

Divisibilité dans \mathbb{Z}

Soient a et b deux entiers relatifs, b étant non nul. On dit que b divise a si et seulement si il existe un entier relatif k tel que $a = kb$. La phrase « a divise b » se note $a|b$.

Propriétés.

- Pour tout entier relatif non nul a , $a|a$.
- Pour tous entiers relatifs non nuls a , b et c , si $a|b$ et $b|c$ alors $a|c$.
- Soient a , b et c trois entiers relatifs, a étant non nul.
Si $a|b$ et $a|c$, alors pour tous entiers relatifs λ et μ , $a|(\lambda b + \mu c)$.

Division euclidienne dans \mathbb{N}

Soient a et b deux entiers naturels, b étant non nul. Il existe un couple (q, r) d'entiers naturels et un seul tel que

$$a = bq + r \text{ et } 0 \leq r < b.$$

q est le quotient et r le reste de la division euclidienne de a par b . q est la partie entière de $\frac{a}{b}$.

Congruences dans \mathbb{Z}

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soient a et b deux entiers relatifs.

On dit que a est congru à b modulo n si et seulement si $b - a$ est divisible par n . On écrit dans ce cas $a \equiv b \pmod{n}$ ou $a \equiv b \pmod{n}$.

Propriétés. Soit n un entier relatif supérieur ou égal à 2.

- Pour tout entier relatif a , $a \equiv a \pmod{n}$.
- Pour tous entiers relatifs a et b , si $a \equiv b \pmod{n}$ alors $b \equiv a \pmod{n}$.
- Pour tous entiers relatifs a , b et c , si $a \equiv b \pmod{n}$ et $b \equiv c \pmod{n}$ alors $a \equiv c \pmod{n}$.
- (Compatibilité avec l'addition) Pour tous entiers relatifs a , b et c , si $a \equiv b \pmod{n}$ alors $a + c \equiv b + c \pmod{n}$.
- (Compatibilité avec la multiplication) Pour tous entiers relatifs a , b et c , si $a \equiv b \pmod{n}$ alors $a \times c \equiv b \times c \pmod{n}$.

PGCD. Nombres premiers entre eux

Théorème et définition. Soient a et b deux entiers relatifs, a ou b étant non nul. L'ensemble des diviseurs communs à a et b admet un plus grand élément. Ce plus grand élément est le plus grand diviseur commun à a et b et se note $\text{PGCD}(a, b)$.

Théorème. Soient a et b deux entiers relatifs, a ou b étant non nul. Les diviseurs communs à a et b sont les diviseurs de leur PGCD.

Définition. Soient a et b deux entiers relatifs, a ou b étant non nul. a et b sont premiers entre eux si et seulement si leur PGCD est égal à 1.

Algorithme d'EUCLIDE. On a le résultat préliminaire suivant : si a et b sont deux entiers naturels non nuls tels que $b < a$ et si $a = bq + r$ où q et r sont deux entiers naturels tels que $0 \leq r < b$, alors $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, r)$.

On veut maintenant le PGCD de a et de b .

On pose la division euclidienne de a par b . Si $r = 0$, le PGCD de a et de b est $r_0 = r$.

Sinon, on pose la division euclidienne de b par $r_0 = r$: $b = q_1 r + r_1$ avec $0 \leq r_1 < r_0$. Si $r_1 = 0$ le PGCD de b et de r_0 est r_0 et donc le PGCD de a et de b est r_0 .

Sinon, on pose la division euclidienne de r_0 par $r_1 \dots$

Cette algorithme s'arrête quand on trouve un reste nul, ce qui se produit toujours. Le PGCD de a et b est le dernier reste non nul.

Nombres premiers. Décomposition en facteurs premiers

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. n est premier si et seulement si n admet exactement deux diviseurs entiers naturels à savoir 1 et n .

Théorème. Deux nombres premiers distincts sont premiers entre eux.

Théorème. Il existe une infinité de nombres premiers.

Théorème. Soient n un entier naturel non nul et p un nombre premier. Si p divise n , alors $\text{PGCD}(n, p) = p$ et si p ne divise pas n , alors $\text{PGCD}(n, p) = 1$.

Théorème fondamental de l'arithmétique. Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 se décompose en produit de nombres premiers. Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

Théorème. Soient a et b deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.

On suppose que $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ et $b = p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}$ où p_1, \dots, p_k sont k nombres premiers deux à deux distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_k$ sont des entiers naturels.

On note m_1 le plus petit des deux nombres α_1 et β_1 . On note m_2 le plus petit des deux nombres α_2 et β_2 ...

Le PGCD de a et b est $p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}$.

Exemple. $48 = 2^4 \times 3$ et $36 = 2^2 \times 3^2$. Donc $\text{PGCD}(36, 48) = 2^2 \times 3 = 12$.

Théorèmes de BÉZOUT et GAUSS

Théorème de BÉZOUT. Soient a et b deux entiers relatifs non nuls, l'un des deux entiers a ou b étant non nul. a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

Théorème de GAUSS. Soient a , b et c trois entiers relatifs, a et b étant non nuls.

Si a divise bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c .