

Approximation des solutions

de $f(x) = 0$

Point fixe, suites récurrentes, méthodes numériques



Fiche de cours et travaux dirigés

Objectifs : Localiser, encadrer et approcher les zéros d'une fonction.
 Étudier la convergence des suites $x_{n+1} = g(x_n)$ (point fixe).
 Maîtriser les méthodes de dichotomie, Newton, sécante.
 Accélérer la convergence (méthode d'Aitken, ordre de convergence).

Contents

1	Localisation des zéros : théorèmes fondamentaux	2
2	Méthode de dichotomie (bissection)	2
3	Théorème du point fixe et suites $x_{n+1} = g(x_n)$	3
4	Ordre de convergence	4
5	Méthode de Newton–Raphson	4
6	Méthode de la sécante	5
7	Méthodes d'accélération	5
7.1	Procédé d'Aitken (Δ^2)	5
7.2	Méthode de Steffensen	6
7.3	Choisir la bonne itération g	6
8	Résumé comparatif	6

1 Localisation des zéros : théorèmes fondamentaux

Rappel de cours : Continuité et valeurs intermédiaires

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, alors f s'annule au moins une fois sur $]a, b[$.

Théorème : Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) – forme forte

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors f prend toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$. En particulier, si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.
Si de plus f est *strictement monotone* sur $[a, b]$, ce zéro est *unique*.

Remarque. La stricte monotonie peut être remplacée par : f est injective, ou encore f est dérivable et f' ne s'annule pas sur $]a, b[$. ■

Définition : Intervalle de séparation

On dit que $[a, b]$ est un *intervalle de séparation* pour f si f est continue sur $[a, b]$, $f(a)f(b) < 0$, et f est strictement monotone sur $[a, b]$. Il contient alors exactement un zéro de f .

2 Méthode de dichotomie (bissection)

Méthode : Dichotomie

Soit $[a_0, b_0]$ un intervalle de séparation de f . On construit la suite d'intervalles emboîtés $[a_n, b_n]$ par :

$$m_n = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad \begin{cases} [a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, m_n] & \text{si } f(a_n)f(m_n) \leq 0, \\ [a_{n+1}, b_{n+1}] = [m_n, b_n] & \text{sinon.} \end{cases}$$

Théorème : Convergence de la dichotomie

Les suites (a_n) et (b_n) convergent vers l'unique zéro α de f sur $[a_0, b_0]$. De plus :

$$|m_n - \alpha| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}.$$

Pour obtenir une précision $\varepsilon > 0$, il suffit de n itérations avec $n > \frac{\ln(b_0 - a_0) - \ln \varepsilon}{\ln 2}$.

Démonstration. Par construction, $f(a_n)f(b_n) < 0$ à chaque étape, donc le zéro α appartient à $[a_n, b_n]$. La longueur $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$ tend vers 0, donc par le théorème des segments emboîtés, (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite. Puisque f est continue et $f(a_n)f(b_n) < 0$, cette limite est nécessairement un zéro de f , qui est unique sur $[a_0, b_0]$ par monotonie. Enfin $m_n \in [a_n, b_n]$ donne $|m_n - \alpha| \leq b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$, d'où le résultat avec 2^{n+1} car m_n est le milieu. □

Remarque. La convergence est *linéaire* : l'erreur est divisée par 2 à chaque étape. C'est lent mais *garanti* dès que f est continue. ■

3 Théorème du point fixe et suites $x_{n+1} = g(x_n)$

Définition : Point fixe

Soit $g : I \rightarrow \mathbb{R}$. Un *point fixe* de g est un réel $\alpha \in I$ tel que $g(\alpha) = \alpha$. L'équation $f(x) = 0$ est équivalente à $g(x) = x$ dès lors qu'on pose $g(x) = x - \varphi(x)f(x)$ pour une fonction φ convenablement choisie.

Théorème : du point fixe – version contractante

Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé borné et $g : I \rightarrow I$ une application *k-lipschitzienne* avec $0 \leq k < 1$ (on dit que g est *contractante*). Alors :

- a) g admet un *unique* point fixe $\alpha \in I$.
- b) Pour tout $x_0 \in I$, la suite définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers α .
- c) On dispose des estimées d'erreur :

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0| \quad (\text{majorant a priori})$$

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{k}{1-k} |x_n - x_{n-1}| \quad (\text{majorant a posteriori}).$$

Démonstration. Existence et unicité. Puisque $g : I \rightarrow I$, la fonction $h(x) = g(x) - x$ vérifie $h(a) = g(a) - a \geq 0$ et $h(b) = g(b) - b \leq 0$. Par le TVI, h s'annule : il existe $\alpha \in [a, b]$ avec $g(\alpha) = \alpha$. Si β est un autre point fixe, alors $|\alpha - \beta| = |g(\alpha) - g(\beta)| \leq k|\alpha - \beta|$, ce qui impose $|\alpha - \beta|(1 - k) \leq 0$, donc $\alpha = \beta$.

Convergence. Par récurrence, $x_n \in I$ pour tout n (car $g : I \rightarrow I$). On a

$$|x_{n+1} - \alpha| = |g(x_n) - g(\alpha)| \leq k|x_n - \alpha|.$$

Donc $|x_n - \alpha| \leq k^n |x_0 - \alpha| \rightarrow 0$.

Estimée a priori. On montre d'abord que $|x_{n+p} - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0|$ par inégalité triangulaire et raison géométrique. En faisant $p \rightarrow +\infty$, on obtient l'estimée sur $|x_n - \alpha|$.

Estimée a posteriori. De même, $|x_n - \alpha| = |x_n - x_{n+1} + x_{n+1} - \alpha| \leq |x_n - x_{n+1}| \cdot \frac{k}{1-k}$ par la même technique. $\square$

Remarque. En pratique, si g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $|g'(x)| \leq k < 1$ pour tout $x \in I$ (ce que l'on vérifie souvent par le théorème des accroissements finis), alors g est contractante. $\blacksquare$

Théorème : Condition suffisante via la dérivée

Soit α un point fixe de g , g de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de α .

- Si $|g'(\alpha)| < 1$, le point fixe est *attractif* : pour x_0 assez proche de α , (x_n) converge vers α .
- Si $|g'(\alpha)| > 1$, le point fixe est *répulsif* : pour $x_0 \neq \alpha$ proche de α , (x_n) s'éloigne de α .

Démonstration. Par continuité de g' , si $|g'(\alpha)| < 1$, il existe $r > 0$ et $k < 1$ tels que $|g'(x)| \leq k$ sur $[\alpha - r, \alpha + r]$. Le TAF donne $|g(x) - g(\alpha)| \leq k|x - \alpha|$, donc g est contractante sur $[\alpha - r, \alpha + r]$ si de plus g y est stable, ce qu'on vérifie en choisissant r plus petit si nécessaire. $\square$

4 Ordre de convergence

Définition : Ordre de convergence

Soit (x_n) convergeant vers α . On dit que la convergence est d'ordre $p \geq 1$ s'il existe $C > 0$ tel que :

$$|x_{n+1} - \alpha| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} C |x_n - \alpha|^p.$$

- $p = 1$ avec $C \in (0, 1)$: convergence *linéaire* (géométrique).
- $p = 2$: convergence *quadratique* (très rapide).
- $p = 1, C = 1$: convergence *logarithmique* (très lente).

Proposition : Ordre et dérivées de g

Soit α point fixe de g de classe $\mathcal{C}^p$ au voisinage de α .

1. Si $g'(\alpha) \neq 0$ et $|g'(\alpha)| < 1$: ordre 1, $C = |g'(\alpha)|$.
2. Si $g'(\alpha) = 0$ et $g''(\alpha) \neq 0$: ordre 2, $C = \frac{|g''(\alpha)|}{2}$.
3. Plus généralement, si $g'(\alpha) = \dots = g^{(p-1)}(\alpha) = 0$ et $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$: ordre p , $C = \frac{|g^{(p)}(\alpha)|}{p!}$.

Démonstration. Par la formule de Taylor-Young à l'ordre p en α :

$$x_{n+1} - \alpha = g(x_n) - g(\alpha) = \sum_{k=1}^p \frac{g^{(k)}(\alpha)}{k!} (x_n - \alpha)^k + o((x_n - \alpha)^p).$$

Si les $p-1$ premières dérivées s'annulent en α , le terme dominant est $\frac{g^{(p)}(\alpha)}{p!} (x_n - \alpha)^p$, ce qui donne l'ordre p . $\square$

5 Méthode de Newton–Raphson

Méthode : Méthode de Newton

Pour résoudre $f(x) = 0$, on pose $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ (tangente à la courbe en $(x_n, f(x_n))$). La suite de Newton est définie par :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Théorème : Convergence quadratique de Newton

Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage d'un zéro simple α (i.e., $f(\alpha) = 0, f'(\alpha) \neq 0$). Alors la méthode de Newton converge *quadratiquement* :

$$x_{n+1} - \alpha \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} (x_n - \alpha)^2.$$

Pour x_0 assez proche de α , (x_n) converge vers α .

Démonstration. Posons $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Alors $g(\alpha) = \alpha$ et :

$$g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}.$$

Puisque $f(\alpha) = 0$, on obtient $g'(\alpha) = 0$. De plus, en dérivant, $g''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \neq 0$ en général. Par la proposition précédente, l'ordre de convergence est 2 et la constante asymptotique est $\frac{|g''(\alpha)|}{2} = \frac{|f''(\alpha)|}{2|f'(\alpha)|}$. $\square$

Remarque. La convergence quadratique signifie que le nombre de décimales exactes *double* à chaque itération (dès que la convergence est établie). $\blacksquare$

Exemple. Calcul de $\sqrt{2}$: on résout $f(x) = x^2 - 2 = 0$ sur $[1, 2]$. Newton donne $g(x) = x - \frac{x^2 - 2}{2x} = \frac{x^2 + 2}{2x}$. Avec $x_0 = 1$: $x_1 = 1,5$, $x_2 = 1,41\bar{6}$, $x_3 \approx 1,41421356\dots$ On voit le doublement des décimales. $\blacksquare$

6 Méthode de la sécante

Méthode : Méthode de la sécante

Pour éviter de calculer f' , on remplace la tangente par la sécante passant par $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ et $(x_n, f(x_n))$:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

Proposition : Ordre de la méthode de la sécante

Sous des hypothèses analogues à Newton (f de classe $\mathcal{C}^2$, zéro simple), la méthode de la sécante converge avec un ordre $p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$ (le nombre d'or). C'est un ordre *superlinéaire* mais inférieur à 2.

7 Méthodes d'accélération

7.1 Procédé d'Aitken (Δ^2)

Lorsque (x_n) converge linéairement vers α avec rapport ℓ , on a approximativement $x_{n+1} - \alpha \approx \ell(x_n - \alpha)$ et $x_{n+2} - \alpha \approx \ell^2(x_n - \alpha)$. On en déduit l'estimée *accélérée* :

$$\tilde{x}_n = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

Théorème : Accélération d'Aitken

Si (x_n) converge vers α de façon linéaire de rapport $\ell \in (0, 1)$, alors la suite $(\tilde{x}_n)$ définie ci-dessus converge *plus rapidement* vers α au sens où :

$$\frac{\tilde{x}_n - \alpha}{x_n - \alpha} \rightarrow 0.$$

Démonstration. Posons $e_n = x_n - \alpha$. Alors $e_{n+1} \sim \ell e_n$, ce qui donne $x_{n+1} - x_n \sim (\ell - 1)e_n$ et $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n \sim (\ell - 1)^2 e_n$. Ainsi $\tilde{x}_n - \alpha = e_n - \frac{(\ell - 1)^2 e_n^2}{(\ell - 1)^2 e_n} = e_n - e_n + o(e_n) = o(e_n)$. (Calcul rigoureux : on utilise $e_{n+1} = \ell e_n + O(e_n^2)$ et on développe au second ordre.) $\square$

7.2 Méthode de Steffensen

On applique Aitken à chaque triplet $(x_n, g(x_n), g(g(x_n)))$:

$$y_n = g(x_n), \quad z_n = g(y_n), \quad x_{n+1} = x_n - \frac{(y_n - x_n)^2}{z_n - 2y_n + x_n}.$$

La méthode de Steffensen atteint la convergence quadratique sans calcul de dérivée.

7.3 Choisir la bonne itération g

Pour résoudre $f(x) = 0$, l'idéal est de construire g telle que $g'(\alpha) = 0$: on obtient alors l'ordre ≥ 2 . Newton réalise exactement cela avec $g(x) = x - f(x)/f'(x)$.

Méthode : Construction d'une itération d'ordre 2

Partant de $g_0(x) = x - f(x)/h(x)$ pour une fonction h à choisir, on calcule $g'_0(x) = 1 - \frac{f'(x)h(x) - f(x)h'(x)}{h(x)^2}$. On impose $g'_0(\alpha) = 0$, soit $f'(\alpha)h(\alpha) = 0$. Puisque $f(\alpha) = 0$, cela donne $h(\alpha) = f'(\alpha)$ (d'où le choix $h = f'$ de Newton).

8 Résumé comparatif

Méthode	Ordre	Calcul de f'	Garantie
Dichotomie	1 (raison 1/2)	Non	Oui (si f c.s.m.)
Point fixe ($ g' < k < 1$)	1	Non	Oui (contractant)
Sécante	$\approx 1,618$	Non	Locale
Newton	2	Oui	Locale
Steffensen	2	Non	Locale

Feuille d'exercices

Approximation des zéros de fonctions

Exercices progressifs, du plus simple au plus difficile. Les étoiles indiquent le niveau : ★ facile, ★★ intermédiaire, ★★★ difficile, ★★★★ très difficile.

Partie A – Localisation et dichotomie

Exercice 1 – Localisation graphique ★

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et calculer $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.
2. En déduire que f possède trois zéros réels et donner un intervalle de longueur 1 contenant chacun d'eux.
3. Justifier l'unicité du zéro dans chaque intervalle à l'aide de f' .

Exercice 2 – Dichotomie à la main ★

On cherche la solution de $f(x) = x^3 - 2 = 0$ sur $[1, 2]$.

1. Vérifier que $[1, 2]$ est un intervalle de séparation.
2. Effectuer trois itérations de la dichotomie et donner un encadrement de $\alpha = \sqrt[3]{2}$ à $\frac{1}{8}$ près.
3. Combien d'itérations faut-il pour obtenir α avec 6 décimales exactes (erreur $< 10^{-6}$) ?

Exercice 3 – Nombre d'itérations en dichotomie ★★

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(0)f(1) < 0$, avec un unique zéro $\alpha \in]0, 1[$.

1. Montrer que, après n itérations de la dichotomie, l'erreur vérifie $|m_n - \alpha| \leq 2^{-(n+1)}$.
2. En déduire le nombre d'itérations minimal N pour atteindre une précision 10^{-p} (p entier fixé).
3. Application : $p = 10$. Calculer N .

Partie B – Suites récurrentes et point fixe

Exercice 4 – Convergence d'une suite récurrente simple ★

On pose $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = \cos(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la suite est bien définie et que $x_n \in [0, 1]$ pour tout n .
2. Montrer que $g(x) = \cos(x)$ est contractante sur $[0, 1]$ (on admettra $|\sin(x)| \leq 1$, et on utilisera $|g'(x)| = |\sin x|$).
3. Conclure que (x_n) converge vers l'unique solution de $\cos(\alpha) = \alpha$ sur $[0, 1]$.
4. Calculer les cinq premières valeurs et estimer l'erreur après 10 itérations (ordre de grandeur).

Exercice 5 – Attractivité et répulsivité ★★

On considère l'équation $x = g(x)$ avec $g(x) = \frac{x^2 + 2}{3}$.

1. Trouver les points fixes de g .
2. Pour chaque point fixe α , calculer $g'(\alpha)$ et déterminer s'il est attractif ou répulsif.
3. Pour le point fixe attractif, montrer que g est contractante sur un intervalle convenable et en déduire la convergence de la suite $x_{n+1} = g(x_n)$ pour x_0 dans cet intervalle.
4. Quelle est la vitesse de convergence (ordre, constante) ?

Exercice 6 – Construction d'une itération convergente ★★

On cherche le zéro positif de $f(x) = e^x - 3x$ sur $[0, 2]$.

1. Montrer que f admet un unique zéro $\alpha \in]0, 1[$.
2. On propose l'itération $g_1(x) = \frac{e^x}{3}$. Étudier la convergence (attractivité, vitesse).
3. On propose $g_2(x) = \ln(3x)$ sur $]0, +\infty[$. Étudier la convergence.
4. Comparer et choisir la meilleure itération pour $x_0 = 0,5$.

Exercice 7 – Estimées a priori et a posteriori ★★

Soit $g(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$ ($a > 0$) sur $[\sqrt{a} - 1, \sqrt{a} + 1]$ (méthode de Héron pour $\sqrt{a}$).

1. Vérifier que $g(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$ et calculer $g'(\sqrt{a})$.
2. Quel est l'ordre de convergence ?
3. Pour $a = 3$ et $x_0 = 2$, calculer x_1, x_2, x_3 et observer la rapidité.
4. Majorer l'erreur $|x_n - \sqrt{3}|$ en fonction de n (estimée a priori).

Partie C – Méthode de Newton

Exercice 8 – Newton sur un exemple classique **

On applique Newton à $f(x) = x^2 - 5$ pour calculer $\sqrt{5}$.

1. Écrire la suite de Newton explicitement.
2. Montrer que pour $x_0 > 0$, la suite est décroissante et minorée par $\sqrt{5}$ après le rang 1.
3. Démontrer la convergence quadratique et calculer la constante asymptotique $C = |g''(\alpha)|/2$.
4. Calculer $x_0 = 2, x_1, x_2, x_3$ et vérifier le doublement des décimales.

Exercice 9 – Newton et zéro multiple

Soit $f(x) = (x - 1)^2$ et la suite de Newton $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$.

1. Calculer explicitement x_{n+1} en fonction de x_n . En déduire x_n en fonction de x_0 .
2. Montrer que la convergence est linéaire de rapport $\ell = 1/2$ (et non quadratique). Interpréter.
3. On modifie Newton en $x_{n+1} = x_n - m \cdot f(x_n)/f'(x_n)$ (m multiplicité du zéro). Montrer que pour $m = 2$, on retrouve la convergence quadratique.

Exercice 10 – Méthode de la sécante

Soit $f(x) = x^3 - x - 1$. On pose $x_0 = 1, x_1 = 2$.

1. Montrer que f admet un unique zéro réel $\alpha \in]1, 2[$.
2. Écrire la formule de la sécante et calculer x_2, x_3, x_4 .
3. Comparer la vitesse de convergence avec Newton (en utilisant les valeurs numériques).
4. Pourquoi la sécante est-elle préférable à Newton dans certains contextes pratiques ?

Partie D – Accélération et problèmes avancés

Exercice 11 – Procédé d'Aitken

Soit la suite définie par $x_0 = 0,5$ et $x_{n+1} = g(x_n)$ avec $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x+1}$.

1. Trouver le point fixe α de g et calculer $g'(\alpha)$.
2. Vérifier que la convergence est linéaire et calculer le rapport $\ell = g'(\alpha)$.
3. Calculer x_1, x_2, x_3, x_4 et appliquer le procédé d'Aitken pour obtenir $\tilde{x}_1$.
4. Vérifier numériquement que $|\tilde{x}_1 - \alpha| \ll |x_1 - \alpha|$.

Exercice 12 – Comparaison dichotomie / Newton

On cherche le zéro de $f(x) = x - \cos x$ sur $[0, \pi/2]$.

1. Montrer l'existence et l'unicité du zéro α .
2. Appliquer 5 itérations de la dichotomie à partir de $[0, \pi/2]$ et majorer l'erreur.
3. Appliquer 3 itérations de Newton à partir de $x_0 = \pi/4$. Comparer les précisions obtenues.
4. Quelle méthode est plus efficace ici ? Justifier en nombre de calculs de f nécessaires pour atteindre 10^{-8} .

Exercice 13 – Problème de synthèse : méthode de Newton modifiée ★★★

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ admettant un zéro simple α (i.e., $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) \neq 0$).

On définit la méthode de Newton modifiée par :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f(x_n)^2 f''(x_n)}{2(f'(x_n))^3}.$$

1. Montrer que $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f(x)^2 f''(x)}{2(f'(x))^3}$ est bien définie au voisinage de α .
2. Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$, $g'(\alpha) = 0$, $g''(\alpha) = 0$. En déduire l'ordre de convergence de la méthode.
3. Appliquer à $f(x) = x^3 - 2$ avec $x_0 = 1,5$: calculer x_1 et comparer à Newton simple.
4. Comment généraliser pour obtenir une méthode d'ordre 4 ? (Décrire la structure sans démonstration complète.)

Exercice 14 – Systèmes et Newton multidimensionnel – niveau MPSI+ ★★★

On cherche les solutions de $\begin{cases} f(x, y) = x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ g(x, y) = x - y^2 + 1 = 0 \end{cases}$

1. Interpréter géométriquement et trouver les solutions exactes.
2. La méthode de Newton en dimension 2 s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - J_F(x_n, y_n)^{-1} F(x_n, y_n),$$

où $F = (f, g)$ et J_F est la matrice jacobienne. Calculer J_F .

3. Partant de $(x_0, y_0) = (2, 1)$, calculer (x_1, y_1) .
4. Admettre que la convergence est quadratique et estimer le nombre d'itérations pour atteindre 10^{-8} de précision à partir d'une erreur initiale de 10^{-1} .

Exercice 15 – Étude complète d'une équation transcendante ★★★

Soit l'équation $f(x) = x e^x - 1 = 0$.

1. Montrer que f admet un unique zéro $\alpha \in]0, 1[$ et établir l'encadrement $\frac{1}{e} < \alpha < \frac{1}{2}$.
2. Appliquer la méthode de Newton avec $x_0 = \frac{1}{2}$. Calculer x_1, x_2, x_3 et donner α à 10^{-6} près.
3. Montrer que pour $x_0 \in [0, 1]$, la suite de Newton est bien définie et reste dans $[0, 1]$.
4. On s'intéresse au développement asymptotique de α . En posant $\alpha = c + \varepsilon$ avec $c = 1/e$, montrer à l'aide d'un développement limité que :

$$\alpha = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1+e} + O\left(\frac{1}{e^2}\right) \right).$$

(Indice : linéariser f autour de c .)

5. **(MPSI)** Montrer que $g(x) = \frac{1}{e^x}$ est contractante sur $[1/e, 1/2]$ et calculer l'estimée a posteriori après 5 itérations de point fixe.

Maths d'Afrique – Forum d'apprentissage en ligne
Gildas Mba Obiang, agrégé en mathématiques · 2025–2026

Tous droits réservés. Reproduction autorisée
à des fins pédagogiques non commerciales.