CENTRE D'ENCADREMENT SCOLAIRE LES MAJORANTS
34, Rue NKENI Talangaï (Arrêt Libanga)
Cours de Mr. Teddy Fiacre MOBEMOUANA M
Tél : 06 959 57 86/05 592 21 90/01 130 18 80

PROBABILITES

I- DENOMBREMENTS

1- Cardinal d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini de n éléments

a) Définition :

On appelle cardinal d'un ensemble fini E noté $cardE$, le nombre d'éléments de l'ensemble E. On a : $\boxed{cardE = n}$

b) Propriétés :

Soient A et B deux ensembles finis d'un ensemble E.

a) $\boxed{card(A \cup B) = cardA + cardB - card(A \cap B)}$

b) Si $A \subset B$ alors $\boxed{cardA \leqslant cardB}$

c) Si on désigne par $\bar{A}$ le complémentaire de A dans E, alors $\boxed{card\bar{A} = cardE - cardA}$

d) Soient $A_1,\ A_2, \cdots, A_n$ des ensembles finis, alors

$\boxed{card(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) = cardA_1 \times cardA_2 \times \cdots \times A_n}$

2- p-uplet d'un ensemble fini

Soient n et p deux entiers naturels, et E un ensemble fini de n éléments.

a) Définition :

On appelle p-uplet d'un ensemble fini E, une suite ordonnée de p éléments de E distincts ou non distincts.

b) Propriété :

le nombre de $p-$uplet de n éléments de E est tel que : $\boxed{n^p = n \times n \times \cdots \times n}$ (p fois)

3- Factorielle et permutation

a) Factorielle

Soit n un entier naturel, on appelle factorielle n l'entier noté $n!$

tel que $\boxed{n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1}$, on peut aussi écrire : $\boxed{n! = n \times (n-1)!}$

b) Permutation

On appelle permutation, tout arrangement des n éléments de E.

Le nombre de permutation d'un ensemble à n élément est : $n!$

4- Arrangements

Soient n et p deux entiers naturels tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, et E un ensemble fini de n éléments.

a) Définition :

On appelle arrangement de p éléments de E, tout p-uplet de n éléments de E distincts et ordonnés.

b) Propriété :

Le nombre d'arrangements d'ordre p de n éléments de E est noté A_n^p tel que : $\boxed{A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}}$

$\boxed{A_n^0 = 1}$, $\boxed{A_n^1 = n}$

5- Combinaisons

Soient n et p deux entiers naturels tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, et E un ensemble fini de n éléments.

a) Définition :

On appelle combinaison de p éléments E, tout sous-ensemble de E ayant p éléments.

b) Propriété :

- Le nombre de combinaison de p éléments d'un ensemble à n éléments est noté C_n^p

tel que : $\boxed{C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}}$

- $C_n^0 = 1$, $C_n^1 = n$, $C_n^n = 1$
- Si $p \leqslant n$ alors $C_n^{n-p} = C_n^p$
- Si $0 < p < n$ alors $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$

6- Différents types de tirages

On dispose une urne contenant N boules indiscernables au toucher de k couleurs différentes ($k \leqslant N$), on note N_i le nombre de boules de couleurs i ($1 \leqslant i \leqslant k$) tel que :
$N = N_1 + N_2 + \cdots + N_k$.
On tire au hasard n boules de l'urne.
Soient n_1, $n_2 \cdots n_k$ des entiers tels que : $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.
On distingue trois types de tirages :

a) Tirage successif avec remise

• Définition

On appelle tirage successif avec remise tout $p-$uplet de N éléments de E ordonnés et non distincts.
NB : Ici, la première boule tirée est remise dans l'urne avant le tirage de la deuxième, ...

• Cardinal d'un événement

∗ Le nombre de $n-$uplets constitués de n_1 boules de la couleur 1, n_2 boules de la couleur 2, ..., n_k boules de la couleur k est tel que $\boxed{cardA = \dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}N_1^{n_1}N_2^{n_2}\cdots N_k^{n_k}}$

∗ Si on tire n boules de même couleurs alors $\boxed{cardA = N_1^n + N_2^n + \cdots + N_k^n}$

∗ Le nombre de tous les cas possible est : $\boxed{card\Omega = N^n}$

b) Tirage successif sans remise

• Définition

On appelle tirage successif sans remise tout arrangement de p éléments de E ordonnés et distincts.
NB : Ici, la première boule tirée n'est remise dans l'urne (mise de coté) avant le tirage de la deuxième, ...

• Cardinal d'un événement

∗ Le nombre d'arrangements constitués de n_1 boules de la couleur 1, n_2 boules de la couleur 2, ..., n_k boules de la couleur k est tel que $\boxed{cardA = \dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}A_{N_1}^{n_1}A_{N_2}^{n_2}\cdots A_{N_k}^{n_k}}$

∗ Si on tire n boules de même couleurs alors $\boxed{cardA = A_{N_1}^n + A_{N_2}^n + \cdots + A_{N_k}^n}$

∗ Le nombre de tous les cas possible est : $\boxed{card\Omega = A_N^n}$ où $A_N^n = \dfrac{N!}{(N-n)!}$

c) Tirage simultané

• **Définition**

On appelle tirage simultané tout combinaison de p éléments de E non ordonnés et distincts.

NB : Ici, les boules tirées sont extraites au même moment.

• **Cardinal d'un événement**

$*$ Le nombre de combinaison constitués de n_1 boules de la couleur 1, n_2 boules de la couleur 2, ..., n_k boules de la couleur k est tel que $\boxed{cardA = C_{N_1}^{n_1} C_{N_2}^{n_2} \cdots C_{N_k}^{n_k}}$

$*$ Si on tire n boules de même couleurs alors $\boxed{cardA = C_{N_1}^{n} + C_{N_2}^{n} + \cdots + C_{N_k}^{n}}$

$*$ Le nombre de tous les cas possible est : $\boxed{card\Omega = C_N^n}$ où $C_N^n = \dfrac{N!}{n!(N-n)!}$

II- PROBABILITE D'UN EVENEMENT

1- Expérience aléatoire

On appelle expérience aléatoire, toute situation qui change de résultat d'une fois à l'autre de manière imprévisible.

Exemple : Le jeu de dé.

2- Vocabulaire

a) Univers :

C'est l'ensemble de tous les résultats possibles au cours d'une expérience aléatoire.

b) Eventualité : C'est un élément quelconque de l'univers.

c) Evénement : C'est une partie quelconque de l'univers.

d) Evénement élémentaire : C'est un singleton de l'univers.

e) Evénement certain : C'est la partie pleine de l'univers.

f) Evénement impossible : C'est la partie vide noté $\{\emptyset\}$

g) Evénement A ou B : C'est l'ensemble $A \cup B$ de l'univers.

h) Evénement A et B : C'est l'ensemble $A \cap B$ de l'univers.

i) Evénement incompatible : C'est la partie A et B de l'univers tel que $A \cap B = \{\emptyset\}$.

j) Evénement contraire : C'est le complémentaire d'un événement A dans l'univers noté $\bar{A}$.

3- Calcul des probabilités

a) Notion d'équiprobabilité des événements :

On dit qu'il y a équiprobabilité des événements lorsque tous les événements ont la même probabilité d'être réaliser.

b) Définition :

Soit Ω l'univers de tous les éventualités et P une probabilité définie sur Ω.

On appelle probabilité d'un événement A de Ω dans le cadre d'équiprobabilité, le nombre réel positif noté $P(A)$ tel que : $\boxed{P(A) = \dfrac{cardA}{card\Omega}}$

Propriétés :

Pour tout $A \in \Omega$, on a : $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

• $\boxed{P(\emptyset) = 0}$ • $\boxed{P(\Omega) = 1}$ • $\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$

• $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$.

• Si A et B sont incompatibles, alors : $\boxed{P(A \cap B) = 0}$, on a : $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

• Loi de Morgan : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \Rightarrow \boxed{P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B})}$ (1)

• $\boxed{P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)}$ (2)

• (1) = (2), on a : $\boxed{P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B)}$

• Si A est inclut dans B alors $\boxed{P(A \cap B) = P(A)}$

4- Variable aléatoire :
On appelle variable aléatoire réelle, le nombre réel x_i associé à chaque éventualité d'une expérience aléatoire noté X.

5- Loi de probabilité :
On appelle loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle X, les valeurs x_i prises par X associé aux probabilités P_i d'un événement $(X = x_i)$ tel que :

X_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P_i	P_1	P_2	$\cdots$	P_n

avec : $\boxed{\sum_{i=1}^{n} P_i = 1}$

6- Espérance mathématique
On appelle espérance mathématique d'une variable aléatoire réelle X, le nombre réel noté $E(X)$ tel que : $\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i}$ **Propriété** : $\boxed{E(nX) = nE(X)}$

7- Variance
On appelle variance d'une variable aléatoire réelle X, le nombre réel positif noté $V(X)$ tel que :

$$\boxed{V(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 P_i}$$

Formule de Köenig : $\boxed{V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2}$ où $\boxed{E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P_i}$

8- Ecart-type
On appelle écart-type d'une variable aléatoire réelle X, le nombre réel positif noté $\sigma(X)$ tel que : $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$

EXERCICE
Une urne contient 6 boules toutes indiscernables au toucher : 3 boules blanches, 2 boules rouges et une boules noires. On tire 2 boules de l'urne.
Soit X la variable aléatoire réelle qui à chaque tirage associe le nombre des boules blanches tirées.
1- On suppose que le tirage est successivement avec remise.
2- On suppose que le tirage est successivement sans remise.
3- On suppose que le tirage est simultané.
Traiter les questions suivantes dans chacun des tirages ci-dessus.
a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
b) Déterminer la loi de probabilité de X.
c) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de X.

9- Epreuve de Bernoulli
On appelle épreuve de Bernoulli, toute expérience aléatoire qui conduit à deux éventualités appelées SUCCÈS et ÉCHEC.
On note p la probabilité du succès et q celle de l'échec, tel que : $p + q = 1$ où $q = 1 - p$.

10- Loi Binomiale

On appelle loi Binomiale une expérience aléatoire qui consiste à répéter plusieurs fois de façon indépendante une épreuve de Bernoulli.

La probabilité d'obtenir k succès au cours de n épreuves est : $\boxed{P(X=k)=\mathrm{C}_n^k\,p^kq^{n-k}}$

Où $0 \leqslant k \leqslant n$, on dit que X suit la loi Binomiale de paramètre n et p. On note $X \sim \mathcal{B}(n\,,\,p)$

Espérance mathématique de X : $\boxed{E(X)=np}$ **Variance de X** : $\boxed{V(X)=npq}$

Remarque Dans un tirage successif avec remise qui ne conduit qu'a deux éventualités, on peut appliquer la loi Binomiale.

11- Fonction de répartition

On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire réelle X,
l'application F de $\mathbb{R}$ dans $[0\ ;\ 1]$ par $F(x)=P(X \leqslant x_i)$ tel que :

X	$]-\infty\,;\,x_1[$	$[x_1\,;\,x_2[$	$[x_2\,;\,x_3[$	$\cdots$	$[x_n\,;\,+\infty[$
$F(X)$	0	P_1	P_1+P_2	$\cdots$	$P_1+P_2+\cdots+P_n=1$

Les valeurs exactes prises par X sont : $\boxed{X=\{x_1\,;\,x_2\,;\,x_3\,;\,\cdots\,;\,x_n\}}$

EXERCICE

Un sac contient 3 boules blanches et 2 boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher, on tire successivement avec remise 3 boules du sac. On considère la variable aléatoire réelle X liée au nombre de boules blanches tirées.

1- Donner la loi de probabilité de X.
2- Calculer l'espérance mathématique de X.
3- Calculer la variance de X.
4- Déterminer la fonction de répartition $F(X)$.
5- Construire la fonction de répartition $F(X)$.

III- PROBABILITE CONDITIONNELLE

Soient Ω l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, A et B deux événements de Ω tel que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$

1- Définition

On appelle probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé ou probabilité de A sachant B, le nombre réel noté $P_B(A)$ ou $P(A/B)$ tel que : $\boxed{P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}}$

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow \boxed{P(A\cap B)=P_B(A)\times P(B)}$$

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow \boxed{P(A\cap B)=P_A(B)\times P(A)}$$

2- Événements indépendants

Soient Ω l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, A et B deux événements de Ω
Les événements A et B sont indépendants lors que la probabilité de l'un n'est pas modifiée par la réalisation de l'autre.

Ainsi, A et B sont indépendants, si et seulement si :

- $\boxed{P(A\cap B)=P(A)\times P(B)}$ • $\boxed{P_B(A)=P(A)}$ • $\boxed{P_A(B)=P(B)}$

3- Formules des probabilités totales

Soient les événement B_1, B_2, $\cdots$, B_n forment une partition de l'univers Ω

$B_1, B_2, \cdots, B_n$ forment une partition de Ω signifie que : $B_1, B_2, \cdots, B_n$ sont deux à deux disjoints et $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = \Omega$

Pour tout événement A, on a : $\boxed{P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_n)}$

4- Arbre pondéré d'une expérience aléatoire

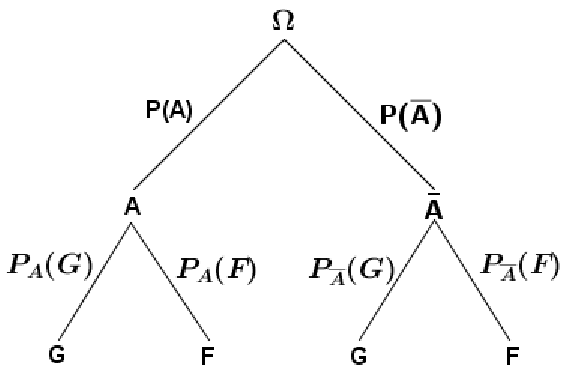
Une équipes notée A est constituée des garçons et des filles dans une salle de classe,tout élève de cette classe ne fait pas parti de cette équipe. On choisit un(e) élève au hasard dans cette salle de classe. On note les événements suivants :

G : ≪ l'élève choisi est un garçon ≫

F : ≪ l'élève choisi est une fille ≫

$\overline{A}$: ≪ l'événement contraire de A ≫

Alors, l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire est de la manière suivante :



$P(A)$: est la probabilité de l'événement A

$P(\overline{A})$: est la probabilité de l'événement $\overline{A}$

$P_A(G)$: est la probabilité de G sachant A

$P_A(F)$: est la probabilité de F sachant A

$P_{\overline{A}}(G)$: est la probabilité de G sachant $\overline{A}$

$P_{\overline{A}}(F)$: est la probabilité de F sachant $\overline{A}$

$\boxed{P(G) = P(A \cap G) + P(\overline{A} \cap G)}$

$\boxed{P(F) = P(A \cap F) + P(\overline{A} \cap F)}$

$\boxed{P(A) + P(\overline{A}) = 1}$, $\boxed{P_A(G) + P_A(F) = 1}$, $\boxed{P_{\overline{A}}(G) + P_{\overline{A}}(F) = 1}$

Propriété 1 :

La probabilité d'un chemin est égale au **produit des probabilités** inscrites sur chaque branche du chemin.

Pour le chemin $\Omega \longmapsto A \longmapsto F$ on a la probabilité : $P(A \cap F)$

. tel que : $\boxed{P(A \cap F) = P(A) \times P_A(F)}$

Pour le chemin $\Omega \longmapsto \overline{A} \longmapsto F$ on a la probabilité : $P(\overline{A} \cap F)$

. tel que : $\boxed{P(\overline{A} \cap F) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(F)}$

Propriété 2 :

La probabilité d'un événement F est la **somme des probabilités** des chemins qui aboutissent à F : $\boxed{P(F) = P(A \cap F) + P(\overline{A} \cap F)}$

EXERCICE

Une maladie atteint 3% d'une population. Un test de dépistage donne les résultats suivants :

Chez les individus malades, 95% de test sont positifs et 5% négatifs.

Chez les individus non malades, 1% de test sont positifs et 99% négatifs.

On note : M l'événement ≪ être malade ≫;

. T l'événement ≪ le test est positif≫.

1) Construire un arbre pondéré correspondant à cette expérience aléatoire.
2) Donner la probabilité de l'événement ≪ $\mathrm{M} \cap \mathrm{T}$ ≫, puis celle de ≪ $\overline{\mathrm{M}} \cap \overline{\mathrm{T}}$ ≫.
3) Déterminer P(T) et P($\overline{\mathrm{T}}$).
4) Calculer la probabilité de ne pas être malade, sachant que le test est positif.
5) Calculer la probabilité d'être malade, sachant que le test est négatif.