

CHAPITRE 17 : CALCUL D'INTEGRALES - INTEGRATION PAR PARTIES

Dans ce cours, nous disposons de trois techniques de calcul d'intégrales :

- 1) primitivation par lecture directe dans une table
- 2) par transformations d'écriture
- 3) par intégration par parties

1. Primitivation par lecture directe dans une table

Exemple

calculer l'intégrale $I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$

On note f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par $f : x \mapsto \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

La fonction f est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et l'intégrale I existe.

Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $f(x) = -\frac{u'(x)}{u^2(x)}$ avec $u(x) = \cos x$ et donc $u'(x) = -\sin x$

La fonction F définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par $F(x) = \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{\cos x}$ est une primitive de f sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

et donc $I = \left[\frac{1}{\cos x} \right]_0^{\pi/4} = \sqrt{2} - 1$

Finalement :

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \sqrt{2} - 1$$

2. Transformations d'écriture

Dans ce cours, la transformation est toujours indiquée

Exemple

calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{x+3}{x^2-x-2} dx$

Après avoir justifié l'existence de l'intégrale, on cherchera deux réels a et b vérifiant,

pour tout x dans $[0,1]$, $\frac{x+3}{x^2-x-2} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+1}$

- Existence de l'intégrale :

Les racines du dénominateur 2 et -1 n'appartenant pas à l'intervalle $[0,1]$, la fonction

$f : x \mapsto \frac{x+3}{x^2-x-2}$ est continue sur $[0,1]$ et l'intégrale I existe.

- Transformation d'écriture

pour tout $x \in [0,1]$ $\frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+1} = \frac{(a+b)x + a - 2b}{x^2 - x - 2}$

En identifiant les coefficients du numérateur, on obtient le système

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a-2b=3 \end{cases}$$

qui admet l'unique solution $a = \frac{5}{3}$ et $b = -\frac{2}{3}$

On a donc pour tout $x \in [0,1]$ $\frac{x+3}{x^2-x-2} = \frac{5}{3} \frac{1}{x-2} - \frac{2}{3} \frac{1}{x+1}$

- Calcul de l'intégrale :

$$I = \frac{5}{3} \int_0^1 \frac{dx}{x-2} - \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{dx}{x+1}$$

et donc puisque $x \in [0,1]$ alors $(x-2) < 0$ et $(x+1) > 0$

$$I = \frac{5}{3} [\ln(2-x)]_0^1 - \frac{2}{3} [\ln(x+1)]_0^1$$

Finalement :

$$I = \int_0^1 \frac{x+3}{x^2-x-2} dx = -\frac{7}{3} \ln 2$$

3. Intégration par parties

Théorème

Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a, b]$ et admettant des dérivées u' et v' continues.

$$\text{Alors } \int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

Démonstration

Soient u et v deux fonctions dérivables sur l'intervalle $[a, b]$ telles que u' et v' soient continues sur $[a, b]$, alors puisque la dérivée du produit $u v$ est donnée par

$$(uv)' = u'v + uv' \text{ alors } uv \text{ est une primitive de } u'v + uv' \text{ sur } [a, b].$$

$$\text{Donc } [u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) dx = \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

d'où la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

Cette formule s'applique lorsqu'on cherche à calculer l'intégrale d'un produit de deux fonctions

et à condition que $\int_a^b u'(x)v(x) dx$ soit plus facile à calculer que $\int_a^b u(x)v'(x) dx$

C'est le cas en particulier pour le produit :

- d'une fonction polynôme et d'une fonction sinus ou cosinus (avec u égale à la fonction polynôme)

- d'une fonction polynôme et d'une fonction logarithme (avec u égale à la fonction logarithme)
- d'une fonction exponentielle et d'une fonction sinus ou cosinus (avec u égale indifféremment à la fonction exponentielle ou à la fonction sinus ou cosinus)

Remarque

il faut parfois répéter plusieurs fois la méthode.

Exemple

$$\text{Calculer } I = \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx$$

on pose

$$\begin{aligned} u(x) = x &\quad \Rightarrow \quad u'(x) = 1 \\ v(x) = \sin x &\quad \Leftarrow \quad v'(x) = \cos x \end{aligned}$$

et en appliquant la formule d'intégration par parties :

$$I = \left[x \sin x \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$$

soit

$$I = \left[x \sin x + \cos x \right]_0^{\pi/2}$$

et finalement

$$I = \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx = \frac{\pi}{2} - 1$$

Remarque

le calcul de l'intégrale I permet de trouver les primitives de la fonction

$$f : x \mapsto x \cos x$$

Les primitives de f sur \mathbb{R} sont $F : x \mapsto x \sin x + \cos x + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

Exemple

Calculer $J = \int_0^{\pi/2} e^{-2x} \cos x \, dx$

On pose, par exemple, en choisissant u égale à la fonction exponentielle (on peut aussi procéder par intégration par parties en posant u égale à la fonction cosinus)

$$\begin{aligned} u(x) = e^{-2x} &\Rightarrow u'(x) = -2e^{-2x} \\ v(x) = \sin x &\Leftarrow v'(x) = \cos x \end{aligned}$$

et en appliquant la formule d'intégration par parties :

$$J = \left[e^{-2x} \sin x \right]_0^{\pi/2} + 2 \int_0^{\pi/2} e^{-2x} \sin x \, dx$$

On applique la formule d'intégration par parties une deuxième fois (dans le même sens, c'est-à-dire en posant toujours u égale à la fonction exponentielle)

$$\begin{aligned} u(x) = e^{-2x} &\Rightarrow u'(x) = -2e^{-2x} \\ v(x) = -\cos x &\Leftarrow v'(x) = \sin x \end{aligned}$$

et

$$J = \left[e^{-2x} \sin x \right]_0^{\pi/2} + 2 \left[-e^{-2x} \cos x - 2 \int_0^{\pi/2} e^{-2x} \cos x \, dx \right]$$

L'intégrale apparaissant dans le second membre étant l'intégrale J cherchée, on en déduit

$$J = \left[e^{-2x} \sin x \right]_0^{\pi/2} - 2 \left[e^{-2x} \cos x \right]_0^{\pi/2} - 4J$$

$$\text{soit } 5J = \left[e^{-2x} \sin x \right]_0^{\pi/2} - 2 \left[e^{-2x} \cos x \right]_0^{\pi/2}$$

$$\text{d'où } J = \left[\frac{1}{5} e^{-2x} (\sin x - 2 \cos x) \right]_0^{\pi/2}$$

$$\text{et finalement } J = \int_0^{\pi/2} e^{-2x} \cos x \, dx = \frac{1}{5} (e^{-\pi} + 2)$$

Remarque

le calcul de l'intégrale I permet de trouver les primitives de la fonction

$$f : x \mapsto e^{-2x} \cos x$$

Les primitives de f sur \mathbb{R} sont $F : x \mapsto \frac{1}{5} [e^{-2x} (\sin x - 2 \cos x)] + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.