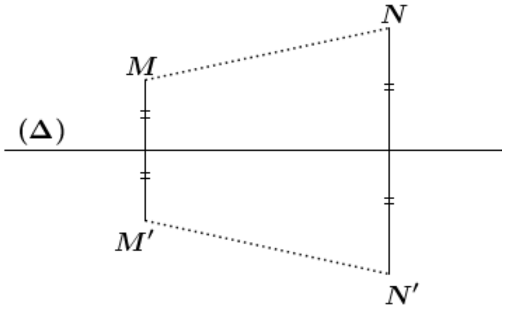
2- Symétrie orthogonale définie par deux couples de points homologues

Soient M, N, M' et N' quatre points du plan non alignés, et (Δ) une droite du plan.

Soit f un antidéplacement qui transforme M en M' et N en N' : $\begin{cases} f(M) = M' \\ f(N) = N' \end{cases}$

Existence d'une symétrie orthogonale ou d'une réflexion

Il existe une symétrie orthogonale ou une réflexion qui transforme M en M' et N en N', si et seulement si les segments $[MM']$ et $[NN']$ ont de même médiatrice.



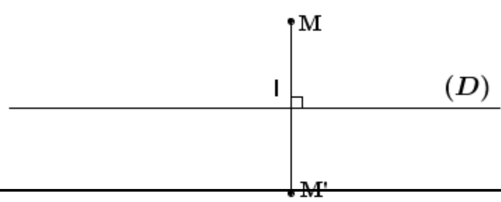
Ainsi f est la réflexion d'axe (Δ). où (Δ) est la médiatrice des segments $[MM']$ et $[NN']$.

3- Expression analytique

Soit S_Δ la réflexion d'axe (Δ) de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et I un point de (Δ).

Si $(\Delta) : ax + by + c = 0$ alors $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$,

$$\boxed{S_\Delta(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} I \text{ milieu de } [MM'] \\ I \in (\Delta) \\ \overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{u} = 0 \end{cases}}$$



EXERCICE

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On considère la réflexion S d'axe (Δ) d'équation : $x + 2y - 1 = 0$. Déterminer l'expression analytique de la réflexion S.

Solution

Déterminons l'expression analytique de la réflexion S d'axe (Δ) : $x + 2y - 1 = 0$

Soient $M(x\,;y)$ et $M'(x'\,;y')$ deux points du plan, et I milieu de $[MM']$ tels que :

$$\boxed{S_\Delta(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} I \text{ milieu de } [MM'] \\ I \in (\Delta) \\ \overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{u} = 0 \end{cases}}$$

- I milieu du segment $[MM']$: $x_I = \dfrac{x+x'}{2}$ et $y_I = \dfrac{y+y'}{2}$
- $I \in (\Delta)$: $x_I + 2y_I - 1 = 0 \Rightarrow \left(\dfrac{x+x'}{2}\right) + 2\left(\dfrac{y+y'}{2}\right) - 1 = 0$

$$\frac{x+x'}{2} + y + y' - 1 = 0 \ \times (2) \ \Rightarrow x + x' + 2y + 2y' - 2 = 0 \Rightarrow \underline{x' + 2y' = -x - 2y + 2} \qquad (1)$$

- $\overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{u} = 0$ avec $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -2x' + 2x + y' - y = 0 \Rightarrow \underline{-2x' + y' = -2x + y} \qquad (2)$$

Formons un système avec (1) et (2) : $\begin{cases} x' + 2y' = -x - 2y + 2 & \times 1 \\ -2x' + y' = -2x + y & \times -2 \end{cases}$

$$\begin{cases} x' + 2y' = -x - 2y + 2 \\ 4x' - 2y' = 4x - 2y \end{cases} \Rightarrow 5x' = 3x - 4y + 2 \Rightarrow x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{2}{5}$$

$$\begin{cases} x' + 2y' = -x - 2y + 2 & \times 2 \\ -2x' + y' = -2x + y & \times 1 \end{cases} \Rightarrow 5y' = -4x - 3y + 4 \Rightarrow y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{4}{5}$$

Donc l'expression analytique de cette réflexion est $\boxed{S_{(\Delta)} : \begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{2}{5} \\ y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{4}{5} \end{cases}}$

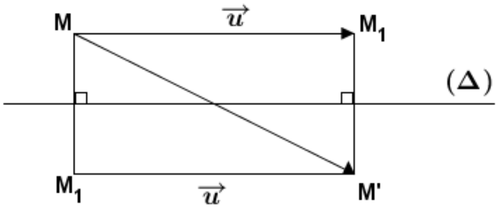
B) Symétrie glissée

Soit (Δ) une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

1-Définition :

On appelle symétrie glissée d'axe (Δ) et de vecteur $\overrightarrow{u}$, la composée commutative de la réflexion d'axe (Δ) et de la translation du $\overrightarrow{u}$.

Soit g une symétrie glissée : $\boxed{g = s_\Delta \circ t_{\overrightarrow{u}} \quad \text{ou} \quad g = t_{\overrightarrow{u}} \circ s_\Delta}$



$g(M) = M' \Rightarrow t_{\overrightarrow{u}}(M) = M_1$ et $s_\Delta(M_1) = M'$ ou $s_\Delta(M) = M_1$ et $t_{\overrightarrow{u}}(M_1) = M'$

NB :

La symétrie glissée n'admet aucun point invariant. Mais l'axe de la réflexion est globalement invariant par la symétrie glissée.

2- Symétrie glissée définie par deux couples de points homologues

Soient A, B, A' et B' quatre points du plan non alignés.

Soit f un antidéplacement qui transforme A en A' et B en B' : $\begin{cases} f(A) = A' \\ f(B) = B' \end{cases}$

Existence d'une symétrie glissée

Il existe une symétrie glissée qui transforme A en A' et B en B',
si et seulement si les segments $[AA']$ et $[BB']$ n'ont pas de même médiatrice.

Ainsi f est une symétrie glissée, d'axe la droite passant par les milieux de $[AA']$ et $[BB']$.

Cas particulier

Si g est une symétrie glissée qui transforme A en B et B en C, alors :

$\boxed{g(A) = B \text{ et } g(B) = C, \text{ on a : } g \circ g(A) = C}$

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ de g :

On sait que : $g \circ g = t_{2\overrightarrow{u}}$. Comme $g \circ g(A) = C$ alors $2\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AC}$, on a : $\boxed{\overrightarrow{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$

L'axe (Δ) de g :

L'axe (Δ) de g est la droite passant par les milieux des segments $[AB]$ et $[BC]$.

II) Composition et décomposition des isométries

1) Composée de deux symétries centrales

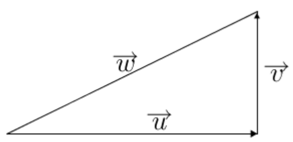
La composée de deux symétries centrales est une translation dont la longueur du vecteur de translation est le double de la distance entre les deux centres de symétries.

Soients S_A et S_B deux symétries centrales de centre A et B respectivement. On a : $\boxed{S_B \circ S_A = t_{2\overrightarrow{AB}}}$

2) Composée de deux translations

La composée de deux translations est une translation.

Soients $t_{\overrightarrow{u}}$ et $t_{\overrightarrow{v}}$ deux translations de vecteur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ respectivement.



$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$

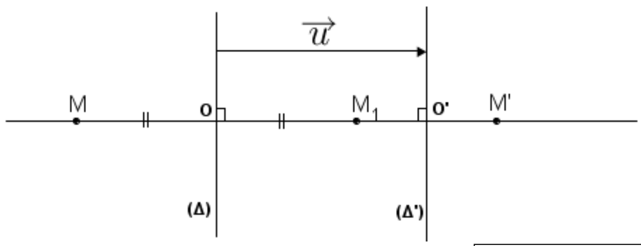
$t_{\overrightarrow{w}} = t_{(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})}$

$\boxed{t_{\overrightarrow{w}} = t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}}}$

3) Composée de deux réflexions d'axe parallèles

La composée de deux réflexions d'axe parallèles est une translation dont la longueur du vecteur est le double de la distance entre deux axes des réflexions.

Soients S_Δ et $S_{\Delta'}$ deux réflexions d'axe (Δ) et (Δ') respectivement, O est un point de (Δ) et O' son projeté orthogonal sur (Δ'). On a : $\boxed{S_{\Delta'} \circ S_\Delta = t_{2\overrightarrow{OO'}}}$

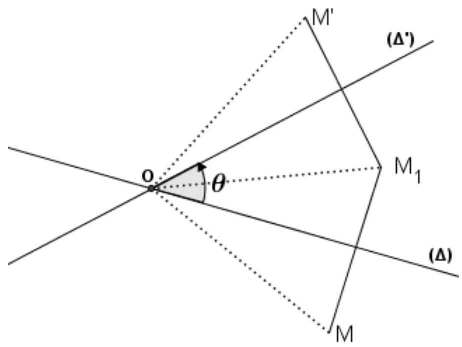


Propriété : $t_{\vec{u}} = S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} (\mathcal{D})//(\mathcal{D}') \perp \vec{u} \\ t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(\mathcal{D}) = (\mathcal{D}') \end{cases}}$

4) Composée de deux réflexions d'axe sécants

La composée de deux réflexions d'axe sécantes est une rotation dont la mesure de l'angle est égale au double de la mesure de l'angle formé par les deux axes des réflexions.

Soient S_Δ et $S_{\Delta'}$ deux réflexions d'axe (Δ) et (Δ') respectivement sécants au point O.
$R(\mathrm{O},\theta)$ est la rotation de centre O et d'angle de mesure θ :



$$\boxed{S_{\Delta'} \circ S_\Delta = R(\mathrm{O}\,,\,\theta) \Leftrightarrow \begin{cases} (\Delta) \cap (\Delta') = \{\mathrm{O}\} \\ \overline{(\Delta, \Delta')} = \frac{1}{2}\theta[\pi] \end{cases}}$$

5) Composée de deux rotations de même centre

Soient R_1 la rotation de centre A et d'angle θ_1 et R_2 la rotation de centre A et d'angle θ_2
$R_1 = rot(A\,;\,\theta_1)$ et $R_2 = rot(A\,;\,\theta_2)$. on a : $R = R_1 \circ R_2 \Rightarrow \boxed{R = rot(A\,;\,\theta_1 + \theta_2)}$

Remarques

- Si $\theta_1 + \theta_2 = 0[2\pi]$ alors $R_1 \circ R_2 = Id_{\mathcal{P}}$
- Si $\theta_1 + \theta_2 = \pi[2\pi]$ alors $R_1 \circ R_2 = S_A$. S_A est la symétrie centrale de centre A

6) Composée de deux rotations de centre distincts

Soient R_A la rotation de centre A et d'angle θ_1 et R_B la rotation de centre B et d'angle θ_2
$R_A = rot(A\,;\,\theta_1)$ et $R_B = rot(B\,;\,\theta_2)$. on a : $R = R_A \circ R_B \Rightarrow \boxed{R = rot(I\,;\,\theta_1 + \theta_2)}$

I peut être déterminer par la décomposition de R_A et R_B en deux réflexions d'axes sécantes.

- Si $R_A \circ R_B = S_\Delta \circ S_{\Delta'}$ tel que $\overline{(\Delta'\,,\,\Delta)} = \frac{\theta_1+\theta_2}{2}[2\pi]$ alors $\boxed{I = (\Delta) \cap (\Delta')}$
- Si $\boxed{\begin{cases} R(M) = M' \\ R(N) = N' \end{cases} \Rightarrow \{I\} = \text{méd}[MM'] \cap \text{méd}[NN']}$

alors I est le point d'intersection des médiatrices des segments $[MM']$ et $[NN']$

Remarque

Si $\theta_1 + \theta_2 = 0[2\pi]$ et $R_A \circ R_B(H) = H'$ alors $\boxed{R_A \circ R_B = t_{\overrightarrow{HH'}}}$

7) Composée d'une rotation et d'une translation

La composée d'une rotation d'angle θ non nul et d'une translation est une rotation d'angle θ.

Soient $R_A = rot(A\,;\,\theta)$ la rotation de centre A et d'angle θ et $t_{\vec{u}}$ la translation du vecteur $\vec{u}$

On a : $R = R_A \circ t_{\vec{u}} \Rightarrow$ $\boxed{R = rot(I\,;\,\theta)}$

I peut être déterminer par la décomposition de R_A et $t_{\vec{u}}$ en deux réflexions.

Si $R_A \circ t_{\vec{u}} = S_\Delta \circ S_{\Delta'}$ tel que $\overline{(\Delta'\,,\,\Delta)} = \frac{\theta}{2}[2\pi]$ alors $\boxed{I = (\Delta) \cap (\Delta')}$

8) Composée d'une rotation et d'une réflexion

Soient R_A la rotation de centre A et d'angle θ et S_Δ la réflexion d'axe (Δ)

On pose $f = R(A\,,\theta) \circ S_\Delta$

- Si A n'appartient pas à (Δ) alors $\boxed{R(A\,,\theta) \circ S_\Delta \text{ est une symétrie glissée}}$
- Si A appartient à (Δ) alors $\boxed{R(A\,,\theta) \circ S_\Delta \text{ est une réflexion}}$

9) Composée d'une rotation et d'une symétrie centrale

La composée d'une rotation θ et d'une symétrie centrale est une rotation d'angle θ.

Soient R_A la rotation de centre A et d'angle θ et S_B la symétrie centrale de centre B

$R_A = rot(A\,;\,\theta)$ et S_B. on a : $R = R_A \circ S_B \Rightarrow$ $\boxed{R = rot(I\,;\,\theta)}$

Si $\boxed{\begin{cases} R(M) = M' \\ R(N) = N' \end{cases} \Rightarrow \{I\} = \text{méd}[MM'] \cap \text{méd}[NN']}$

alors I est le point d'intersection des médiatrices des segments $[MM']$ et $[NN']$

Propriétés

- Toute isométrie est un déplacement ou un antidéplacement.
- Tout déplacement est une translation ou une rotation.
- Tout antidéplacement est une réflexion ou une symétrie glissée.
- La composée de deux déplacements ou de deux antidéplacements est un déplacement.
- La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement.
- La composée d'un nombre pair des antidéplacements est un déplacement.
- La composée d'un nombre impair des antidéplacements est un antidéplacement.
- La transformation réciproque d'un déplacement est un déplacement.
- La transformation réciproque d'un antidéplacement est antidéplacement.