

Cinématique du Point

○ Objectifs pédagogiques

- Définir la cinématique ;
- Définir les vecteurs position, vitesse et accélération d'un point mobile dans un repère donné ;
- Etablir l'expression des équations horaires des mouvements uniformes (rectiligne et circulaire) et des mouvements rectilignes uniformément variés. ;

Introduction

La cinématique d'un point est l'étude du mouvement de ce point dans le temps sans se préoccuper de sa cause.

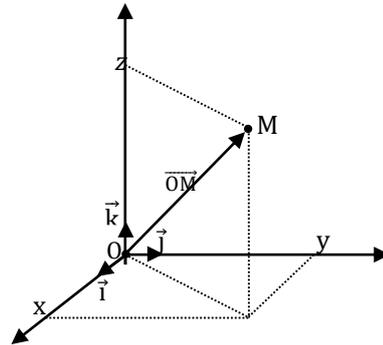
I. REPERAGE D'UN MOBILE

1. Position d'un mobile

Le vecteur position \overrightarrow{OM} est donné par :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

\overrightarrow{OM} détermine la position du mobile à l'instant t. x, y et z sont les coordonnées cartésiennes du point M.



- Si le mobile M est en mouvement x, y et z sont des fonctions du temps et constituent les équations horaires ou les équations paramétriques du mouvement du mobile.

$$M \text{ en mouvement} \Rightarrow \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$$

- Si le mobile est au repos, x, y et z sont constantes.

2. La trajectoire

La trajectoire d'un point mobile est l'ensemble des positions occupées par ce mobile au cours de son mouvement.

- La trajectoire peut être une droite \Rightarrow mouvement rectiligne ;
- elle peut être un cercle \Rightarrow mouvement circulaire ;
- elle peut aussi être une parabole \Rightarrow mouvement parabolique ;
- elle peut être une ellipse, une hélice...

3. Abscisse curviligne

L'arc $s(t) = \widehat{AM}$ définit l'abscisse curviligne du point M. A est l'origine des abscisses curvilignes.

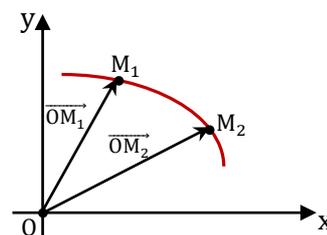


II. LA VITESSE DU MOBILE

1. Vitesse moyenne d'un mobile

Le vecteur vitesse moyenne entre les instants t_1 et t_2 est défini par la relation :

$$\vec{v}_{\text{moy}} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{t_2 - t_1}$$



* La vitesse moyenne est la distance parcourue par unité de temps. $v_{\text{moy}} = \frac{M_1 M_2}{t_2 - t_1}$.

2. Vitesse instantanée d'un mobile

a. Définition

Le vecteur vitesse instantanée est la dérivée par rapport au temps du vecteur position \overrightarrow{OM} .

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

○ Le vecteur vitesse instantanée est toujours tangente à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement.

b. Vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes

En coordonnées cartésiennes on par définition $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$

* Les coordonnées v_x , v_y et v_z de \vec{v} sont respectivement les dérivées par rapport au temps des coordonnées x , y et z du vecteur position.

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \\ v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \\ v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \end{cases}$$

* La norme de \vec{v} est donnée par la relation :

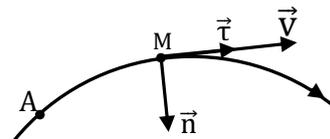
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

c. Vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes

La base de Frenet est une base mobile liée au mobile qui se déplace. Elle est formée de deux vecteurs unitaires :

- \vec{t} vecteur unitaire tangent à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement.
- \vec{n} vecteur unitaire orthogonal \vec{t} et orienté vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire.

$$\vec{v} = v \cdot \vec{t} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{t} \quad \text{avec} \quad v = \frac{ds}{dt}$$



III. VECTEUR ACCELERATION D'UN MOBILE

1. Définition

Le vecteur accélération \vec{a} d'un mobile est la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse à la date t considérée.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

2. Accélération en coordonnées cartésiennes

En coordonnées cartésiennes on par définition $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$

$$\text{avec} \quad \vec{a} \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} \end{cases}$$

* La norme de \vec{a} est donnée par :

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

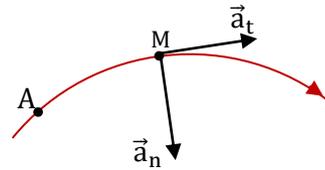
3. Accélération dans la base de Frenet

Dans la base de Frenet (\vec{t}, \vec{n}) on a : $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = a_t \vec{t} + a_n \vec{n}$

Avec : a_t : accélération tangentielle

a_n : accélération normale

$$\vec{a} \begin{cases} a_t = \frac{dv}{dt} \\ a_n = \frac{v^2}{\rho} \end{cases} \quad \text{où } \rho \text{ est le rayon de courbure de la trajectoire en M}$$



- Pour un cercle, $\rho = R = \text{cte}$

4. Allure d'un mouvement

- Si $\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$ alors le mouvement est accéléré ;
- Si $\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$ alors le mouvement est décéléré ou retardé ;
- Si $\vec{a} \cdot \vec{v} = 0$ alors le mouvement est uniforme et deux cas sont possibles :
 - $\vec{a} = \vec{0}$ alors le mouvement est rectiligne
 - $\vec{a} \perp \vec{v}$ alors le mouvement est circulaire.

IV. QUELQUES MOUVEMENTS PARTICULIERS

1. Les mouvements rectilignes



a. Mouvement rectiligne uniforme

Le mouvement d'un point mobile est rectiligne uniforme si :

- la trajectoire est une droite
- le vecteur vitesse est constant : $\vec{v} = \vec{v}_0 = \text{cte} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$

$$\text{MRU} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{0} \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{x} = \mathbf{v}_0 \mathbf{t} + \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

b. Mouvement rectiligne uniformément varié

Le mouvement d'un point mobile est rectiligne uniformément varié si :

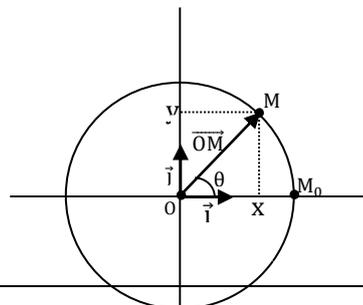
- la trajectoire est une droite
- le vecteur accélération est constant : $\vec{a} = \text{cte}$

Les paramètres du mouvement sont donnés par :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \text{cte} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{a} \mathbf{t} + \mathbf{v}_0 \Rightarrow \mathbf{a} = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_0}{\mathbf{t} - \mathbf{t}_0} \\ \mathbf{x} &= \frac{1}{2} \mathbf{a} \mathbf{t}^2 + \mathbf{v}_0 \mathbf{t} + \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{v}^2 - \mathbf{v}_0^2 &= 2\mathbf{a}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \Rightarrow \mathbf{a} = \frac{\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}_0^2}{2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)} \end{aligned}$$

2. Mouvement circulaire uniforme

a. Repérage d'un mobile sur un cercle



Un point mobile M est animé d'un mouvement circulaire uniforme si sa trajectoire est une droite et si sa vitesse est constante.

La position d'un point mobile M peut être défini par :

- L'abscisse angulaire θ tel que $\theta = (\overrightarrow{OM_0}; \overrightarrow{OM})$
- L'abscisse curviligne $s = \widehat{M_0M}$ tel que $s = r\theta$
- Ses coordonnées cartésiennes x et y telles que :

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$$

b. Vitesse angulaire et vitesse linéaire

Un mouvement circulaire uniforme est caractérisé par :

- La vitesse angulaire ω exprimée en rad/s : $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
- La vitesse linéaire \vec{v} qui est tangente à la trajectoire et orientée dans le sens du mouvement et qui s'exprime en m/s. $V = \frac{ds}{dt}$
- On montre que : $V = r \cdot \omega$

c. Accélération du mobile

Dans la base de Frenet $(\vec{t}; \vec{n})$ on a :

$$\vec{a} \begin{cases} a_t = \frac{dv}{dt} = 0 \\ a_n = \frac{v^2}{R} = R \cdot \omega^2 \end{cases}$$

Comme $a_t = 0$ alors $\vec{a} = a_n \vec{n}$.

On dit alors que le vecteur accélération d'un mobile animé d'un mouvement circulaire uniforme est centripète.

d. Equation horaire du mouvement

- * Equation horaire de l'abscisse curviligne : $s = vt + s_0$
- * Equation horaire angulaire : **MCU** $\Rightarrow \theta = \omega t + \theta_0$

Exercices sur la cinématique

Exercice 1

La position d'un mobile M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est donnée à chaque instant par le vecteur position \overrightarrow{OM} tel que : $\overrightarrow{OM} = (t^2 + 4t)\vec{i} + (t^2 + 2)\vec{j}$, avec $t > 0$.

- 1- Montrer que le mouvement est plan et préciser le plan du mouvement.
- 2- Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire.
- 3- Donner l'allure du mouvement

Exercice 2

1- Une moto M décrit une trajectoire rectiligne muni d'un repère d'espace $(O; \vec{i})$. Son vecteur accélération est constante pendant toute la durée du mouvement qui est fixée à $\Delta t = 5s$.

A l'instant $t = 0$, le mobile part du point M_0 d'abscisse $x_0 = -0,5m$ avec une vitesse $v_0 = -1m/s$; puis il passe au point M_1 d'abscisse $x_1 = 5m$ avec une vitesse $v_1 = 4,7m/s$.

- a) Calculer l'accélération a du mobile M.
- b) Calculer la date t_1 à laquelle le mobile passe au point M_1 .
- c) Donner l'équation horaire $x = f(t)$ du mouvement du mobile M.

2- A la date $T = 2s$ une voiture M' part du point M_1 d'un mouvement rectiligne uniforme dont la vitesse est $v' = 4m/s$.

- a) Calculer la date t_R de la rencontre des deux mobiles M et M'.
- b) Calculer l'abscisse x_R où aura lieu cette rencontre.

Exercice 3

Sur une portion rectiligne A, B, C et D de voie ferrée où s'effectue des travaux, un train arrivant en A avec une vitesse $v_A = 54km/h$ a la marche suivante :

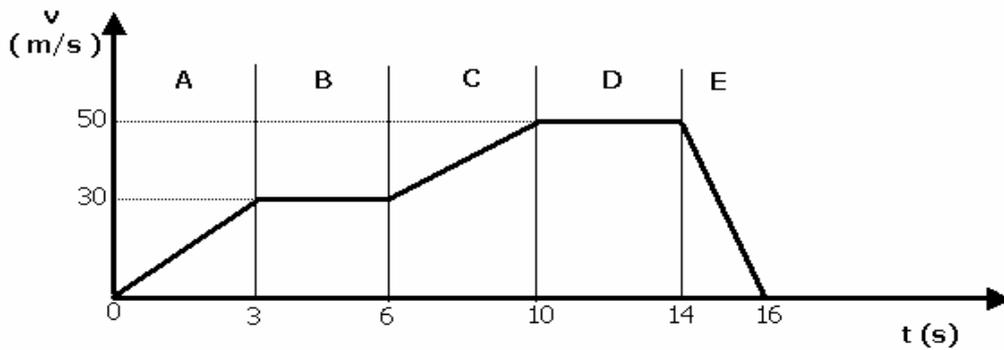
- De A à B tel que $AB = 125m$, un mouvement uniformément retardé réduisant la vitesse en à la valeur $v_B = 36km/h$.
- De B à C, pendant une minute, un mouvement uniforme.
- De C à D, un mouvement uniformément accéléré telle que la vitesse reprenne la valeur de $54km/h$ en 20 seconde.

1- En prenant pour origine des abscisses le point A, pour sens positif le sens de la marche et pour instant initial $t = 0$ l'instant de passage en A, déterminer les équations horaires $x = f(t)$ et les vitesses $v = g(t)$ des trois phases du mouvement.

- 2- Calculer de deux manières la distance parcourue de A à D.
- 3- Construire le graphe $v = g(t)$.

Exercice 4

- a) Quelle(s) section(s) de ce graphique représente(nt) un MRUA?
- b) Quel a été le déplacement du mobile de la sixième à la seizième seconde?
- c) Quelle a été la vitesse moyenne du mobile pour ce déplacement?
- d) Quelle a été l'accélération du mobile pour la section C?
- e) Quelle section de ce graphique présente la plus grande accélération?



Exercice 5

Dans un référentiel donné, on choisit un repère d'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et une date origine. Les coordonnées d'un point mobile M sont alors fournies par les équations horaires suivantes :

$$\begin{cases} x = r \cos \omega t \\ y = r \sin \omega t \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{avec } r = 2\text{m}; \quad \omega = \frac{\pi}{2} \text{rad/s}$$

- 1- a) Déterminer l'équation de la trajectoire du mobile M.
- b) Préciser la position du mobile M à la date origine.
- 2- Déterminer :
 - a) Les coordonnées et la mesure du vecteur vitesse \vec{v} .
 - b) Les coordonnées et la mesure du vecteur accélération \vec{a} .
 - c) La nature du mouvement du mobile M.
- 3- Montrer que le vecteur accélération \vec{a} et le vecteur position \overrightarrow{OM} sont colinéaires.
- 4- a) Etablir l'équation horaire de l'abscisse curviligne s du mobile M.
- b) Donner les coordonnées des vecteurs vitesse \vec{v} et accélération \vec{a} dans le repère locale de Frenet $(M, \vec{u}_t, \vec{u}_n)$.
- c) Calculer la période T et la fréquence N du mouvement du mobile M. Que représente la grandeur constante ω ?

MOUVEMENT DU CENTRE D'INERTIE D'UN SOLIDE

MOUVEMENT D'UNE PARTICULE SOUMISE A UNE FORCE CONSTANTE

I/MOUVEMENT DU CENTRE D'INERTIE D'UN SOLIDE

1-Rappel

1.1-Principe de l'inertie (1ère loi de Newton)

Dans un référentiel Galiléen, le centre d'inertie G d'un système isolé ou pseudo-isolé a un mouvement rectiligne uniforme ou est au repos.

1.2-Referentiel galiléen

Un référentiel dans lequel le principe de l'inertie est vérifié est un référentiel galiléen.

2. Relation fondamentale de la dynamique

2.1- Centre d'inertie

Soit S un solide de masse M constitué des points matériels A_1, A_2, \dots, A_i de masses respectives m_1, m_2, \dots, m_i . Si G est le centre d'inertie du solide, la relation barycentrique donne:

$$m_1 \overrightarrow{GA_1} + m_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + m_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{GO}(m_1 + m_2 + \dots + m_i) + m_1 \overrightarrow{OA_1} + m_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + m_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{0} \Rightarrow \sum m_i \overrightarrow{OG} = \sum m_i \overrightarrow{OA_i}$$

$$\Rightarrow M \overrightarrow{OG} = \sum m_i \overrightarrow{OA_i}$$

2.2. Quantite de mouvement

2.2.1. Quantite de mouvement d'un point materiel

Soit un point matériel A de masse m animé d'une vitesse \vec{v} . La quantité de mouvement du point A, notée p est donnée par la relation: $\vec{p} = m\vec{v}$. Elle s'exprime en kg.m/s.

2.2.2. Quantite de mouvement d'un solide

Un solide de masse M peut être décomposé en plusieurs points matériels A_i de masse m_i et de vecteur vitesse \vec{v}_i .

$$\vec{p} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i = \sum m_i \frac{d \overrightarrow{OA_i}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_i \overrightarrow{OA_i} = \frac{d}{dt} M \overrightarrow{OG} \Rightarrow \vec{p} = M \frac{d}{dt} \overrightarrow{OG} = M \vec{V}_G$$

$$\vec{p} = M \vec{V}_G \quad \text{où } \vec{V}_G \text{ est la vitesse du centre d'inertie du solide.}$$

2.3- Enoncé de la relation fondamentale de la dynamique

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un solide est égale à la dérivée par rapport au temps du vecteur quantité de mouvement du solide à cet instant : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

2.4-Théorème du centre d'inertie (2ème loi de Newton)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dM\vec{V}_G}{dt} = M\vec{a}_G \Rightarrow \sum \vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_G$$

Dans un référentiel galiléen, la somme des forces appliquées à un solide est égale au produit de la masse m par le vecteur accélération \vec{a}_G de son centre d'inertie :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}_G$$

2.5- Théorème de l'énergie cinétique

Soit un solide S en mouvement sous l'influence des forces $\sum \vec{F}_{\text{ext}}$.

$$\delta W = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \delta W = m\vec{a}_G \cdot d\vec{l} \text{ car } \sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}_G$$

$$= m \frac{d\vec{V}_G}{dt} \cdot d\vec{l} \text{ or } d\vec{l} = \vec{V}_G \cdot dt$$

$$= m \frac{d\vec{V}_G}{dt} \cdot (\vec{V}_G \cdot dt)$$

$$= m d\vec{V}_G \cdot \vec{V}_G$$

$$= d\left(\frac{1}{2} m \vec{V}_G^2\right)$$

$$\delta W = dE_c \Rightarrow \Delta E_c = \sum W_{1 \rightarrow 2}^{\vec{F}_{\text{ext}}}$$

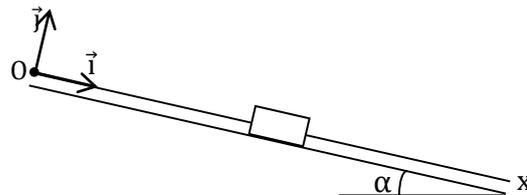
Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un solide entre deux instants est égale au travail des forces appliquées à ce solide entre ces deux instants. $\Delta E_c = \sum W_{1 \rightarrow 2}^{\vec{F}_{ext}}$

II- Applications

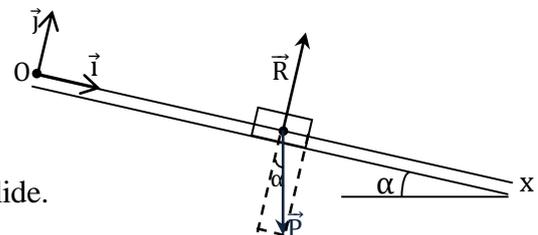
1. Applications aux mouvements rectilignes

a. Mouvement sans frottements sur un plan incliné

Un mobile de masse $m = 100\text{kg}$, assimilable à un point matériel M , glisse sans frottements sur un plan incliné d'un angle α avec l'horizontale. Le mouvement de translation se fait suivant une ligne de plus grande pente du plan, parallèle à l'axe (O, \vec{i}) d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .



- 1- Faire un schéma et représenter les forces extérieures appliquées à ce solide.
- 2- a) Compte tenu de la direction et du sens du mouvement, préciser l'orientation du vecteur accélération \vec{a} .
b) Exprimer le vecteur accélération \vec{a} en fonction de g et α . En déduire la nature du mouvement du solide.
- 3- La vitesse initiale est $v_0 \vec{i}$.
a) Montrer que le vecteur position \vec{OM} peut se mettre sous la forme : $\vec{OM} = \beta t^2 \vec{i} + t \vec{v}_0$. Préciser β et la position du mobile à l'origine des dates.
b) En déduire les équations horaires du mouvement du mobile dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- 4- Calculer la vitesse acquise après un déplacement de longueur $L = 1\text{m}$ avec $v_0 = 2\text{ m/s}$, $\alpha = 10^\circ$ et $g = 9,8\text{ N/kg}$.



Solution

- 1- Représentation des forces extérieures appliquées à ce solide.

$$\vec{F}_{ext} \begin{cases} \vec{P} \\ \vec{R} \end{cases}$$

- 2- a) Orientation du vecteur accélération \vec{a}

$$\vec{a} = a \cdot \vec{i} \quad \text{donc } \vec{a} \text{ et } \vec{i} \text{ ont même direction et même sens.}$$

- b) Expression de \vec{a} en fonction de g et α .

$$\text{TCI} \Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = m \cdot \vec{a}$$

$$\text{Proj}/x : P \sin \alpha + 0 = m \cdot a \Rightarrow a = g \sin \alpha \quad \text{d'où } \vec{a} = (g \sin \alpha) \cdot \vec{i}$$

$$a = g \sin \alpha > 0 \Rightarrow \text{Le mouvement est rectiligne uniformément accéléré.}$$

- 3-a) Montrons que $\vec{OM} = \beta t^2 \vec{i} + t \vec{v}_0$.

$$\vec{a} = (g \sin \alpha) \cdot \vec{i} = \text{cte} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = \text{cte} \Rightarrow \vec{V} = \vec{a} \cdot t + \text{cte}$$

$$\text{A } t = 0 \text{ on a } \vec{V} = \vec{V}_0 \quad \text{donc } \vec{V}_0 = \vec{a} \times 0 + \text{cte} \Rightarrow \text{cte} = \vec{V}_0 \quad \text{soit } \vec{V} = \vec{a} \cdot t + \vec{V}_0$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{a} \cdot t + \vec{V}_0 \quad \text{donc } \vec{OM} = \frac{1}{2} \cdot \vec{a} \cdot t^2 + \vec{V}_0 \cdot t + \text{cte.}$$

$$\text{A } t = 0 \text{ on a } \vec{OM} = \vec{OO} = \vec{0} \quad \text{donc } \frac{1}{2} \cdot \vec{a} \times 0 + \vec{V}_0 \times 0 + \text{cte} = \vec{0} \Rightarrow \text{cte} = \vec{0}$$

$$\text{soit } \vec{OM} = \frac{1}{2} \cdot \vec{a} \cdot t^2 + \vec{V}_0 \cdot t$$

$$\text{Comme } \vec{a} = (g \sin \alpha) \cdot \vec{i} \quad \text{alors } \vec{OM} = \frac{1}{2} \cdot (g \sin \alpha) \cdot t^2 \cdot \vec{i} + \vec{V}_0 \cdot t$$

donc $\vec{OM} = \beta t^2 \vec{i} + t \vec{V}_0$ avec $\beta = \frac{1}{2} \cdot (g \sin \alpha)$ et à $t = 0$ le mobile est à l'origine O du repère.

b) Equations horaires du mouvement du mobile

$$\vec{OM} = \beta t^2 \vec{i} + t \vec{V}_0 \Rightarrow x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} = \beta t^2 \cdot \vec{i} + V_0 \cdot t \cdot \vec{i} \Leftrightarrow x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} = (\beta t^2 + V_0 \cdot t) \cdot \vec{i}$$

$$\text{donc } \begin{cases} x = \beta t^2 + V_0 \cdot t = \frac{1}{2} \cdot (g \sin \alpha) \cdot t^2 + V_0 \cdot t \\ y = 0 \end{cases}$$

4- Vitesse V acquise par le solide.

$$V^2 - V_0^2 = 2 \cdot a \cdot L \Rightarrow V^2 = V_0^2 + 2 \cdot a \cdot L \text{ donc } V^2 = V_0^2 + 2gL \sin \alpha \text{ d'où } V = \sqrt{V_0^2 + 2gL \sin \alpha}$$

$$\text{A.N : } V = \sqrt{2^2 + 2 \times 9,8 \times 1 \times \sin 10^\circ} \Rightarrow V = 2,72 \text{ m/s}$$

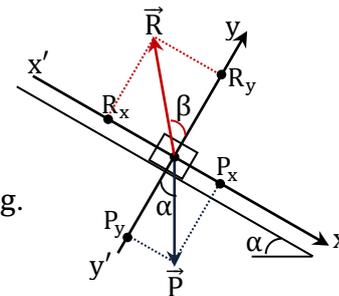
b. Mouvement avec frottements sur un plan incliné

Un objet de masse $m = 20 \text{ kg}$ glisse sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 30^\circ$ avec l'horizontale. La somme \vec{R} , supposée constante, des forces de contact réparties en surface exercées par le plan sur l'objet fait un angle β avec la normale au plan

1- Exprimer le vecteur accélération du mobile en fonction de α , β , m , R et g .

2- Lâché sans vitesse initiale, le mobile parcourt une distance $L = 5 \text{ m}$ en une durée $t = 1,7 \text{ s}$. Calculer l'accélération en prenant $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

3- Calculer l'angle β et la norme de la réaction \vec{R} .



Solution

1- Expression du vecteur accélération \vec{a} en fonction de α , β , m , R et g .

$$\vec{F}_{\text{ext}} \begin{vmatrix} \vec{P} \\ \vec{R} \end{vmatrix}$$

Le mouvement est rectiligne suivant l'axe ($x'x$) ; donc $a_y = 0$.

$$\text{TCI : } m \cdot \vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$$

$$\text{Proj/x : } m \cdot a_x = P_x + R_x \Rightarrow m \cdot a_x = mg \sin \alpha - R \sin \beta \text{ donc } a_x = g \sin \alpha - \frac{R}{m} \sin \beta$$

$$\text{D'où : } \begin{cases} a_x = g \sin \alpha - \frac{R}{m} \sin \beta \\ a_y = 0 \end{cases}$$

2- Calcul de l'accélération a.

Pour $V_0 = 0$, on a : à $t = 1,7 \text{ s}$, $L = x - x_0 = 5 \text{ m}$.

$$L = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow a = \frac{2L}{t^2} \quad \text{A.N : } a = \frac{2 \times 5}{1,7^2} \Rightarrow a = 3,46 \text{ m/s}^2$$

3- Calcul de l'angle β et de la norme R de la réaction \vec{R}

$$\text{TCI : } m \cdot \vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$$

$$\text{Proj/x : } m \cdot a_x = P_x + R_x \Rightarrow m \cdot a_x = mg \sin \alpha - R \sin \beta \text{ donc } R \sin \beta = m(g \sin \alpha - a)$$

$$\text{Proj/y : } m \cdot a_y = P_y + R_y \Rightarrow -mg \cos \alpha + R \cos \beta = 0 \text{ donc } R \cos \beta = mg \cos \alpha$$

$$\frac{R \sin \beta}{R \cos \beta} = \frac{m(g \sin \alpha - a)}{mg \cos \alpha} \Rightarrow \tan \beta = \frac{(g \sin \alpha - a)}{g \cos \alpha} \text{ d'où } \beta = \tan^{-1} \left(\frac{g \sin \alpha - a}{g \cos \alpha} \right)$$

$$\text{A.N : } \beta = \tan^{-1} \left(\frac{10 \times \sin 30^\circ - 3,46}{10 \times \cos 30^\circ} \right) \text{ d'où } \beta = 10^\circ$$

$$R \cos \beta = mg \cos \alpha \Rightarrow R = \frac{mg \cos \alpha}{\cos \beta}$$

$$\text{A.N : } R = \frac{20 \times 10 \times \cos 30^\circ}{\cos 10^\circ} \quad \text{d'où } R = 176 \text{ N}$$

c. Nécessité de bien préciser le solide auquel on applique la relation $\Sigma \vec{f} = m\vec{a}$

Une automobile de masse $m_1 = 1 \text{ t}$, tracte une caravane de masse $m_2 = 2 \text{ t}$. Les forces de résistance à l'avancement (frottements de l'air sur les carrosseries) équivalent pour chacun des véhicules à des forces \vec{f}_1 et \vec{f}_2 parallèles à la route dirigées en sens inverse du mouvement et d'intensité constante $f_1 = 100 \text{ N}$ et $f_2 = 200 \text{ N}$. On prendra $g = 9,8 \text{ N/kg}$.

1- la route est rectiligne et horizontale.

a) Le convoi roule à la vitesse $v = 72 \text{ km/h}$.

Déterminer la force motrice créée par le moteur. L'intensité de cette force dépend-elle de la vitesse ?

Quelle est la puissance du moteur dans ces conditions ? Dépend-elle de la vitesse ?

b) le convoi démarre d'un mouvement uniformément accéléré et sa vitesse passe de 0 à 72 km/h après un parcours de 2 km .

Déterminer la nouvelle valeur de la force motrice développée par le moteur.

Quelle est sa puissance à l'instant t compter à partir du début du mouvement.

2- Déterminer dans les deux cas précédents la force de traction \vec{T} exercée par l'automobile sur la caravane.

3- Le convoi aborde une portion rectiligne de pente 3% à la vitesse constante $v = 72 \text{ km/h}$.

a) Quelle est la valeur de la force de traction \vec{T} exercée par l'automobile sur la caravane ?

b) Même question si on désire obtenir le même mouvement de démarrage qu'à la question 1-b).

Solution

1- a) Valeur de la force motrice \vec{F}

La force motrice \vec{F} permet de faire déplacer l'automobile et la caravane. On applique le TCI au système formé par l'automobile et la caravane.

$$\vec{F}_{\text{ext}} (\vec{P}_1 ; \vec{P}_2 ; \vec{R}_{N1} ; \vec{R}_{N2} ; \vec{f}_1 ; \vec{f}_2 ; \vec{F})$$

$$\text{PI : } \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{R}_{N1} + \vec{R}_{N2} + \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{Proj}/\vec{F} : -f_1 - f_2 + F = 0 \Rightarrow F = f_1 + f_2$$

F ne dépend donc pas de la vitesse.

o Puissance de \vec{F}

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{V} = F \cdot V \quad \text{A.N : } \mathcal{P} = 300 \times 20 \quad \mathcal{P} = 6000 \text{ W}$$

\mathcal{P} dépend de la vitesse.

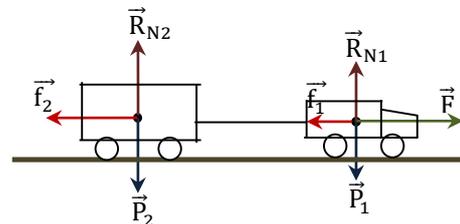
b) Nouvelle valeur de la force motrice

$$\text{TCI : } \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{R}_{N1} + \vec{R}_{N2} + \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{F} = (m_1 + m_2) \cdot \vec{a}$$

$$\text{Proj}/\vec{F} : -f_1 - f_2 + F = (m_1 + m_2) \cdot a \Rightarrow F = (m_1 + m_2) \cdot a + f_1 + f_2$$

$$\text{Or } a = \frac{v^2}{2L} = 0,1 \text{ m/s}^2 \quad \text{donc } F = \frac{(m_1 + m_2) \cdot v^2}{2L} + f_1 + f_2$$

$$\text{A.N : } F = \frac{(1000 + 2000) \times 20^2}{2 \times 2000} + 100 + 200 \quad F = 600 \text{ N}$$



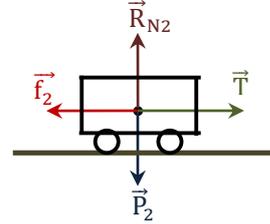
- Puissance de \vec{F} à l'instant t

$$\mathcal{P} = F \times V \quad \text{or } V = at + V_0$$

$$V_0 = 0 \Rightarrow V = at \quad \text{d'où } \mathcal{P} = a \cdot F \cdot t \quad \text{A.N : } \mathcal{P} = 0,1 \times 600 \times t \quad \mathcal{P} = 60t$$

2- Calcul de la traction T

\vec{T} s'exerce uniquement sur la caravane. On applique le TCI au système formé par la caravane.



- Premier cas : MRU

$$\text{PI : } \vec{P}_2 + \vec{R}_{N2} + \vec{f}_2 + \vec{T} = \vec{0}$$

$$\text{Proj}/\vec{T} : -f_2 + T = 0 \Rightarrow T = f_2 \quad \text{A.N : } T = 200\text{N}$$

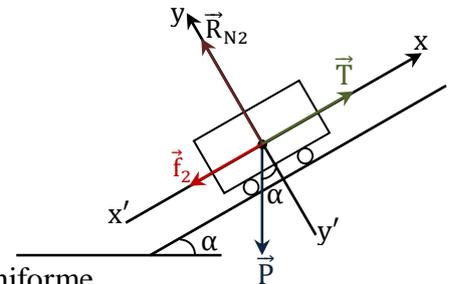
- Premier cas : MRU

$$\text{TCI : } \vec{P}_2 + \vec{R}_{N2} + \vec{f}_2 + \vec{T} = m_2 \cdot \vec{a}$$

$$\text{Proj}/\vec{F} : -f_2 + F = m_2 \cdot a \Rightarrow T = m_2 \cdot a + f_2$$

$$\text{Or } a = \frac{v^2}{2L} = 0,1\text{m/s} \quad \text{donc } F = \frac{m_2 \cdot v^2}{2L} + f_2$$

$$\text{A.N : } F = \frac{2000 \times 20^2}{2 \times 2000} + 200 \quad F = 400\text{N}$$



3- a) Valeur de la force de traction \vec{T} pour le mouvement rectiligne uniforme.

$$\text{PI : } \vec{P}_2 + \vec{R}_{N2} + \vec{f}_2 + \vec{T} = \vec{0}$$

$$\text{Proj}/x : -m_2 g \sin \alpha - f_2 + T = 0 \Rightarrow T = m_2 g \sin \alpha + f_2$$

$$\text{A.N : } \sin \alpha = 0,03 \Rightarrow T = 788\text{N}$$

b) Valeur de la force de traction \vec{T} pour le mouvement rectiligne uniformément varié.

$$\text{TCI : } \vec{P}_2 + \vec{R}_{N2} + \vec{f}_2 + \vec{T} = m_2 \cdot \vec{a}$$

$$\text{Proj}/x : -m_2 g \sin \alpha - f_2 + T = m_2 a \Rightarrow T = m_2 (a + g \sin \alpha) + f_2$$

$$\text{A.N : } T = 2000 \times (0,1 + 9,8 \times 0,03) + 200 \Rightarrow T = 988\text{N}$$

d. Pendule simple dans un véhicule.

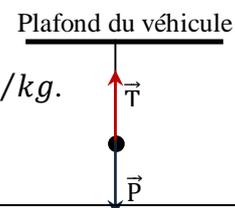
On constitue un accéléromètre en fixant, au plafond d'un bus « La Poste », un fil de masse négligeable qui soutient une petite masselotte de masse m .

1- Le bus démarre d'un mouvement uniformément accéléré.

- Dans quel sens le fil de l'accéléromètre dévie-t-il ?
 - Calculer l'accélération a_1 du mouvement de démarrage sachant que le fil a dévié de $\alpha_1 = 13^\circ$
- 2- Lorsque le bus est lancé, d'un mouvement uniforme, à la vitesse $v = 72 \text{ km/h}$, comment se place le fil ?
- 3- Le bus passe de la vitesse $v = 72 \text{ km/h}$ à la vitesse nulle, d'un mouvement uniformément retardé en une durée $\Delta t = 10\text{s}$.

a) Dans quel sens dévie maintenant le fil de l'accéléromètre ?

b) Calculer l'angle α_2 qu'il forme avec la verticale. On prendra $g = 9,8 \text{ N/kg}$.



Solution

1- Mouvement uniformément accéléré.

a) Sens de déviation du pendule

Le mouvement étant rectiligne uniformément accéléré alors le vecteur accélération \vec{a} et le vecteur vitesse \vec{V} sont colinéaires et de même sens.

$$\vec{F}_{\text{ext}} \left| \begin{array}{l} \vec{P} \\ \vec{T} \end{array} \right.$$

$$\text{TCI : } \vec{P} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}$$

Les vecteurs $\vec{P} + \vec{T}$ et \vec{a} sont colinéaires de même sens ; donc le pendule doit dévier vers l'arrière du bus.

b) Calcul de l'accélération a_1

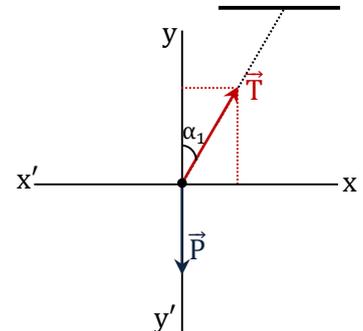
$$\text{TCI : } \vec{P} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}_1$$

$$\text{Proj/x : } T \sin \alpha_1 = m a_1$$

$$\text{Proj/y : } -mg + T \cos \alpha_1 = 0 \Rightarrow T \cos \alpha_1 = mg$$

$$\text{Donc } \frac{T \sin \alpha_1}{T \cos \alpha_1} = \frac{m a_1}{mg} \Leftrightarrow \tan \alpha_1 = \frac{a_1}{g} \Rightarrow a_1 = g \tan \alpha_1$$

$$\text{A.N : } a_1 = 9,8 \times \tan 13^\circ \Rightarrow a_1 = 2,26 \text{ m/s}^2$$



2- Mouvement rectiligne uniforme

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0} \Rightarrow \vec{T} = -\vec{P} \text{ donc le pendule est vertical.}$$

3- Mouvement rectiligne uniformément retardé.

a) Sens de déviation du pendule

Le mouvement étant rectiligne uniformément retardé alors le vecteur accélération \vec{a} et le vecteur vitesse \vec{V} sont colinéaires et de sens contraire.

$$\vec{F}_{\text{ext}} \left| \begin{array}{l} \vec{P} \\ \vec{T} \end{array} \right.$$

$$\text{TCI : } \vec{P} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}$$

Les vecteurs $\vec{P} + \vec{T}$ et \vec{a} sont colinéaires de même sens ; donc le pendule doit dévier vers l'avant du bus.

b) Calcul de l'angle de déviation α_2

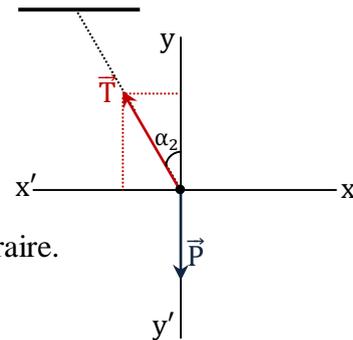
$$\text{TCI : } \vec{P} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}_2$$

$$\text{Proj/x : } -T \sin \alpha_2 = m a_2$$

$$\text{Proj/y : } -mg + T \cos \alpha_2 = 0 \Rightarrow T \cos \alpha_2 = mg$$

$$\text{Donc } \frac{-T \sin \alpha_2}{T \cos \alpha_2} = \frac{-m a_2}{mg} \Leftrightarrow \tan \alpha_2 = -\frac{a_2}{g} \text{ or } a_2 = -\frac{v}{\Delta t} \Rightarrow \tan \alpha_2 = \frac{v}{g \times \Delta t} \Rightarrow \alpha_2 = \tan^{-1} \left(\frac{v}{g \times \Delta t} \right)$$

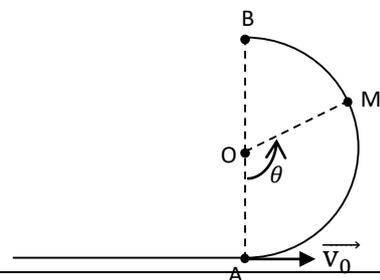
$$\text{A.N : } \alpha_2 = \tan^{-1} \left(\frac{20}{9,8 \times 10} \right) \quad \alpha_2 = 11,53^\circ$$



2. Applications au mouvement circulaire uniforme

a. Réaction d'une glissière circulaire

Un solide ponctuel de masse m est lancé avec une vitesse \vec{V}_0 sur une glissière circulaire de rayon r et de centre O . Les frottements sont négligeables. La position du mobile sur



la portion de trajectoire est repérée par l'angle $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.

- 1- Exprimer la vitesse V_M du solide au point M en fonction de V_0, r, g et θ .
- 2- Déterminer dans le repère de Frenet $(M, \vec{u}_t, \vec{u}_n)$ les coordonnées a_t et a_n du vecteur accélération \vec{a} .
- 3- Exprimer la norme R de la réaction \vec{R} de la glissière sur le solide.
- 4- Quelle est la valeur minimale V_{0m} de V_0 pour que le solide atteigne le point B de la trajectoire sans se détacher de celle-ci ? Quelle est alors la vitesse en B ?

Solution

1- Expression de la vitesse V_M du solide au point M.

$$\vec{F}_{\text{ext}} \begin{cases} \vec{P} \\ \vec{R} \end{cases}$$

TEC entre A et M :

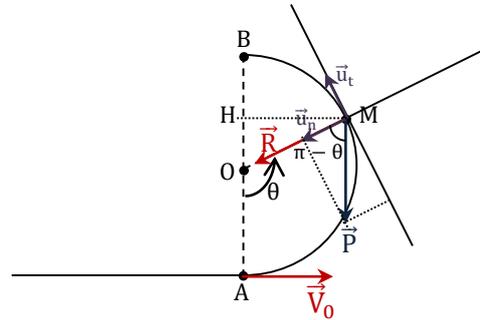
$$\frac{1}{2}mV_M^2 - \frac{1}{2}mV_0^2 = W_{AB}(\vec{P}) + W_{AB}(\vec{R})$$

$$\frac{1}{2}m(V_M^2 - V_0^2) = -mg \times AH$$

Or $AH = OA + OH = r + r\cos(\pi - \theta) = r(1 - \cos\theta)$ car $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

$$\text{Donc } \frac{1}{2}m(V_M^2 - V_0^2) = -mgr(1 - \cos\theta) \Rightarrow V_M^2 = V_0^2 - 2gr(1 - \cos\theta)$$

$$\text{D'où } V_M = \sqrt{V_0^2 - 2gr(1 - \cos\theta)}$$



2- Expressions des coordonnées a_t et a_n du vecteur accélération \vec{a} dans le repère de Frenet $(M, \vec{u}_t, \vec{u}_n)$.

$$\vec{a} \begin{cases} a_t = \frac{dV_M}{dt} \\ a_n = \frac{V_M^2}{r} \end{cases}$$

$$\text{TCI : } \vec{P} + \vec{R} = m \cdot \vec{a}$$

$$\text{Proj}/\vec{u}_t : ma_t = -mg\sin(\pi - \theta) + 0 \Rightarrow ma_t = -mg\sin\theta \text{ car } \sin(\pi - \theta) = \sin\theta$$

$$\text{Donc } a_t = -g\sin\theta$$

$$a_n = \frac{V_M^2}{r} \text{ et } V_M^2 = V_0^2 - 2gr(1 - \cos\theta) \text{ donc } a_n = \frac{V_0^2}{r} - 2g(1 - \cos\theta)$$

$$\text{D'où } \vec{a} \begin{cases} a_t = -g\sin\theta \\ a_n = \frac{V_0^2}{r} - 2g(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

3- Expression de la norme R de la réaction \vec{R} de la glissière sur le solide.

$$\text{TCI : } \vec{P} + \vec{R} = m \cdot \vec{a}$$

$$\begin{aligned} \text{Proj}/\vec{u}_n : mg\cos(\pi - \theta) + R &= ma_n \Rightarrow -mg\cos\theta + R = m\frac{V_0^2}{r} - 2g(1 - \cos\theta) \\ &\Rightarrow R = m\left[\frac{V_0^2}{r} + g(-2 + 2\cos\theta + \cos\theta)\right] \end{aligned}$$

$$\text{D'où } R = m\left[\frac{V_0^2}{r} + g(3\cos\theta - 2)\right]$$

4- Valeur minimale V_{0m} de V_0 pour que le solide atteigne le point B de la trajectoire sans se détacher de celle-ci.

$$\text{Condition : } \theta = \pi \Rightarrow R > 0$$

$$\theta = \pi \Rightarrow R = m\left[\frac{V_0^2}{r} + g(3\cos\pi - 2)\right] = m\left(\frac{V_0^2}{r} - 5g\right)$$

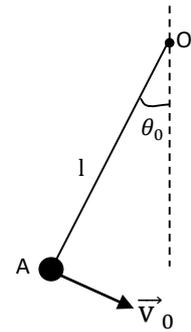
$$R > 0 \Rightarrow \frac{V_0^2}{r} - 5g > 0 \Leftrightarrow V_0^2 > 5gr \text{ soit } V_0 > \sqrt{5gr} \quad \text{d'où } V_{0m} = \sqrt{5gr}$$

- o La vitesse V_B en B.

$$V_0^2 > 5gr \Rightarrow V_B = \sqrt{5gr - 2gr(1 - \cos\pi)} = \sqrt{5gr - 4gr} \text{ d'où } V_B = \sqrt{gr}$$

b. Dynamique du mouvement d'un pendule simple

Une bille de masse m est suspendue en un point O par un fil inextensible de longueur L et de masse négligeable. Le pendule ainsi constitué est écarté de la verticale d'un angle θ_0 . On lance alors la bille fil tendu, avec un vecteur vitesse \vec{V}_0 tangent au cercle de centre O et de rayon L , dirigé vers le bas.



La position du pendule est repérée par l'angle θ d'inclinaison du fil avec la verticale, au cours du mouvement.

1- Exprimer les coordonnées du vecteur accélération \vec{a} dans la base de Frenet à l'instant t en fonction de v_0, g, l, θ et θ_0 .

2- En déduire l'expression de la norme T de la tension \vec{T} du fil en fonction de m, v_0, g, l, θ et θ_0 .

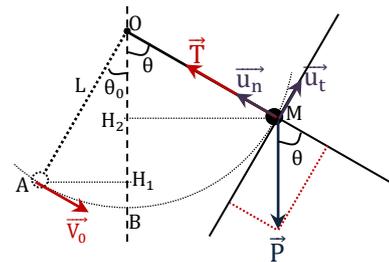
3- Calculer la valeur minimale V_{0m} de la norme de \vec{V}_0 pour que la bille effectue un tour complet, le fil devant resté tendu au cours du mouvement.

Solution

1- Expressions des coordonnées a_t et a_n du vecteur accélération \vec{a} dans le repère de Frenet $(M, \vec{u}_t, \vec{u}_n)$.

$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_t = \frac{dV_M}{dt} \\ a_n = \frac{V_M^2}{r} \end{array} \right.$$

$$\vec{F}_{\text{ext}} \left| \begin{array}{l} \vec{P} \\ \vec{T} \end{array} \right.$$



TEC entre A et M :

$$\frac{1}{2}mV_M^2 - \frac{1}{2}mV_0^2 = W_{AM}(\vec{P}) + W_{AM}(\vec{T}) = mgBH_1 - mgBH_2 = -mgH_1H_2$$

$$\frac{1}{2}mV_M^2 - \frac{1}{2}mV_0^2 = -mg(OH_1 - OH_2) = -mg(L\cos\theta_0 - L\cos\theta)$$

$$V_M^2 = V_0^2 + 2gL(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

$$\text{TCI : } \vec{P} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}$$

$$\text{Proj}/\vec{u}_t : ma_t = -mg\sin\theta + 0 \Rightarrow ma_t = -mg\sin\theta \Rightarrow a_t = -g\sin\theta$$

$$a_n = \frac{V_M^2}{r} \text{ et } V_M^2 = V_0^2 + 2gL(\cos\theta - \cos\theta_0) \text{ donc } a_n = \frac{v_0^2}{L} - 2g(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_t = -g\sin\theta \\ a_n = \frac{v_0^2}{L} - 2g(\cos\theta - \cos\theta_0) \end{array} \right.$$

2- Expression de la norme T de la tension \vec{T} du fil en fonction de m, v_0, g, l, θ et θ_0 .

$$\text{TCI : } \vec{P} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}$$

$$\text{Proj}/\vec{u}_n : mg\cos\theta + T = ma_n \Rightarrow T = m \left[\frac{v_0^2}{L} - 2g(\cos\theta - \cos\theta_0) \right] + mg\cos\theta$$

$$\text{D'où } T = m \left[\frac{v_0^2}{L} + g(3\cos\theta - 2\cos\theta_0) \right]$$

3- valeur minimale v_{0m} de la norme de \vec{v}_0 pour que la bille effectue un mouvement révolutif.

$$\text{Condition : } \theta = \pi \Rightarrow T > 0$$

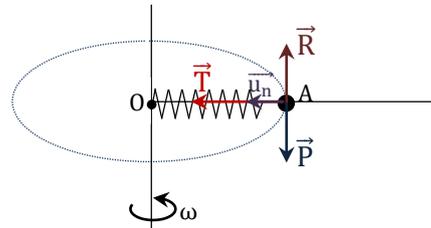
$$\theta = \pi \Rightarrow R = m \left[\frac{v_0^2}{L} + g(3\cos\pi - 2\cos\theta_0) \right] = m \left[\frac{v_0^2}{r} - g(2\cos\theta_0 + 3) \right]$$

$$T > 0 \Rightarrow \frac{v_0^2}{r} - g(2\cos\theta_0 + 3) > 0 \Leftrightarrow v_0^2 > gL(3 + 2\cos\theta_0) \text{ soit } v_0 > \sqrt{gL(3 + 2\cos\theta_0)}$$

$$\text{d'où } v_{0m} = \sqrt{gL(3 + 2\cos\theta_0)}$$

c. Système masse-ressort

Ressort $\left\{ \begin{array}{l} k = \text{Constante de raideur} \\ L_0 = \text{Longueur à vide} \end{array} \right.$



Lorsque le ressort tourne à la vitesse angulaire ω le ressort est étiré et sa longueur devient L. Calculons L :

$$\vec{F}_{\text{ext}} \left\{ \begin{array}{l} \vec{P} \\ \vec{T} \\ \vec{R} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{TCI : } \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m \cdot \vec{a} \quad \text{Proj}/\vec{u}_n : T = ma_n \\ \text{Or } T = k(L - L_0) \text{ et } a_n = \frac{v^2}{OA} = L\omega^2 \text{ avec } OA = L. \\ T = ma_n \Rightarrow k(L - L_0) = mL\omega^2 \Leftrightarrow kL - mL\omega^2 = kL_0 \text{ d'où } L = \frac{kL_0}{k - m\omega^2} \end{array}$$

La longueur L du ressort en mouvement dépend donc de la vitesse angulaire ω du mouvement.

d. Le pendule conique

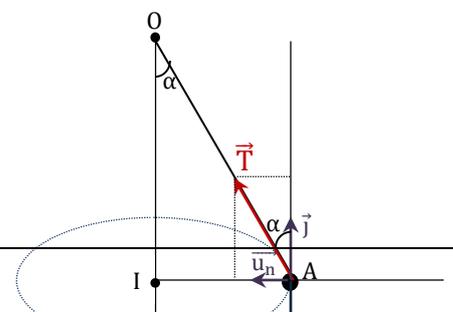
Un solide métallique de faibles dimensions et de masse $m = 20\text{g}$ est suspendu à l'extrémité d'un fil de masse négligeable et de longueur $L = 50\text{cm}$. L'autre extrémité du fil est fixée en un point O d'un axe vertical (Δ). Lorsque cet axe tourne à une vitesse angulaire suffisante, le fil s'incline et le centre d'inertie du solide prend un mouvement circulaire uniforme sur le cercle de centre I et de rayon r.

- Déterminer l'angle α formé par le fil et la verticale lorsque la vitesse angulaire vaut $\omega = 7,33 \text{ rad/s}$.
- Calculer, dans ces conditions, la tension T du fil.
- Quelle est la valeur minimale ω_0 de la vitesse angulaire qui permet au pendule de prendre une inclinaison par rapport à la verticale ? On prendra $g = 9,8 \text{ N/kg}$.

Solution

1- Valeur de l'angle α formé par le fil et la verticale lorsque la vitesse angulaire vaut $\omega = 7,33 \text{ rad/s}$.

$$\vec{F}_{\text{ext}} \left\{ \begin{array}{l} \vec{P} \\ \vec{T} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{TCI : } \vec{P} + \vec{T} = m \cdot \vec{a} \\ \text{Proj}/\vec{u}_n : T\sin\alpha = m\omega^2 \cdot IA = mL\omega^2\sin\alpha \text{ car } IA = OAS\sin\alpha = L\sin\alpha \end{array}$$



$$\text{Proj}/\vec{j}: -mg + T\cos\alpha = 0 \Rightarrow T\cos\alpha = mg \Leftrightarrow mL\omega^2\cos\alpha = mg$$

$$\text{Donc } \cos\alpha = \frac{g}{L\omega^2} \quad \text{d'où } \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{g}{L\omega^2}\right)$$

$$\text{A.N : } \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{9,8}{0,5 \times 7,33^2}\right) \quad \alpha = 68,6^\circ$$

2- Valeur de la tension \vec{T} lorsque la vitesse angulaire vaut $\omega = 7,33 \text{ rad/s}$.

$$T = mL\omega^2$$

$$\text{A.N : } T = 0,02 \times 0,5 \times 7,33^2 \quad T = 0,54\text{N}$$

3- Valeur minimale ω_0 de la vitesse angulaire ω .

$$\cos\alpha \leq 1 \Rightarrow \frac{g}{L\omega^2} \leq 1 \Leftrightarrow \omega^2 \geq \frac{g}{L} \quad \text{soit } \omega \geq \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{D'où } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{A.N : } \omega_0 = \sqrt{\frac{9,8}{0,5}} \quad \omega_0 = 4,43\text{rad/s}$$

3. Relèvement des virages

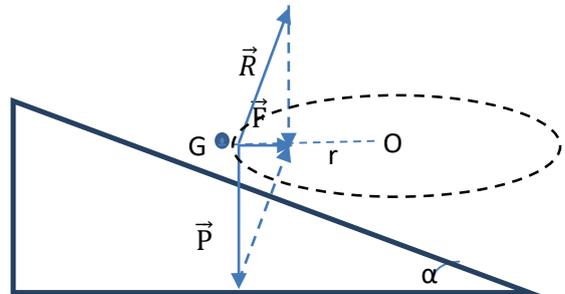
On étudie le mouvement d'un cycliste dans un virage relevé d'un angle α par rapport à l'horizontale ; on suppose une absence totale de frottements entre la route et le vélo.

Le rayon du virage étant r , calculer la vitesse v que le cycliste doit avoir pour tourner sans encombre.

Lorsque le cycliste effectue le virage le mouvement est circulaire uniforme

$$\text{D'après TCI on a } \vec{F} = \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}_n = m\frac{mv^2}{r}\vec{n} \Rightarrow F = \frac{mv^2}{r}$$

$$\tan\alpha = \frac{F}{P} = \frac{\frac{mv^2}{r}}{mg} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{v^2}{gr}$$



Exercices d'application

EXERCICE1

Sur une route rectiligne et horizontale, un conducteur procède à un essai de freinage. Alors que la vitesse du véhicule est $v_1 = 25 \text{ m.s}^{-1}$, le conducteur débraye et, simultanément, appuie sur le frein. Cette manœuvre n'a à aucun moment l'effet de bloquer les roues et se manifeste, pratiquement, par l'apparition d'une force de freinage f , appliquée à la voiture, de même direction que le vecteur vitesse \vec{V} et de sens contraire ; \vec{f} est supposée de valeur constante. Le véhicule s'arrête après un parcours $x_2 = 50 \text{ m}$ à partir de la position occupée à l'instant où le freinage a été appliqué ; $m = 800 \text{ kg}$. On demande de calculer :

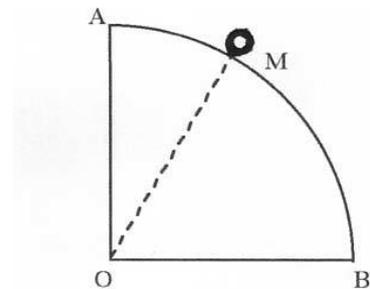
- a) la valeur f de la force de freinage et l'accélération a_2 du mouvement,
- b) le temps t_2 mis par le véhicule pour s'arrêter, compté à partir de l'instant où l'on a appliqué le freinage

EXERCICE2

Un solide S de petites dimensions, de masse m et assimilable à un point matériel, est placé au sommet A d'une piste circulaire AB. AB est dans le plan vertical et représente un quart de circonférence de centre O et de rayon $r = 5 \text{ m}$. On déplace légèrement le solide S pour qu'il quitte la position A avec une vitesse quasiment nulle et glisse sans frottement le long de la piste.

Le solide perd le contact avec la piste en un point C tel $(\vec{OA}, \vec{OC}) = \alpha$. On repère le mobile M par l'angle θ tel que $(\vec{OA}, \vec{OM}) = \theta$.

- 1 1-Exprimer sa vitesse V_C , au point C, en fonction de α , r et g .
- 2 2-Calculer la valeur de l'angle α .
- 3 3-Déterminer le vecteur vitesse \vec{V}_C du solide en C.



EXERCICE3

Un cube de masse $m = 1,0 \text{ kg}$ assimilable à un point matériel glisse sur une piste formée de 2 parties AB et BC qui sont dans un même plan vertical. AB représente $\frac{1}{6}$ de circonférence de centre O et de rayon $r = 15,0 \text{ m}$. Le point O est situé sur la verticale de B. BC est une partie rectiligne de longueur $l = 15,0 \text{ m}$. Le cube est lancé en A avec une vitesse initiale \vec{v}_A telle que $v_A = 6,0 \text{ m.s}^{-1}$.

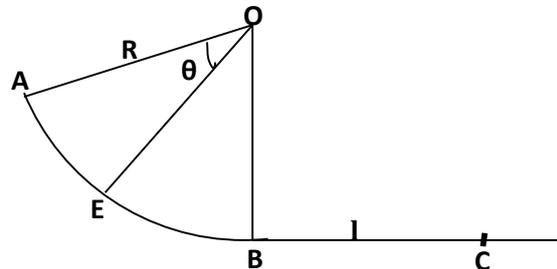
- a) On néglige les frottements. Calculer la vitesse en un point E défini par l'angle $\Theta = (\vec{OA}, \vec{OE}) = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$.

Quelles sont les caractéristiques de la réaction \vec{N} de la piste sur le cube en ce point ?

- b) En fait sur le trajet ABC existent des forces de frottement assimilables à une force \vec{f} , tangente à la trajectoire, de valeur supposée constante. Le mobile arrive en C avec une vitesse \vec{v}_C .

Calculer f sachant que $v_C = 12,5 \text{ m/s}$.

On donne $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.



Mouvement d'une Particule soumise à une Force Constante

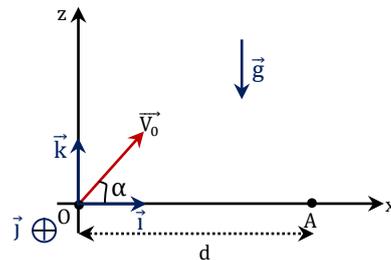
○ Objectifs pédagogiques

- Déterminer les équations du mouvement d'un solide dans un champ de pesanteur ;
- Déterminer le mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme.

I. MOUVEMENT D'UN PROJECTILE DANS LE CHAMP DE PESANTEUR

1. Position du problème

Le projectile est lancé d'un point O origine du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec une vitesse \vec{v}_0 contenue dans le plan (\vec{i}, \vec{k}) ; \vec{v}_0 forme avec l'horizontale (O, \vec{i}) un angle α . On suppose que l'effet de l'air est négligeable.



2. Montrons que le mouvement du projectile est plan

Bilan des forces extérieures : \vec{P} : poids du projectile.

$$\text{TCI : } m\vec{a} = \vec{P} \Leftrightarrow m\vec{a} = m\vec{g} \quad \text{d'où} \quad \vec{a} = \vec{g} = -g\vec{k}$$

$$\text{Soit : } \vec{V} = \vec{a} \cdot t + \vec{V}_0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a} \cdot t^2 + \vec{V}_0 t + \overrightarrow{OM}_0$$

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = -g \end{cases} \quad \vec{V}_0 \begin{cases} V_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ V_{0y} = 0 \\ V_{0z} = v_0 \sin \alpha \end{cases} \quad \overrightarrow{OM}_0 \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{V} \begin{cases} V_x = a_x t + v_{0x} \\ V_y = a_y t + v_{0y} \\ V_z = a_z t + v_{0z} \end{cases} \quad \overrightarrow{OM} \begin{cases} x = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_{0x} t + x_0 \\ y = \frac{1}{2} a_y t^2 + v_{0y} t + y_0 \\ z = \frac{1}{2} a_z t^2 + v_{0z} t + z_0 \end{cases}$$

	\vec{a}	\vec{V}	\overrightarrow{OM}
(Ox)	$a_x = 0$	$V_x = v_0 \cos \alpha$	$x = (v_0 \cos \alpha) t$
(Oy)	$a_y = 0$	$V_y = 0$	$y = 0$
(Oz)	$a_z = -g$	$V_z = -gt + v_0 \sin \alpha$	$z = -\frac{1}{2} g t^2 + (v_0 \sin \alpha) t$

- $y = 0 \Rightarrow$ Le mouvement est plan. Le plan de ce mouvement est le plan (\vec{i}, \vec{k}) ou le plan (xOz) .

3. Nature du mouvement du projectile

○ Equation de la trajectoire

$$x = (v_0 \cos \alpha) t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \quad \text{Donc on a : } z = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + (v_0 \sin \alpha) \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)$$

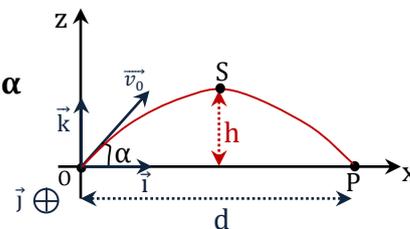
d'où :
$$z = -\frac{g}{2(v_0 \cos \alpha)^2} x^2 + x \tan \alpha$$

Comme $\frac{1}{(\cos \alpha)^2} = 1 + (\tan \alpha)^2$ alors on a :
$$z = -\frac{g[1 + (\tan \alpha)^2]}{2v_0^2} x^2 + x \tan \alpha$$

o Nature du mouvement

D'après l'équation de la trajectoire, la trajectoire est un arc de parabole.

Le mouvement du projectile est donc parabolique.



4. Caractéristiques de la trajectoire

a. La flèche du tir

La flèche est la hauteur maximale atteinte par le projectile. C'est l'altitude du sommet S de la trajectoire.

Au sommet S de la trajectoire, on a :

$$V_{S_z} = 0 \Rightarrow -gt_s + V_0 \sin \alpha = 0 \Rightarrow t_s = \frac{V_0 \sin \alpha}{g} \Rightarrow x_s = (V_0 \cos \alpha)t = (V_0 \cos \alpha) \left(\frac{V_0 \sin \alpha}{g} \right)$$

$$x_s = \frac{V_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$$

$$z_s = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t = -\frac{1}{2}g \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 + \frac{v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} \text{ d'où } h = z_s = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g}$$

b. La portée du tir

C'est la distance qui sépare le point de chute $P(x_P, z_P)$ du point de lancement O du projectile.

$$z_P = 0 \Rightarrow -\frac{g}{2(v_0 \cos \alpha)^2} x_P^2 + x_P \tan \alpha = 0 \Leftrightarrow x_P \left(-\frac{g}{2(v_0 \cos \alpha)^2} x_P + \tan \alpha \right) = 0$$

$$x_P \neq 0 \Rightarrow -\frac{g}{2(v_0 \cos \alpha)^2} x_P + \tan \alpha = 0 \Rightarrow x_P = \frac{2(v_0 \cos \alpha)^2 \tan \alpha}{g} = \frac{2v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} \text{ d'où } d = x_P = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

On remarque que $d = 2 \cdot x_s$

o Pour une vitesse initiale v_0 donnée, indépendante de α , la portée est maximale si et seulement si

$$\sin 2\alpha = 1 \text{ soit } \alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ \text{ d'où } d_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$$

o Montrons que pour un point M et une vitesse initiale v_0 données, la trajectoire passe par ce point pour deux valeurs de l'angle α ($x_M = x_P$).

Pour $x_M = d < d_{\max}$ on a $\frac{d}{d_{\max}} = \frac{gd}{v_0^2} < 1$; soit $d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{gd}{v_0^2} = \frac{d}{d_{\max}} < 1$.

Il existe $u \in \mathbb{R}$ tel que $\sin u = \frac{gd}{v_0^2} \Leftrightarrow \sin 2\alpha = \sin u$

Donc
$$\begin{cases} 2\alpha_1 = u \\ 2\alpha_2 = \pi - u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{u}{2} \\ \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{u}{2} \end{cases}$$

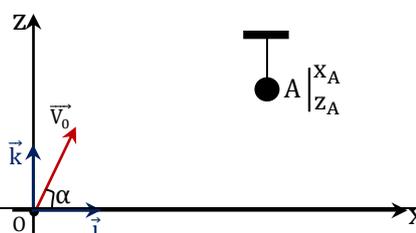
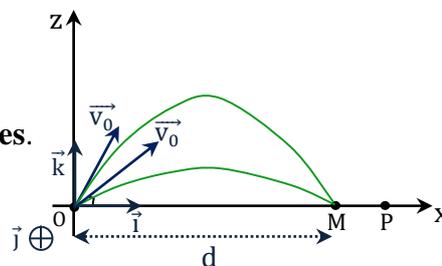
On remarque $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$. α_1 et α_2 sont donc complémentaires.

- Si $\alpha < \frac{\pi}{4} = 45^\circ$ alors le tir est dit tendu.
- Si $\alpha > \frac{\pi}{4} = 45^\circ$ alors le tir est dit en cloche.

5. Les angles de tir

A partir du point O , on veut lancer un projectile avec une vitesse \vec{V}_0 convenable pour qu'il atteigne une cible A . On néglige les frottements due à l'air. (voir figure)

Dans le repère (O, \vec{i}, \vec{k}) , la trajectoire du centre d'inertie du projectile obéit à l'équation :



$$z = -\frac{g}{2v_0^2}(1 + \tan^2\alpha)x^2 + x\tan\alpha$$

Le point A, de coordonnées (x_A, y_A, z_A) , est situé sur cette trajectoire ; d'où :

$$z_A = -\frac{g}{2v_0^2}(1 + \tan^2\alpha)x_A^2 + x_A\tan\alpha.$$

Soit pour une vitesse initiale V_0 imposée, on résout l'équation du second degré avec $\tan\alpha$ comme inconnue :

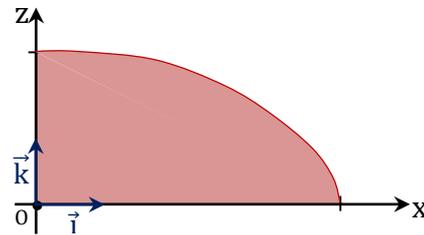
$$\tan^2\alpha - \frac{2v_0^2}{gx_A}\tan\alpha + \frac{2v_0^2z_A}{gx_A^2} + 1 = 0$$

Cette équation admet des solutions si et seulement si : $\Delta' \geq 0 \Rightarrow \frac{v_0^4}{g^2x_A^2} - \frac{2x_Av_0^2}{gx_A^2} - 1 \geq 0 ;$

$$\text{Soit } V_0^4 - 2gV_0^2z_A - g^2x_A^2 \geq 0 \Leftrightarrow z_A \leq -\frac{g}{2V_0^2}x_A^2 + \frac{V_0^2}{2g}$$

- o La courbe d'équation $z = -\frac{g}{2V_0^2}x^2 + \frac{V_0^2}{2g}$ est celle d'une parabole appelée **parabole de sureté**.

La cible n'est atteinte que lorsqu'elle est située dans la zone et sur la parabole de sureté ou de sécurité.



Exemple :

x	0	V_0^2/g
z	$V_0^2/2g$	0

Si on donne $x_A = 30\text{m}$, $z_A = 10\text{m}$, $V_0 = 50\text{m/s}$ et $g = 10\text{m/s}^2$ alors on doit résoudre l'équation :

$$1,8 \tan^2\alpha - 30 \tan\alpha + 11,8 = 0$$

D'où : $\tan\alpha_1 = 0,4$ soit $\alpha_1 = 22^\circ$ (tir tendu) ;

$\tan\alpha_2 = 16,3$ soit $\alpha_2 = 86^\circ$ (tir en cloche) ;

6. Conservation de l'énergie mécanique

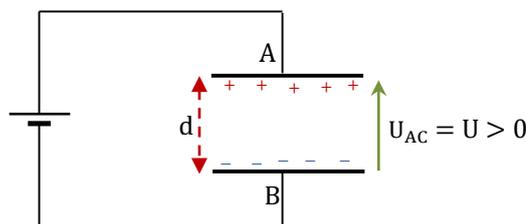
L'énergie mécanique du système projectile-Terre se conserve, si on suppose l'absence de frottement. Le projectile, dans le champ de pesanteur, constitue un système conservatif.

$$E_m = \text{cte} \Leftrightarrow E_{mA} = E_{mB} = \text{cte} \Rightarrow V_B^2 = V_A^2 + 2g(z_A - z_B)$$

II. Mouvement d'une particule dans un champ électrostatique

1. Le champ électrostatique uniforme

Le champ électrostatique \vec{E} est uniforme s'il garde la même direction, le même sens et la même intensité. On obtient un champ électrostatique uniforme en appliquant une tension constante U entre deux plaques métalliques A et B planes et parallèles.



Les caractéristiques du vecteur champ électrostatique \vec{E} entre les deux plaques A et B sont :

- Direction : perpendiculaire aux deux plaques A et B ;
- Sens : Orienté de la plaque de haut potentiel vers la plaque de potentiel le plus bas ; il a donc le sens des potentiels décroissants ;
- Norme : elle est donnée par la formule : $E = \frac{|U_{AB}|}{d}$

○ Une particule de charge q est soumise dans le champ électrostatique uniforme \vec{E} à une force \vec{F} telle que :

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

- Si $q > 0$ alors \vec{F} et \vec{E} ont même direction et même sens ;
- Si $q < 0$ alors \vec{F} et \vec{E} ont même direction mais sont de sens contraires.

2. Le canon à électrons

Une particule de masse m et de charge q ($q = -e$) pénètre en O entre deux plaques C et A avec une vitesse \vec{V}_0 .

- \vec{P} : Poids de la particule
- $\vec{F} = q\vec{E}$: Force électrostatique

○ Bilan des forces extérieures

Pour $E = 1V/m$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}C$ et $g = 10N/kg$ on a :

$$P = mg = 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10 \Rightarrow P = 9,1 \cdot 10^{-30}N \text{ et } F = eE = 1,6 \cdot 10^{-19}N.$$

$$\frac{F}{P} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-30}} = 1,8 \cdot 10^{10} \text{ donc } F = 1,8 \cdot 10^{10}P \Rightarrow P \ll F$$

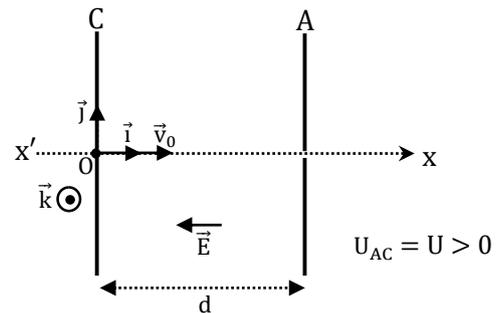
On peut donc négliger le poids de l'électron devant la force électrostatique.

○ Equations horaires du mouvement de la particule.

$$TCI : \vec{F} = m\vec{a} = q\vec{E} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

$$\vec{a} = \text{cte} \Rightarrow \vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{V}_0t$$

$$\text{Or : } \vec{a} \begin{cases} a_x = -\frac{q}{m}E \\ a_y = 0 \\ a_z = 0 \end{cases} \quad \vec{OM}_0 \begin{cases} X=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \quad \vec{V}_0 \begin{cases} V_{0x} = V_0 \\ V_{0y} = 0 \\ V_{0z} = 0 \end{cases}$$



$$\text{d'où : } \vec{OM} \begin{cases} x = -\frac{q}{2m}Et^2 + v_0t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Le mouvement de la particule est donc rectiligne uniformément varié.

○ Calcul de la vitesse V_S de la particule au point de sortie S.

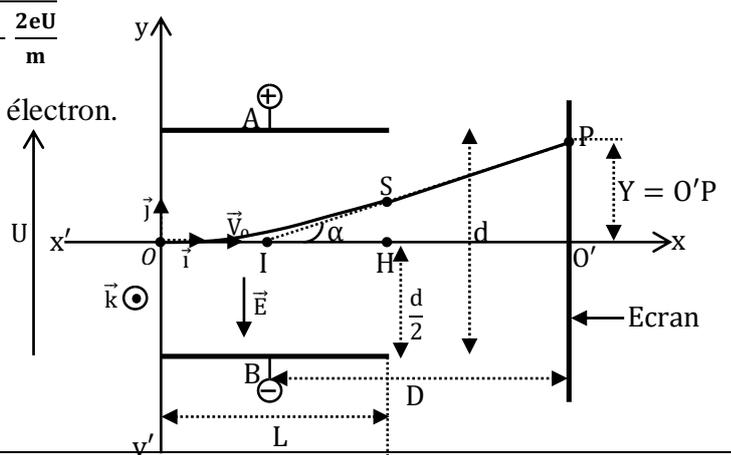
$$\frac{1}{2}mv_S^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W_{OS}(\vec{F}) = qU_{CA}$$

$$U_{CA} = -U \Rightarrow V = \sqrt{v_0^2 + \frac{2eU}{m}}$$

$V > V_0$ alors particule est accélérée dans un canon à électrons.

3. Appareil de déviation électrostatique

Soit un faisceau homocinétique d'électrons qui pénètre en O dans un champ électrostatique uniforme avec un vecteur vitesse \vec{v}_0 tel que \vec{v}_0 perpendiculaire à \vec{E} . On néglige le poids d'un électron devant la force électrostatique



a. Montrons que le mouvement d'un électron est plan.

$$\text{TCI : } \vec{F} = m\vec{a} = q\vec{E} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E} \quad \vec{V}_0 \begin{cases} V_{0x} = V_0 \\ V_{0y} = 0 \\ V_{0z} = 0 \end{cases} \quad \text{et } \mathbf{E} = \frac{U}{d}$$

$$\vec{a} = \text{cte} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0t$$

	\vec{a}	\vec{V}	\overrightarrow{OM}
(Ox)	$a_x = 0$	$V_x = v_0$	$x = v_0 \cdot t$
(Oy)	$a_y = -\frac{q}{m}E = -\frac{q}{md}U$	$V_y = -\frac{q}{m}E \cdot t = -\frac{qU}{md}t$	$y = -\frac{q}{2m}E \cdot t^2 = -\frac{qU}{2md} \cdot t^2$
(Oz)	$a_z = 0$	$V_z = 0$	$z = 0$

- $z = 0 \Rightarrow$ le mouvement est plan.

b. Nature du mouvement d'un électron.

- Dans le champ électrostatique uniforme on a :

$$x = v_0t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0} \quad \text{d'où } y = -\frac{qE}{2mv_0^2}x^2 = -\frac{qU}{2mdv_0^2}x^2$$

Le mouvement de l'électrons dans le champ électrostatique est parabolique.

- Hors du champ électrostatique on a $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \text{cte}$

Le mouvement est donc rectiligne uniforme.

c. Déviatoin angulaire ; déflexion électrostatique

- Le faisceau homocinétique est dévié à la sortie du champ électrostatique \vec{E} d'un angle α tel que $\tan\alpha = \frac{2y_s}{l}$ avec I est milieu de [O ;H].

$$y_s = -\frac{qEl^2}{2mv_0^2} = -\frac{qUl^2}{2mdv_0^2} \quad \text{alors } \tan\alpha = -\frac{qEl}{mv_0^2} = -\frac{qUl}{mdv_0^2} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{qEl}{mv_0^2}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{qUl}{mdv_0^2}\right)$$

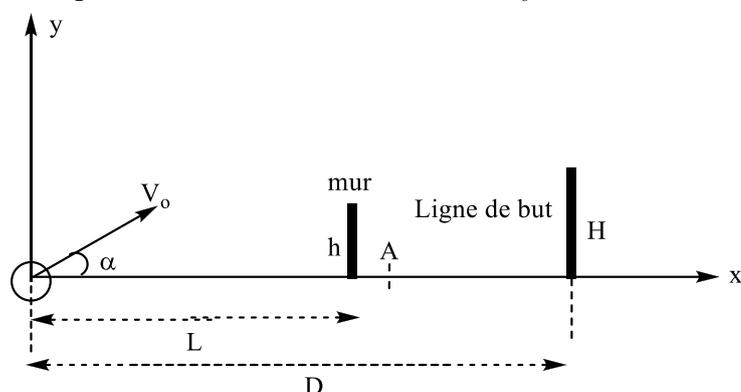
- La **déflexion Y = O'P** est l'ordonnée du point d'impact P sur l'écran. Elle est encore appelée **déflexion électrostatique.**

$$\tan\alpha = \frac{Y}{D} \Rightarrow Y = D\tan\alpha \quad \text{soit } \mathbf{Y} = -\frac{qDl}{mv_0^2}\mathbf{E} = -\frac{qDl}{mdv_0^2}\mathbf{U}$$

Exercices d'application

EXERCICE 1

Pendant le match Togo-Ghana, comptant pour la demi-finale de la coupe d'Afrique des moins de 17 ans joué à Lomé, l'arbitre siffle un « coup franc » direct en un point O choisi comme origine du repère $(O\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le « mur » est placé à la distance réglementaire $L = 9$ m de O et la ligne de but est à $D = 17$ m du ballon. On prend $g = 9,8$ m/s et on néglige la résistance de l'air. Le joueur s'avance et frappe le « coup franc » avec un vecteur vitesse \vec{v}_0 de module $V_0 = 15$ m/s et qui fait l'angle $\alpha = 30^\circ$ avec l'axe Ox.

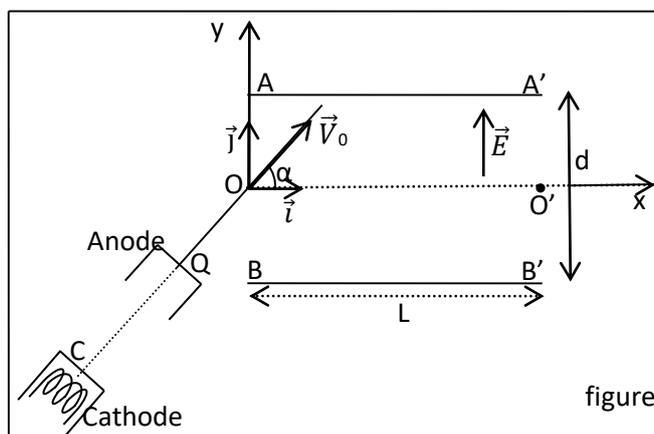


1. a/ Ce tir est-il tendu ou en cloche ?
 - b/ Etablir les équations horaires de la balle dans le repère indiqué ;
 - c/ Montrer que le mouvement est plan, préciser ce plan et donner l'équation de la trajectoire.
 2. a/ A quelle date t_1 la balle passe au-dessus du « mur » ?
 - b/ Quelle est la vitesse de la balle à ce instant t_1 ?
 - c/ La balle n'est pas interceptée par le « mur » A quelle date t_2 entre-t-elle dans les but,
 3. A la date t_1 où la balle passe au-dessus du « mur », un défenseur initialement arrêté en A situé à $l = 7$ m des buts se met à courir d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré suivant l'axe Ox et se dirige vers les buts pour intercepter la balle. Son accélération est $a = 3,5$ m/s⁻².
- On suppose que si le défenseur arrive avant la balle sur la ligne de but, il l'intercepte ; dans le cas contraire, le but est marqué.
- a/ A quelle date t_3 le défenseur arrive-t-il sur la ligne de but ?
 - b/ Le « coup franc » sera-t-il marqué ?

EXERCICE 3

Des électrons sont émis par une cathode C avec une vitesse initiale négligeable. Ils sont alors accélérés par une tension $U_{QC} = U_0 = 500$ V et arrivent en Q avec une vitesse \vec{V}_0 faisant un angle α avec l'axe (ox). Le poids des électrons a un effet négligeable.

1. Énoncer le théorème de l'énergie cinétique et l'utiliser pour calculer le module V_0 de la vitesse \vec{V}_0 .
2. Les électrons venant de Q arrivent en O, avec la vitesse \vec{V}_0 . Ils pénètrent à l'intérieur du condensateur plan constitué par les plaques AA' et BB' (voir figure) le champ électrique \vec{E} uniforme et la tension $U_{AB} = U$ est positive.
- 2.1. Dans le repère $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$; exprimer en fonction de e , V_0 , u , α et d les composantes des vecteurs accélération, vecteur vitesse et vecteur position à l'intérieur des plaques.
- 2.2. En déduire l'équation cartésienne de la trajectoire en fonction de U_0 ; U ; d et α
- 2.3. Exprimer en fonction de U_0 ; U ; d et α , les coordonnées du point M où le vecteur vitesse est parallèle à l'axe (ox).



En déduire la relation liant U_0 ; U et α pour que l'électron ne touche pas la plaque supérieure AA'.

- On veut que l'électron sorte du champ en O' :

- Déterminer en fonction de α ; L ; d et U_0 la tension à appliquer entre les plaques.
Donner sa valeur numérique.

- Montrer alors que le vecteur vitesse en O' a la même valeur qu'en O

Données numériques : Charge élémentaire $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$,

masse de l'électron ; $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}$; $\alpha = 30^\circ$; $d = 7,0 \text{ cm}$; $L = 20 \text{ cm} = OO'$

EXERCICE 3

Le dispositif décrit dans cet exercice se trouve dans le vide.

Masse d'un ion ${}^A_8\text{O}^{2-}$: $m = Au$; charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; unité de masse atomique :

$u = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$; distance entre les armatures P_1 et P_2 : $d_0 = 10 \text{ cm}$; distance entre les armatures P et Q ,
 $d = 5 \text{ cm}$.

L'oxygène possède deux isotopes naturels : l'isotope ${}^{16}_8\text{O}^{2-}$ et l'isotope ${}^{18}_8\text{O}^{2-}$.

Dans une chambre d'ionisation, les atomes des deux isotopes sont transformés en ions ${}^{16}_8\text{O}^{2-}$ et ${}^{18}_8\text{O}^{2-}$. Ces ions sont admis sans vitesse dans un accélérateur linéaire constitué de deux plaques P_1 et P_2 ; un orifice O_1 est fait dans la plaque P_1 . Entre les plaques P_1 et P_2 , il existe une tension $U_0 = V_{P_1} - V_{P_2}$ qui crée un champ électrique uniforme de vecteur champ \vec{E}_0 . Les ions sortent du champ \vec{E}_0 par un orifice O_2 fait dans la plaque P_2 ; les orifices O_1 et O_2 sont une droite perpendiculaire aux plaques P et Q .

1.a/ Quel signe doit avoir U_0 pour que les ions ${}^{16}_8\text{O}^{2-}$ et ${}^{18}_8\text{O}^{2-}$ soient accélérés ?

b/ On donne $|U_0| = 4000 \text{ V}$. Calculer en O_2 : l'énergie cinétique des ions en eV et en joule ; la vitesse V_1 des ions ${}^{16}_8\text{O}^{2-}$; la vitesse V_2 des ions ${}^{18}_8\text{O}^{2-}$. On donne $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

2. Les ions à leur sortie de l'orifice O_2 , pénètrent par un point O dans un autre champ électrique uniforme de vecteur champ \vec{E} perpendiculaire à \vec{V}_1 et \vec{V}_2 , créée par deux plaques P et Q entre lesquelles existe une d.d.p $U = V_P - V_Q$.

La plaque supérieure est P . L'espace compris entre les plaques P et Q est muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que : O soit équidistant de P et Q ; $\vec{V}_1 = V_1 \vec{i}$ et \vec{j} est vertical ascendant. Les plaques P et Q ont une longueur $l = 20 \text{ cm}$.

a/ Quel signe doit avoir U pour que les ions soient déviés vers la plaque P ?

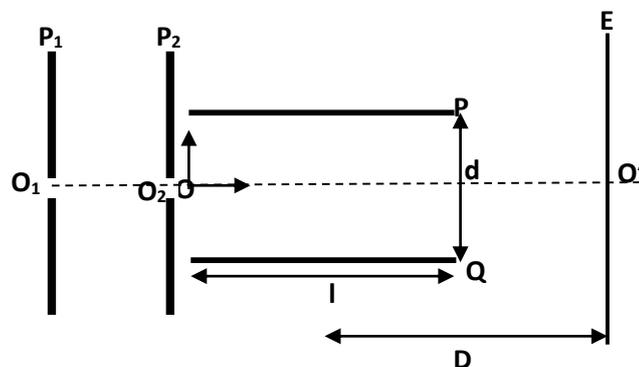
b/ Représenter les vecteurs champ $\vec{E}_0; \vec{E}$, et les vecteurs vitesse \vec{V}_1 et \vec{V}_2 en O .

c/ Etudier dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ le mouvement d'un ion ${}^A_8\text{O}^{2-}$ de masse m .

d/ Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire d'un ion ${}^A_8\text{O}^{2-}$ en fonction de U_0 ; U et d . Le dispositif permet-il de séparer les ions ${}^A_8\text{O}^{2-}$? Justifier la réponse.

e/ Les ions sortent du champ \vec{E} en un point S tel que $y_s = 1,5 \text{ cm}$. Calculer l'angle de déviation θ ; et la valeur de U .

3- On dispose d'un écran vertical E à la distance D du centre des plaques de longueur l , trouver en fonction de U , U_0 , l , D et d , l'expression de la distance $Y = O'M$, M étant le point d'impact d'un ion sur l'écran



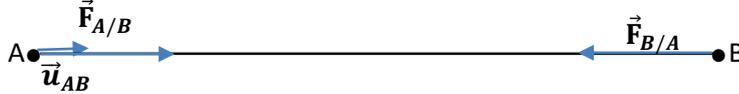
INTERACTIONS GRAVITATIONNELLES- MOUVEMENT CIRCULAIRE DES SATELLITES

I/Interactions gravitationnelles

1-La loi de la gravitation universelle

Deux corps ponctuels A et B de masses m_A et m_B , exercent l'un sur l'autre des forces attractives proportionnelles à leur masse et inversement proportionnelles au carré de leur distance.

$$\vec{F}_{A/B} = -G \frac{m_A m_B}{r^2} \vec{u}_{AB} = -\vec{F}_{B/A}$$



$$F = F_{A/B} = F_{B/A} = G \frac{m_A m_B}{r^2} \quad G : \text{constante de gravitation, } G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}, r \text{ en m, } m \text{ en kg et } F \text{ en N}$$

Cette loi est dite universelle car elle s'applique à tous les astres de l'univers.

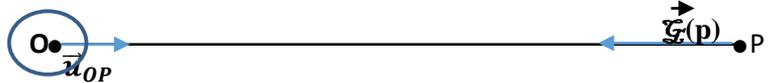
2-Champ de gravitation

2.1 Définition

Un objet ponctuel ou à répartition de masse de symétrie sphérique de centre O et de masse M, crée en tout point extérieur P un champ gravitationnel.

$$\vec{\mathcal{G}}(P) = -G \frac{M}{r^2} \vec{u}_{OP}$$

$$\mathcal{G}(P) = G \frac{M}{r^2}$$



2.2. Force exercée par un objet placé dans un champ de gravitation

Un objet ponctuel de masse m placé en P dans le champ de gravitation $\vec{\mathcal{G}}(P)$ subisse l'action de la force gravitationnelle tel que: $\vec{F} = m \vec{\mathcal{G}}(P) \quad F = m \mathcal{G}(P)$

2.3. Champ de gravitation de la Terre

La Terre peut être considérée comme un corps de répartition sphérique de masse, de centre O, de rayon R_T et de masse M_T . Elle crée un champ gravitationnel en un point P. Si on néglige l'effet de la rotation de la Terre, le champ de gravitation s'identifie au champ de pesanteur: $\mathcal{G}(P) = g = G \frac{M_T}{r^2}$



- Si P se trouve à la surface de la Terre $r = R_T \Rightarrow g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2}$

- Si P se trouve à une altitude z $r = z + R_T \Rightarrow g = G \frac{M_T}{(R_T + z)^2}$

- Relation entre g et g_0 : $g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2}$ et $g = G \frac{M_T}{(R_T + z)^2} \Rightarrow g = g_0 \frac{R_T^2}{(R_T + z)^2}$

- Si P est au voisinage de la Terre on a $z \ll R_T \Rightarrow \frac{z}{R_T} \ll 1$. or $g = g_0 \left(\frac{R_T}{R_T + z}\right)^2 \Rightarrow g = g_0 \left(\frac{1}{1 + \frac{z}{R_T}}\right)^2 \Rightarrow$

$\triangle g = g_0 \left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^{-2}$ or $(1 + \varepsilon)^n \simeq 1 + n \varepsilon \Rightarrow g \simeq g_0 \left(1 - 2 \frac{z}{R_T}\right)$

Dans la réalité $\vec{G} = \vec{g} + R\omega^2 \cos \lambda \vec{N}$

2.4. Mouvement d'un solide soumis aux seules forces de gravitation

D'après TCI on a $\vec{F} = m \vec{a}_G \Rightarrow \vec{a}_G = \vec{\mathcal{G}}(P) \quad \forall m$

Dans un repère Galiléen l'accélération du centre d'inertie d'un corps soumis uniquement aux forces de gravitation est indépendante de sa masse, elle est égale au champ de gravitation au point considéré.

2.3 Énergie potentielle de gravitation

La force gravitationnelle est une force conservative donc $\Delta E_p = -W^{(F)}$

Soient deux corps (A) et (B) de masses respectives m_A et m_B . Supposons que le corps (1) passe de r à ∞
 $\delta W = \vec{F} \cdot \vec{\delta r} = -F \cdot \delta r$ or $F = G \frac{m_A m_B}{r^2} \Rightarrow \delta W = -G \frac{m_A m_B}{r^2} \cdot \delta r \Rightarrow W(\vec{F}) = - \int_r^\infty G \frac{m_A m_B}{r^2} \cdot \delta r = \left[G \frac{m_A m_B}{r} \right]_r^\infty$

$$\Delta E_p = -W(\vec{F}) = G \frac{m_A m_B}{r}$$

Si $r \rightarrow \infty$, $E_p \rightarrow 0$, à l'infini l'énergie potentielle est nulle c'est la référence.

On a $E_p = -G \frac{m_A m_B}{r}$ d'où l'énergie potentielle de gravitation terrestre s'écrit sous la forme: $E_p = -G \frac{M_T m}{R_T + h}$

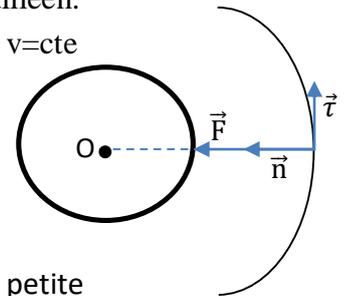
II/Mouvement circulaire des satellites terrestres

1-Montrons que le mouvement est uniforme

Le mouvement des satellites s'étudie dans un référentiel géocentrique supposé Galiléen.

D'après TCI on a : $\vec{F} = m \vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g} \Rightarrow \vec{a} = g \vec{n} \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_n \Rightarrow a_r = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = \text{cte}$

Le mouvement d'un satellite en orbite circulaire est uniforme.



1.1. L'expression de la vitesse

$$a = g \Rightarrow a_n = g \Rightarrow \frac{v^2}{r} = g \Rightarrow \frac{v^2}{(R_T + Z)} = g_0 \frac{R_T^2}{(R_T + Z)^2} \Rightarrow v = \sqrt{g_0 \frac{R_T^2}{R_T + Z}} = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + Z}}$$

La vitesse dépend du rayon de l'orbite. Plus le rayon est grand, plus la vitesse est petite

1.2. Période de révolution d'un satellite en orbite circulaire

La période de révolution d'un satellite est le temps qu'il met pour effectuer un tour complet sur son orbite.

$$T = \frac{2\pi(R_T + Z)}{v} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{(R_T + Z)^3}{g_0 R_T^2}} = 2\pi \sqrt{\frac{(R_T + Z)^3}{GM_T}}$$

La période est indépendante de la masse et dépend de l'altitude.

2. Satellites géostationnaires

Un satellite géostationnaire est un satellite qui apparaît fixe par rapport à la Terre. Par rapport au référentiel géocentrique, il a un mouvement circulaire uniforme.

Il se situe dans le plan de l'équateur, évolue d'Ouest en Est, et sa période de révolution est celle de la Terre (23h 56min 04s = 86164s)

-altitude d'un satellite géostationnaire :

$$T = T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{(R_T + Z)^3}{g_0 R_T^2}} \Rightarrow (R_T + Z)^3 = \frac{T_0^2 g_0 R_T^2}{4\pi^2} \Rightarrow h_0 = Z = \sqrt[3]{\frac{T_0^2 g_0 R_T^2}{4\pi^2}} - R_T \approx 36000 \text{ km}$$

3. La 3^{ème} lois de KEPLER

3.1 énoncé de la loi

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R_T + Z)^3}{GM_T}} \Rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} = \text{cte}$$

Autour d'un astre, les carrés de la période de révolution des satellites en orbites circulaires sont proportionnels aux cubes des rayons des orbites: $\frac{T^2}{r^3} = \text{cte}$.

2. Application de la 3^{ème} loi de KEPLER

La 3^{ème} loi de KEPLER s'applique à n'importe quels planètes et satellites. Elle permet de déterminer leur masse.

-Pour une planète tournant avec une période T et décrivant une orbite circulaire autour du soleil on a :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S} \Rightarrow M_S = \frac{4\pi^2}{G \left(\frac{T^2}{r^3}\right)}$$

-Pour un satellite tournant avec une période T et décrivant une orbite circulaire autour d'une planète on a :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_P} \Rightarrow M_P = \frac{4\pi^2}{G \left(\frac{T^2}{r^3}\right)}$$

EXERCICES SUR LA GRAVITATION

EXERCICE1

Le télescope Hubble a été mis en orbite circulaire autour du centre O de la Terre. Il évolue à l'altitude $z_H = 600$ km. Ce télescope, objet pratiquement ponctuel par rapport à la Terre, est noté H et a une masse $m = 12$ tonnes.

- 1) Énoncer la loi de gravitation de Newton ou loi de l'attraction universelle de Newton au télescope à l'altitude z et donner l'expression littérale de l'intensité F_H de la force de gravitation qu'il subit en fonction de g_0 , m , z et du rayon R de la Terre.
- 2) Calculer l'intensité de cette force pour $z = z_H = 600$ km ; ainsi que l'intensité G_H du champ gravitationnel à cette altitude.
- 3) Le mouvement du télescope est étudié dans le référentiel géocentrique dont l'origine est O.
 - 3.a- Quelle est la nature de ce mouvement ?
 - 3.b- Déterminer l'expression littérale de la vitesse v du satellite sur son orbite en fonction de R , g_0 et z puis calculer sa valeur en $m.s^{-1}$ et en $km.s^{-1}$.

EXERCICE2

On considère une planète P de masse M . Le mouvement de l'un de ses satellites S, assimilé à un point matériel de masse m , est étudié dans un référentiel considéré comme galiléen, muni d'un repère dont le centre coïncide avec le centre O de la planète P et les trois axes dirigés vers trois étoiles fixes. On admet que la planète a une distribution de masse à symétrie sphérique et que l'orbite de son satellite est un cercle de centre O et de rayon r .

- 1) Donner les caractéristiques de la force de gravitation \vec{F} exercée par la planète P sur le satellite S. Faire un schéma.
- 2) Donner l'expression du champ de gravitation \vec{G} créé par la planète P au point où se trouve le satellite S. Représenter ce vecteur de gravitation \vec{G} sur le schéma précédent.
- 3) Déterminer la nature du mouvement dans le référentiel d'étude précise
- 4) Exprimer le module de la vitesse V et la période de révolution T du satellite S en fonction de la constante de gravitation G , du rayon r de la trajectoire du satellite S et de la masse M de la planète P.
Montrer que le rapport $\frac{T^2}{r^3}$ est une constante.
- 5) Sachant que l'orbite du satellite S a un rayon $r = 185\,500$ km et que sa période de révolution vaut $T = 22,6$ heures, déterminer la masse M de la planète P.
- 6) Un autre satellite S' de la planète P a une période de révolution $T' = 108,4$ heures. Déterminer le rayon r' de son orbite.

EXERCICE3

Données : La Terre et la Lune sont considérées comme des corps sphériques homogènes.

Masse de la Lune : $M_L = 7,34 \cdot 10^{22}$ kg ; $R_L = 1\,740$ km

Masse de la Terre : $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg ; $R_T = 6400$ km ; $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ S.I

Distance des surfaces de la Terre et de la Lune : $D = 384\,103$ km

- 1) Calculer le champ de gravitation créé par la Lune à sa surface.
- 2) Calculer la force de gravitation qu'exerce la Lune sur la Terre.
- 3) En quel point du segment joignant les centres de la Lune et de la Terre la force de gravitation est-elle nulle?
- 4) Démontrer que l'énergie potentielle de gravitation d'un corps de masse m situé à la distance r du centre d'une planète de masse M , vaut : $E_P = -G \frac{M.m}{r}$ Prendre $E_P = 0$ à l'infini.
- 5) Exprimer la vitesse de libération V_1 ou première vitesse cosmique, d'un objet par rapport à une planète de masse M et rayon R en fonction de K , M et R . Faire l'application numérique pour la Terre et pour la Lune.
- 6) Déterminer l'altitude à laquelle doit évoluer un satellite terrestre géostationnaire.
- 7) Un satellite passe tous les 26 jours au-dessus de la verticale d'un lieu terrestre après 370 révolutions, son altitude est alors de 830 km. Ces données sont-elles compatibles avec le fait que le satellite a une trajectoire circulaire autour de la Terre ? Justifier la réponse. On admet que la période est mesurée à 1 % près.

EXERCICE4

On admet que la Terre a une répartition de masse à symétrie sphérique. Elle est considérée comme une sphère de centre O, de rayon $R = 6370 \text{ km}$ et de masse $M = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

Le constante de gravitation universelle est $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \text{m}^2$

Un satellite, assimilé à un point matériel, décrit une orbite circulaire de rayon r dans le plan équatorial, autour de la Terre.

1) Montrer que le mouvement du satellite est uniforme.

2) Etablir l'expression de sa vitesse v en fonction de r , M et G .

En déduire l'expression de la période T du mouvement du satellite en fonction de r , M et G .

3) Les données suivantes constituent un extrait de la fiche technique de la mission de la navette spatiale américaine DISCOVERY pour l'étude environnementale sur l'atmosphère moyenne de la Terre :

· Masse de la navette en orbite : $m = 69,68 \cdot 10^3 \text{ kg}$ · Altitude moyenne $h = 296 \text{ km}$.

· Nombre d'orbites $n = 189$. (Nombre de tours effectués par DISCOVERY de sa date de lancement jusqu'à la date d'atterrissage).

3.1- Déterminer à partir des données techniques, les valeurs numériques de la vitesse et de la période du mouvement de la navette spatiale DISCOVERY.

3.2- La navette a atterri le 18 Aout 1997 à Kennedy Space Center. Déterminer la date de lancement de la navette ; on négligera les durées de la mise sur orbite et de l'atterrissage.

4) DISCOVERY a atterri le 18 aout 1997, à la date $t = 7 \text{ h } 07 \text{ min}$. Dans la phase d'approche à l'atterrissage, moteurs à l'arrêt, la navette est soumise à son poids et aux forces de frottement de l'air.

On trouvera ci-dessous la valeur de sa vitesse à différentes dates.

Dates	Altitude (km)	Vitesse ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)
$t_1 = 6 \text{ h } 59 \text{ min}$	54,86	1475
$t_2 = 7 \text{ h } 04 \text{ min}$	11,58	223,5

On prendra $g = 9,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ pendant toute la phase d'approche.

4.4.1- Calculer le travail du poids du DISCOVERY entre les dates t_1 et t_2 .

4.4.2- En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, calculer le travail des forces de frottement de l'air sur DISCOVERY entre les instants t_1 et t_2 de la phase d'approche à l'atterrissage.

EXERCICES

Dans le référentiel géocentrique un satellite évolue sur une orbite circulaire de rayon $r_1 = 20\,000 \text{ km}$ dans le plan équatorial de la Terre. Il se déplace d'Ouest en Est. La période du mouvement de rotation de la Terre dans ce référentiel est $T_0 = 86\,164 \text{ s}$.

1) Montrer que le mouvement de rotation du satellite est uniforme.

2) Etablir l'expression de la vitesse du satellite dans le référentiel géocentrique puis calculer sa valeur.

3) En déduire l'expression de la période T_1 du mouvement du satellite puis calculer sa valeur.

4) Déterminer la valeur r de l'orbite du satellite pour qu'il soit géostationnaire.

5) Quelle est pour un observateur terrestre, la période de révolution T_a du satellite évoluant sur l'orbite circulaire de rayon $r_1 = 20\,000 \text{ km}$.

6) Un autre satellite, de période T_2 évoluant dans le plan équatorial de la Terre sur une orbite circulaire de rayon $r_2 = 18\,000 \text{ km}$ dans le même sens que le premier.

A l'aide d'un schéma clair indiquer les positions des deux satellites quand leur distance est minimale.

Ce rapprochement entre les deux satellites se répète périodiquement. Calculer la période Θ de ces Rapprochements.

Les Oscillations Mécaniques

Le Pendule Élastique

○ Objectifs pédagogiques

- Décrire un pendule élastique ;
- Etablir l'équation différentielle d'un pendule élastique ;
- Calculer l'énergie mécanique d'un pendule élastique
- Définir le régime pseudopériodique et le régime apériodique.

I. MOUVEMENT D'UN OSCILLATEUR MECANIQUE

1. Généralités

Un oscillateur est un système mécanique animé d'un mouvement périodique. Il est dit harmonique lorsque son abscisse par rapport à sa position d'équilibre est une fonction sinusoïdale du temps de la forme :

$$x = X_m \cos(\omega t + \varphi) \text{ ou } x = X_m \sin(\omega t + \varphi)$$

X_m : Amplitude (en m)

ω : Pulsation (en rad/s)

$\omega t + \varphi$: Phase à l'instant t en (rad)

φ : Phase à l'instant $t = 0$ (rad)

- La période T , exprimée en seconde, d'un oscillateur harmonique est la durée d'une oscillation complète. On appelle oscillation complète le passage du solide par le même point dans le même sens.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

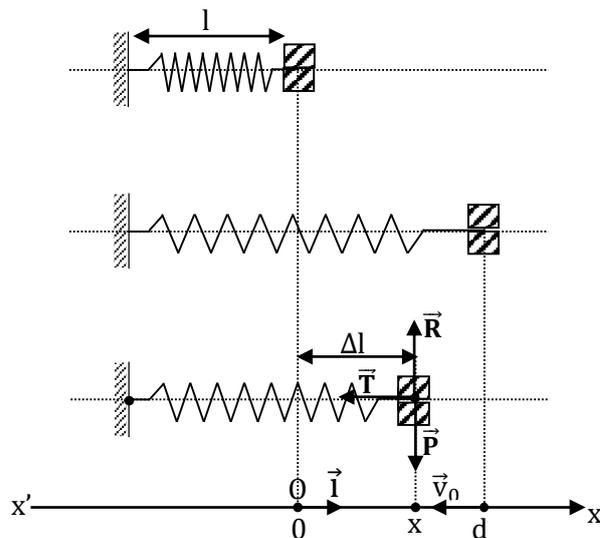
- La fréquence N ou f , exprimée en Hertz (Hz), d'un oscillateur harmonique représente le nombre d'oscillations complètes effectuées en une seconde.

$$N = f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \Leftrightarrow \omega = 2\pi N = 2\pi f$$

2. Le Pendule élastique horizontal

a. Schéma du dispositif expérimental

Le système est constitué d'un solide (S) de centre d'inertie G et de masse m accroché à un ressort de masse négligeable, de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 .



On déplace le solide de sa position d'équilibre d'une distance d vers la droite et on l'abandonne dans le sens des abscisses négatives avec la vitesse \vec{v}_0 à une date que l'on prendra comme origine des instants.

b. Nature du mouvement du solide accroché au ressort

\vec{P}	Poids du solide
\vec{R}	Réaction de la tige
\vec{F}_{ext}	

○ Etude de l'équilibre

PI : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = \vec{0}$ Proj/x : $0 + 0 + T = 0 \Rightarrow T = 0$
 Or $T = k\Delta l = k(l - l_0) \Rightarrow l = l_0$

A l'équilibre, le ressort n'est donc pas déformé

○ Etude du mouvement

TCI : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$ Proj/x : $0 + 0 - T = ma_x$
 Or $T = k\Delta l = k(l - l_0) = kx$ et $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$ donc $-kx = m\ddot{x}$

D'où $m\ddot{x} + kx = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

En posant $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ alors on obtient : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Conclusion : Le mouvement du solide est donc rectiligne sinusoïdal de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et de période $T_0 =$

$\frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$.

c. Résolution de l'équation différentielle

Comme le mouvement du solide est rectiligne sinusoïdal, l'abscisse x de son centre d'inertie est sous la forme : $x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow v = \dot{x} = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$

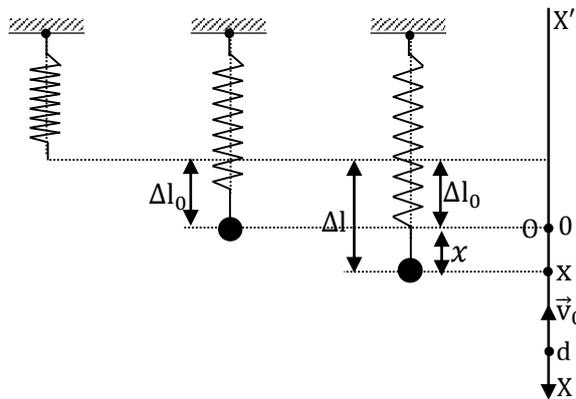
A $t = 0$ on a $\begin{cases} x = X_m \cos \varphi = d \Rightarrow \cos \varphi = \frac{d}{X_m} > 0 \\ v = -\omega_0 X_m \sin \varphi = -v_0 \Rightarrow \sin \varphi = \frac{v_0}{\omega_0 X_m} > 0 \end{cases}$

$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \Rightarrow \frac{d^2}{X_m^2} + \frac{v_0^2}{\omega_0^2 X_m^2} = 1$ d'où $X_m = \sqrt{d^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$

Comme $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ alors $X_m = \sqrt{d^2 + \frac{mv_0^2}{k}}$ et $\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \Rightarrow \tan \varphi = \frac{v_0}{d\omega_0}$ soit $\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{v_0}{d\omega_0} \right)$

3. Le Pendule élastique vertical

a. Schéma du dispositif expérimental



b. Nature du mouvement du solide accroché au ressort

$\vec{F}_{\text{ext}} \begin{cases} \vec{P} : \text{Poids du solide} \\ \vec{T} : \text{Tension du ressort} \end{cases}$

○ Condition d'équilibre du système solide-Ressort

PI : $\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$ Proj/x : $mg - T = 0$ or $T = k\Delta l_0$ donc $mg - k\Delta l_0 = 0$.

Soit : $\Delta l_0 = \frac{mg}{k}$ ou $k = \frac{mg}{\Delta l_0}$

o Etude du mouvement du système

TCI : $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$ Proj/x : $mg - T = m\ddot{x}$
 or $T = k\Delta l = k(l_2 - l_0) = k(\Delta l_0 + x)$ donc $mg - k(\Delta l_0 + x) = m\ddot{x}$
 $mg - k\Delta l_0 - kx = m\ddot{x}$

$mg - k\Delta l_0 = 0 \Rightarrow -kx = m\ddot{x} \Leftrightarrow mx + \ddot{x} = 0$

d'où $m\ddot{x} + kx = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

En posant $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ alors on obtient : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Conclusion : Le mouvement du solide est donc rectiligne sinusoïdal de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et de période $T_0 =$

$\frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

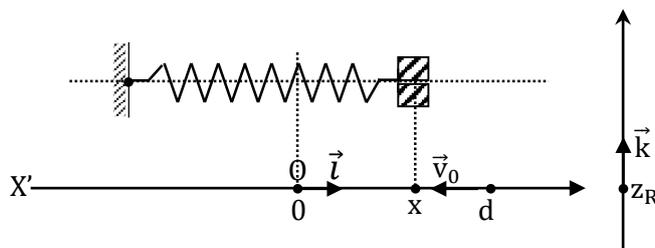
II. ETUDE ENERGETIQUE D'UN PENDULE ELASTIQUE

1. Energie potentielle élastique d'un pendule élastique

L'énergie potentielle élastique d'un pendule élastique est l'énergie qu'il possède du fait de son allongement ou de son raccourcissement. Elle est notée E_{pe} et est donnée par l'expression :

$E_{pe} = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2$; où Δl est l'allongement ou le raccourcissement du ressort.

2. Etude énergétique d'un pendule élastique horizontal



Prenons pour position de référence de l'énergie potentielle de pesanteur la direction de la tige confondue à l'axe(Ox).

o Expression de l'énergie mécanique du système

$E_m = E_C + E_{pe} + E_{pp}$

$E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ avec $v = \dot{x}$;

$E_{pe} = \frac{1}{2}k\Delta l^2 = \frac{1}{2}kx^2$ avec $\Delta l = x$;

$E_{pp} = mg(z - z_R) = 0$ avec $z = z_R$

d'où $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$

o Montrons qu'en l'absence de frottement l'énergie mécanique du système se conserve

Frottements négligeables $\Rightarrow x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow m\omega_0^2 = k$.

$E_m = \frac{1}{2}m[-\omega_0 X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)]^2 + \frac{1}{2}k[X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)]^2$

$E_m = \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_m^2 [\cos(\omega_0 t + \varphi)]^2 + \frac{1}{2}kX_m^2 [\cos(\omega_0 t + \varphi)]^2$

$E_m = \frac{1}{2}kX_m^2 [\cos(\omega_0 t + \varphi)]^2 + \frac{1}{2}kX_m^2 [\cos(\omega_0 t + \varphi)]^2$

$E_m = \frac{1}{2}kX_m^2 [\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi)]$

Comme $\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = 1$ donc $E_m = \frac{1}{2}kX_m^2 = cte$

o Retrouvons l'équation différentielle du mouvement à partir de l'énergie mécanique

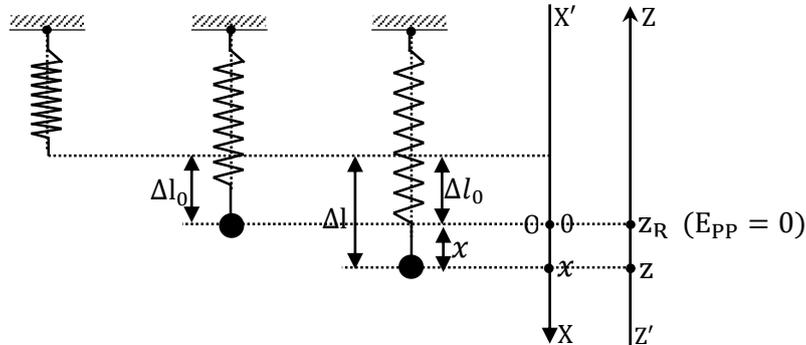
$E_m = cte \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right) = 0$

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{x}(m\ddot{x} + kx) = 0$$

or $\dot{x} = v \neq 0$ donc $m\ddot{x} + kx = 0$ d'où $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

3. Etude énergétique d'un pendule élastique vertical

On considère le système ci-dessous et on suppose que les frottements sont négligeables.



- Expression de l'énergie mécanique du système

$$E_m = E_C + E_{Pe} + E_{PP}$$

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad \text{avec } v = \dot{x};$$

$$E_{Pe} = \frac{1}{2}k\Delta l^2 = \frac{1}{2}k(\Delta l_0 + x)^2 \quad \text{avec } \Delta l = \Delta l_0 + x;$$

$$E_{PP} = mg(z - z_R) = -mgx \quad \text{avec } z - z_R = -x$$

$$\text{d'où } E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(\Delta l_0 + x)^2 - mgx$$

En développant l'expression de E_m et remarquant que $mg - k\Delta l_0 = 0$ on trouve relativement facilement que :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k\Delta l_0^2$$

- Montrons qu'en l'absence de frottement l'énergie mécanique du système se conserve

Frottements négligeables $\Rightarrow x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow m\omega_0^2 = k$.

$$E_m = \frac{1}{2}m[-\omega_0 X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)]^2 + \frac{1}{2}k[X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)]^2 + \frac{1}{2}k\Delta l_0^2$$

$$E_m = \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_m^2 [\cos(\omega_0 t + \varphi)]^2 + \frac{1}{2}kX_m^2 [\cos(\omega_0 t + \varphi)]^2 + \frac{1}{2}k\Delta l_0^2$$

$$E_m = \frac{1}{2}kX_m^2 [\cos(\omega_0 t + \varphi)]^2 + \frac{1}{2}kX_m^2 [\cos(\omega_0 t + \varphi)]^2 + \frac{1}{2}k\Delta l_0^2$$

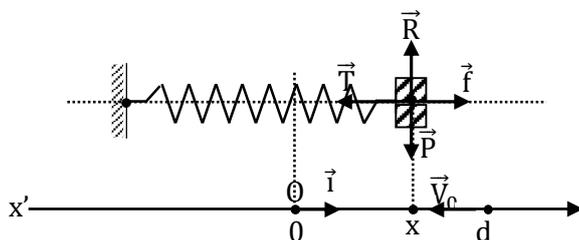
$$E_m = \frac{1}{2}kX_m^2 [\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi)] + \frac{1}{2}k\Delta l_0^2$$

Comme $\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = 1$ donc $E_m = \frac{1}{2}kX_m^2 + \frac{1}{2}k\Delta l_0^2 = \text{cte}$

4. Oscillations amorties

Dans la réalité, l'amplitude des oscillations diminue à cause des forces de frottements.

- a. Equation différentielle du mouvement d'un oscillateur réel



$$\vec{F}_{\text{ext}} \left\{ \begin{array}{l} \vec{P} : \text{ Poids du solide} \\ \vec{R} : \text{ Réaction de la tige} \\ \vec{T} : \text{ Tension du ressort} \\ \vec{f} = -\lambda\vec{v} : \text{ Force de frottements } (\lambda = \text{cte} ; \lambda < 0) \end{array} \right.$$

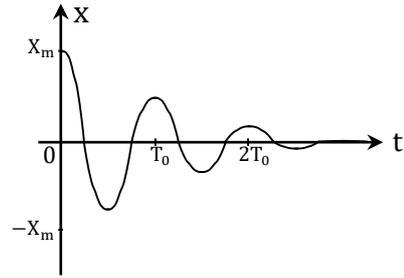
$$\text{TCI} : \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{f} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} - \lambda\vec{v} = m\vec{a}$$

$$\text{Proj/x} : T_x - \lambda v_x = ma_x \Leftrightarrow -kx - \lambda \dot{x} = m\ddot{x} \text{ d'où } m\ddot{x} + \lambda \dot{x} + kx = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{\lambda}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

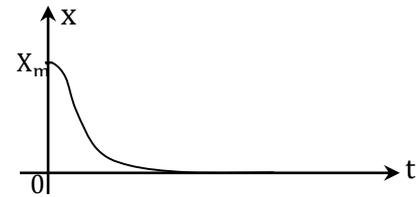
λ est le coefficient de frottement.

b. Les différents régimes

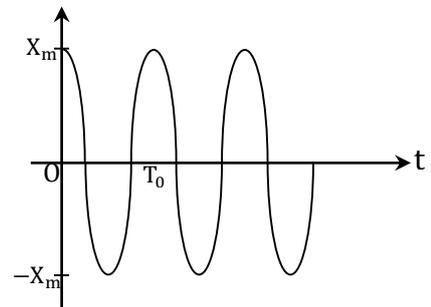
- Si les frottements ne sont pas trop intenses, les amplitudes des oscillations diminuent progressivement et finit par s'annuler. On dit que le régime est **pseudopériodique**.



- Si les frottements sont intenses le système n'oscille pas ; il revient dans sa position d'équilibre sans osciller : on dit que le régime est **apériodique**.



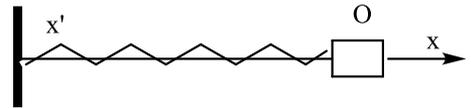
- Si les frottements sont négligeables : cas d'un système entretenu, il n'y a plus d'amortissements. Le régime est dit **périodique**.



Exercice sur le pendule élastique

Exercice 1

Un ressort de raideur k , à spires non jointives et de masse négligeable, est enfilé sur une tige horizontale T dont il est solidaire en son extrémité A .



L'autre extrémité B du ressort est liée à un solide S supposé ponctuel et de masse m . l'ensemble {ressort + solide S } coulisse sans frottement sur la tige T .

On oriente l'axe $x'x$ comme indiqué sur la figure et on choisit comme origine O de l'axe la position d'équilibre de S .

S est écarté de sa position d'équilibre suivant la direction $x'x$ et lâché sans vitesse initiale. Il passe en C , d'abscisse x_0 , à l'instant pris comme origine des temps avec un vecteur vitesse $\vec{V}_O = V_0 \vec{i}$ \vec{i} étant le vecteur unitaire qui oriente l'axe $x'x$.

Données : $V_0 = 0,164$ m/s ; $k = 10$ N/m ; $m = 0,16$ kg ; $x_0 = 2$ cm

1.a/ Déterminer l'équation différentielle du mouvement de S .

b/ Etablir l'expression de la pulsation propre ω_0 du mouvement. Calculer sa valeur numérique.

c/ Ecrire l'équation horaire $x(t)$ du mouvement de S .

d/ Calculer $x(t)$ à l'instant $t = 2$ s.

2.a/ Exprimer l'énergie mécanique du système {ressort + solide S } à un instant t en fonction de k et de l'amplitude X_m .

b/ Calculer la valeur de E_m en utilisant les données de l'instant $t = 0$

c/ Retrouver la valeur de X_m déterminées au 1.c/

Exercice 2

A. Soit un ressort idéal vertical, à spires non jointives de raideur k , de longueur à vide l_0 . Une de ses extrémités étant fixée, on accroche à l'autre extrémité un objet S , de centre d'inertie G , de masse m , d'épaisseur négligeable devant la longueur du ressort qui est alors égale à l_1 . *Données numériques* : $l_0 = 12,0$ cm ; $m = 100g$; $g = 10\text{m/s}^2$; $l_1 = 14$ cm

1. Calculer le coefficient de raideur k du ressort.

On tire sur le solide S vers le bas de $a = 3$ cm puis on l'abandonne sans vitesse initiale à la date $t = 0$. Le système se met à osciller autour de sa position d'équilibre O .

2. Etablir son équation différentielle dans le repère \vec{Ox} dirigé vers le bas et dont l'origine O coïncide avec la position du solide à l'équilibre.

3. Préciser son équation horaire.

B. Le solide S fixé au ressort est maintenant astreint à se déplacer suivant la ligne de plus grande pente d'un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontal. S étant au repos, la longueur du ressort est alors $l_2 = 11,5$ cm, G est en G_0 . Les positions respectives du centre de masse sont repérés sur un axe $x'x$ parallèle à la ligne de plus grande pente, orienté vers le haut. Confère figure

Soit \vec{i} un vecteur unitaire sur cet axe. Les frottements seront considérés comme nuls.

1. Calculer l'angle α .

2. On déplace légèrement le solide S et on amène son centre de masse G_0 en G_1 tel que : $\vec{G}_0\vec{G}_1 = x_1 \vec{i}$ avec $x_1 = +4,5$ cm ; et on l'abandonne sans vitesse initiale. A l'instant de date t , le centre de masse de S est situé entre G_0 et G_1 tel que $\vec{G}_0\vec{G}_1 = x \vec{i}$

a/ Etablir l'équation différentielle du mouvement du solide S sur le plan incliné.

b/ Quelle est l'équation horaire du mouvement ?

c/ Calculer la période propre des oscillation

Exercice 3

Entre deux points A et B , situés sur la même verticale, sont tendus deux ressorts R et R' identiques, de raideur k , de longueur à vide l_0 . Ils soutiennent un disque D de masse m et d'épaisseur négligeable. (fig.1) On donne : $AB = 45\text{cm}$; $l_0 = 15\text{cm}$; $k = 20\text{N/m}$; $m = 100\text{g}$ et $g = 10\text{N/kg}$.

1- Le disque est lancé vers le bas à partir de sa position d'équilibre, puis il oscille verticalement.

a) Déterminer la distance AD lorsque le disque est en équilibre.

b) Exprimer l'énergie mécanique E_m du système lorsque le centre d'inertie G du disque se trouve dans une position repérée par l'abscisse x . On choisit la position d'équilibre du disque D comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur.

c) En déduire alors la nature du mouvement du centre d'inertie G du disque en supposant que tout frottement est négligé.

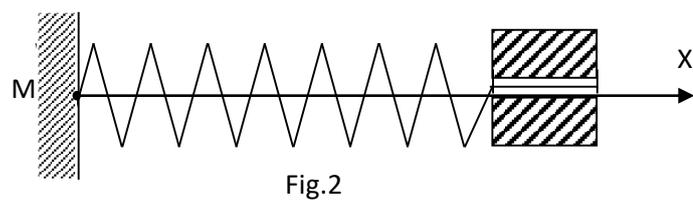
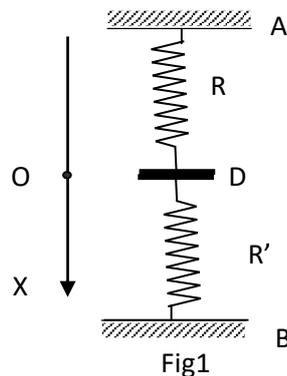
d) Ecrire l'équation horaire du mouvement sachant qu'à $t = 0$, $V_0 = 1 \text{ m/s}$.

2. On supprime le ressort R' et on dispose l'ensemble R et D horizontalement (fig.2). On écarte D de sa nouvelle position d'équilibre et on le libère sans vitesse initiale. A l'instant t_0 choisi comme origine des temps, son abscisse est X_0' , sa vitesse V_0' . On donne $X_0' = 3 \text{ cm}$ et $V_0' = -0,1 \text{ m/s}$.

a) Calculer l'énergie mécanique de l'oscillateur à l'instant t_0 (on prendra l'énergie potentielle de pesanteur nulle).

b) Calculer la vitesse de D au passage par la position d'équilibre.

c) Ecrire l'équation horaire du mouvement de D en prenant pour origine des espaces, la position d'équilibre et t_0 comme origine des temps.



Exercice 5

Un solide de masse $m=450 \text{ g}$ est suspendu à l'extrémité d'un ressort vertical dont l'autre est fixe. La constante de raideur $K=45 \text{ N/m}$. Les frottements sont négligés dans tout l'exercice.

1) Représenter sur un schéma, les forces agissant sur la masse m . Le point O donne l'abscisse du centre de gravité G à la position d'équilibre du système et l'axe Ox est orienté vers le bas. Calculer l'allongement Δl_0 du ressort à l'équilibre.

2) En utilisant la deuxième loi de Newton, établir l'équation différentielle du mouvement relative à l'abscisse x du centre de gravité G du mobile à l'instant t

3) Montrer que l'expression $x(t) = x_M \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi)$ est solution de cette équation différentielle.

4) On suppose qu'à l'instant initial $t = 0 \text{ s}$, l'oscillateur possède une amplitude $x_0 = 2 \text{ cm}$ et une vitesse $v_0 = 0$. Déterminer l'équation horaire du mouvement.

5) Exprimer la période propre T_0 des oscillations de l'oscillateur en fonction de k et m .

6) Etablir l'expression de l'énergie totale du système fonction de x , k , $\frac{dx}{dt}$; et m . sachant que la référence de l'énergie potentielle de pesanteur est prise à la position d'équilibre.

7) Quelle est l'hypothèse qui permet d'affirmer, dans cet exercice, que l'énergie totale du système reste constante ? En déduire l'équation différentielle du mouvement

Mouvement d'une Particule Chargée dans un Champ magnétique Uniforme

○ Objectifs pédagogiques

- Définir le champ magnétique en un point ;
- Donner les caractéristiques du vecteur champ magnétique en un point ;
- Donner les caractéristiques du vecteur champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde ;
- Donner l'expression du champ B au centre d'un solénoïde ;
- Donner les caractéristiques de la force de LORENTZ ;
- Etablir la nature du mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme ;
- Etudier quelques applications de la force de Lorentz .

I. Le champ magnétique

1 Les sources de champ magnétique

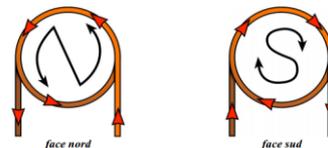
a. Les aimants

Tout aimant possède deux pôles : un **pôle nord (N)** et un **pôle sud (S)**.



b. Le courant électrique

Les deux faces d'une bobine parcourue par le courant électrique ne sont pas identiques ; l'une est **Face nord (N)** et l'autre **Face sud (S)**.



Une bobine parcourue par le courant électrique se comporte comme un aimant droit.

c. La Terre

La terre se comporte comme un aimant et engendre un champ magnétique équivalent à celui créé par un aimant droit placé en son centre et dont l'axe est légèrement incliné par rapport à l'axe des pôles.

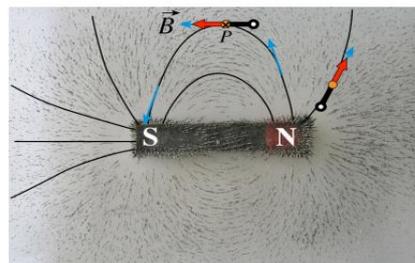
d. Les interactions magnétiques

- Deux pôles ou deux faces de même nom se repoussent alors que des pôles ou deux faces de noms contraires s'attirent.
- Une face d'un circuit est repoussée par un pôle de même nom et attirée par un pôle de nom contraire.

2. Le vecteur champ magnétique

a. Le champ magnétique créé par un aimant

L'état magnétique d'un point M est déterminé par un vecteur \vec{B} appelé **vecteur champ magnétique** ou **vecteur induction magnétique**.



Les boussoles s'orientent selon les lignes de champ.

○ Les caractéristiques du vecteur champ magnétique

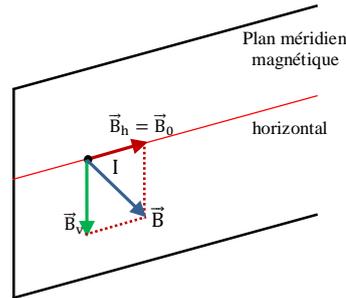
- Direction : celle de l'axe d'une aiguille aimantée placée
- Sens : \vec{B} est orienté du pôle sud vers le pôle nord de l'aiguille aimantée détectrice ;

- Intensité : elle est noté **B** et s'exprime en **Tesla (T)**.

b. Le champ magnétique terrestre

Le champ magnétique terrestre ou champ géomagnétique n'est ni vertical ni horizontal. L'angle qu'il forme avec l'horizontal s'appelle **inclinaison I** du lieu.

$$\vec{B} = \vec{B}_v + \vec{B}_0$$



○ Une aiguille aimantée placée sur un pivot s'oriente suivant la direction et le sens de \vec{B}_0 . Dans la pratique on prend $B_h = B_0 = 2 \cdot 10^{-5} T$.

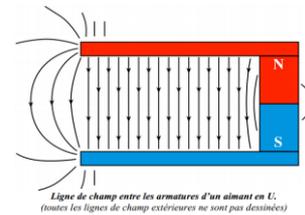
c. Le champ magnétique uniforme

Le champ magnétique est uniforme dans une région de l'espace s'il garde la même direction, le même sens et la même intensité.

Le champ magnétique entre les branches d'un aimant en U est uniforme.

Les caractéristiques du champ magnétique \vec{B} entre les deux branches sont :

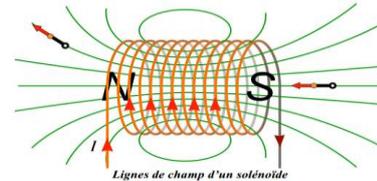
- Direction : Perpendiculaire aux deux branches ;
- Sens : pôle nord vers le pôle sud.



d. Le champ magnétique créé par un solénoïde

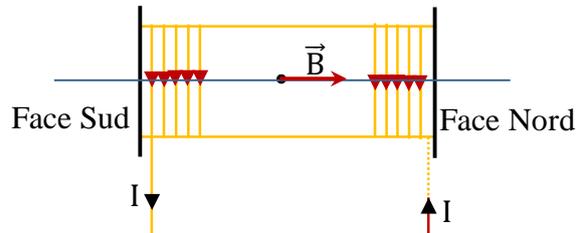
Un solénoïde est une bobine dont la longueur est au moins supérieure à 10 fois son rayon ($L > 10r$).

Le champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde est uniforme.



○ Les caractéristiques du vecteur champ magnétique \vec{B} au centre du solénoïde sont :

- Direction : celle de l'axe du solénoïde ;
- Sens : de la face sud vers la face nord ;
- Intensité : elle est donnée par l'expression :



$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{L} I$$

$n = \frac{N}{L}$: Nombre de spires par mètre
 I : Intensité du courant qui traverse le solénoïde
 $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} SI$: Perméabilité absolue du vide
 N : Nombre de spires du solénoïde
 L : Longueur du solénoïde.

3. Etude expérimentale du champ magnétique créé par un solénoïde

a. Le vecteur champ magnétique à l'intérieur du solénoïde

A l'intérieur du solénoïde, les lignes de champ sont parallèles. Quelques mesures sur l'axe du solénoïde montrent que la valeur de \vec{B} est constante.

Le champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde est donc uniforme.

b. Influence de l'intensité du courant

A l'aide d'un teslamètre, on mesure le champ magnétique au centre du solénoïde pour quelques valeurs de l'intensité du courant.

I (A)	0,5	1	1,5	2
B (mT)	0,3	0,6	0,9	1,2

B/I (T/A)	$1,6 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-3}$
-----------	---------------------	---------------------	---------------------	---------------------

Le rapport $\frac{B}{I}$ est constant.

Le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde est donc proportionnel à l'intensité du courant qui le parcourt.

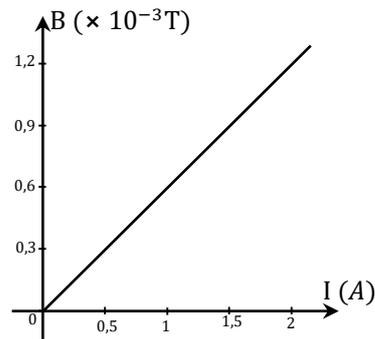
- o Expression de B en fonction de l'intensité du courant I

La courbe $B = f(I)$ est une droite linéaire.

Donc $B = k \cdot I$ avec $k = \text{cte}$

$$k = \frac{\Delta B}{\Delta I} = \frac{1,2 - 0,3}{2 - 0,5} \Rightarrow k = 6 \cdot 10^{-3} \text{T/A}$$

d'où : $B = 6 \cdot 10^{-3} \cdot I$



c. Influence du nombre de spires par mètre

L'intensité du courant étant fixée, mesurons B au centre du solénoïde comportant plusieurs couches de spires. On obtient B pour quelques valeurs du nombre n de spires par unité de longueur.

n (spires/m)	485	970	1455
B (mT)	0,6	1,2	1,8
B/n	$1,24 \cdot 10^{-6}$	$1,24 \cdot 10^{-6}$	$1,24 \cdot 10^{-6}$

Le rapport B/n est constant.

Le champ magnétique, à l'intérieur d'un solénoïde, est proportionnel au nombre de spires par mètre.

d. Conclusion

Le champ magnétique, à l'intérieur d'un solénoïde, est proportionnel à l'intensité du courant électrique qui le traverse et au nombre de spires par unité de longueur de ce solénoïde.

Nous admettons l'expression suivante pour un solénoïde infiniment long.

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{L} I$$

}

$n = \frac{N}{L}$: Nombre de spires par mètre

I : Intensité du courant qui traverse le solénoïde

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{SI}$: Perméabilité absolue du vide

N : Nombre de spires du solénoïde

L : Longueur du solénoïde.

II. Mouvement d'une Particule Chargée dans un Champ magnétique Uniforme

L'image de télévision est formée par l'impact des électrons qui frappent les éléments luminescents recouvrant la face intérieure de l'écran. Ces électrons sont déviés par un champ magnétique.

A quelle loi obéit le mouvement d'un électron dans un champ magnétique ?

1. Action d'un champ magnétique sur une particule chargée

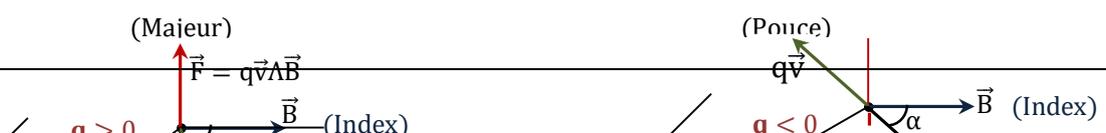
a. La force magnétique de Lorentz

Une particule de masse m, portant une charge q, se déplaçant à la vitesse \vec{v} dans une région de l'espace où règne un champ magnétique \vec{B} est soumise à une force magnétique \vec{F} telle que :

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}; \quad \vec{F} \text{ est appelée } \textbf{force de Lorentz}.$$

- o Les caractéristiques de la **force de Lorentz** sont :

- **Point d'application** : la particule supposée ponctuelle ;
- **Direction** : perpendiculaire au plan formé par \vec{v} et \vec{B} c'est à dire $(\vec{F} \perp \vec{v})$ et $(\vec{F} \perp \vec{B})$;
- **Sens** : le sens de \vec{F} est tel que le trièdre $(q\vec{v}; \vec{B}; \vec{F})$ soit direct. \vec{F} est donnée par le bras gauche du bonhomme d'Ampère qui se couche suivant $q\vec{v}$ et regardant dans le même sens que \vec{B} .



- **Intensité** : Si α est l'angle formé par les vecteur \vec{v} et \vec{B} , l'intensité F de la force \vec{F} est donnée par :

$$F = |q \sin \alpha| v B$$

Remarque :

- Si $\vec{v} = \vec{0}$ et $\vec{v} \parallel \vec{B}$ alors $\vec{F} = \vec{0}$

- Si $\vec{v} \perp \vec{B} \Rightarrow \sin \alpha = \pm 1$ alors $F = |q| v B$.

b. Puissance de la force de Lorentz

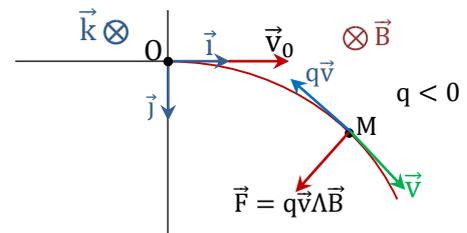
$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow v = \text{cte}$$

Dans un champ magnétique, le mouvement d'une particule chargée est uniforme. La force magnétique de Lorentz ne modifie que la direction du vecteur vitesse de la particule.

2. Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme

Considérons le mouvement d'une particule de masse m , de charge q ($q < 0$) pénétrant dans un champ magnétique uniforme \vec{B} avec une vitesse initiale \vec{v}_0 telle que $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$.

On a choisi le repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ tel que : $\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$ et $\vec{B} = B \vec{k}$.



a. Montrons que le mouvement de la particule est plan

$$\vec{F}_{\text{ext}} \left| \begin{array}{l} \vec{P} = m\vec{g} : \text{Poids du solide} \\ \vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} : \text{Force magnétique de Lorentz} \end{array} \right.$$

On suppose que l'effet du poids est négligeable devant celui de la force magnétique de Lorentz \vec{F} .

$$\text{TCI} : \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{q}{m} \vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{v} \text{ et } \vec{a} \perp \vec{B} \text{ donc } \vec{a} \perp \vec{k}$$

$$a_z = \vec{a} \cdot \vec{k} = 0 \Rightarrow v_z = v_{0z} = 0 \Rightarrow z = z_0 = 0$$

$\mathbf{z = 0} \Rightarrow$ le mouvement est plan et s'effectue dans le plan $z=0$ c'est-à-dire le plan $(\vec{i}; \vec{j})$.

b. Montrons que le mouvement de la particule est uniforme

Dans la base de Frenet $(\vec{\tau}; \vec{n})$ on a : $\vec{v} = v\vec{\tau} \Rightarrow \vec{v}$ est colinéaire à $\vec{\tau}$ et $\vec{a} = a_t \vec{\tau} + a_n \vec{n} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}$.

$$\mathbf{a}_t = \vec{a} \cdot \vec{\tau} = \left(\frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n} \right) \cdot \vec{\tau} \Rightarrow \mathbf{a}_t = \frac{dv}{dt} = 0 \Leftrightarrow v = \text{cte d'où le mouvement est uniforme.}$$

c. Montrons que le mouvement de la particule est circulaire

Dans la base de Frenet $(\vec{\tau}; \vec{n})$ on a : $\vec{a} = a_n \vec{n} = \frac{v^2}{\rho} \vec{n} = \frac{|q|}{m} v B \vec{n} \Rightarrow \frac{v^2}{\rho} = \frac{|q|}{m} v B \Leftrightarrow \rho = \frac{mv}{|q|B}$

$\mathbf{v = v_0 = cte} \Rightarrow \rho = \frac{mv_0}{|q|B} = \text{cte}$ d'où le mouvement de la particule est circulaire.

○ Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme tel que $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$ est plan circulaire et uniforme. Le rayon du cercle décrit par la particule est donné par la relation :

$$R = \frac{mv_0}{|q|B}$$

- o La quantité de mouvement de la particule est donnée par la relation : $p = |q|RB$.

3. Applications pratiques

a. La déflexion magnétique

La particule est déviée d'un angle α à la sortie du champ magnétique uniforme \vec{B} .

$$\sin \alpha = \frac{l}{R} = \frac{|q|lB}{mv_0} \quad \text{ou} \quad \tan \alpha = \frac{O'M}{O'I} = \frac{Y}{L-OI}$$

Dans les dispositifs utilisés, α est petit ; la distance OI est alors très inférieure à L . Ainsi $\sin \alpha = \tan \alpha \approx \alpha$, et :

$$\frac{l}{R} = \frac{Y}{L} \Rightarrow Y = \frac{lL}{R} \quad \text{soit} \quad Y = \frac{|q|lL}{mv_0} B$$

b. Le spectromètre de masse

Un spectrographe de masse est un appareil qui permet de trier des ions de masse ou de charges différentes par utilisation d'un champ magnétique et d'un champ électrique.

Un spectromètre de masse de type Dempster comprend :

- une chambre d'ionisation où sont produits les ions ;
- une chambre d'accélération où les ions y pénètrent avec une vitesse quasiment nulle et sont accélérés par un champ électrique \vec{E} , sous une tension U ; ils en sortent au point O avec une vitesse \vec{v}_0 telle que : $\frac{1}{2}mv_0^2 = |q|U$

- une chambre de déviation où les particules y sont soumises

à l'action d'un champ magnétique uniforme \vec{B} ; elles décrivent un demi-cercle dont le rayon R est tel que :

$$R = \frac{mv_0}{|q|B}$$

- un détecteur (plaque photographique, compteur, collecteur...) où sont recueillies les particules.

- o Expressions des vitesses v_{01} et v_{02} des particules à l'entrée de la chambre de déviation.

En appliquant le TEC entre A et O avec $v_A = 0$ on trouve : $\frac{1}{2}mv_0^2 = qUP_1P_2 = |q|U \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2|q|U}{m}}$

$$\text{soit } v_{01} = \sqrt{\frac{2|q|U}{m_1}} \quad \text{et} \quad v_{02} = \sqrt{\frac{2|q|U}{m_2}}$$

- o Expressions des rayons R_1 et R_2 des particules dans la chambre de déviation.

$$R = \frac{mv_0}{|q|B} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mU}{|q|}} \quad \text{soit} \quad R_1 = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m_1U}{|q|}} \quad \text{et} \quad R_2 = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m_2U}{|q|}}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m_1U}{|q|}} \cdot \frac{1}{B} \sqrt{\frac{|q|}{2m_2U}} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \quad \text{donc} \quad m_1 \neq m_2 \Rightarrow R_1 \neq R_2$$

Dans un champ magnétique uniforme \vec{B} , des particules chargées de masses différentes ne sont pas déviées de la même manière.

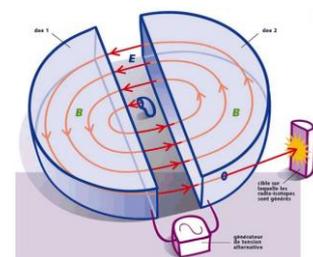
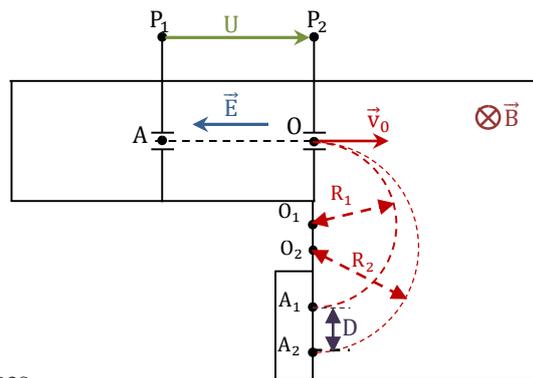
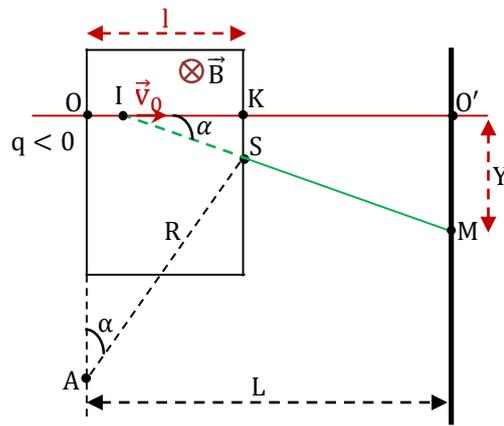
- o Calcul de distance D séparant les points d'impact A_1 et A_2 sur l'écran.

$$D = A_1A_2 = OA_2 - OA_1 \Rightarrow D = 2(R_2 - R_1) = 2 \left(\frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m_2U}{|q|}} - \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m_1U}{|q|}} \right)$$

$$\text{d'où} \quad D = \sqrt{\frac{8U}{|q|B^2}} (\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1})$$

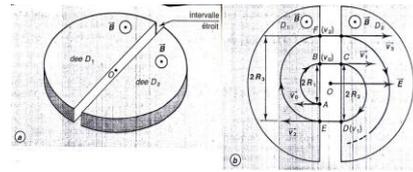
Le spectrographe de masse est un appareil très utile. Il permet :

- de mesurer la masse des isotopes ;
- d'identifier des isotopes d'un élément ;
- de déterminer le pourcentage de chaque isotope contenu dans un élément ;
- d'analyser un mélange gazeux ou solide ;
- de préciser la formule des composés organiques.



c. Le cyclotron

Un cyclotron est un accélérateur de particules chargées, les protons par exemple. Il est formé de deux demi-cylindres creux D_1 et D_2 , appelés « dees » séparés par un intervalle dans lequel règne un champ électrostatique \vec{E} variable. Ce champ permet d'accélérer les particules à chaque fois qu'elles arrivent dans cet intervalle.



- Temps mis par la particule pour effectuer un demi-tour.

En négligeant le temps de passage des particules entre les dees on a :

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\pi R}{v} \text{ où } T \text{ est la durée d'un tour ou période.}$$

Or $R = \frac{mv_0}{|q|B}$ donc $t = \frac{\pi m}{|q|B}$. **La période T de ce mouvement est : $T = 2t \Rightarrow T = \frac{2\pi m}{|q|B}$**

- Variation de l'énergie cinétique de la particule

Soit $u = U_m \sin \omega t$ la tension entre les deux dees.

L'énergie cinétique de la particule s'accroît après chaque tour de ΔE_C telle que : $\Delta E_C = 2|q|U_m$.

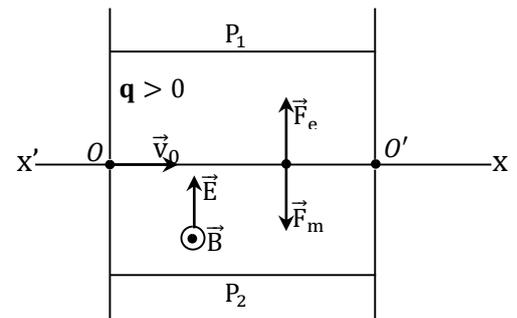
Après n tours, on a donc : $\Delta E_C = 2n|q|U_m$

d. Le filtre de vitesses ou sélecteur de vitesses

Il permet d'obtenir un faisceau homocinétique de particules à l'entrée d'un spectrographe de masse par exemple. Pour l'obtenir, on superpose un champ électromagnétique uniforme \vec{B} et un champ électrostatique uniforme \vec{E} de sorte que les deux champs soient orthogonaux.

Des particules de charge q sont lancées suivant l'axe ($x'x$).

$$\vec{F}_{\text{ext}} \left\{ \begin{array}{l} \vec{P} = m\vec{g} : \text{Poids du solide} \\ \vec{F}_e = q\vec{E} : \text{Force électrostatique} \\ \vec{F}_m = q\vec{v}\wedge\vec{B} : \text{Force magnétique de Lorentz} \end{array} \right.$$



On néglige le poids de la particule devant les deux autres forces (force magnétique et force électrostatique).

Pour que les particules passent par le point O' sans subir de déviation il faut que :

$$\vec{F}_e + \vec{F}_m = \vec{0} \Leftrightarrow q(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B}) = \vec{0} \text{ donc } \vec{E} = -\vec{v}\wedge\vec{B} = \vec{B}\wedge\vec{v}$$

Comme $\vec{v} \perp \vec{B}$ alors $\vec{E} = \vec{v}\wedge\vec{B} \Rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{E}}{\vec{B}}$

- Seules les particules ayant la vitesse $\vec{v}_0 = \frac{\vec{E}}{\vec{B}}$ peuvent passer par le point O' sans subir de déviation.

- Si $\vec{v} < \frac{\vec{E}}{\vec{B}}$ alors $F_e > F_m$. La particule sera déviée dans le sens de la force électrostatique (vers la plaque P_1).

- Si $\vec{v} > \frac{\vec{E}}{\vec{B}}$ alors $F_e < F_m$. La particule sera déviée dans le sens de la force magnétique (vers la plaque P_2).

EXERCICES SUR LE CHAMP MAGNETIQUE

EXERCICE1

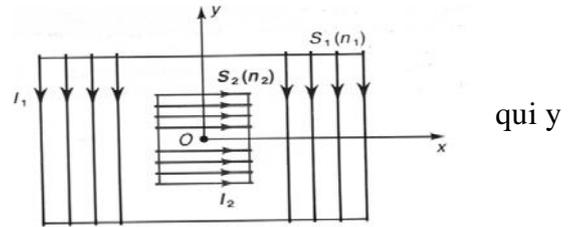
A l'intérieur d'un long solénoïde S_1 comportant $n_1 = 1000$ spires par mètres et parcouru par un courant d'intensité $I_1 = 2$ A, on a placé un solénoïde S_2 dont l'axe est perpendiculaire à celui de la figure.

Le solénoïde S_2 est formé de 200 spires régulièrement enroulées sur une longueur de 5 cm, et l'intensité du courant circule vaut $I_2 = 1$ A.

Les sens des courants sont indiqués sur la figure ci-contre.

1) Déterminer le vecteur champ magnétique \vec{B} au point O.

2) Que devient ce champ magnétique si on inverse le sens de chacun des deux courants ?



EXERCICE 2

Une bobine est constituée d'un enroulement de fil de diamètre $d=1$ mm, recouvert de vernis d'isolant d'épaisseur négligeable. Les spires sont jointives et assimilées à des cercles parfaits de rayon $r=2,5$ cm.

1. Calculer le nombre de spires par unité de longueur de la bobine.

2. La longueur du fil de cuivre utilisé est $L=62,8$ m

Calculer la longueur l de la bobine. Peut-on considérer cette bobine comme un solénoïde ?

3. Le solénoïde est traversé par un courant d'intensité $I=4$ A. Calculer le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde.

4. Le solénoïde est maintenant placé dans un endroit où règne un champ magnétique uniforme horizontal de valeur $B_h=2,510^{-5}$ T. En l'absence de courant, une aiguille aimantée, placée au centre du solénoïde, s'oriente perpendiculairement à l'axe du solénoïde. On établit un courant continu d'intensité $I'=0,01$ A. De quel angle dévie l'aiguille aimantée ?

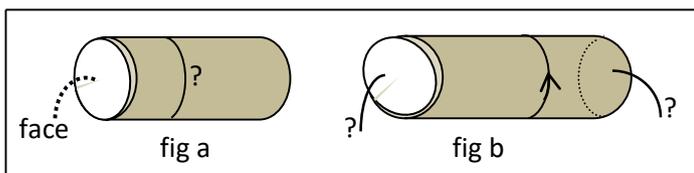
EXERCICE3

1) Un solénoïde de longueur $l = 50$ cm comporte 2500 spires, il est parcouru par un courant d'intensité $I = 2,2$ A. Calculer la valeur du champ magnétique créé au centre du solénoïde.

2-a) Un solénoïde parcouru par un courant a sa face sud placée comme l'indique la figure (a)

Donner le sens du courant dans le solénoïde en justifiant la réponse.

b) Quels sont les noms des faces du solénoïde de la figure (b) lorsque celui-ci est parcouru par un courant circulant dans le sens



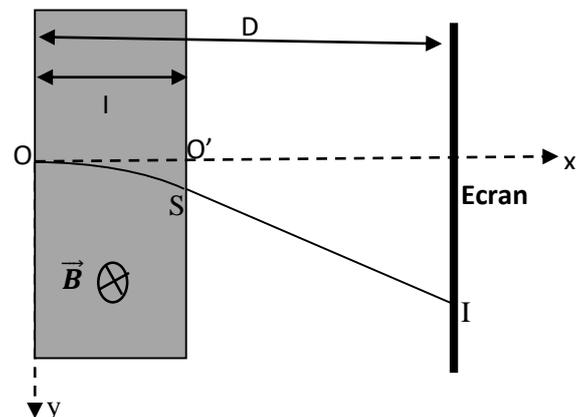
EXERCICE4

Un électron pénètre, en O, avec une vitesse horizontale $v_0 = 10^7$ m/s, dans une région de longueur $l = 2$ cm où règne un champ magnétique \vec{B} uniforme, vertical et de valeur

$B = 10^{-3}$ T. La particule en sort et va heurter un écran placé à une distance $D = 50$ cm du point d'entrée.

a) Déterminer l'angle de déflexion et les coordonnées du point S où la particule quitte la région de champ magnétique.

b) Ecrire l'équation de la trajectoire de la particule entre la région de champ magnétique et l'écran. Quelles sont les coordonnées du point I d'impact sur l'écran ?



EXERCICE7

On introduit dans un champ spectrographe de masse des ions potassium ${}_{19}^A K^+$ et ${}_{19}^{A'} K^+$ (A et A' désignent les nombres de masse) de même charge q et de masses respectives m et m'.

En O₁ la vitesse des ions est pratiquement nulle ; ils sont accélérés par la tension U établie entre les plaques P₁ et P₂.

a) Représenter sur le schéma le champ électrique \vec{E} régnant entre les plaques P₁ et P₂.

Préciser le signe de $U = (V_{P_1} - V_{P_2})$.

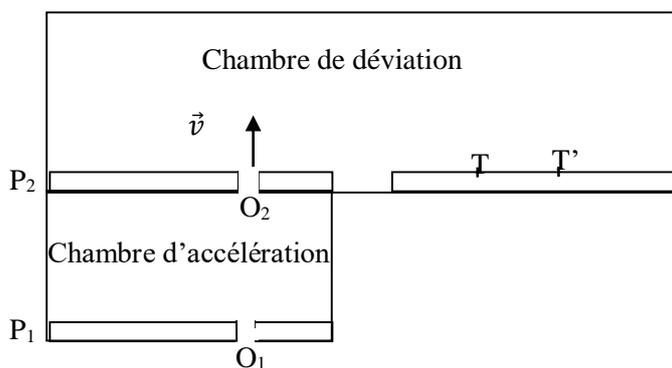
Exprimer les vitesses v et v' en fonction de q, U et des masses respectives m et m'.

b) Les ions pénètrent ensuite dans une chambre de déviation où règne un champ magnétique \vec{B} uniforme orthogonal au plan de figure. Quel doit être le sens de \vec{B} pour que les ions soient déviés vers la plaque sensible ?

Montrer que le mouvement des ions est circulaire uniforme et exprimer littéralement les rayons R et R' de leur trajectoire en fonction de U, q, B et de leurs masses respectives m et m'.

c) Deux taches T et T' se forment sur la plaque sensible. En admettant que le rapport des masses soit égal au rapport des nombres de masse, calculer la valeur de A' sachant que :

A = 39 ; O₂T = 102,9 cm et O₂T' = 106,8 cm.



EXERCICE9

Soit un cyclotron à fréquence fixe N. C'est un accélérateur de particules constitué de deux demi-cylindres conducteurs creux D₁ et D₂ appelés «dés », séparés par un intervalle étroit. A l'intérieur des deux dés D₁ et D₂, règne un champ magnétique uniforme \vec{B} (voir figure).

Une tension U est maintenue entre les deux dés. Cette tension change de signe périodiquement.

Des protons sont lancés à partir d'un point O dans la région D₁ avec un vecteur Vitesse \vec{V}_0 .

1) Exprimer le rayon R, de la trajectoire des protons dans le dé D₁, ainsi que la durée du trajet effectué.

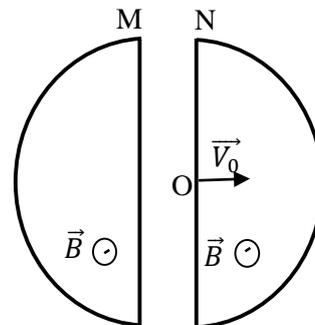
2) Déterminer le vecteur vitesse \vec{V}_0 des protons lorsqu'ils sortent de la région D traversant la paroi PQ. Quel doit être alors le signe de la tension U pour accélérer les protons ? Avec quelle vitesse V₂ pénètrent ils dans le dé D₂ ?

3) Exprimer le rayon R₂ de la trajectoire des protons dans le dé D₂, ainsi que la durée du trajet effectué.

4) Quel est le signe de la tension U lorsque les protons quittent le dé D₂ en traversant la paroi PQ ?

Calculer la période T et la fréquence N de la tension U, en négligeant la durée de transfert dans l'intervalle entre les deux dés.

5) Soit R₀ le rayon des dés. Donner les expressions de la vitesse et de l'énergie cinétique maximales acquises par les protons.



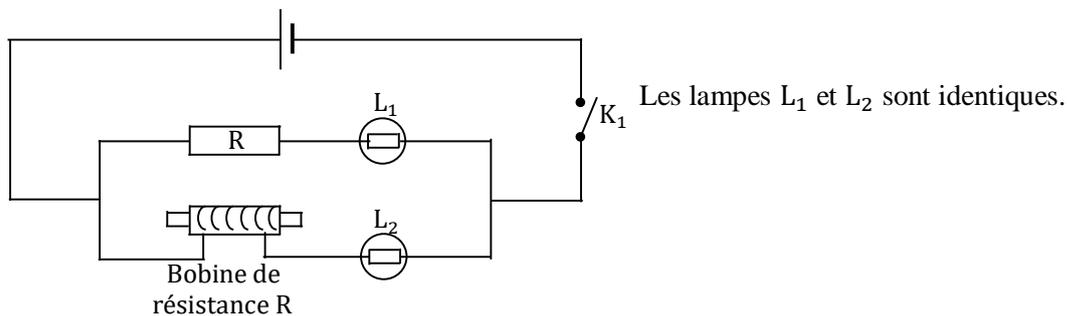
Phénomènes d'auto-induction

○ Objectifs pédagogiques

- Etablir la cause du phénomène d'auto-induction ;
- Définir et calculer le flux propre à travers une bobine parcourue par un courant ;
- Définir et calculer l'inductance propre d'une bobine ;
- Définir et calculer la force électromotrice d'auto-induction d'une bobine parcourue par un courant.

I. MISE EN EVIDENCE DU PHENOMENE D'AUTO-INDUCTION

1. Première expérience

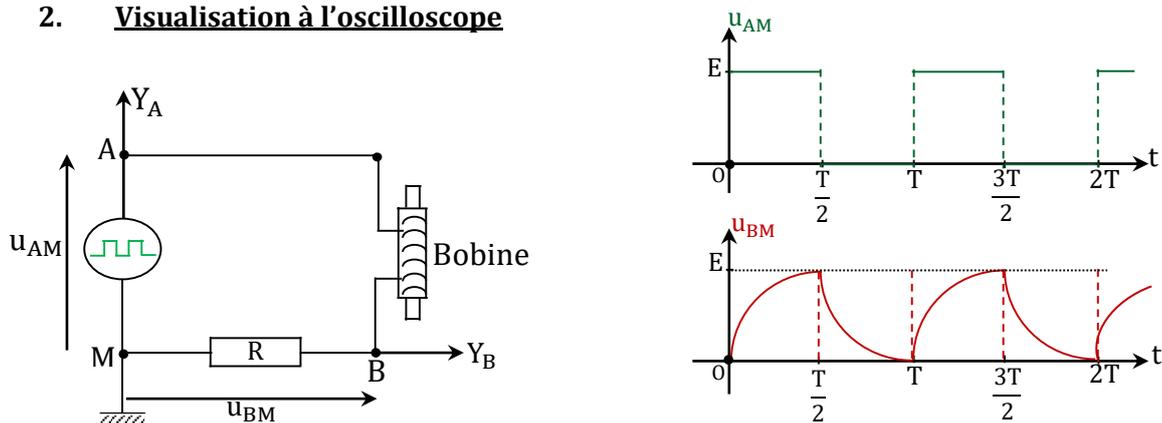


Lorsqu'on ferme l'interrupteur K , la lampe L_1 s'allume instantanément alors que la lampe L_2 s'allume progressivement en accusant un léger retard sur la lampe L_1 .

A l'ouverture de l'interrupteur, la lampe L_2 s'éteint progressivement en accusant un léger retard sur la lampe L_1 .

○ **La bobine s'oppose donc à l'établissement du courant ou à sa rupture dans la branche contenant la lampe L_2 .**

2. Visualisation à l'oscilloscope



La tension u_{BM} visualisée aux bornes du résistor de résistance R représente les variations de l'intensité i du courant dans le circuit.

○ **Une bobine placée dans un circuit s'oppose à l'établissement du courant et à sa rupture. Ce phénomène porte le nom d'auto-induction.**

3. Interprétation

La variation du courant électrique dans la bobine crée un champ magnétique variable dans l'espace intérieur à la bobine. La bobine est donc traversée par un flux magnétique variable, qui crée à son tour une **force électromotrice (f.e.m) induite** qui a pour conséquence l'apparition d'un **courant induit** dans la bobine. Ce courant induit va s'opposer à la variation du courant inducteur.

○ Toute variation de flux magnétique ou toute variation du courant à travers une bobine engendre une f.e.m. induite qui par ses effets va s'opposer à la cause qui lui donne naissance : c'est le phénomène d'auto-induction.

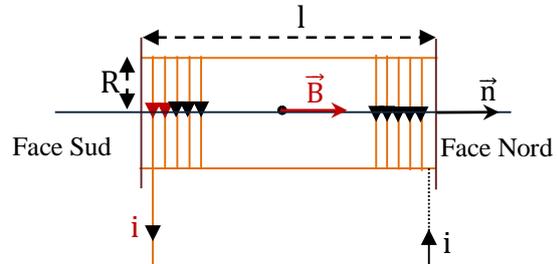
II. FLUX PROPRE ET INDUCTANCE D'UNE BOBINE

1. Le flux propre à travers une bobine

○ Le flux propre est le flux envoyé à travers une bobine par le courant qui y circule.

- Le flux propre φ d'auto-induction à travers un circuit parcouru par un courant est proportionnel à l'intensité i de ce courant. Il est donné par l'expression :

$$\begin{array}{ccc} \text{Wb} & \longrightarrow & \varphi = L \cdot i & \longleftarrow & \text{A} \\ \text{(Weber)} & & & & \text{(Ampère)} \\ & & \uparrow & & \\ & & \text{H} & & \\ & & \text{(Henry)} & & \end{array}$$



La constante L est appelée inductance de la bobine.

- Expression du flux propre φ à travers une bobine

Considérons une bobine de longueur l et de rayon R comportant N spires qui est traversée par un courant d'intensité i .

$$\varphi = N \vec{B} \cdot \vec{S} = N S \vec{B} \cdot \vec{n} = N B S$$

\vec{n} est le **vecteur normal à la surface**. Il est orienté de la face sud de la bobine vers sa face nord.

$$\text{or } B = \mu_0 n i = \mu_0 \frac{N}{l} i \text{ et } S = \pi R^2 \text{ d'où } \varphi = \frac{\mu_0 N^2 S}{l} \cdot i = \frac{\pi \mu_0 N^2 R^2}{l} \cdot i$$

2. Inductance L d'une bobine

Par définition : $\varphi = L \cdot i$.

$$\text{Donc on a : } L \cdot i = \frac{\mu_0 N^2 S}{l} \cdot i = \frac{\pi \mu_0 N^2 R^2}{l} \cdot i \text{ d'où } L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l} = \frac{\pi \mu_0 N^2 R^2}{l}$$

III. TENSION AUX BORNES D'UNE BOBINE

1. Force électromotrice d'auto-induction

Lorsque l'intensité du courant varie, une bobine de résistance négligeable (inductance pure) se comporte comme un générateur idéal de tension de f.e.m. e .



La force électromotrice e de la bobine est défini par l'opposé de la dérivée par rapport au temps du flux propre φ qui la traverse.

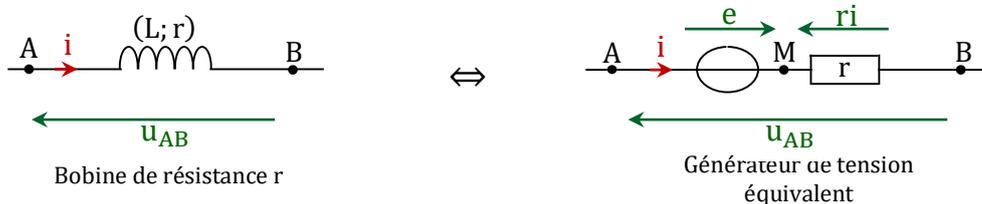
$$e = - \frac{d\varphi}{dt} \text{ or } \varphi = L \cdot i \text{ donc } \varphi = -L \frac{di}{dt} \text{ d'où } u_{AB} = -e = L \frac{di}{dt}$$

La force électromotrice e s'exprime en **volt (V)**.

- Si $i = cte \Rightarrow$ régime permanent (ou courant continu) alors $e = 0$.

Il n'y a donc pas de phénomène d'auto-induction en régime permanent ou en courant continu.

2. Tension aux bornes d'une bobine



$$u_{AB} = u_{AM} + u_{MB}$$

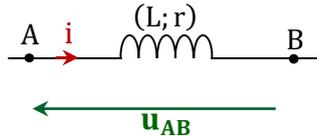
Or $u_{AM} = -u_{MA} = -e$ et $u_{MB} = ri$ donc $u_{AB} = ri - e$
 Comme $\varphi = -L \frac{di}{dt}$ alors $u_{AB} = ri + L \frac{di}{dt}$

Aux bornes (A ; B) d'une bobine d'inductance L et de résistance r, orientée de A vers B et traversée par un courant d'intensité i, la tension est donnée par :

$$u_{AB} = ri - e = L \frac{di}{dt} + ri$$

IV. TENSION AUX BORNES D'UNE BOBINE

Soit le circuit électrique suivant constitué d'une bobine d'inductance L et de résistance r traversé par le courant d'intensité i et maintenant la tension u_{AB} entre ses bornes A et B.



- La puissance électrique reçue à chaque instant par la bobine est donnée par la relation suivante :

$$\mathcal{P} = u_{AB} \cdot i$$

- L'énergie emmagasinée dans une bobine d'inductance L lorsqu'elle est parcourue par un courant d'intensité i est donnée par la relation :

$$W \longrightarrow \mathcal{E}_m = \frac{1}{2} L \cdot i^2 \longleftarrow A$$

V. ETUDE DES REGIMES TRANSITOIRES

1. Etude expérimentale

Réalisons le montage schématisé sur la figure ci-contre. Associons en série une bobine d'inductance L et de résistance propre r, un conducteur ohmique de résistance R et un générateur idéal de tension de f.e.m. E.

Un ordinateur ou un oscilloscope à mémoire permet d'enregistrer l'évolution, au cours du temps, du courant dans le conducteur ohmique.

- Fermons l'interrupteur K

L'établissement du courant dans le circuit n'est instantané : l'intensité croît jusqu'à une valeur limite I_0 , valeur de l'intensité en régime permanent.

- Ouvrons l'interrupteur K

L'annulation du courant dans le circuit n'est instantanée : l'intensité décroît à partir de la valeur limite I_0 avant de s'annuler. Le courant induit dans la bobine peut circuler à travers la diode.

En modifiant la valeur de R ou celle de L, on constate que la durée d'établissement ou d'annulation du courant est d'autant plus grande que :

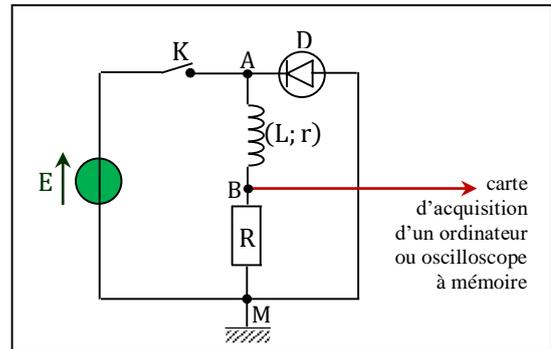
- La valeur de la résistance R est plus petite ;
- La valeur de l'inductance L est plus grande.

2. Constante de temps

La constante de temps d'un circuit d'inductance L et résistance totale R est la durée τ telle que :

$$\tau = \frac{L}{R}$$

Quelle est la signification physique de la constante de temps τ ?



○ **Etablissement du courant**

- ✚ Au bout de la durée $\Delta t = \tau$, après la fermeture du circuit, l'intensité i atteint 63% environ de sa valeur limite.
- ✚ Au de la durée $\Delta t = 5\tau$, l'intensité i a pratiquement atteint sa valeur limite à plus de 99%.

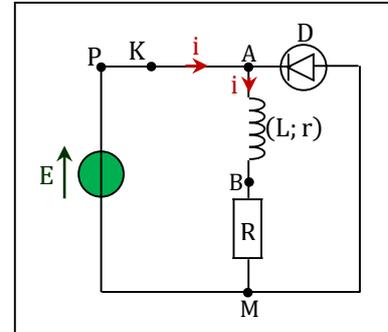
○ **Rupture du courant**

Au bout d'une durée τ , l'intensité ne vaut plus que 37% de sa valeur initiale. L'intensité est pratiquement nulle après une durée de 5τ

3. Intensité du courant et tension aux bornes du conducteur ohmique

a. Etablissement du courant

On ferme l'interrupteur K à $t = 0$. La diode n'est pas passante : un courant transitoire d'intensité $i(t)$ circule dans le circuit comprenant le générateur.



- Equation différentielle à laquelle obéit i .

$$u_{PM} = u_{PA} + u_{AB} + u_{BM} \Leftrightarrow E = ri + L \frac{di}{dt} + Ri$$

$$\text{Soit } \mathbf{E = (R + r)i + L \frac{di}{dt}} \Leftrightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R+r}{L}i = \frac{E}{L} \quad (\text{a})$$

- Expression de l'intensité I_0 du courant en régime permanent.

$$i = I_0 = \text{cte} \Rightarrow \frac{di}{dt} = 0 \quad (\text{a}) \Rightarrow E = (R + r)I_0 \Leftrightarrow \mathbf{I_0 = \frac{E}{R+r}}$$

- Vérifions que l'expression $i(t) = I_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ est solution de l'équation différentielle avec $I_0 = \frac{E}{R+r}$ et $\tau = \frac{L}{R+r}$.

La solution de l'équation différentielle est de la forme $i(t) = Ae^{-\frac{R+r}{L}t} + B \Rightarrow$ donc
 A t = 0 ; i = 0 $\Rightarrow A + B = 0 \Leftrightarrow B = -A$ soit $i(t) = A(e^{-\frac{R+r}{L}t} - 1)$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{A(R+r)}{L}e^{-\frac{R+r}{L}t}$$

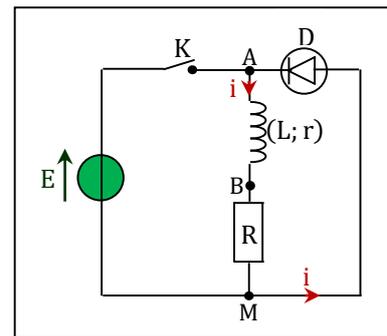
$$(\text{a}) \Rightarrow -A(R+r)e^{-\frac{R+r}{L}t} + A(R+r)e^{-\frac{R+r}{L}t} - A(R+r) = E \quad \text{donc } A = -\frac{E}{R+r}$$

$$\text{d'où } i(t) = \frac{E}{R+r} (1 - e^{-\frac{R+r}{L}t}) \quad \text{soit } \mathbf{i(t) = I_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$$
 avec $\mathbf{I_0 = \frac{E}{R+r}}$ et $\mathbf{\tau = \frac{L}{R+r}}$.

b. Annulation du courant

On ouvre l'interrupteur K. Le courant dans la bobine traverse le conducteur ohmique de résistance R et la diode D.

Aux bornes de la diode, la tension est négligeable. L'application de la loi d'additivité des tensions dans le circuit donne :



- Equation différentielle à laquelle obéit i .

$$u_{AB} + u_{BM} + u_{MA} = 0$$

$$L \frac{di}{dt} + ri + Ri + 0 = 0 \quad \text{soit } \mathbf{L \frac{di}{dt} + (R + r)i = 0} \quad (\text{b})$$

- Expression de l'intensité i du courant en régime transitoire.

$$i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + B \quad \text{avec } \tau = \frac{L}{R+r} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{A}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$(\text{b}) \Rightarrow -\frac{AL}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} + A(R+r)e^{-\frac{t}{\tau}} - B(R+r) = 0 \Leftrightarrow A\left(-\frac{L}{\tau} + R+r\right)e^{-\frac{t}{\tau}} + (R+r)B = 0$$

Comme $R+r \neq 0$ alors $B = 0 \Rightarrow i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

$$\text{A t = 0 ; } i = I_0 = \frac{E}{R+r}. \quad \text{D'où } \mathbf{i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

Exercice sur l'auto-induction

Exercice 1

On réalise un circuit électrique en série comportant un résistor de résistance R_1 variable, une bobine d'inductance L et de résistance interne r , un ampèremètre et un interrupteur K (figure 2). L'ensemble est alimenté par un générateur de tension de force électromotrice E . Un oscilloscope bicourbe permet de visualiser l'évolution au du temps des tensions u_{AM} aux bornes de la branche AM et $u_{R_1} = u_{DM} = R_1 i$, la tension aux bornes du dipôle résistor lorsque sa résistance est réglée à une valeur R_1 .

A l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K , les courbes traduisant l'évolution au cours temps des tensions u_{AM} et u_{DM} sont données par la figure 3.

1- Montrer que l'équation différentielle qui régit l'évolution de la tension $u_{R_1} = u_{DM}$ au cours du temps s'écrit : $\tau_1 \frac{du_{R_1}}{dt} + u_{R_1} = \left(\frac{R_1}{R_1+r}\right) E$; avec $\tau_1 = \frac{L}{R_1+r}$. Nommer τ_1 .

2- La solution de l'équation différentielle établie précédemment s'écrit $u_{R_1}(t) = U_{0_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right)$ avec U_{0_1} la valeur de $u_{R_1}(t)$ en régime permanent.

a) Montrer que la courbe (1) correspond à $u_{R_1}(t)$.

b) Donner la valeur de la f.e.m E du générateur.

3- Lorsque le régime permanent est établi, l'ampèremètre indique la valeur $I_{0_1} = 50\text{mA}$.

a) Déterminer la valeur de la résistance R_1 .

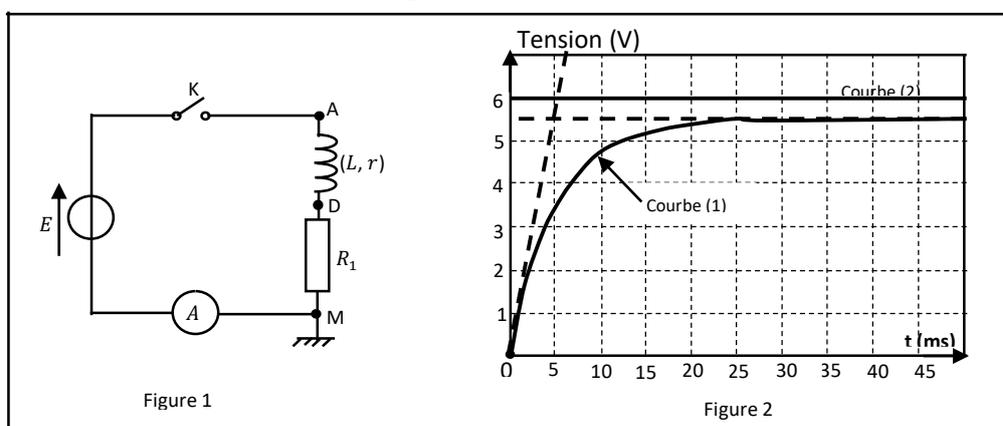
b) Montrer que l'expression de la résistance r de la bobine s'écrit : $r = \left(\frac{E}{U_{0_1}} - 1\right) R_1$. Calculer la valeur de r .

c) Déterminer graphiquement la valeur de la constante de temps τ_1 et en déduire la valeur de l'inductance L de la bobine.

4- Maintenant, on règle la résistance R_1 à une valeur R_2 .

a) Dans le but d'atteindre plus lentement le régime permanent, dire en le justifiant si l'on doit augmenter ou diminuer la valeur de la résistance par rapport à la valeur R_1 .

b) Pour cette valeur R_2 de la résistance R_1 , la constante de temps τ_2 est alors $\tau_2 = 2\tau_1$. Déterminer, dans ce cas, la valeur de l'intensité du courant I_{0_2} en régime permanent.



Exercice 2

1- On donne $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{S.I.}$ Soit un solénoïde (A, C) de résistance négligeable et de longueur $\ell = 2\text{m}$. Il comporte $N = 1500$ spires de rayon $r = 10\text{cm}$ et est orienté arbitrairement de A vers C. (fig1). La surface $S = \pi r^2$.

2- Il est parcouru par un courant d'intensité I .

a) Donner les caractéristiques du champ magnétique créé dans la région centrale du solénoïde par le passage du courant.

b) Etablir l'expression littérale du flux propre Φ en admettant que les caractéristiques précédentes sont les mêmes dans tout l'espace intérieur. Calculer numériquement Φ .

c) En déduire l'expression littérale de son inductance L . Calculer numériquement L .

3- Ce solénoïde est maintenant parcouru par une intensité qui varie avec le temps comme l'indique la figure 2. Un phénomène d'auto-induction prend naissance dans le solénoïde dont les bornes A et C sont reliées à un oscillographe afin de visualiser la tension u_{AC} (figure 3).

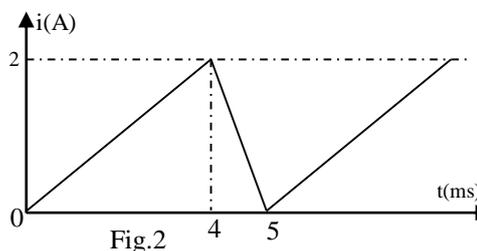
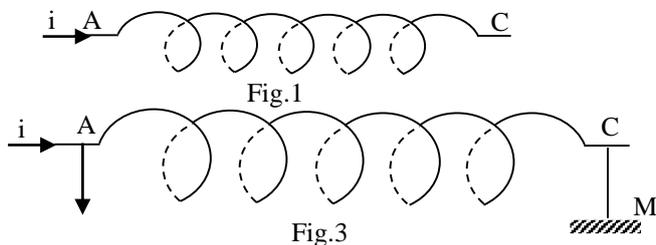
a) Pourquoi le phénomène d'auto-induction prend-il naissance ?

b) Donner l'expression de la tension u_{AC} au cours des deux phases pour $t \in [0; 50 \text{ ms}]$.

c) Tracer la courbe $u_{AC}(t)$ visualiser à l'oscillographe. On donne :

- la base de temps est réglée sur 10 ms/cm

- la sensibilité verticale est $0,5 \text{ V/cm}$.



EXERCICE 3

Soit une portion de circuit (AB) constituée d'une bobine sans noyau, d'inductance $L=5,0 \text{ mH}$ et de résistance $r=2,0 \Omega$

1) Donner la définition de l'inductance de la bobine.

Calculer la valeur du flux propre à travers cette bobine quand elle est parcourue par un courant

$I_{AB}=0,20 \text{ A}$.

2) Cette bobine est parcourue par un courant dont l'intensité varie avec le temps comme l'indique la figure.

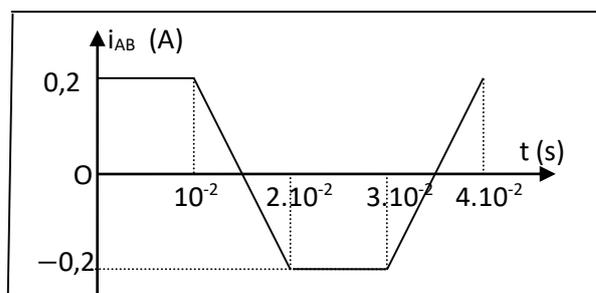
a) Pour quels intervalles de temps y-a-t-il variation du flux propre à travers la bobine en se limitant à des instants tels que $0 \leq t \leq 4 \cdot 10^{-2} \text{ s}$?

b) Calculer cette variation dans chaque cas.

c) En déduire qu'il existe une force électromotrice (f.é.m.) d'auto-induction e dans la bobine dans certains intervalles de temps que l'on précisera. La calculer dans chaque cas.

Donner l'expression littérale de la tension u_{AB} aux bornes de la bobine. La représenter graphiquement en fonction du temps. (Préciser les échelles choisies)

d) Calculer la valeur du temps τ .



Oscillations électriques libres

Le circuit oscillant

○ Objectifs pédagogiques

- Connaître l'expression de la période propre des oscillations d'un circuit (LC) ;
- Etablir l'équation différentielle régissant les oscillations d'un circuit électrique (LC) ;
- Etablir l'expression de la charge du condensateur dans le circuit (LC) ;
- Connaître un dispositif d'entretien des oscillations électriques.

I. OSCILLATIONS ELECTRIQUES NON AMORTIES DANS UN CIRCUIT (LC)

1. Charge d'un condensateur

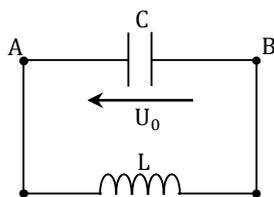
Soit un condensateur de capacité C chargé sous une tension continue U_0 . La charge Q_0 prise par le condensateur à la fin de cette charge est donnée par la relation :

$$C \longrightarrow Q_0 = C \cdot U_0 \longleftarrow V$$

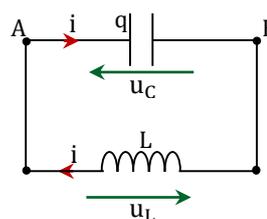
↑
F

2. Equation différentielle de la décharge du condensateur dans la bobine

Considérons un condensateur de capacité C , portant une charge Q_0 . Relions les bornes de ce condensateur à celles d'une bobine d'inductance L et de résistance négligeable.



Etat initial $t = 0$



Etat intermédiaire $t \neq 0$

$$u_{AB}(\text{condensateur}) + u_{BA}(\text{bobine}) = 0 \Leftrightarrow u_C + u_L = 0$$

$$\text{Or } i = \frac{dq}{dt} ; u_C = \frac{q}{C} \text{ et } u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d^2q}{dt^2}.$$

$$\text{Ainsi } L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \text{ donc } L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \text{ soit } \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0 \text{ ou encore } \ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$$

$$\text{Comme } q = C u_C \Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} = C \frac{d^2 u_C}{dt^2} \text{ alors on a : } \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C = 0$$

En posant $\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Leftrightarrow LC\omega_0^2 = 1$ soit $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ on trouve les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \\ \ddot{u}_C + \omega_0^2 u_C = 0 \end{cases} \text{ Equation différentielle d'un oscillateur harmonique.}$$

La décharge d'un condensateur de capacité C dans une bobine d'inductance L et de résistance négligeable donne lieu à des oscillations sinusoïdales de la tension u_C entre les armatures du condensateur.

3. Expression de la charge q du condensateur et de l'intensité i du courant dans le circuit

a. Pulsation propre ω_0 , période propre T_0 , et fréquence propre N_0 du circuit (LC)

- Pulsation propre : $\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Leftrightarrow LC\omega_0^2 = 1$ d'où $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- Période propre : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

○ Fréquence propre : $N_0 = f_0 = \frac{1}{T_0} \Rightarrow N_0 = f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

b. Expressions de la charge $q(t)$, de la tension $u_C(t)$ et de l'intensité $i(t)$ du courant

L'équation différentielle $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$ admet, comme solution générale, une fonction de la forme :

$$q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_m : \text{Amplitude ou valeur charge maximale charge } q \\ \varphi : \text{Phase à l'instant initial } (t = 0) \\ \omega_0 t + \varphi : \text{Phase à l'instant } t \neq 0 \end{array} \right.$$

A $t = 0$ on a : $\begin{cases} q = Q_m \cos \varphi = Q_0 = CU_0 & \Rightarrow \cos \varphi > 0 \\ i = -\omega_0 Q_m \sin \varphi = 0 & \Rightarrow \sin \varphi = 0 \end{cases}$

$i = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$

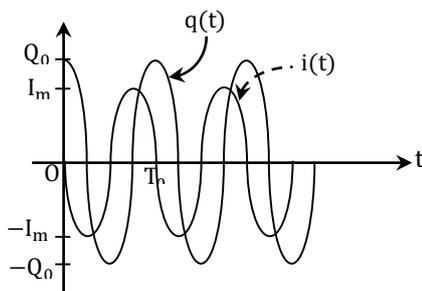
Donc $\varphi = 0$ et $Q_m = Q_0 = CU_0$ d'où $q(t) = Q_0 \cos(\omega_0 t)$

Par ailleurs : $u_C = \frac{q}{C} \Rightarrow u_C(t) = \frac{Q_0}{C} \cos(\omega_0 t) = U_0 \cos(\omega_0 t)$ avec $U_0 = \frac{Q_0}{C}$

De même : $i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow i(t) = -\omega_0 Q_0 \sin(\omega_0 t) = \omega_0 Q_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$

Soit $i(t) = \omega_0 Q_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = CU_0 \omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$

○ **Représentation graphique des fonctions $q(t)$ et $i(t)$**



L'intensité $i(t)$ est maximale lorsque la tension $u_C(t)$ être les armatures du condensateur s'annule de sorte que le condensateur se charge à nouveau et ainsi de suite.

II. ECHANGES D'ENERGIE DANS UN CIRCUIT OSCILLANT (LC)

1. La résistance du circuit est supposée négligeable

L'énergie du circuit se présente sous deux formes :

- Sous forme d'énergie électrostatique emmagasinée dans le condensateur :

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C \cdot u_C^2 = \frac{1}{2} q u_C.$$

Comme $u_C(t) = \frac{Q_0}{C} \cos(\omega_0 t) = U_0 \cos(\omega_0 t)$ alors $\mathcal{E}_e = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2} C U_0^2 \cos^2(\omega_0 t)$

- Sous forme d'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} L \cdot i^2$$

Comme $i(t) = -\omega_0 Q_0 \sin(\omega_0 t) = -CU_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t)$ alors :

$$\mathcal{E}_m = L \omega_0^2 \frac{Q_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2} L C^2 U_0^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t) = \frac{Q_0^2}{2C} \sin^2(\omega_0 t) \text{ avec } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

- L'énergie électromagnétique du circuit (LC) vaut à chaque instant :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m + \mathcal{E}_e = \frac{1}{2} L \cdot i^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}.$$

$$\mathcal{E} = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2(\omega_0 t) + \frac{Q_0^2}{2C} \sin^2(\omega_0 t) = \frac{Q_0^2}{2C} [\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)] ; \text{ soit } \mathcal{E} = \frac{Q_0^2}{2C}$$

L'énergie de l'oscillateur (LC) est constante. C'est l'énergie initiale du condensateur chargé. Elle est donnée par les relations :

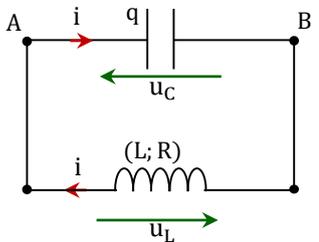
$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} L \cdot i^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{1}{2} C U_0^2 = \frac{1}{2} Q_0 U_0 = \frac{1}{2} L \cdot I_m^2$$

Lorsque la résistance du circuit est négligeable, l'énergie électromagnétique du circuit (LC) se conserve. Il y a échange d'énergie entre le condensateur et la bobine.

2. Oscillations électriques amorties : Circuit (RLC)

a. Equation différentielle du circuit (RLC)

En réalité la résistance interne de la bobine possède une résistance interne de valeur R.



Etat intermédiaire $t \neq 0$

$$u_{AB}(\text{condensateur}) + u_{BA}(\text{bobine}) = 0 \Leftrightarrow u_C + u_L = 0$$

$$\text{Or } i = \frac{dq}{dt}; u_C = \frac{q}{C} \text{ et } u_L = L \frac{di}{dt} + Ri = L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt}$$

$$\text{Ainsi } L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0 \text{ donc } L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

$$\text{soit } \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0 \text{ ou encore } \ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$$

$$\text{Comme } q = C u_C \Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} = C \frac{d^2 u_C}{dt^2} \text{ alors on a : } \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{d u_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0$$

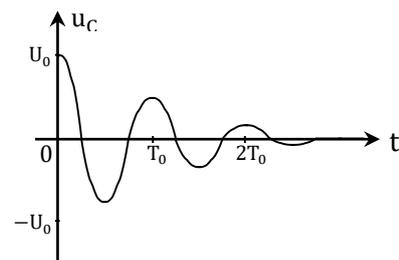
En posant $\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Leftrightarrow LC\omega_0^2 = 1$ soit $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ on trouve les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \\ \ddot{u}_C + \frac{R}{L} \dot{u}_C + \omega_0^2 u_C = 0 \end{cases} \text{ Equations différentielles d'un oscillateur harmonique amorti}$$

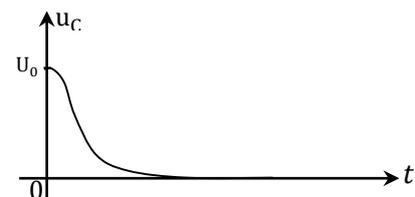
$\lambda = \frac{R}{L}$: coefficient d'amortissement

b. Les différents régimes

○ Lorsque la résistance R du circuit est faible, les amplitudes des oscillations diminuent progressivement et finies par s'annuler. On dit que le régime est **pseudopériodique**.



○ Lorsque la résistance R du circuit est grande le système n'oscille pas ; il revient dans sa position d'équilibre sans osciller : on dit que le régime est **apériodique**.

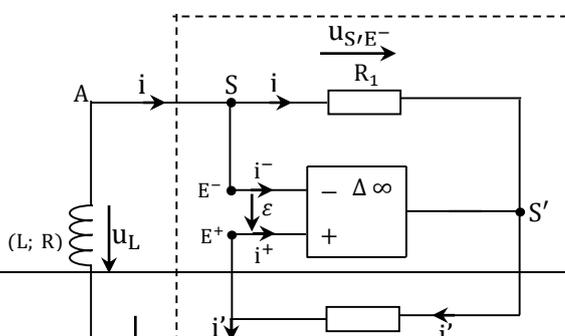


III. ENTRETIEN DES OSCILLATIONS

Un oscillateur électrique est entretenu si l'énergie électrique qu'il perd lui est restituée par un dispositif annexe. On utilise en général un dispositif constitué d'un amplificateur opérationnel (AO).

1. Schéma de l'oscillateur entretenu

Le montage avec un AO permet d'entretenir les oscillations d'un circuit oscillant en gardant la période de ce dipôle.



○ Relation entre i et i'

$$\varepsilon = u_{E^+E^-} = 0 \Leftrightarrow u_{E^+S'} + u_{S'S} + u_{SE^-} = 0 \Rightarrow -R_2 i' - R_1 i = 0 \text{ donc } i' = -\frac{R_1}{R_2} \cdot i$$

✚ Pour $R_1 = R_2$; on a $i' = -i$.

○ Expression de u_{SM} en fonction de R_1, R_2, R_0 et i

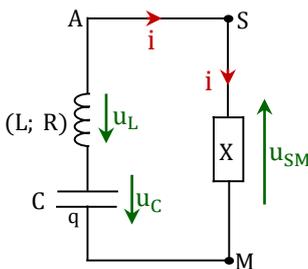
$$u_{SM} = u_{SS'} + u_{S'E^+} + u_{E^+M} \Leftrightarrow u_{SM} = R_1 i - R_2 i' + R_0 i'$$

Comme $i' = -\frac{R_1}{R_2} \cdot i$ alors $u_{SM} = R_1 i - R_1 i - R_0 \frac{R_1}{R_2} \cdot i$ d'où $u_{SM} = -\frac{R_1}{R_2} R_0 \cdot i$

✚ Si $R_1 = R_2$ alors $u_{SM} = -R_0 \cdot i$

○ Montrons que le générateur auxiliaire est équivalent à une résistance négative

Remplaçons le générateur auxiliaire par une résistance fictive X et trouvons la valeur qu'il faut lui donner.



$$u_{SM} = X \cdot i \text{ or } u_{SM} = -\frac{R_1}{R_2} R_0 \cdot i \text{ donc } X = -\frac{R_1}{R_2} R_0$$

$$\text{Si } R_1 = R_2 \text{ alors } X = -R_0$$

Le générateur auxiliaire simule une résistance négative.

2. Valeur de la résistance R_0 pour que les oscillations soient harmoniques

$$u_L + u_C + u_{SM} = 0 \text{ or } u_L = L \frac{di}{dt} + Ri = L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} ; u_C = \frac{q}{C} \text{ et } u_{SM} = X \cdot i$$

$$\text{Ainsi } L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} + X \cdot i = 0 \Leftrightarrow L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} + X \frac{dq}{dt} = 0 \text{ car } i = \frac{dq}{dt}$$

$$\text{Par ailleurs : } q = Cu_C \Rightarrow \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt} \text{ et } \frac{d^2q}{dt^2} = C \frac{d^2u_C}{dt^2}$$

$$\text{Donc : } LC \frac{d^2u_C}{dt^2} + C(R + X) \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2u_C}{dt^2} + \left(\frac{R+X}{L}\right) \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0$$

$$\text{Comme } \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \text{ alors } \frac{d^2u_C}{dt^2} + \left(\frac{R+X}{L}\right) \cdot \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 \cdot u_C = 0$$

$$\text{Les oscillations sont entretenues si : } R + X = 0 \Rightarrow X = -R \Leftrightarrow -\frac{R_1}{R_2} R_0 = -R \text{ d'où } R_0 = \frac{R_2}{R_1} R$$

✚ Pour $R_1 = R_2$ on a $R_0 = R$.

EXERCICE1

On réalise le montage schématisé ci-dessous (**fig. a**). Un ordinateur couplé à une interface permet de visualiser la tension aux bornes du condensateur.

La capacité du condensateur est $C = 0,1 \mu\text{F}$, et l'inductance L de la bobine est inconnue.

1) On place l'interrupteur K dans la position 1. Que se passe-t-il pour le condensateur ?

On place ensuite K en position 2. On observe alors sur l'écran la courbe suivante (**fig. b**) :

Quel phénomène représente-t-elle ?

Quelle est la valeur de la période ?

2) a) En déduire les expressions de la charge q du condensateur et de l'intensité i en fonction du temps. (On prend pour origine des temps à l'instant où q prend sa valeur maximale.) Représenter sur un même graphique les variations de q et de i .

b) Déterminer les énergies emmagasinées dans le condensateur et dans la bobine. Représenter graphiquement leurs variations en fonction du temps.

c) Calculer l'énergie totale du circuit.

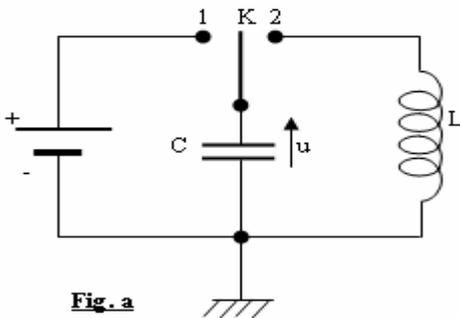


Fig. a

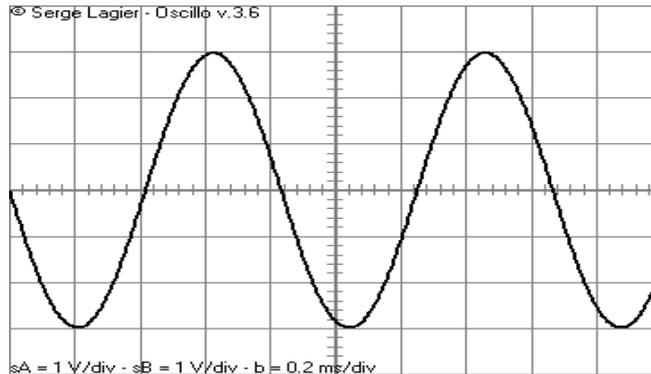


Fig b

EXERCICE2

1) On charge un condensateur de capacité $C = 12,5 \mu\text{F}$ et de résistance négligeable grâce à une batterie de f.e.m. 12 V (l'interrupteur K_1 est fermé et l'interrupteur K_2 , ouvert).

Calculer la charge maximale du condensateur et préciser sur la figure l'armature qui s'est chargée positivement.

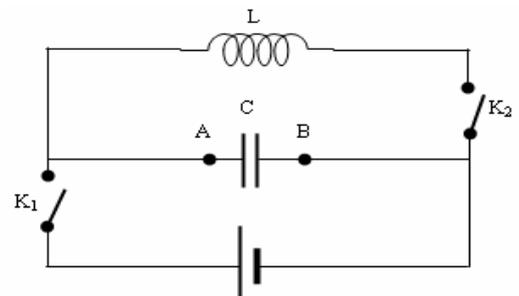
2) Ce condensateur peut ensuite se décharger dans une bobine d'inductance $L = 0,8 \text{ H}$ et de résistance nulle. Pour cela, on ouvre K_1 et, à la date $t = 0$, on ferme K_2 .

a) Déterminer les valeurs U_0 de la tension U_{AB} et l'intensité i_0 du courant dans le circuit (L, C) à la date $t = 0$.

b) Etudier la variation de la tension u_C aux bornes du condensateur en fonction du temps. Calculer la pulsation propre ω_0 et la fréquence propre du circuit (L, C). Exprimer $u_C = u_{AB}$ en fonction de t, ω_0 et U_0 .

c) On visualise u_C sur l'écran d'un oscillographe. Le balayage horizontal correspond à $5 \cdot 10^{-3} \text{ s.cm}^{-1}$ et la sensibilité verticale est 6 V.cm^{-1} . La largeur de l'écran est 8 cm . Représenter la courbe $u_C(t)$ que l'on observe sur l'écran.

d) En réalité, la bobine a une résistance R . Dessiner une des allures que l'on peut observer sur l'écran. Quel est le rôle de R .



EXERCICE 4

1. On réalise un circuit en montant en série une bobine d'inductance L , un condensateur chargé de capacité C et un interrupteur K (fig1). On suppose négligeable la résistance de la bobine et les fils de connexion.

a) On ferme K . Quel phénomène se produit dans le circuit? En précisant, sur le schéma, le sens positif choisi pour le courant, établir l'équation différentielle liant la charge du condensateur à sa dérivée seconde par rapport au temps.

b) En déduire l'expression de la période propre T_0 du circuit.

A.N. $C = 20 \mu\text{F}, L = 5 \cdot 10^{-2} \text{ H}$.

2. Soit un ressort élastique, à réponse linéaire, de constante de raideur k , de masse négligeable. Une de ses extrémités est fixée en O , l'autre est attachée à un solide S , de masse m , qui peut se déplacer sans frottement sur une table à coussin d'air horizontale. On réalise ainsi un pendule élastique horizontal (fig2).

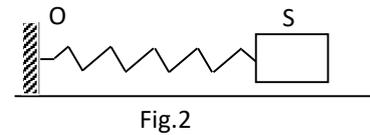
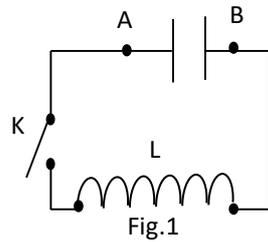
On écarte le solide S d'une distance X_0 par rapport à sa position d'équilibre et on le lâche sans vitesse initiale.

a) Etablir l'équation différentielle du mouvement du solide en prenant comme variable l'abscisse du solide par rapport à sa position d'équilibre :

- A partir de l'étude énergétique
- A partir de la relation fondamentale de la dynamique
- En déduire la nature du mouvement de S .

b) L'étude expérimentale du mouvement montre que $n = 25$ oscillations du solide durent $t = 8,1$ s. Sachant que la masse du solide vaut $m = 200$ g, en déduire la valeur numérique du coefficient de raideur k du ressort.

3. En comparant l'étude des systèmes précédents, faire une analogie entre les grandeurs électriques et mécaniques : préciser les grandeurs mécaniques correspondant à la charge q et la capacité C du condensateur, à l'intensité du courant, à l'inductance L de la bobine.



Oscillations Electriques Forcées

Circuit (RLC)

○ Objectifs pédagogiques

- Définir les grandeurs caractéristiques d'un circuit en régime sinusoïdal forcé.
- Transposer les lois du courant continu en régime sinusoïdal forcé.
- Utiliser la représentation de Fresnel.
- Comprendre la résonance d'intensité dans un circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé.
- Connaître les expressions de la puissance et l'énergie échangées en régime sinusoïdal forcé.

Certains récepteurs radios possèdent un circuit d'accord permettant de détecter la fréquence d'une station radio. Ce circuit utilise la résonance d'intensité.

- ✚ Qu'est ce que la résonance d'intensité ?
- ✚ Comment sélectionne-t-on une station de radio particulière ?

I. Généralités sur les grandeurs alternatives sinusoïdales

1. Intensités et tension alternatives sinusoïdales

- ✚ Un courant alternatif sinusoïdal est un courant dont l'intensité est une fonction sinusoïdale du temps de la forme :

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \quad \text{ou} \quad i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

I_m : Amplitude de l'intensité ou intensité maximale (en A)

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi N$: Pulsation (en rad/s) où T est la période et N la fréquence.

$\omega t + \varphi_i$: Phase de l'intensité $i(t)$ à l'instant t en (en rad)

φ_i : Phase de l'intensité $i(t)$ à l'instant t = 0 (en rad)

- L'intensité efficace I du courant alternatif sinusoïdal est donnée par la relation :

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad I_m = I\sqrt{2}$$

- ✚ De même une tension alternative sinusoïdale se représente par des fonctions sous la forme :

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \quad \text{ou} \quad u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

U_m : Amplitude de la tension ou tension maximale (en V)

φ_u : Phase de la tension $u(t)$ à l'instant t = 0 (en rad)

- La tension efficace U de la tension alternative sinusoïdale $u(t)$ est donnée par la relation :

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad U_m = U\sqrt{2}$$

Remarque

- Le multimètre, le voltmètre ou l'ampèremètre permettent de mesurer la tension ou l'intensité efficace.
- La valeur maximale d'une tension peut être mesurée à l'aide d'un oscilloscope.

2. Déphasage entre la tension et l'intensité du courant

En régime sinusoïdal, la tension $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$ aux bornes d'un dipôle et l'intensité $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$ du courant qui le parcourt n'ont généralement pas la même phase.

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

La grandeur $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ est appelée **différence de phase ou déphasage de la tension par rapport à l'intensité du courant**.

NB : L'intensité $i(t)$ du courant à chaque instant étant la même en tous les points d'un circuit série la phase de l'intensité est prise comme origine des phases.

Nous posons $\varphi_i = 0$ de sorte que : $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \varphi_u/i$.

Ainsi : $i(t) = I_m \cos \omega t$ et $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$

- Si $\varphi > 0$, la tension est en avance par rapport à l'intensité.

- Si $\varphi < 0$, la tension est en retard par rapport à l'intensité.

- Si $\varphi = 0$, la tension et l'intensité sont en phase.

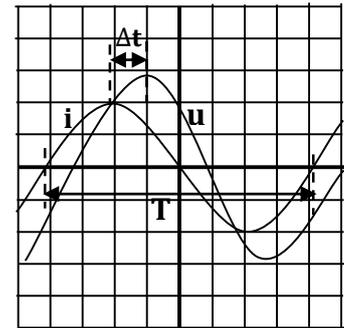
■ Calcul graphique du déphasage

$$i(t) = I_m \cos \omega t \text{ et } u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$|\varphi| = \frac{2\pi\Delta t}{T} \quad \left\{ \begin{array}{l} T : \text{Période de la tension ou de l'intensité} \\ \Delta t = \tau : \text{Décalage horaire entre tension ou de l'intensité} \end{array} \right.$$

Comme $u(t)$ est en retard par rapport à $i(t)$ alors $\varphi < 0$.

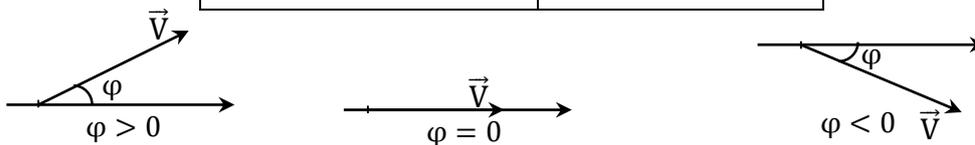
$$\text{Donc on trouve } \varphi = -\frac{2\pi\Delta t}{T}$$



3- Règle et construction de Fresnel

Fresnel propose que l'on représente la fonction sinusoïdale de la forme $x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$, par le vecteur \vec{V} dans la position qu'il occupait à $t = 0$.

Grandeur sinusoïdale	Vecteur de Fresnel
$x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$	$\vec{V} \quad \left\{ \begin{array}{l} \ \vec{V}\ = X_m \\ (\vec{i}; \vec{V}) = \varphi \end{array} \right.$



II- Etude d'un circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé

1- Notion d'impédance

L'impédance Z d'un dipôle (AB) soumis à un régime sinusoïdal est le rapport entre les valeurs efficace de la tension appliquée et de l'intensité du courant qui le parcourt.

$$\Omega \longrightarrow Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I}$$

2- Etude des dipôles élémentaires en régime sinusoïdal forcé

a) Le conducteur ohmique ou résistor



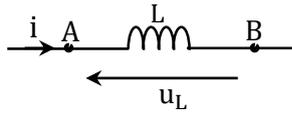
$$i = I_m \cos \omega t = I\sqrt{2} \cos \omega t$$

$$u_R = U_{Rm} \cos(\omega t + \varphi) = U_R\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{Vecteur de Fresnel associé à } u_R$$

$$u_R = Ri \Leftrightarrow U_{Rm} \cos(\omega t + \varphi) = RI_m \cos \omega t \text{ d'où } z_R = \frac{U_{Rm}}{I_m} = \frac{RI_m}{I_m} \Rightarrow z_R = R \text{ et } \varphi = 0$$

La tension u_R et l'intensité i sont donc en phase.

b) Bobine purement inductive ($r = 0$)



$$\vec{V} \left| \begin{matrix} U_L \\ \varphi \end{matrix} \right. = \vec{V}_1 \left| \begin{matrix} L\omega I \\ \frac{\pi}{2} \end{matrix} \right.$$

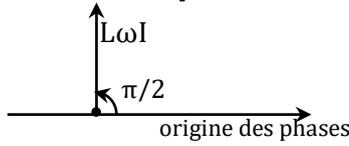
$$i = I_m \cos \omega t = I\sqrt{2} \cos \omega t$$

$$u_L = U_{Lm} \cos(\omega t + \varphi) = U_L \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d}{dt} (I_m \cos \omega t) = -L\omega I_m \sin \omega t$$

Donc $U_L \cos(\omega t + \varphi) = L\omega I \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$ d'où $z_L = \frac{U_L}{I} = \frac{L\omega I}{I} \Rightarrow z_L = L\omega$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$

La tension u_L est en quadrature avance sur l'intensité i .



c) Bobine réelle (L; r)

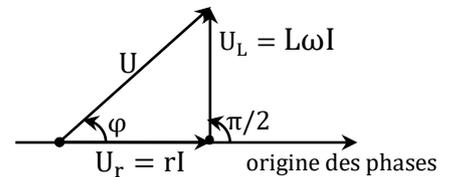
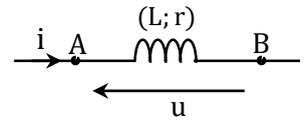
Une bobine réelle, d'inductance L et de résistance r, se comporte comme une bobine purement inductive d'inductance L en série avec un conducteur ohmique de résistance r.

$$i = I_m \cos \omega t = I\sqrt{2} \cos \omega t$$

$$u = U_m \cos(\omega t + \varphi) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$u = ri + L \frac{di}{dt} \Rightarrow U_m \cos(\omega t + \varphi) = rI_m \cos \omega t - L\omega I_m \sin \omega t$$

donc $U \cos(\omega t + \varphi) = rI \cos \omega t + L\omega I \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$

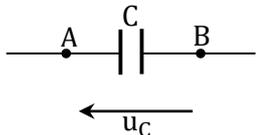


$$\vec{V} \left| \begin{matrix} U \\ \varphi \end{matrix} \right. = \vec{V}_1 \left| \begin{matrix} U_r = rI \\ 0 \end{matrix} \right. + \vec{V}_2 \left| \begin{matrix} U_L = L\omega I \\ \frac{\pi}{2} \end{matrix} \right.$$

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{r^2 + L^2 \omega^2}; \tan \varphi = \frac{L\omega}{r} \text{ et } \cos \varphi = \frac{r}{Z}$$

La tension u aux bornes de la bobine est en avance sur l'intensité i .

d) Condensateur parfait



$$\vec{V} \left| \begin{matrix} U_C \\ \varphi \end{matrix} \right. = \vec{V}_1 \left| \begin{matrix} \frac{I}{C\omega} \\ -\frac{\pi}{2} \end{matrix} \right.$$

$$i = I_m \cos \omega t = I\sqrt{2} \cos \omega t$$

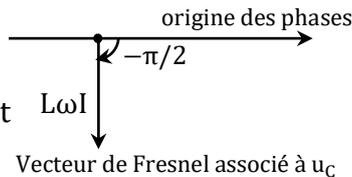
$$u_C = U_{Cm} \cos(\omega t + \varphi) = U_C \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$u_C = \frac{q}{C} \text{ et } i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow q = \int_0^t i dt \text{ donc } u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt$$

Soit $u_C = \frac{I\sqrt{2}}{C\omega} \sin \omega t = \frac{I\sqrt{2}}{C\omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$

Donc $U_C \cos(\omega t + \varphi) = \frac{I}{C\omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$ d'où $z_C = \frac{U_C}{I} = \frac{1}{C\omega}$ et $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

La tension u_C est quadrature retard sur l'intensité i .



3- Tension aux bornes d'un circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé

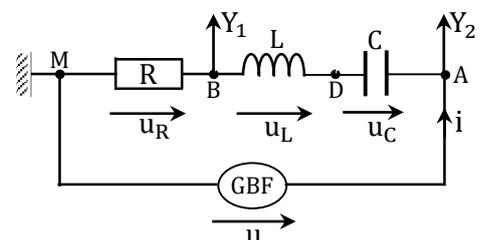
La voie Y_2 donne la tension $u = u_{AM}$ aux bornes du générateur.

La voie Y_1 donne les $u_C = u_{BM}$ aux bornes du conducteur ohmique, donc un signal proportionnel à l'intensité $i(t)$.

On donne : $i = I_m \cos \omega t = I\sqrt{2} \cos \omega t$

$$u = U_m \cos(\omega t + \varphi) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$u = u_R + u_L + u_C \Rightarrow u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \Leftrightarrow u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt$$



$$\frac{di}{dt} = -\omega I_m \sin \omega t = \omega I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ et } \int_0^t i dt = \frac{I_m}{\omega} \sin \omega t = \frac{I_m}{\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{Donc } u = RI_m \cos \omega t + L\omega I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{I_m}{C\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Comme $u = U_m \cos(\omega t + \varphi) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$ alors

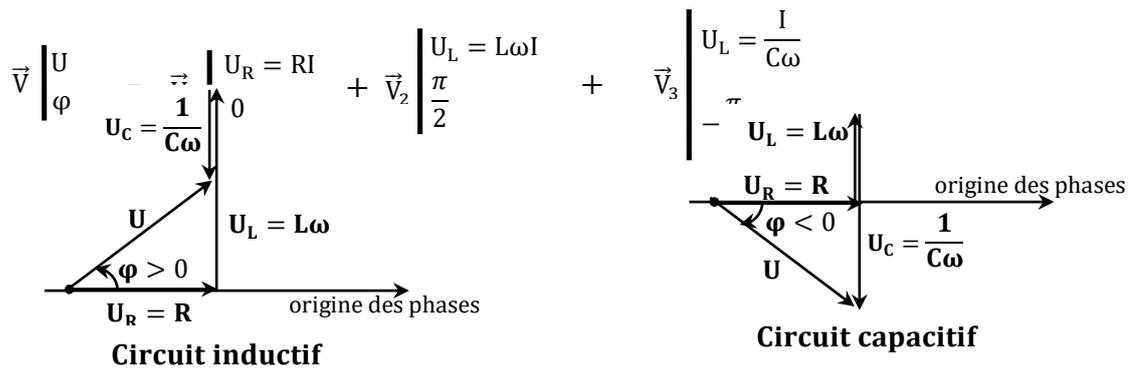
$$U_m \cos(\omega t + \varphi) = RI_m \cos \omega t + L\omega I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{I_m}{C\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$U \cos(\omega t + \varphi) = U_R \cos \omega t + U_L \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + U_C \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right); \text{ avec } U_R = RI; U_L = L\omega I \text{ et } U_C = \frac{I}{C\omega}$$

Par ailleurs en utilisant l'expression $U = ZI$ on a :

$$Z \cos(\omega t + \varphi) = R \cos \omega t + L\omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{C\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{soit } Z \cos(\omega t + \varphi) = z_R \cos \omega t + z_L \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + z_C \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right); \text{ avec } z_R = R, z_L = L\omega \text{ et } z_C = \frac{1}{C\omega}$$



- L'impédance Z de la portion de circuit AM est : $Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$
- Le déphasage φ de la tension par rapport à l'intensité peut être donnée par :

$$\tan \varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \text{ ou } \cos \varphi = \frac{U_R}{U} = \frac{R}{Z}$$

Remarque :

Si $L\omega > \frac{1}{C\omega} \Rightarrow \tan \varphi > 0 \Leftrightarrow \varphi > 0$ alors le circuit est dit inductif. La tension u est en avance sur l'intensité i .

Si $L\omega < \frac{1}{C\omega} \Rightarrow \tan \varphi < 0 \Leftrightarrow \varphi < 0$ alors le circuit est dit capacitif. La tension u est en retard sur l'intensité i .

III- Circuit RLC série à la résonance d'intensité

1- Valeur des grandeurs caractéristiques du circuit à la résonance

L'intensité efficace I ou l'intensité maximale I_m est la réponse d'un circuit RLC série soumis à une excitation sinusoïdale $u = U_m \cos(\omega t + \varphi) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$.

■ Lorsque I (ou I_m) est maximale, on dit que le circuit RLC série est à la résonance d'intensité. L'intensité et la tension sont donc en phase.

Nous savons que $I = \frac{U}{Z}$ avec $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$.

Pour U constante, I est maximale si Z est minimale donc $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \Rightarrow LC\omega^2 = 1 \Leftrightarrow$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$$

■ A la résonance d'intensité, la fréquence de la tension imposée par le générateur est égale à la fréquence propre du circuit RLC.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{soit} \quad N_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

- Dans un circuit série RLC à la résonance d'intensité : $Z = R$; $\varphi = 0$; $I(\omega_0) = I_0 = \frac{U}{R}$; $I_m(\omega_0) = \frac{U_m}{R}$.

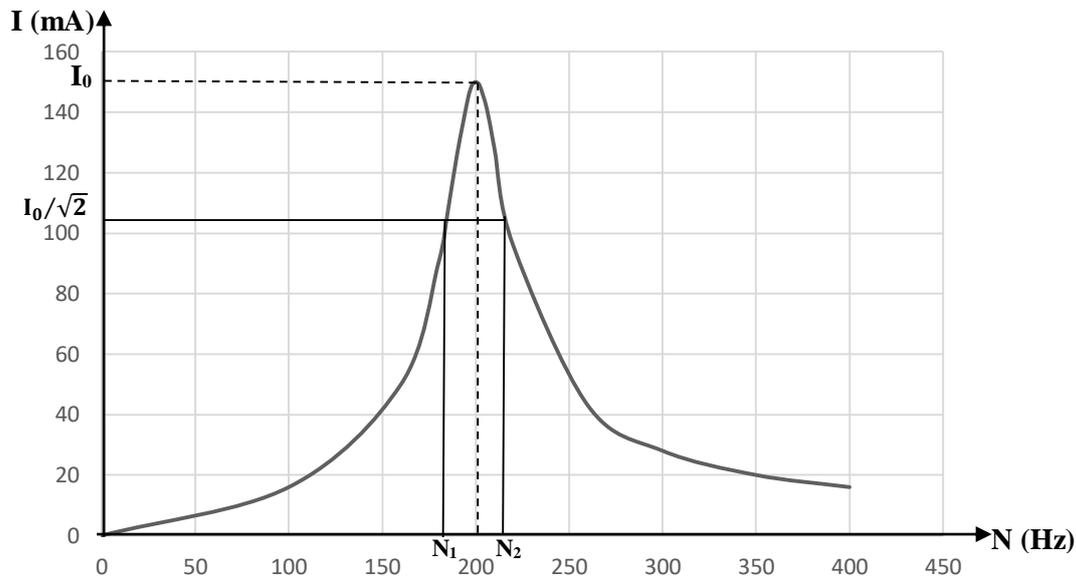
2- Courbe de résonance d'intensité

On mesure l'intensité efficace I du courant dans le circuit en fonction de la fréquence en maintenant la tension efficace U constante.

N(Hz)	0	100	160	180	185	190	196	198	200	202	206	210	220	260	300	350	400
I(mA)	0	16	50	90	107	126	145	149	150	149	141	128	96	43	28	20	16

■ Traçons la courbe de résonance d'intensité pour $U = 3V$; $R = 20\Omega$; $L = 0,1H$ et $C = 6,4\mu F$

C'est la courbe donnant les variations de l'intensité efficace I en fonction de la fréquence N ou f ou en fonction de la pulsation ω soit $I = f(N)$ ou $I = f(\omega)$.



■ La résonance est obtenue pour $N = N_0 = 200\text{Hz}$. L'intensité efficace à la résonance vaut : $I = 150\text{mA}$.

La fréquence propre du circuit vaut : $N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0,1 \cdot 6,4 \cdot 10^{-6}}} = 199\text{Hz}$.

L'intensité efficace à la résonance vaut : $I_0 = \frac{U}{R} = \frac{3}{20} = 150\text{mA}$.

Ce qui est en accord avec la valeur expérimentale.

3- Acuité de la résonance

a) La bande passante à 3 décibels

La bande passante d'un circuit RLC série est l'ensemble des fréquences pour lesquelles $I \geq \frac{I_0}{\sqrt{2}}$, I_0 étant l'intensité efficace à la résonance.

■ Détermination de la bande passante à partir de la courbe de résonance

$I_0 = 150\text{mA} \Rightarrow \frac{I_0}{\sqrt{2}} = 106\text{mA}$. Les fréquences N_1 et N_2 correspondantes à $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$ valent respectivement $N_1 = 185\text{Hz}$ et $N_2 = 215\text{Hz}$. La largeur de la bande passante est : $\Delta N = N_2 - N_1 = 30\text{Hz}$.

■ Détermination de la bande passante par le calcul

La bande passante est limitée par les fréquences $N_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$ et $N_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}$ pour lesquelles $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{U}{R\sqrt{2}}$ car $I_0 = \frac{U}{R}$.

$$I = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{U}{R\sqrt{2}} \Rightarrow Z = R\sqrt{2}$$

$$\text{Comme } Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \text{ alors } R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = 2R^2 \Leftrightarrow \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = R^2.$$

Soit $\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} - R\right)\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} + R\right) = 0 \Leftrightarrow Lc\omega^2 - RC\omega - 1 = 0$ ou $Lc\omega^2 + RC\omega - 1 = 0$

La résolution de ces équations en ω donne $\Delta = (RC)^2 + 4LC$ et fournit les limites ω_1 et ω_2 de la bande passante en pulsation, telles que : $\omega_1 = \frac{-RC + \sqrt{\Delta}}{2LC}$ et $\omega_2 = \frac{RC + \sqrt{\Delta}}{2LC}$.

• On appelle **largeur de la bande passante**, la grandeur $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ ou $\Delta N = N_2 - N_1$ donnée par la relation :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$$

Comme $\omega = 2\pi N$ alors $\Delta N = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \Rightarrow \Delta N = \frac{R}{2\pi L}$

Application numérique :

Pour $R = 20\Omega$ et $L = 0,1H$, $\Delta N = \frac{20}{2 \cdot \pi \cdot 0,1} = 31,8Hz$ et pour $R = 50\Omega$ et $L = 0,1H$,

$$\Delta N = \frac{50}{2 \cdot \pi \cdot 0,1} = 31,8Hz$$

b) Facteur de qualité

Par définition, le facteur de qualité Q du circuit RLC est le rapport : $Q = \frac{N_0}{\Delta N} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$

Remplaçons ΔN dans Q par $\frac{R}{2\pi L}$ et on a : $Q = \frac{2\pi L N_0}{R} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$.

Le facteur de qualité du circuit diminue lorsque la résistance augmente.

Le facteur de qualité Q d'un circuit RLC mesure l'acuité de la résonance.

- Si Q est élevé, la résonance est dite aiguë. La bande passante est étroite
- Si Q est faible, la résonance est floue.

IV- Puissance en régime sinusoïdal

1. Puissance instantanée

La puissance instantanée reçue par un dipôle récepteur AB est : $\mathcal{P}_{AB} = U_{AB}i$

2. Puissance moyenne

La puissance moyenne P_m consommée par un dipôle AB est, par définition, la moyenne de la puissance instantanée sur une période.

On montre que : $P_m = UI \cos \varphi$ P_m (W), U (V), I (A).

UI : Puissance apparente en V.A et $\cos \varphi$: facteur de puissance

- Pour un conducteur ohmique on a $\varphi_R = 0$ et $U = RI$ alors $P_m = RI^2$
- Pour une bobine parfaite on a $\varphi_L = +\frac{\pi}{2}$ alors $P_m = 0$
- Pour un condensateur parfait on a $\varphi_C = -\frac{\pi}{2}$ alors $P_m = 0$

La puissance moyenne dissipée par un dipôle RLC est uniquement par effet joule puisque le condensateur et la bobine ne consomment pas de puissance par conséquent :

$P_m = UI \cos \varphi = RI^2$ car $\cos \varphi = \frac{R}{Z}$ et $U = ZI$

Exercices sur les circuits RLC

EXERCICE 1

Un GBF délivre une tension sinusoïdale de fréquence f aux bornes d'un dipôle comprenant en série :

- Une inductance pure $L = 1,0$ H et de résistance $r = 8,5$ ohm ;
- Un condensateur de capacité C ;
- Un conducteur ohmique de résistance $R_0 = 100$ ohm.

La figure ci-dessus représente ce qu'on observe sur l'écran de l'oscilloscope avec les réglages suivants :

- Sensibilités verticales sur les deux voies : $2,0$ V/division ;
- Balayage horizontal : 2 ms/division.

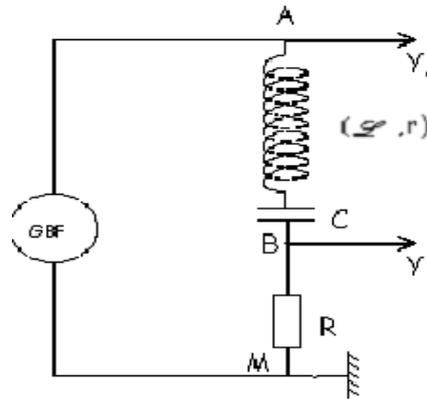
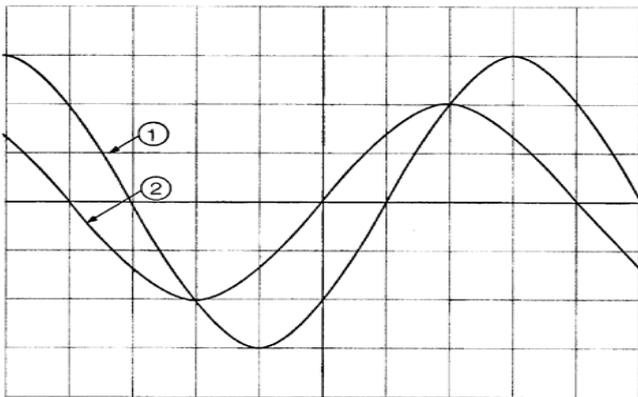
1) Déterminer la période T de la tension sinusoïdale $u(t)$ délivrée par le G.B.F. En déduire la fréquence f et la pulsation ω correspondantes.

2) Déterminer les valeurs maximales U_m de la tension aux bornes du dipôle et de l'intensité I_m du courant.

3) On pose $i(t) = I_m \cos(\omega t)$ et $u(t) = U_m \cos(\omega t + \phi)$. Déterminer le déphasage ϕ entre $u(t)$ et $i(t)$.

Quel est son signe ?

4) A l'aide de la construction de Fresnel, déterminer la relation donnant $\tan \phi$ en fonction des paramètres du circuit. En déduire la valeur de la capacité C du condensateur.



EXERCICE 2

Un circuit est constitué d'une résistance $R = 200 \Omega$, d'une bobine inductive (inductance : $L = 0,1$ H ; résistance négligeable) et d'un condensateur de capacité $C = 1 \mu\text{F}$ placé en série. Il est alimenté par un générateur B.F qui délivre à ses bornes une tension alternative sinusoïdale u de fréquence 250 Hz et de valeur efficace $U = 5$ V.

1. Faire le schéma du montage.
2. Calculer l'impédance Z du circuit.
3. Calculer l'intensité efficace dans le circuit.
4. Quelles sont les valeurs des impédances Z_R ; Z_B et Z_C ? comparer leur somme à Z et conclure.
5. Calculer les tensions efficaces : U_R ; U_B et U_C . Comparer leur somme à U et conclure.
6. Si l'on se donne la tension instantanée u sous la forme : $u = U_m \cos(\omega t)$, avec $U_m = U\sqrt{2}$;
 - a) D'après la question 5), le circuit est-il inductif ou capacitif ? justifier.
 - b) Faire la construction de Fresnel.
 - c) Déterminer le déphasage ϕ et dire si la tension u est en avance ou en retard par rapport à l'intensité i .
 - d) Quelle est la loi de variation de l'intensité instantanée i en fonction du temps : $i(t)$?

EXERCICE 4

Une bobine d'induction L et de résistance négligeable est montée en série avec un condensateur de capacité C et un conducteur ohmique de résistance R , entre deux points M et P d'un circuit comme l'indique la figure. L'ensemble est alimenté par un générateur de tension sinusoïdale de valeur efficace U maintenue constante et contrôlée par un voltmètre. L'intensité efficace du courant est mesurée à l'aide d'un ampèremètre à toutes les fréquences.

1. Rappeler sans démonstration la formule de l'impédance du dipôle MP .

2. On fixe $U = 4,5$ V ; $R = 264,6 \Omega$ et on fait varier la fréquence N . on note les valeurs de l'intensité efficace I dans le tableau suivant :

N(Hz)	380	420	440	460	480	500
I(mA)	4,4	6,3	7,7	9,7	12,4	15,4

520	540	560	580	600	640	660
17	15,7	12,9	10,6	8,8	6,5	5,8

a) Tracer la courbe $I =$

$f(N)$. Echelle : en abscisses : 1cm pour 20Hz , en ordonnées : 1cm pour 1mA .

On graduera l'axe des fréquences à partir de 350Hz.

b) Donner la valeur N_0 de la fréquence à la résonance.

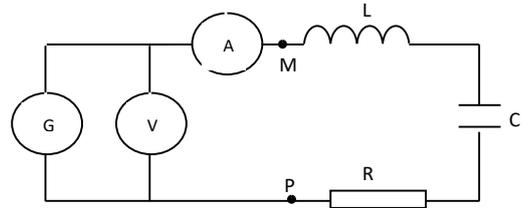
c) Calculer l'intensité efficace I_0 à la résonance.

3) On désigne par N_1 et N_2 ($N_1 < N_2$) les fréquences délimitant la bande passante.

a) Calculer les valeurs des intensités I_1 et I_2 correspondant à N_1 et N_2 .

b) Déterminer graphiquement la largeur de la bande passante et en déduire le facteur de qualité de ce dipôle (R, L, C).

4. Déduire des résultats précédents, les valeurs : de l'inductance L et de la capacité C.



EXERCICE 6

Une portion de circuit AD comprend en série : Fig1

- une bobine d'inductance L et de résistance r ;

- une résistance ohmique $R = 20 \Omega$.

On établit entre A et D une tension sinusoïdale $u_{AD} = U\sqrt{2} \cos \omega t$.

L'intensité instantanée est alors exprimée par $i_{AD} = I\sqrt{2} \cos (\omega t + \varphi)$.

On branche, comme indique figure 1, un oscilloscope bicourbe dont le balayage est réglé à $2,5 \text{ ms.cm}^{-1}$, la sensibilité des voies y_1 et y_2 à 1 V.cm^{-1} .

On observe sur l'écran la figure 2.

1. Déduire des courbes observées :

- la pulsation ω ,

- les valeurs de U et I,

- le déphasage φ entre l'intensité et le tension.

2. Trouver l'impédance Z de la portion AD du circuit, les valeurs de L et r.

3. On intercale en série dans le circuit précédent, un condensateur de capacité $C = 112 \mu\text{F}$ (fig. 3). Sans changer les réglages de l'oscilloscope, on observe sur l'écran, la figure 4.

3.1. Quel est le nouveau déphasage entre i_{AD} et u_{AD} ? vérifier que ce résultat est compatible avec la valeur de L trouvée au 1)-b. Fig. 2

3.2. Quelle est la nouvelle valeur de l'intensité maximale ? En utilisant cette valeur, retrouver la valeur de r.

Fig4

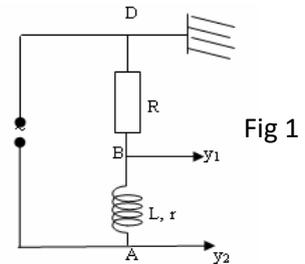


Fig 1

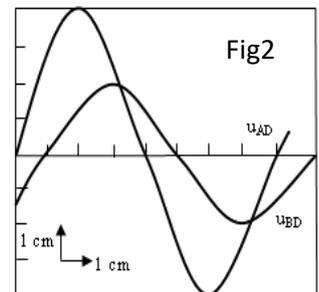


Fig2

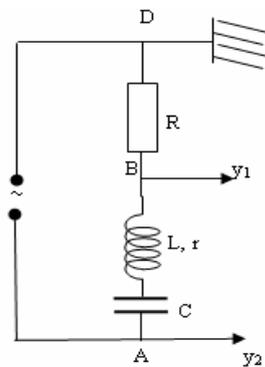


Fig3

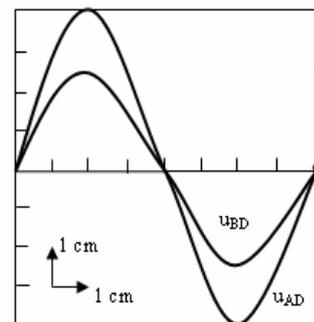
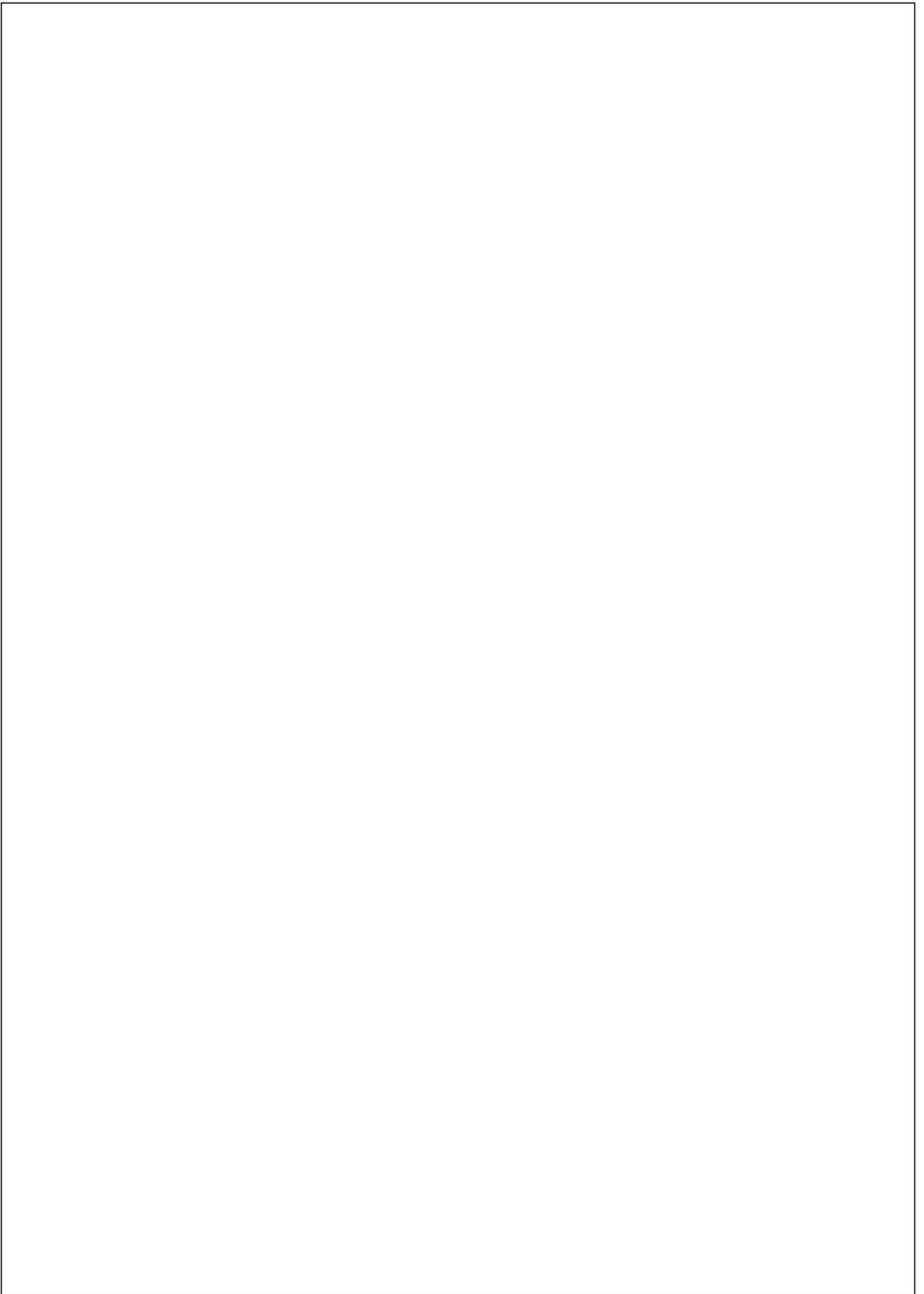


Fig4



LES LENTILLES MINCES

I. Généralités sur les lentilles minces

1- Définition

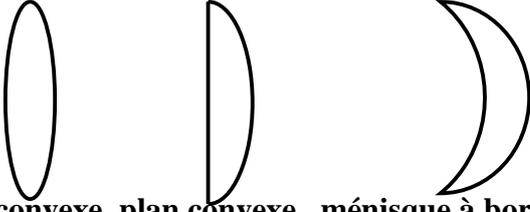
Une **lentille** est un milieu transparent, limité par deux surfaces dont l'une au moins est sphérique .

Une lentille est dite **mince** si son épaisseur au centre est petite devant son diamètre d'ouverture.

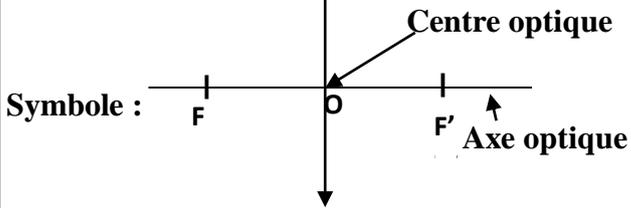
2-Présentation des deux types de lentilles minces

On distingue les lentilles dites :

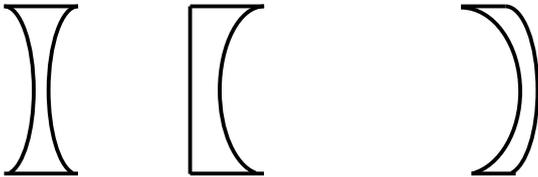
– **Convergentes** : à bords minces que le centre



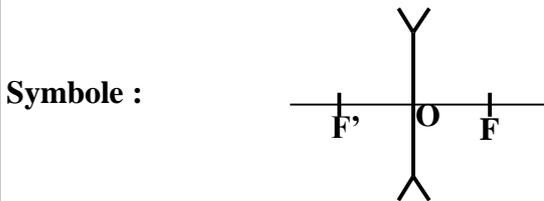
Biconvexe plan convexe ménisque à bords minces



– **divergentes** : à bords épais que le centre



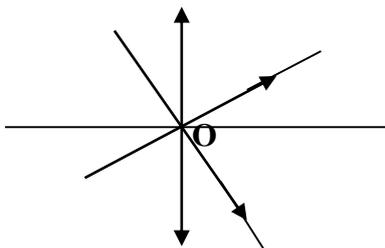
Biconcave plan concave ménisque à bords épais



II. Caractéristiques des lentilles minces convergentes

1- Le centre optique

Tout rayon passant par le centre optique O d'une lentille n'est pas dévié.



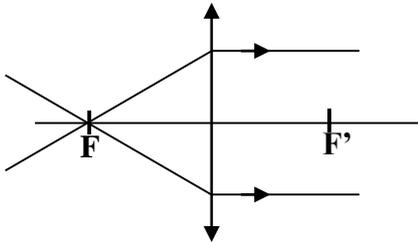
2- Les axes optiques

- L'axe principal (ou abusivement axe optique, dénomination utilisée par la suite) est la droite perpendiculaire à l'axe de la lentille et passant par le centre optique O.
- Les axes secondaires sont toutes les autres droites passant par le centre optique O.

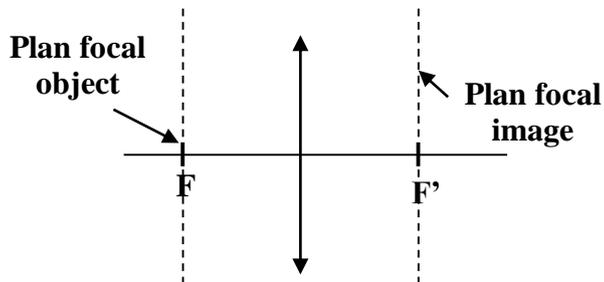
3- Les foyers image et objet

a) Foyer objet F de la lentille convergente

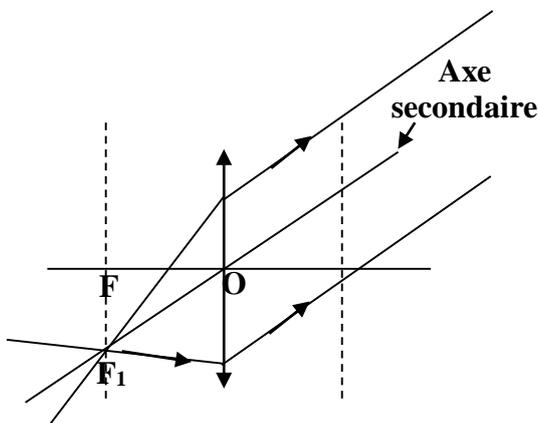
- Un faisceau de rayons incidents issus du foyer principal objet F, situé sur l'axe optique, symétrique de F' par rapport à O, émerge parallèlement à l'axe optique.



- Le plan perpendiculaire à l'axe optique et passant par F est appelé plan focal objet.

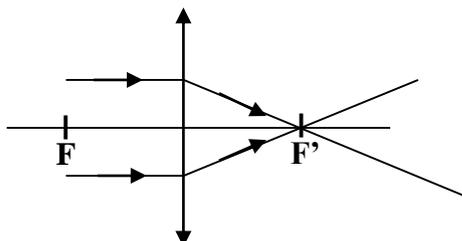


- Tout rayon incident issu d'un point F_1 du plan focal objet (F_1 désignant donc un foyer secondaire objet) émerge parallèlement à l'axe secondaire F_1O

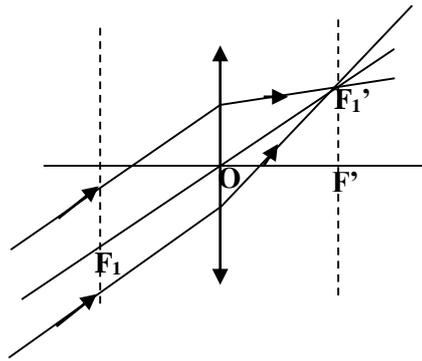


b) Foyer image F' de la lentille convergente

- Tout rayon incident, parallèle à l'axe optique converge en un point F', point remarquable de la lentille, constituant le **foyer image principal** de la lentille.



- Tout rayon incident, parallèle à l'axe optique secondaire converge en un point F_1' , point remarquable de la lentille, constituant le **foyer image secondaire**.



- Les foyers F et F' sont symétriques par rapport au centre optique

4- Distance focale

On appelle distance focale objet la grandeur $f = \overline{OF}$ ($f < 0$ pour une lentille convergente et $|f| = f'$)

On nomme **distance focale image** (utilisée en pratique) la grandeur $f' = \overline{OF'}$ mesurée sur l'axe optique orienté dans le sens de propagation de la lumière ($f' > 0$ pour une lentille convergente)

5- Vergence d'une lentille

On appelle **vergence C d'une lentille** l'inverse de sa distance focale image. La vergence s'exprime en dioptries (symbole δ) La vergence est définie par: $C = \frac{1}{f'}$

– La vergence est définie par: $C = \frac{1}{f'}$

– $C > 0$ pour une lentille convergente.

– $C < 0$ pour une lentille divergente.

– Pour une lentille taillée dans un matériau d'indice petit n et de rayon de courbure R_1 et R_2 $C = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$

– Si l'une des faces est planes alors $C = (n-1)\left(\frac{1}{R}\right)$

– Pour deux lentilles accolées $C = C_1 + C_2$.

III. Image formée par une lentille mince convergente

1- Objets et images réels et virtuels

– Un objet est dit réel s'il est situé à gauche de la lentille : $\overline{OA} < 0$

– Un objet est dit virtuel s'il est situé à droite de la lentille : $\overline{OA} > 0$

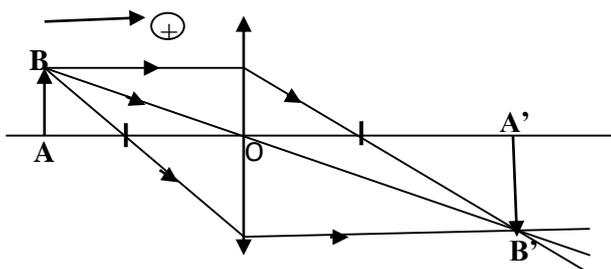
– Une image est dite réelle si elle est située à droite de la lentille: $\overline{OA'} > 0$

– Une image est dite virtuelle si elle est située à gauche de la lentille: $\overline{OA'} < 0$

2- Construction de l'image d'un objet

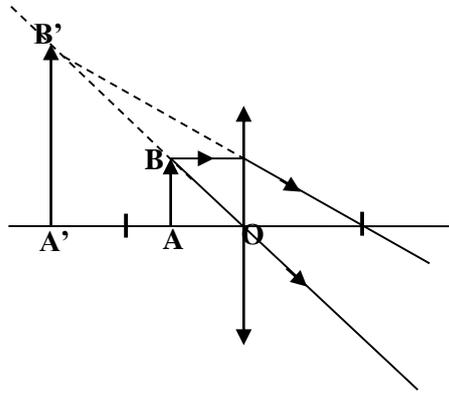
Pour construire l'image d'un point on trace un faisceau de lumière composé de trois rayons :

- Le rayon passant par le centre optique
- Le rayon passant par le foyer objet
- Le rayon parallèle à l'axe optique



– $\overline{OA} < 0$ l'objet est réel

– $\overline{OA'} > 0$ l'image est réelle.



- $\overline{OA} < 0$ l'objet est réel
- $\overline{OA'} < 0$ l'image est virtuelle

3- Formule de conjugaison

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

$$\overline{OA'} = \frac{f' \cdot \overline{OA}}{f' + \overline{OA}}$$

4- Grandissement

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

Il est noté γ ou G

- Si $\gamma > 0$ l'image est droite
- Si $\gamma < 0$ l'image est renversée
- Si $|\gamma| > 1$ l'image est plus grande que l'objet.
- Si $|\gamma| < 1$ l'image est plus petite que l'objet.

Ex : Donner les caractéristiques de l'image d'un objet placé à 5cm devant une lentille L de distance focale image $f' = 3\text{cm}$



- **L'image d'un objet placé dans le plan focal objet de la lentille est située à l'infini.**
- **L'image d'un objet à l'infini est située dans le plan focal image de la lentille.**
- **L'image d'un objet situé entre la lentille et le plan focal objet est droite, plus grande que l'objet et est virtuelle :** la lentille fonctionne comme une loupe

5- Qualité des images:

Les lentilles présentent des défauts (aberrations géométriques, aberrations chromatiques). Pour obtenir des images de bonne qualité, on doit se placer dans les **conditions de Gauss**.

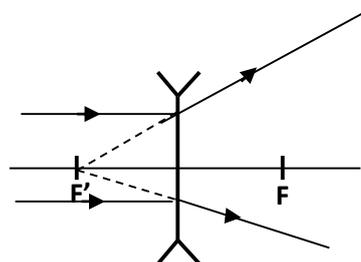
Conditions de Gauss:

- Le faisceau doit traverser la lentille au voisinage du centre optique.
- Les rayons incidents doivent faire un angle faible avec l'axe optique de la lentille.

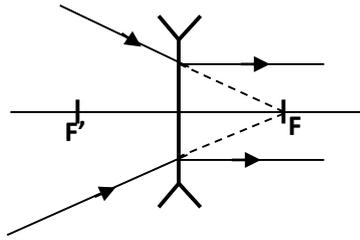
Pour réaliser ces conditions, il faut :

- Diaphragmer la lentille.
- Observer des objets de petite dimension au voisinage du centre optique

IV- Lentilles divergentes



-Tout rayon incident parallèle à l'axe principal d'une lentille divergente émerge comme s'il provenait du foyer image F' (image virtuelle).



-Tout rayon incident dont le prolongement passe par le foyer principal objet F en émerge parallèlement à l'axe principal.

Exemple :

- Objet à 3cm devant L , $f' = -2\text{cm}$
 - Objet à 2cm derrière L , $f' = -3\text{cm}$
- Déterminer dans chaque cas les caractéristiques de l'image.

EXERCICE d'application

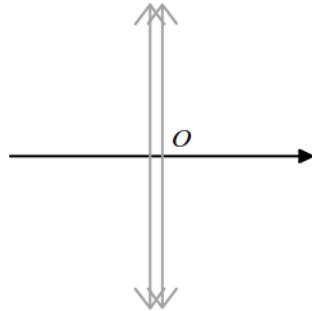
- 1) Un objet AB de hauteur 2 cm, est placé à 30 cm devant une lentille convergente de distance focale $f' = 10$ cm.
 - a) Calculer la vergence de cette lentille.
 - b) Déterminer les caractéristiques (position, sens, nature, grandeur et grandissement) de l'image.
 - c) Faire une construction graphique. (échelle 1 cm pour 5 cm en abscisse puis 1 cm pour 1 cm en ordonnée.)
- 2) Même question si l'objet est placé cette fois-ci à 8 cm devant une lentille divergente de distance focale $f' = -10$ cm.

V. Association de lentilles

1. Lentilles minces accolées

a) Définition

Deux lentilles L_1 et L_2 sont accolées si leurs axes principaux coïncident et que leur deux centres optiques sont



accolées si leurs axes principaux coïncident et que leur pratiquement confondus en un point O .

b) Equivalence à une lentille mince

Un rayon lumineux frappe d'abord la première lentille (L_1) qui donne d'un objet AB , réel ou virtuel, une image A_1B_1 , réelle ou virtuelle. La position de cette image est donnée par la relation de conjugaison de Descartes qui traduit le diagramme $A \xrightarrow{(L_1)} A_1$:

$$\frac{1}{OA_1} - \frac{1}{OA} = c_1$$

Le rayon lumineux frappe ensuite la deuxième lentille : l'image A_1B_1 sert d'objet, éventuellement virtuel, pour la lentille (L_2) qui donne l'image finale $A'B'$. La position de cette image est donnée par la relation de conjugaison de Descartes qui traduit le diagramme $A_1 \xrightarrow{(L_2)} A'$:

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA_1} = c_2$$

En additionnant, membre à membre, ces deux relations, nous obtenons la relation suivante :

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = c_1 + c_2$$

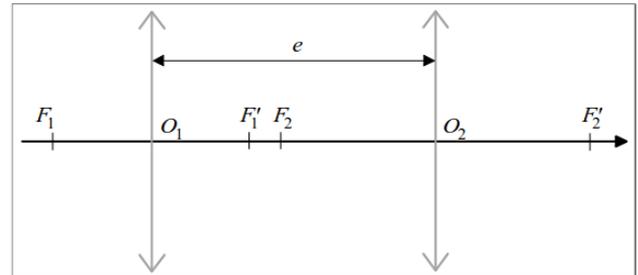
Une association de lentilles minces accolées de centre optique commun O est donc équivalente à une lentille mince de centre optique O et dont la vergence est la somme des vergences accolées : $c = c_1 + c_2$

1. Lentilles minces non accolées ou doublet de lentilles

a) Définition

Un doublet est une association de deux lentilles séparées par une distance e non nulle.

Contrairement à un système de lentilles accolées, un doublet n'est pas équivalent à une lentille mince, c'est un système épais. Le doublet peut être constitué de deux lentilles convergentes ou d'une lentille convergente et d'une lentille divergente.



a) Foyer image d'un doublet

Un point A_∞ à l'infini a pour image à travers le doublet le foyer image F' du doublet. $A_\infty \xrightarrow{\text{Doublet}} F'$

La première lentille donne d'un point objet situé à l'infini sur l'axe optique un point image situé en son foyer image :

$$A_\infty \xrightarrow{(L_1)} F'_1$$

La deuxième lentille donne donc du point objet F'_1 un point image situé en F' , ce qui permet de préciser le diagramme de définition du foyer image du doublet :

$$A_\infty \xrightarrow{(L_1)} F'_1 \xrightarrow{(L_2)} F'$$

La relation de conjugaison de Descartes, appliquée à la deuxième lentille, permet de situer le foyer image F' du doublet :

$$\frac{1}{O_2 F'} - \frac{1}{O_2 F'_1} = \frac{1}{f'_2} \Rightarrow \frac{1}{O_2 F'} = \frac{1}{O_2 F'_1} + \frac{1}{f'_2}$$

Avec $\overline{O_2 F'_1} = \overline{O_1 F'_1} - \overline{O_1 O_2} = f'_1 - e$

b) Foyer objet d'un doublet

Le foyer objet F du doublet a pour image à travers le doublet un point à l'infini A'_∞ . $F \xrightarrow{\text{Doublet}} A'_\infty$

Le diagramme complet de définition du foyer objet du doublet se présente maintenant de cette

façon : $F \xrightarrow{(L_1)} ? \xrightarrow{(L_2)} A'_\infty$

La deuxième lentille donne d'un point objet situé en son foyer objet un point image situé à l'infini sur l'axe. Donc, le point d'interrogation est en fait le foyer objet de la deuxième lentille : $F \xrightarrow{(L_2)} F_2 \xrightarrow{(L_2)} A'_\infty$

La relation de conjugaison de Descartes, appliquée à la première lentille, permet de situer le foyer objet F du doublet :

$$\frac{1}{O_1 F_2} - \frac{1}{O_1 F} = \frac{1}{f'_1} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{O_1 F} = \frac{1}{O_1 F_2} - \frac{1}{f'_1}}$$

Avec $\overline{O_1 F_2} = \overline{O_1 O_2} + \overline{O_2 F_2} = e - f'_2$

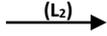
b) Image d'un objet donnée par un doublet

Un rayon lumineux frappe d'abord la première lentille (L_1) qui donne d'un objet AB, réel ou virtuel, une image $A_1 B_1$, réelle ou virtuelle. La position de cette image est donnée par la relation de conjugaison de Descartes qui traduit le

diagramme $A \xrightarrow{(L_1)} A_1$:

$$\frac{1}{O_1 A_1} - \frac{1}{O_1 A} = \frac{1}{f'_1}$$

Le rayon lumineux frappe ensuite la deuxième lentille : l'image A_1B_1 sert d'objet pour la lentille (L_2) qui donne l'image finale $A'B'$. La position de cette image est donnée par la relation de conjugaison de Descartes qui traduit le diagramme A_1A' :



$$\frac{1}{O_2A'} - \frac{1}{O_2A_1} = \frac{1}{f'_2}$$

Avec $\overline{O_2A_1} = \overline{O_1A_1} - \overline{O_1O_2} = \overline{O_1A_1} - e$

VI. Les défauts visuels

La lumière entre dans l'œil par la cornée, est déviée par le cristallin (**lentille convergente naturelle**) vers la rétine qui la transforme en message nerveux transmis au cerveau par le nerf optique.

Une image est nette uniquement si tous les rayons provenant d'un point de l'objet convergent en un même point sur la rétine.

1) L'hypermétropie

Une personne **hypermétrope** voit flous les objets proches alors que sa vision lointaine est correcte.

Un œil hypermétrope n'est pas assez convergent. Les images d'objets proches se forment **derrière la rétine**.

L'hypermétropie est corrigée par le port de **verres correcteurs convergents**.

2) La myopie

Une personne **myope** voit correctement les objets **très proches** mais flous les objets lointains.

Un œil myope est trop convergent : les images des objets éloignés se forment **en avant de la rétine**.

Pour remédier à ce défaut, la personne myope porte des **verres correcteurs divergents**

VII. Les applications des lentilles

Les lentilles sont utilisées dans différents instruments optiques, en particulier dans les **objectifs des appareils photo**, les **microscopes**, les **télescopes**, les verres correcteurs, loupe, lunettes de vue, caméra, webcam, lunettes astronomiques, ...

EXERCICE d'application

Exercice n°1

Un téléobjectif est constitué de deux lentilles minces dont les axes optiques coïncident. La lentille d'entrée L_1 a une vergence $C_1 = 10 \delta$ et est suivie d'une lentille L_2 de vergence $C_2 = -40 \delta$. La distance O_1O_2 séparant les deux lentilles vaut 8 cm . Un objet AB de hauteur égale à $0,5 \text{ m}$ est placé à une distance $d = 100 \text{ m}$ de O_1 sur l'axe optique.

1) Déterminer les caractéristiques de l'image intermédiaire A_1B_1 donnée par L_1 .

2) Quel rôle joue cette image pour la seconde lentille ? Déterminer les caractéristiques de l'image définitive $A'B'$.

3) Les résultats de la question précédente sont-ils conformes aux propriétés attendues pour l'image donnée par un téléobjectif sur la pellicule photographique ?

4) Déterminer la position de la lentille convergente unique qui permettrait d'arriver au même résultat. Préciser sa distance focale.

5) Conclure quant à l'intérêt du téléobjectif.

Exercice n°2

Un objet de grandeur 2 cm est placé à 4 cm d'une loupe dans le plan perpendiculairement à l'axe optique de celle-ci ; la vergence de cette loupe est $C = 20$ dioptries.

1. Calculer la distance focale de cette loupe.
2. Construire l'image de cet objet à travers la loupe à l'échelle $\frac{1}{2}$.
3. En déduire sa nature : réelle ou virtuelle. Pourquoi ?
4. Quel est le sens de l'image ?
5. Déterminer sa position par rapport à la loupe.
6. Mesurer sa grandeur ; en déduire le grandissement

Exercice n°3

La distance focale d'une lentille mince convergente est de 2 cm. Un objet AB de longueur 3 cm est placé perpendiculairement à l'axe de la lentille à 10 cm devant celle-ci. Le point A est situé sur l'axe optique. La lumière se propage de gauche à droite.

1. Sur un schéma à l'échelle 1/1, placer les points F, F', A et B.
2. Donner les valeurs, \overline{OF} , $\overline{OF'}$, \overline{OA} et \overline{AB} (préciser le sens du repère choisi).
3. Déterminer graphiquement la position $\overline{OA'}$ de l'image A'B' de AB et mesurer $\overline{A'B'}$.
4. Retrouver $\overline{OA'}$ et $\overline{A'B'}$ en utilisant les formules de conjugaison.
5. Calculer le grandissement de l'image de 2 manières différentes.

EXERCICE4

- 1- Une lentille L_1 biconvexe de vergence +5dioptries, a deux faces de même rayon de courbure R. L'indice du verre est $n = 1,5$. Calculer R.
- 2- Un objet AB est placé à 5m d'un écran fixe. Quelles sont les deux positions que peut occuper la lentille L_1 pour former sur l'écran une image nette de l'objet AB ?
- 3- On accole à L_1 une autre lentille L_2 . Le système obtenu a pour vergence +15dioptries. Quelle est la distance focale de L_2 ?
- 4- A 40cm en avant de L_1 perpendiculairement à son axe principal, on place un objet AB.
 - a) A quelle distance de L_1 faut-il placer la seconde lentille L_2 pour que le système donne de AB une image A'B' de même sens et deux fois plus grande ?
 - b) Faire un schéma précis du système avec la construction graphique de l'image. Echelle 1/10

**DISPERSION DE LA LUMIERE PAR UN PRISME
DIFFRACTION PAR UN RESEAU**

I-Dispersion de la lumière par un prisme

1- Quelques définitions :

La spectroscopie est l'étude des spectres lumineux.

Un **spectroscope** est un appareil qui permet de décomposer une lumière polychromatique en ses diverses composantes monochromatiques.

Exemple : le spectroscopie à prisme et le spectroscopie à réseau (constitué de très fines fentes très serrées gravées une plaque)

La dispersion est un phénomène de décomposition de la lumière polychromatique en ses diverses composantes monochromatiques.

Exemple : Arc-en-ciel, irisation des bulles de savon.....

Un milieu dispersif est un milieu dans lequel la vitesse de propagation dépend de la fréquence de l'onde.

Exemple : tous les milieux transparents (air, le verre, l'eau, etc.) sont dispersif sauf le vide.

2-Prisme et Déviation

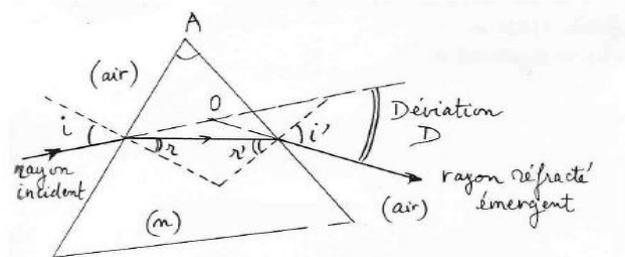
2.1. Définition

Un prisme est un milieu transparent séparé par deux faces planes et non parallèles.

2.2. Déviation

Un prisme dévie la lumière vers la base.

On définit l'angle de déviation D ou, plus simplement Déviation D du rayon lumineux par le prisme, comme l'angle que le rayon incident fait avec le rayon émergent.



$$\text{Soit } D_1 = i - r \text{ et } D_2 = i' - r'$$

$$D = D_1 + D_2 = i - r + i' - r' = i + i' - (r + r')$$

$$\text{Or } A = r + r' \text{ donc } D = i + i' - A$$

La propagation de la lumière dans le prisme est régie par quatre formules :

$$-\sin i = n \sin r$$

$$-\sin i' = n \sin r'$$

$$-A = r + r'$$

$$-D = i + i' - A \quad A \text{ (angle du prisme)}$$

2.3 Minimum de déviation du prisme

On a montré qu'au minimum de déviation on a $i = i'$ et $r = r'$.

$$D = i + i' - A \Rightarrow \boxed{D_m = 2i - A}$$

$$D_m = 2i - A \Rightarrow i = \frac{D_m + A}{2} \text{ et } r = \frac{A}{2}$$

$$\text{or } \sin i = n \sin r \Rightarrow n = \frac{\sin i}{\sin r} \Rightarrow \boxed{n = \frac{\sin \frac{D_m + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}}}$$

3- L'indice d'un verre depend de la couleur de la lumière.

Pour un verre déterminé, à chaque radiation monochromatique est associée une valeur de l'indice de réfraction n .

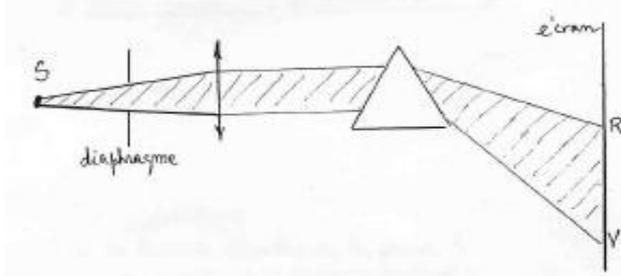
L'indice n est une fonction décroissante de la longueur d'onde λ .

$$-n = \frac{c}{c_k} \quad (c \text{ la célérité de la lumière dans le vide, } c_k \text{ la célérité de la lumière dans le milieu } k \text{ et } c > c_k)$$

$$-\lambda_k = \frac{c_k}{N} \quad (N \text{ est sa fréquence et } c_k \text{ la célérité de la lumière dans le milieu } k)$$

L'indice d'un verre augmente quand on passe du rouge au violet.

4- Le phénomène de dispersion



- la lumière blanche est décomposée en différentes couleurs : c'est le rouge qui est le moins dévié, le violet le plus dévié.
- Le spectre est CONTINU : il est formé d'une infinité de couleurs.
- La lumière blanche de la source contient une infinité de radiations monochromatiques :
- Le passage par le prisme provoque une infinité de déviations D voisines ce qui donne un spectre continu
- DOMAINE VISIBLE : λ compris entre 400 nm (VIOLET) et 750 nm (ROUGE)

Ce phénomène qui permet de séparer les radiations de couleurs différentes s'appelle : **LA DISPERSION DE LA LUMIERE** par le prisme.

On dit qu'un prisme disperse la lumière blanche.

5- Distance qui sépare les raies dans le spectre

Une lentille achromatique (qui donne des images nettes) est placée telle que son axe principal se confonde à la direction de la radiation H_2 . Un écran est placé dans le plan focal de la lentille perpendiculairement à l'axe optique.

$$\theta_1 = D_2 - D_1 ; \theta_2 = D_3 - D_2 ; \theta_3 = D_4 - D_3$$

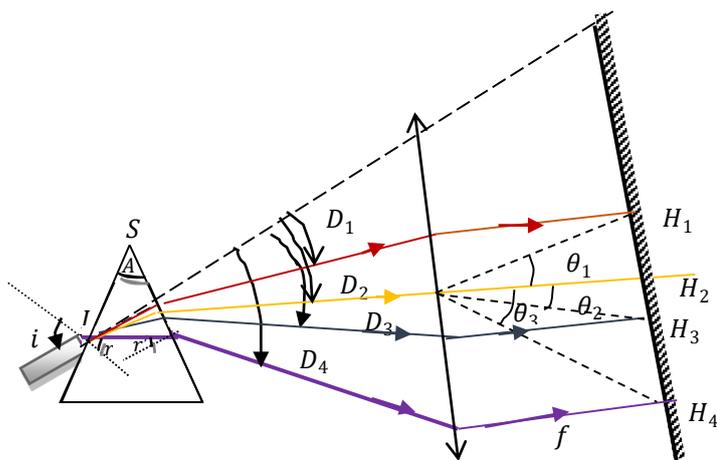
$$\tan \theta_1 = \frac{H_1 H_2}{f} \Rightarrow H_1 H_2 = f \tan \theta_1 ;$$

$$H_1 H_2 = f \tan(D_2 - D_1)$$

$$\text{De même : } H_3 H_2 = f \tan(D_3 - D_2) ;$$

$$H_4 H_2 = f \tan(D_4 - D_2)$$

$$H_1 H_4 = f (\tan(D_2 - D_1) + \tan(D_4 - D_2))$$



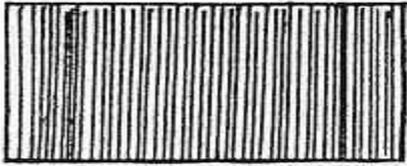
II- Diffraction de la lumière par un réseau

1- Définition d'un réseau.

C'est une surface plane très mince constituée d'un très grand nombre de fentes fines (traits) identiques et équidistantes.

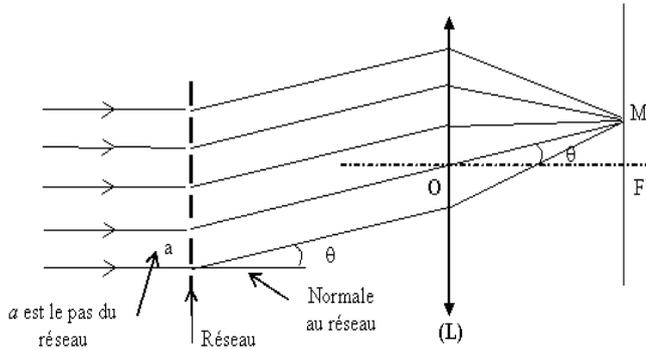
-La distance qui sépare deux traits consécutifs notée a est appelée pas du réseau.

- Le nombre de traits n par unité de longueur est : $n = \frac{1}{a}$



2- Diffraction de la lumière par un réseau.

Un réseau décompose la lumière en spectres colorés.



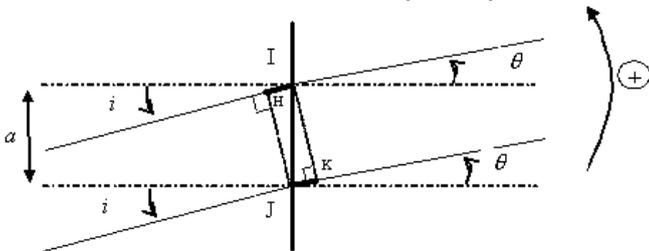
2.1. Lumière monochromatique

Une source qui émet une lumière d'une longueur d'onde déterminée est une source monochromatique.

La différence de marche entre le trajet de l'onde qui passe par le $n^{\text{ième}}$ fente et la $(n+1)^{\text{ième}}$ vaut :

$$\delta = JK - HI = a \sin \theta - a \sin i$$

La direction de ces maxima principaux est donnée par : $k\lambda = a (\sin \theta - \sin i)$



Nous obtenons la relation des réseaux qui indique comment le réseau disperse la lumière : $\sin \theta - \sin i = \frac{1}{a} k\lambda$

$$\sin \theta - \sin i = k n \lambda \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Dans le cas du réseau de diffraction, k s'appelle l'ordre du spectre.

$$\text{Si } i=0 \quad \sin \theta = k n \lambda$$

2.2. Lumière polychromatique

Une source qui émet une lumière composée de plusieurs longueurs d'onde est une source polychromatique.

Prenons le cas simple de l'incidence normale ($i=0$) et supposons que la lumière qui frappe le réseau est blanche.

La formule qui donne les maxima de la lumière est : $\sin \theta = k n \lambda$.

Mais maintenant λ varie et θ va dépendre de λ , c'est-à-dire de la couleur de la lumière.

- $k=0$; $\sin \theta = 0 \quad \forall \lambda \quad \theta = 0$ Toutes les couleurs se superposent et on obtient du blanc

- $k=1$ $\sin \theta = n \lambda$ On voit que θ dépend donc de la couleur de la lumière : On obtient un spectre du 1^{er} ordre puisque $k=1$

$-k=2 \sin \theta = 2n\lambda$ On obtient maintenant le spectre du 2^{ème} ordre.

Un réseau diffracte la lumière blanche et conduit à plusieurs spectres.

Avec un réseau le rouge est plus dévié que le violet.

Le nombre des directions correspondant à un maximum de lumière est toujours limitée par les

inégalités : $-1 \leq \sin \theta \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{\lambda n} \leq k \leq \frac{1}{\lambda n}$

3-Déviaton

Pour un réseau éclairé sous une incidence i et diffractant dans la direction θ , l'angle de déviation est défini par : $D = \theta - i$

4- Distance qui sépare les raies dans le spectre

Une lentille achromatique (qui donne des images nettes) est placée telle que son axe principal se confonde à la direction de la radiation H_2 . Un écran est placé dans le plan focal de la lentille perpendiculairement à l'axe optique.

$$\alpha_1 = \theta_2 - \theta_1 ; \alpha_2 = \theta_3 - \theta_2 ; \alpha_3 = \theta_4 - \theta_3$$

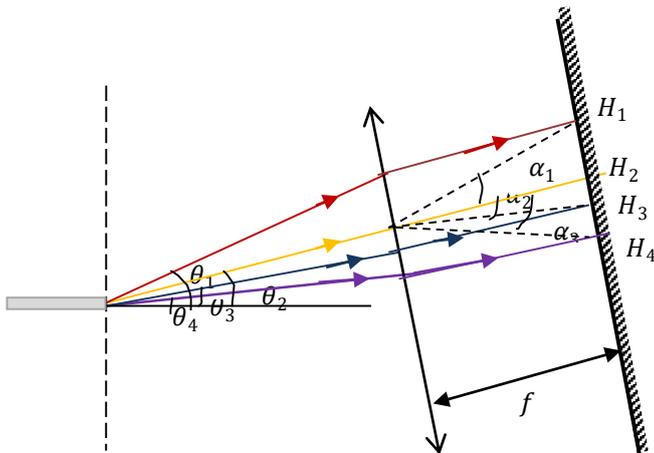
$$\tan \alpha_1 = \frac{H_1 H_2}{f} \Rightarrow H_1 H_2 = f \tan \alpha_1 ;$$

$$H_1 H_2 = f \tan(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\text{De même : } H_3 H_2 = f \tan(\theta_3 - \theta_2) ;$$

$$H_4 H_2 = f \tan(\theta_4 - \theta_2)$$

$$H_1 H_4 = f(\tan(\theta_2 - \theta_1) + \tan(\theta_4 - \theta_2))$$



Travaux dirigés sur la dispersion et la diffraction de la lumière

Exercice d'application1

On considère le trajet d'une lumière monochromatique dans un plan de section principale d'un prisme.

1-Etablir et justifier les quatre formules du prisme.

2-Un rayon de lumière monochromatique jaune frappe la première face d'un prisme sous l'incidence $i=45^\circ$. L'angle du prisme est égal $A=60^\circ$ et son indice, pour la radiation considérée $n_j=1,660$. Calculer les angles r , r' et i' ainsi que la déviation D_j

3-Même question pour des rayons de lumière monochromatique de couleur bleu-vert et orangée arrivant sur le prisme avec la même incidence ; les indices de réfraction du verre valent :

$$n_B=1,673 \text{ et } n_O=1,655$$

4- Que peut-on dire des rayons qui émergent de ce prisme ? Quel est le nom du phénomène ?

5-On place derrière le prisme, une lentille mince convergente achromatique, de distance focale $f'=50\text{cm}$, dont l'axe optique coïncide avec le trajet de la lumière jaune.

Où faut-il disposer un écran pour faire apparaître le spectre lumineux de la lumière complexe qui contient les trois radiations monochromatiques citées ci-dessus ?

Quelle est, dans le spectre, la distance qui sépare :

- La raie jaune de la raie bleu-vert ;
- La raie jaune de la raie orangée ;
- La raie bleu-vert de la raie orangée ?

Exercice d'application2

Un réseau de pas $a=4\mu\text{m}$ est utilisé pour diffracter la lumière d'une lampe à vapeur de mercure qui comporte, principalement, les radiations de couleur jaune, verte et bleue dont les longueurs d'onde valent :

$$\lambda_J=578\text{nm} ; \lambda_V=546\text{nm} ; \lambda_B=436\text{nm}.$$

1-Le réseau fonctionne en incidence normale. Etablir la formule permettant d'obtenir les directions θ dans lesquelles on a un maximum de lumière pour la radiation de longueurs d'onde λ .

2-Dans le spectre du 1^{er} ordre, déterminer les directions θ_J , θ_V , θ_B où on observe un maximum pour les lumières jaune, verte et bleue.

3-On place derrière le réseau une lentille mince convergente achromatique, de distance focale $f'=60\text{cm}$, et dont l'axe coïncide avec le trajet de la lumière verte.

Où faut-il disposer un écran ou une plaque photographique pour former le spectre de la lumière émise par la lampe à vapeur de mercure ?

Calculer la distance qui sépare, dans ce spectre, les raies jaune et bleue.

4-Reprenre les questions 2 et 3 pour le spectre du 2^e ordre.

5- L'incidence n'est plus normale : la lumière de la lampe à vapeur de mercure arrive sur le réseau en un faisceau cylindrique dont les rayons forment l'angle $\theta_0=20^\circ$ avec la normale du réseau.

Déterminer, par l'angle θ qu'elles forment avec la normale, les directions dans lesquelles on observe un maximum pour la lumière verte.

Quel est le nombre de ces maxima ?

Exercice d'application3

Un pinceau de lumière est composé de radiations de longueur d'onde λ comprises entre $0,4\mu\text{m}$ et $0,7\mu\text{m}$.

Il éclaire en incidence normale un réseau ayant 8.000 traits/cm.

1) Sous quels angles observe-t-on chacune des deux raies extrêmes du spectre de 1^{er} ordre ?

2) Combien de spectres complets obtient-on ?

3) On place un écran à 2,20 m du réseau. Calculer la longueur du spectre du 1^{er} ordre sur cet écran.

4) On dispose d'une lentille mince convergente achromatique de distance focale $f' = 40\text{cm}$ derrière le réseau de façon que son axe optique coïncide avec la direction du maximum de lumière jaune du 1^{er} ordre.

a) Où doit-on placer l'écran afin d'observer un spectre nette ?

b) Où se forme la raie jaune du 1^{er} ordre sur l'écran ?

c) Faire le schéma du dispositif.

d) Calculer la distance qui sépare les raies extrêmes du spectre du 1^{er} ordre.

5) Le dispositif décrit dans la question 4) constitue le principe d'un appareil optique.

a) Comment appelle-t-on cet appareil ?

b) Proposer un schéma légendé de cet appareil.

Exercice d'application4

Un pinceau cylindrique tricolore (rouge (R), jaune (J), violet(V)) frappe un prisme de verre sous une incidence de $i = 45^\circ$. L'angle du prisme est $\hat{A} = 60^\circ$.

Les indices de réfraction du verre valent : $n_R = 1,510$; $n_J = 1,516$ et $n_V = 1,520$.

1) Rappeler les quatre formules du prisme.

2) Compléter le tableau suivant :

	r	r'	i'	D
Rouge				
Jaune				
Violet				

3) On place derrière le prisme, une lentille mince convergente, de distance focale $f' = 45$ cm. L'axe principal de la lentille coïncide avec le trajet de la lumière jaune.

- a) Où faut-il placer l'écran afin d'observer avec netteté le spectre de la lumière complexe tricolore ?
- b) Déterminer la distance d entre la raie rouge et la raie violette.
- c) Le montage décrit dans le présent exercice constitue le principe d'un appareil.
 - Comment s'appelle-t-il ?
 - Proposer un schéma légendé de cet appareil.

NIVEAUX D'ENERGIE DES ATOMES

I-SPECTRES ATOMIQUES

1-Les spectres d'émission

Les spectres d'émission d'atomes s'obtiennent au moyen des spectroscopes.

Si on élève la température d'un corps à l'œil nu on constate qu'il présente certaines couleurs.

A l'aide d'un spectroscope l'analyse de ces couleurs donne le spectre d'émission du corps.

Les spectres atomiques d'émission sont constitués de raies fines correspondant à des radiations monochromatiques bien déterminées.

Les spectres d'émission sont caractéristiques des atomes qui les produisent

Les étoiles donnent un spectre continu qui dépend essentiellement de leur température de surface.

2-Les spectres d'absorption

Les spectres d'absorption atomique s'obtiennent avec un spectroscope, mais une source de lumière blanche est interposée entre l'élément absorbant et le spectroscope.

Les spectres atomiques d'absorption sont formés de raies noires et fines dans le spectre continu de la lumière blanche. Les longueurs d'onde correspondantes ont des valeurs bien déterminées.

3-Application

Les spectres d'émission et d'absorption sont caractéristiques des éléments présents dans les sources qui les produisent.

- En astrophysique elle permet de déterminer la distance, la masse, la vitesse, la température et la structure des étoiles.
- En chimie elle permet d'identifier les éléments chimiques.

II-INTERPRETATION DES SPECTRES

1-Le photon

Un faisceau lumineux, dans le vide, peut être considéré comme une onde qui se propage.

A une onde électromagnétique de fréquence ν on associe des quanta d'énergie de valeur :

$$E = h\nu = h \frac{c}{\lambda}$$

Où $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$: constante de Planck.

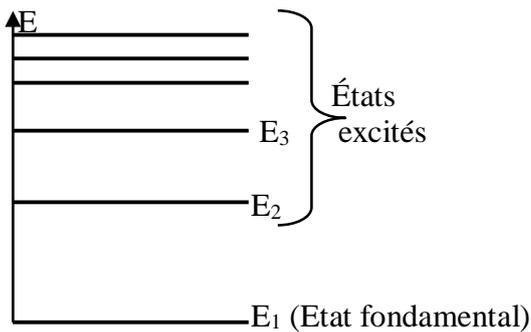
Ces quanta d'énergie sont portés par des particules, appelées **Photons**.

2-Les niveaux d'énergie des atomes

L'énergie d'un atome ne peut prendre que certaines valeurs bien déterminées appelée niveau d'énergie : on dit qu'elle est quantifiée. Il existe l'état fondamental, états excités et état ionisé.

- L'état fondamental : Lorsque l'atome est dans son état énergétique plus bas, on dit qu'il est dans son **état fondamental**.
- L'état excité : Un apport d'énergie peut porter l'atome dans l'un de ses niveaux d'énergie plus élevée : on dit que l'atome passe dans un **état excité**.
- L'état ionisé d'un atome est l'état pour lequel il est séparé de son électron.

Les niveaux d'énergie se représentent, dans un diagramme d'énergie, par des traits horizontaux situés d'autant plus haut que l'énergie du niveau correspondant est plus élevée.



3-Transition Electronique avec émission ou absorption d'un photon

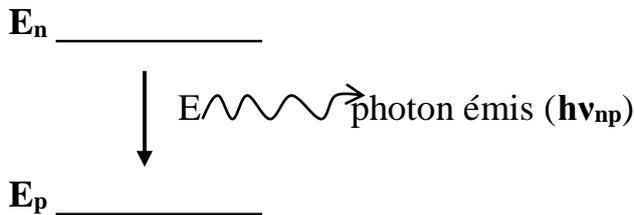
Le passage d'un niveau d'énergie à un autre est appelé transition électronique.

Lors des transitions électroniques d'un atome, un photon est émis ou capté.

- Si l'atome passe du niveau d'énergie supérieur E_n au niveau d'énergie inférieur E_p , (émission) un photon est émis qui emporte l'énergie E , sa fréquence ν_{np} et sa longueur d'onde λ_{np} telle que :

$$E = E_n - E_p = h \nu_{np}$$

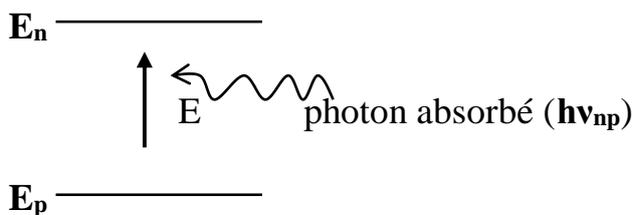
$$\nu_{np} = \frac{E_n - E_p}{h} \text{ et } \lambda_{np} = \frac{c}{\nu_{np}} = \frac{hc}{E_n - E_p}$$



- Si l'atome capte un photon de fréquence ν_{np} et de longueur d'onde λ_{np} , qui lui fournit l'énergie E , il passe du niveau d'énergie inférieur E_p au du niveau d'énergie supérieur E_n (absorption)

$$E = E_n - E_p = h \nu_{np}$$

$$\nu_{np} = \frac{E_n - E_p}{h} \text{ et } \lambda_{np} = \frac{c}{\nu_{np}} = \frac{hc}{E_n - E_p}$$



4-Loi des combinaisons de Ritz

Considérons un atome et ses trois niveaux E_n, E_p, E_q ; il existe les trois transitions électroniques :

$$n \rightarrow p ; \quad p \rightarrow q ; \quad n \rightarrow q$$

qui correspondent aux fréquences émises ν_{np} , ν_{pq} et ν_{nq} telles que : $E_n - E_p = h\nu_{np}$; $E_p - E_q = h\nu_{pq}$;

$$E_n - E_q = h\nu_{nq}$$

$$E_n - E_q = (E_n - E_p) + (E_p - E_q)$$

$$h\nu_{nq} = h\nu_{np} + h\nu_{pq}$$

$$\nu_{nq} = \nu_{np} + \nu_{pq} \text{ OU } \nu_{np} = \nu_{nq} - \nu_{pq}$$

III-LE SPECTRE DE L'HYDROGENE

1-Energie de l'atome d'hydrogène

Par convention, on attribue l'énergie nulle au système {proton – électron} lorsque le proton et l'électron sont au repos, infiniment éloignés, donc sans interaction.

Comme il faut fournir de l'énergie à l'atome d'hydrogène pour l'ioniser, l'énergie de l'atome (non ionisé) est négative.

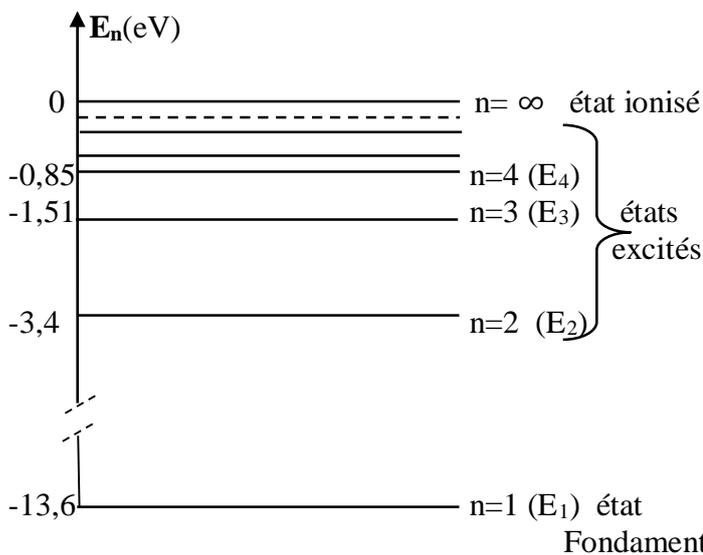
1.1.Niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène

L'énergie E_n de l'atome d'hydrogène est de la forme :

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2}$$

Avec $E_0 = 13,6\text{eV} = 2,18 \cdot 10^{-18}\text{J}$; n appelé nombre quantique principal ne peut prendre que les valeurs entières 1, 2, 3 ∞

Construisons le diagramme énergétique de l'atome d'hydrogène



- Si $n=1$ $E_1 = -E_0 = -13,6\text{eV}$: l'atome est dans son **état fondamental**.
- Si $n > 1$, $-13,6\text{eV} < E_n < 0$: l'atome est dans un **état excité**.
- Si $n = \infty$; $E_\infty = 0$: l'atome est **ionisé** ;

1.2. Energie d'ionisation de l'hydrogène

L'énergie d'ionisation de l'hydrogène est l'énergie minimale qu'il faut fournir à un atome H dans l'état fondamental pour lui arracher un électron.

$$E_i = E_\infty - E_1 = 0 - (-E_0) = E_0$$

$$E_i = E_0 = 13,6\text{eV}$$

↑ $1\text{ev} = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{J}$

2-Interprétation du spectre de l'hydrogène

2.1-séries de raies d'émission

L'ensemble des raies qui constituent le spectre d'émission de l'atome d'hydrogène peut être classé en séries, une série correspondant aux transitions qui aboutissent au même niveau d'énergie.

Lorsqu'une transition s'effectue du niveau E_n au niveau E_p inférieur ($E_n > E_p$) il y a émission du photon d'énergie $h\nu_{np}$

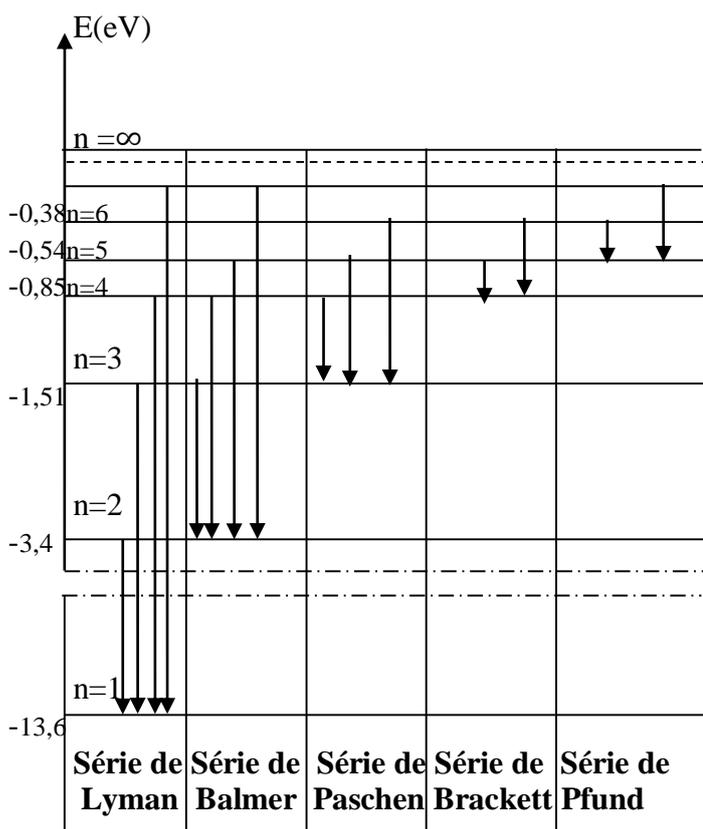
$$E_n - E_p = -\frac{E_0}{n^2} - \left(-\frac{E_0}{p^2}\right) = -E_0\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right) = h\nu_{np}$$

$$\nu_{np} = \frac{E_0}{h}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2}\right) \text{ or } \lambda_{np} = \frac{c}{\nu_{np}}$$

$$\frac{1}{\lambda_{np}} = \frac{E_0}{hc}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2}\right) = R_H\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

R_H : constante de Rydberg. = $1,097.10^7 \text{ m}^{-1}$.

- Pour $p=1$ et $n \geq 2$ l'atome passe d'un état excité E_n à l'état fondamental E_1 . On obtient les raies de la **série de Lyman** ; elles se situent dans l'Ultraviolet
- Pour $p=2$, n peut être égal 3, 4, 5, 6, ... ; à ces quatre valeurs correspondent les raies visibles $H\alpha$, $H\beta$, $H\gamma$, $H\delta$ de la **série de Balmer**.
- Pour $p=3$ et $n \geq 4$: série infrarouge de **Paschen**
- Pour $p=4$ et $n \geq 5$: série infrarouge de **Brackett**
- Pour $p=5$ et $n \geq 6$: série infrarouge de **Pfund**



2.2.-Les conditions pour qu'un photon d'énergie $h\nu$ soit absorbée

Lorsqu'un photon d'énergie $h\nu$ arrive sur un atome, deux cas se présentent :

- Si $h\nu \geq E_i$ (énergie d'ionisation de l'atome) le photon peut être absorbé : une partie de son énergie permet l'ionisation de l'atome ; le reste est transféré sous forme d'énergie cinétique à l'électron éjecté.

- Si $h\nu < E_i$ et l'énergie correspond exactement à une transition possible, le photon est absorbé. Dans le cas contraire il ne l'est pas.

Exercice d'application

On attribue aux niveaux d'énergie d'hydrogène les valeurs : $E_n = -\frac{E_0}{n^2}$

Données : $E_0 = 13,6\text{eV}$; $h.c = 1,986.10^{-16}\text{J.nm}$ et $e = 1,6.10^{-19}\text{C}$.

1- Calculer, en nanomètre, les longueurs d'onde des radiations émises lors des transitions du niveau d'énergie d'énergie E_3 au niveau d'énergie E_1 (longueur d'onde λ_3), du niveau d'énergie E_2 au niveau d'énergie E_1 (longueur d'onde λ_2), du niveau d'énergie E_3 au niveau d'énergie E_2 (longueur d'onde λ).

2- Une ampoule contient de l'hydrogène porté à la température de 2800K. Les atomes sont dans leur état fondamental. Une lumière constituée des trois radiations $\lambda_3, \lambda_2, \lambda$ traverse ce gaz.

Quelles sont les radiations absorbées ? Justifier.

3- Sur l'ampoule précédente, on envoie une radiation monochromatique de longueur d'onde $\lambda' = 76\text{nm}$.

a) Calculer, en électronvolt, l'énergie des photons.

b) Montrer que l'atome peut être ionisé.

c) Calculer, en faisant un bilan d'énergie, l'énergie cinétique acquise par l'électron en admettant que celle de l'ion formé est nulle.

RADIOACTIVITE

I – Noyau atomique

1- Quelques définitions

a) Un noyau

Il est constitué nucléons (protons et neutrons).

Le proton porte une charge élémentaire +e, sa masse $m_p=1,67.10^{-27}$ Kg ;son symbole est 1_1p ou 1_1H

Le neutron est une particule neutre sa masse est $m_n=1,66.10^{-27}$ Kg ; son symbole 1_0n

b) Un nucléide

C'est l'ensemble des noyaux qui possèdent le même nombre de protons et même nombre de neutrons. On le note A_ZX , A est le nombre de masse(nombre de nucléons), Z est le nombre de protons encore appelé nombre de charge, numéro atomique de l'atome X. le nombre de neutrons $N = A - Z$

Exemple: ${}^{12}_6C$, ${}^{16}_8O$, ${}^{235}_{92}U$

c) Des isotopes

Ce sont des nucléides ayant même nombre de protons Z mais différent nombre de masse A.

exemple : ${}^{12}_6C$, ${}^{13}_6C$ et ${}^{14}_6C$ sont des isotopes ; ${}^{235}_{92}U$ et ${}^{238}_{92}U$ sont des isotopes, 1_1H (hydrogène léger), 2_1H (hydrogène deutérium) et 3_1H (hydrogène tritium) sont des isotopes

d) Masse d'un noyau

En physique nucléaire on utilise souvent l'unité de masse atomique de symbole u.

L'unité de masse atomique est le douzième de la masse de l'atome de carbone 12. $1u = \frac{1}{12}m_C = \frac{M_C}{12N_A}$ Kg

$1u = 1,660550.10^{-27}$ Kg $\cong 931,5$ Mev/c² (Mev=mega-electron volt) c célérité de la lumière

2-Masse et énergie.

a-Relation d'Einstein

En 1905, en élaborant la théorie de la relativité restreinte, Einstein postule que la masse est une des formes de l'énergie :

Un système au repos, de masse m possède une énergie de masse :

E : énergie de masse en (J)

$E = m.c^2$ avec

m : masse en kg

c : vitesse de la lumière dans le vide ($c = 3,0.10^8$ m.s⁻¹)

b-Unités :

A l'échelle atomique, l'unité joule est inadaptée, trop grande ; on utilise plutôt l'électron volt , eV :

1 eV = $1,60.10^{-19}$ J et aussi le MeV:

1 MeV = 10^6 eV = $1,60.10^{-13}$ J.

c-Energie de liaison du noyau

c.1. Défaut de masse du noyau

On a constaté en mesurant les masses que la masse du noyau atomique est inférieure à la somme des masses des protons m_p et des neutrons m_n qui le constituent : $m_{\text{noyau}} < Z.m_p + (A-Z).m_n$

Cette différence est appelée défaut de masse Δm :

$$\Delta m = Z.m_p + (A - Z).m_n - m_{\text{noyau}} \quad (\Delta m > 0)$$

c.2. Energie de liaison du noyau

On appelle énergie de liaison d'un noyau , notée E_l , l'énergie que le milieu extérieur doit fournir à un noyau au repos pour le dissocier en nucléons séparés au repos.

L'énergie de liaison d'un noyau a pour expression :

$$E_l = \Delta m \cdot c^2 \text{ avec } \Delta m = Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n - m_{\text{noyau}}$$

c.3. Energie de liaison par nucléon

L'énergie de liaison par nucléon d'un noyau notée E_A est le quotient de son énergie de liaison par le nombre de ses nucléons.

$$E_A = \frac{E_l}{A}$$

A: nombre de nucléons du noyau



E_A permet de comparer la stabilité des noyaux entre eux.
Plus l'énergie de liaison par nucléon est grande, plus le noyau est stable.

II- Radioactivité

1-Définition

-**La réaction nucléaire** est une transformation d'un noyau en un autre avec libération d'énergie.

-**La radioactivité** est la propriété d'un noyau instable de se transformer spontanément en un autre noyau avec émission de rayonnements.

-**La désintégration** est une transformation spontanée d'un noyau instable en un autre noyau avec émission de rayonnement.

-**Un noyau radioactif** (élément radionucléide, élément radioactif) est un noyau instable capable de se transformer spontanément en émettant des rayonnements.

La radioactivité est une réaction dite nucléaire car elle concerne le noyau de l'atome par opposition aux réactions chimiques qui ne concernent que le cortège électronique sans modifier le noyau.

2- Propriétés de la désintégration :

La désintégration radioactive est :

- aléatoire, on ne peut pas prévoir quand va se produire la désintégration d'un noyau.
- spontanée car elle se produit sans aucune intervention extérieure.
- indépendante de son environnement chimique, de l'espèce chimique qui contient le noyau radioactif et des conditions extérieures (pression ou température).

3-Emissions radioactives :

Les émissions radioactives sont :

-**Le rayonnement γ** : c'est un rayonnement électromagnétique très pénétrant et énergétique mais très faiblement ionisant.

-**La particule α** est le noyau d'hélium. C'est une particule chargée de charge $q=+2e$. Son symbole est ${}^4_2\text{He}$. Le rayonnement α a un pouvoir ionisant très fort mais un très faible pouvoir pénétrant.

-**La particule β^-** est un électron de symbole ${}^0_{-1}e$, on l'appelle également négatron ou négatron. Sa charge est $-e$.

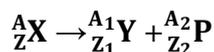
-**La particule β^+** est un positon(positron), son symbole est ${}^0_{+1}e$, sa charge est $+e$. les rayonnement β sont assez pénétrant et peu ionisant.

4- Lois de conservation :

Lois de Soddy : Lors d'une désintégration nucléaire, il y a conservation du nombre de charge Z et du nombre de nucléons A

La désintégration d'un noyau X (appelé noyau père) conduit à un noyau Y (appelé noyau fils) et à l'expulsion d'une particule P (particule α ou β).

L'équation de la désintégration s'écrit :



Les lois de conservation de **Soddy** s'écrivent:

* **Loi de conservation du nombre de masse A :**

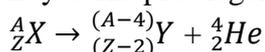
$$A = A_1 + A_2$$

* **Loi de conservation du nombre de charges Z :**

$$Z = Z_1 + Z_2$$

4- Les types de Radioactivité

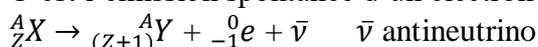
a) Radioactivité α : est l'émission d'une particule α par un noyau lourd instable pour se transformer en un noyau fils plus léger



Exemple : L'uranium 238 est émetteur α . Écrire l'équation de la réaction. ${}^{238}_{92}U \rightarrow {}^{234}_{90}Th + {}^4_2He + \gamma$

b) Radioactivité β^- :

C'est l'émission spontanée d'un électron par un noyau instable possédant trop de neutrons.

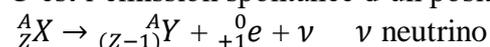


En fait il s'agit de la transformation d'un neutron en proton avec émission d'électron. ${}_0^1n \rightarrow {}^1_1H + {}^0_{-1}e$

Exemple : le Césium 137 est émetteur ; écrire l'équation de la réaction. ${}^{137}_{55}Cs \rightarrow ({}^{137}_{56}Ba) + {}^0_{-1}e + \bar{\nu}$

c) Radioactivité β^+ :

C'est l'émission spontanée d'un positon par un noyau instable possédant trop de protons.



En fait il s'agit de la transformation de proton en neutron avec émission de positon. ${}^1_1H \rightarrow {}^1_0n + {}^0_{+1}e$

Exemple l'oxygène 14 est émetteur β^+ . Écrire l'équation bilan. ${}^{14}_8O \rightarrow ({}^{14}_7N) + {}^0_{+1}e + \nu$

d) Emission γ :

Le noyau-fils issu de la désintégration est le plus souvent dans un état excité. Il devient stable en libérant l'excédent d'énergie qu'il possède sous la forme d'un rayonnement électromagnétique appelé rayonnement γ . Equation : ${}^A_ZY^* \rightarrow ({}^A_ZY) + \gamma$. l'émission γ accompagne souvent la radioactivité α et β .

III- Loi de décroissance radioactive

1- Décroissance exponentielle

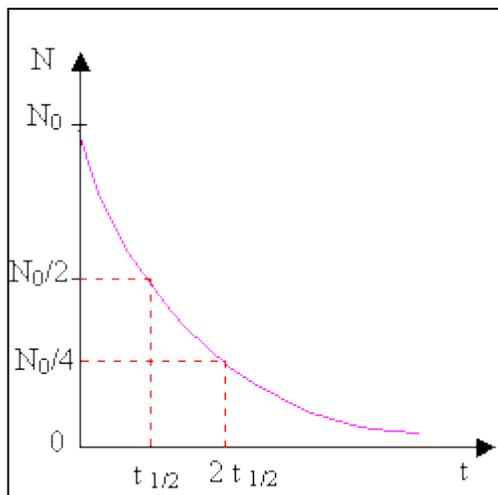
La fonction N(t) de nombre d'atomes présents à la date t est : $N = N_0 e^{-\lambda t}$

où N_0 est le nombre de noyaux radioactifs à l'instant initial et λ est la constante radioactive.

$$m = m_0 e^{-\lambda t}$$

Relation entre la masse et le nombre de noyaux $N = \frac{m}{M} N_A$

N_A constante d'Avogadro et M masse molaire



2- Demi-vie radioactive

2.1. Définition

La demi-vie radioactive ou période radioactive, notée $T_{1/2}$, d'un échantillon de noyaux radioactifs est égale à la durée nécessaire pour que la moitié des noyaux radioactifs initialement présents dans l'échantillon se désintègrent.

$$N(T_{1/2}) = N_0 / 2$$

2.2. Calcul de la demi-vie $T_{1/2}$

$$N(T_{1/2}) = N_0 / 2 \Rightarrow N_0 \cdot e^{-\lambda T_{1/2}} = N_0 / 2$$

$$\Rightarrow e^{-\lambda T_{1/2}} = 1 / 2$$

$$\Rightarrow -\lambda \cdot T_{1/2} = \ln 1/2 = -\ln 2$$

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

3-Activité radioactive

L'activité A radioactive est égale au nombre moyen de désintégrations par seconde.

$$A = \frac{N_{\text{désint}}}{\Delta t} = -\frac{\Delta N}{\Delta t} \quad (A > 0)$$

Elle s'exprime en becquerels dont le symbole est Bq

(1 Bq = 1 désintégration par seconde).

(Le curie (Ci) est aussi une unité d'activité . Il vaut $3,7 \cdot 10^{10}$ Bq.)

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda \cdot N = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

V-Fission et fusion nucléaires

1- Réactions nucléaires provoquées :

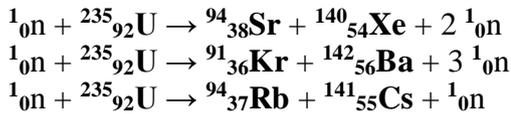
Une réaction nucléaire est dite provoquée lorsqu'un noyau cible est frappé par un noyau projectile et donne naissance à de nouveaux noyaux.

Les lois de conservation de Soddy sont vérifiées.

2-La fission nucléaire: réaction en chaîne

La fission est une réaction nucléaire provoquée au cours de laquelle un noyau lourd "fissile" donne naissance à deux noyaux plus légers.

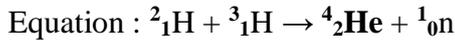
Exemple: Plusieurs réactions de fission de l'uranium 235 sont possibles:



Les neutrons émis lors de la fission peuvent provoquer la fission d'autres noyaux. Si le nombre de neutrons émis lors de chaque fission est supérieur à 1, une **réaction en chaîne** peut se produire et devenir rapidement incontrôlable (bombe à fission : bombe "A" d'Hiroshima).

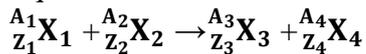
3- La fusion nucléaire

La fusion nucléaire est une réunion de deux noyaux légers pour former un noyau plus lourd.



VI - Bilan énergétique

Equation d'une réaction nucléaire :



D'après l'équivalence masse-énergie, la variation d'énergie ΔE de la réaction correspond à la variation de masse Δm :

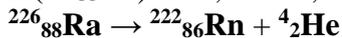
$$\Delta m = (m_3 + m_4) - (m_1 + m_2) \quad \Delta E = \Delta m \cdot c^2$$

L'énergie libérée au cours des réactions nucléaires se trouve sous forme d'énergie cinétique ou d'énergie rayonnante si la désintégration est suivie de désexcitation.

$$E_{\text{libérée}} = |\Delta m| c^2$$

Exemple : désintégration α d'un noyau de radium 226 en noyau de radon 222

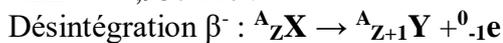
$$m({}^{226}_{88}\text{Ra}) = 225,9770 \text{ u}, m({}^{222}_{86}\text{Rn}) = 221,9702 \text{ u}, m({}^4_2\text{He}) = 4,0015 \text{ u}, (1 \text{ u} = 931,5 \text{ MeV}/c^2)$$



$$\Delta E = [m({}^{222}_{86}\text{Rn}) + m({}^4_2\text{He}) - m({}^{226}_{88}\text{Ra})] \cdot c^2$$

$$\Delta E = (221,9702 + 4,0015 - 225,9770) \times 931,5$$

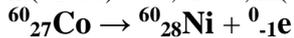
$$\Delta E = -4,937 \text{ MeV}$$



$$\Delta E = [m({}^A_{Z+1}\text{Y}) + m({}^0_{-1}\text{e}) - m({}^A_Z\text{X})] \cdot c^2$$

Exemple : désintégration β^- du cobalt 60 en nickel 60

$$m({}^{60}_{27}\text{Co}) = 59,919 \text{ u}, m({}^{60}_{28}\text{Ni}) = 59,9154 \text{ u}, m({}^0_{-1}\text{e}) = 5,49 \cdot 10^{-4} \text{ u}$$



$$\Delta E = [m({}^{60}_{28}\text{Ni}) + m({}^0_{-1}\text{e}) - m({}^{60}_{27}\text{Co})] \cdot c^2$$

$$\Delta E = (59,9154 + 5,49 \cdot 10^{-4} - 59,9190) \times 931,5 = -2,842 \text{ MeV}$$

VII- Dangers et applications des radionucléides :

1- Dangers des radionucléides (danger de la radioactivité)

En traversant la matière vivante les particules α , β et les rayonnements γ provoquent des ionisations ou des excitations d'atomes, susceptible d'entraîner des réactions chimiques anormales. Des altérations morphologiques sont observées, notamment des effets génétiques ; des cellules sont détruites ou leur processus de division altéré.

1- Utilisation des radionucléides

➤ Dans l'industrie

les radionucléides permettent la visualisation des pièces industrielles : la gammagraphie (pièce métallique soumise à au rayonnement γ) révèle et décèle les défauts des organes ; la bêtagraphie (utilisation du rayonnement β) permet l'examen d'objet mince, le contrôle d'épaisseur.

➤ En médecine,

les radionucléides permettent de faire la **scintigraphie médicale** (visualisation du fonctionnement d'organes vivants). **La radiothérapie** : le traitement des tumeurs par irradiation (destruction des cellules localisées dans la tumeur cancéreuses). **L'aseptisation** (radio-stérilisation) des instruments chirurgicaux qui sont stérilisés à l'aide de rayon γ qui tuent les microorganismes.

➤ **En agriculture,**

les radionucléides permettent la modification génétique ; la conservation des denrées alimentaires par élimination des parasites des produits agricoles par le rayonnement γ .

➤ **En chronologie,**

les radionucléides sont utilisés pour faire **la datation**. En effet les êtres vivants (humain, animal, végétal) ont une teneur constante des éléments radioactifs (par exemple $^{14}_6C$) ; après la mort, l'élément radioactif n'est plus consommé, sa teneur diminue dans l'organisme au rythme de désintégration radioactive. La mesure de l'activité d'un échantillon de l'espèce vivante et celle de l'échantillon de la même espèce morte permet d'évaluer la date de la mort.

➤ **Dans les centrales nucléaires**

l'énergie produite par les réactions nucléaires est utilisée pour produire **l'énergie électrique**. Les réactions nucléaires ne produisent pas les gaz à effet de serre. L'utilisation de l'énergie nucléaire contribue à la réduction de la destruction de la couche d'ozone.

Exercice d'application

L'isotope du cobalt $^{60}_{27}Co$ se désintègre spontanément en donnant un isotope du nickel, le $^{60}_{28}Ni$.

1- Donner l'équation-bilan de sa désintégration et préciser le type de rayonnements émis.

2- Lors de la désintégration d'un noyau $^{60}_{27}Co$, deux rayonnements γ , en proportion identique, d'énergie égales à 1,17 MeV et 1,33 MeV, sont émis en cascade. Quelle est, en MeV, l'énergie cinétique maximale de la particule émise précédemment ?

3- Lors d'une radiothérapie, seuls les rayons γ ne sont pas arrêtés et transfèrent leur énergie à la tumeur. L'énergie transférée pour une séance de $\Delta t = 4$ min est de 20 mJ. Quelle est l'activité de la source utilisée ?

4- La période radioactive du cobalt 60 est $T_{1/2} = 5,27$ ans.

Pour une source donnée, au bout de combien de temps son activité a-t-elle diminué de moitié et est-elle alors à remplacer ?

Données : $m_{Co} = 59,91901 u$; $m_{Ni} = 59,91543 u$; $m_e = 0,00055 u$; $1 u = 1,66 \cdot 10^{-27} kg$; $c = 3 \cdot 10^8 m \cdot s^{-1}$.