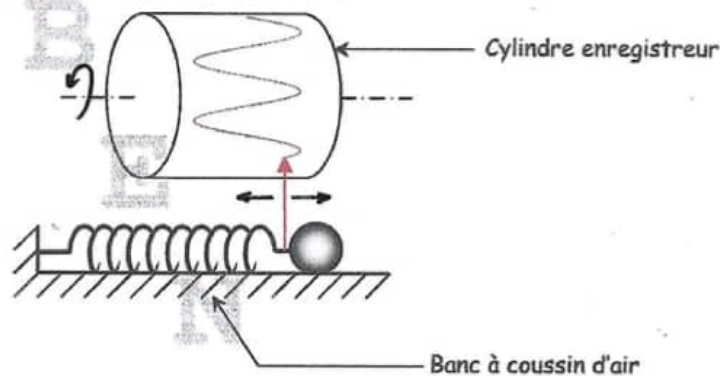


Oscillations mécaniques libres

A / Oscillations libres non amorties :

I/ Production d'oscillations libres non amorties :



II / Etude théorique :

1°) Equation différentielle :

Système = $\{ (S) \}$

Bilan des forces ext. : $\vec{P}$, $\vec{R}$ et $\vec{T}$

Théorème du centre d'inertie :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$$

$$\text{Sur } (x, x) : -kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\Rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (*)$$

$$\text{posons } \omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} : \text{ pulsation propre (rad.s}^{-1}\text{)}$$

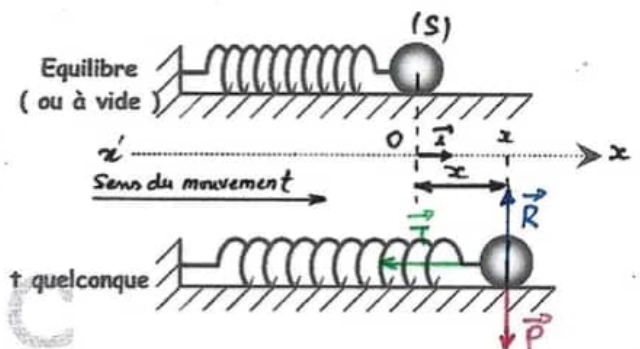
$$(*) \text{ devient : } \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

Cette eq. diff. admet comme solution : $x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x)$

Conclusion : (S) est donc animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal de

$$\text{période propre } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \text{ et de fréquence propre } N_0 = \frac{1}{T_0}$$

$$\Rightarrow N_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$



2°) Elongation, vitesse et accélération :

$$x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v(t) = \underbrace{\omega_0 X_m}_{V_m} \sin(\omega_0 t + \underbrace{\varphi_x + \frac{\pi}{2}}_{\varphi_v}) \Rightarrow v(t) = V_m \sin(\omega_0 t + \varphi_v) \text{ Avec } \begin{cases} V_m = \omega_0 X_m \\ \varphi_v = \varphi_x + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Donc, $v(t)$ est aussi une fonction sinusoïdale du temps de même période que $x(t)$

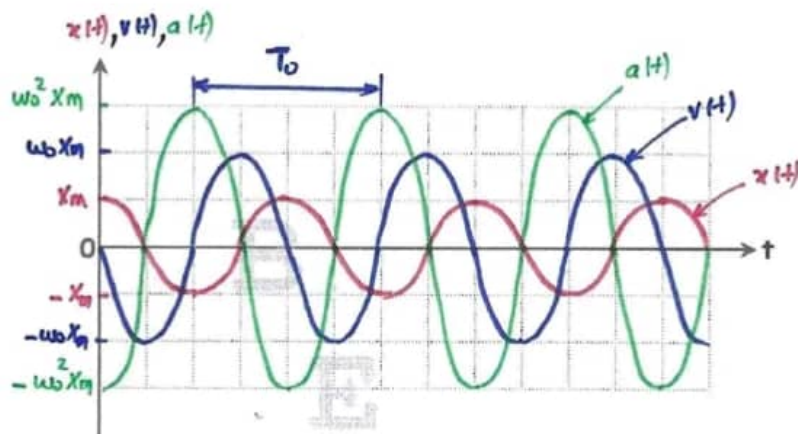
$v(t)$ est en quadrature avance de phase par rapport à $x(t)$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \underbrace{\omega_0 V_m}_{A_m} \sin(\omega_0 t + \underbrace{\varphi_v + \frac{\pi}{2}}_{\varphi_a}) \Rightarrow a(t) = A_m \sin(\omega_0 t + \varphi_a) \text{ Avec } \begin{cases} A_m = \omega_0 V_m = \omega_0^2 X_m \\ \varphi_a = \varphi_v + \frac{\pi}{2} = \varphi_x + \pi \end{cases}$$

Donc, $a(t)$ est aussi une fonction sinusoïdale du temps de même période que $x(t)$ et $v(t)$.

$a(t)$ est en quadrature avance de phase à $v(t)$

$x(t)$ et $a(t)$ sont en opposition de phase



Cas où $\varphi_x = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \dots$

3°) Relation entre $x(t)$ et $v(t)$ indépendante du temps :

$$x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x)$$

$$\begin{cases} x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x) \\ v(t) = \omega_0 X_m \cos(\omega_0 t + \varphi_x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x(t)}{X_m} = \sin(\omega_0 t + \varphi_x) \quad (1) \\ \frac{v(t)}{\omega_0 X_m} = \cos(\omega_0 t + \varphi_x) \quad (2) \end{cases}$$

$$(1)^2 + (2)^2 \Rightarrow \frac{x^2}{X_m^2} + \frac{v^2}{\omega_0^2 X_m^2} = 1 \Rightarrow \omega_0^2 x^2 + v^2 = \omega_0^2 X_m^2 \quad (*)$$

$$(*) \Rightarrow v^2 = \omega_0^2 X_m^2 - \omega_0^2 x^2$$

$$\Rightarrow v^2 = \omega_0^2 (X_m^2 - x^2)$$

$$\Rightarrow v = \pm \sqrt{\omega_0^2 (X_m^2 - x^2)}$$

Cette relation nous permet de déterminer v connaissant x

$$(*) \Rightarrow \omega_0^2 x^2 = \omega_0^2 X_m^2 - v^2$$

$$\Rightarrow x^2 = X_m^2 - \frac{v^2}{\omega_0^2}$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{X_m^2 - \frac{v^2}{\omega_0^2}}$$

Cette relation nous permet de déterminer x connaissant v

4°) Energie mécanique d'un oscillateur mécanique :

a) Energie potentielle élastique $E_{pe}(t)$:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Rappel : $E_{pe} = \frac{1}{2} k x^2$

Avec déf. :

$$E_{pe}(t) = \frac{1}{2} k x(t)^2 = \frac{1}{2} k X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_x) = \frac{1}{2} k X_m^2 \left[\frac{1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_x)}{2} \right] = \frac{1}{4} k X_m^2 [1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_x)]$$

Donc, $E_{pe}(t)$ est une fonction périodique du temps de période $T_{ep} = \frac{2\pi}{2\omega_0} = \frac{T_0}{2}$

b) Energie cinétique $E_c(t)$:

Rappel : $E_c = \frac{1}{2} m v^2$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

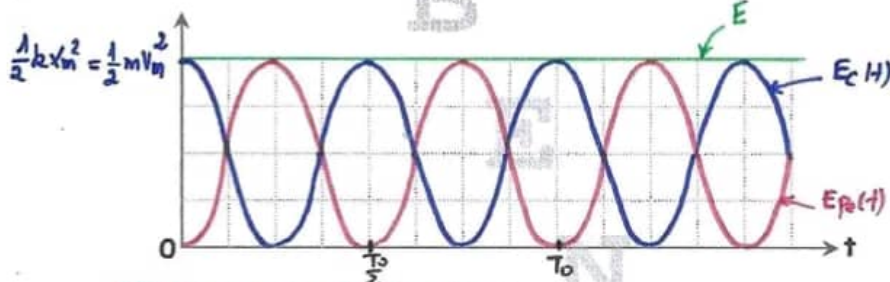
$$E_c(t) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_x) = \frac{1}{2} k X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_x) = \frac{1}{4} k X_m^2 [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_x)]$$

Donc, $E_c(t)$ est une fonction périodique du temps de période $T_{ec} = \frac{2\pi}{2\omega_0} = \frac{T_0}{2}$

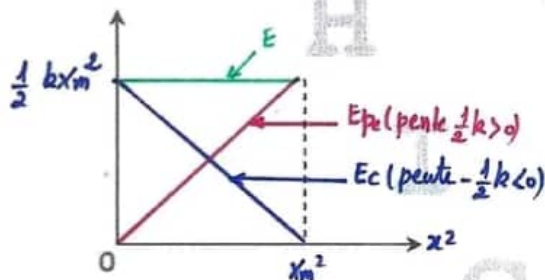
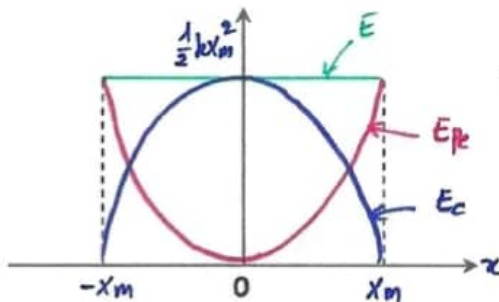
c) Energie mécanique et sa conservation :

$$E = E_{pe}(t) + E_c(t) = \frac{1}{2} k x_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi_x) + \frac{1}{2} k x_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi_x) = \frac{1}{2} k x_m^2 [\sin^2(\omega t + \varphi_x) + \cos^2(\omega t + \varphi_x)]$$

$$= \frac{1}{2} k x_m^2 = \frac{1}{2} m v_m^2 = \text{constante} \Rightarrow \text{systeme conservatif}$$



5°) Diagrammes des énergies :



$$E_{pe} = \frac{1}{2} k x^2$$

pour $x = \pm x_m$, $E_{pe} = \frac{1}{2} k x_m^2$

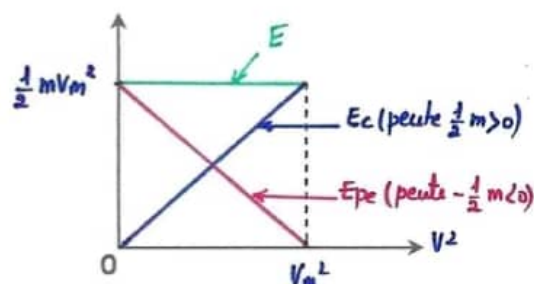
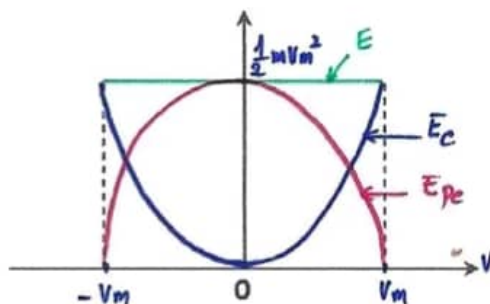
$$E = E_{pe} + E_c = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

pour $x = \pm x_m$, $v = 0 \Rightarrow E = \frac{1}{2} k x_m^2 = \text{cte}$

$$E_c = E - E_{pe} = \frac{1}{2} k x_m^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

$$\Rightarrow E_c = -\frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} k x_m^2$$

pour $x = \pm x_m$, $E_c = 0$



$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

pour $v = \pm v_m$, $E_c = \frac{1}{2} m v_m^2$

$$E = E_{pe} + E_c = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

pour $v = \pm v_m$, $x = 0 \Rightarrow E = \frac{1}{2} m v_m^2 = \text{cte}$

$$E_{pe} = E - E_c = \frac{1}{2} m v_m^2 - \frac{1}{2} m v^2$$

$$\Rightarrow E_{pe} = -\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m v_m^2$$

pour $v = \pm v_m$, $E_{pe} = 0$

Application :

On écarte un solide (S) de sa position d'équilibre d'une distance X_0 et on l'abandonne à lui-même en lui communiquant une vitesse initiale V_0 . Exprimer l'amplitude X_m des oscillations en fonction de k , m , X_0 et V_0 .

Réponse :

$$E = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m v^2$$
$$\text{pour } x = X_0, v = V_0 \Rightarrow E = \frac{1}{2} k X_0^2 + \frac{1}{2} m V_0^2$$
$$\text{pour } x = \pm X_m, v = 0 \Rightarrow E = \frac{1}{2} k X_m^2$$
$$\Rightarrow X_m^2 = X_0^2 + \frac{m}{k} V_0^2$$
$$\Rightarrow X_m = \sqrt{X_0^2 + \frac{m}{k} V_0^2}$$

Remarque :

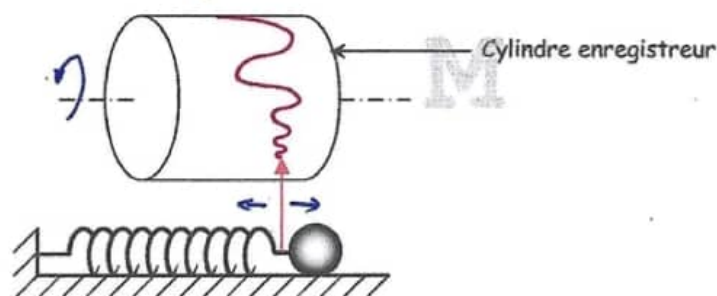
Après avoir montré que $E = \text{cste}$, m.a : $\frac{1}{2} k X_m^2 = \frac{1}{2} k X_0^2 + \frac{1}{2} m V_0^2$ Si $V_0 = 0$, $X_m = \sqrt{X_0^2} = |X_0|$

III / Analogie mécanique-électrique :

	OSCILLATEUR ELECTRIQUE	OSCILLTEUR MECANIQUE
Exemple	Circuit (L , C) Système = { condensateur , bobine }	Pendule élastique Système = { ressort , solide (S) }
Grandeurs caractéristiques de l'oscillateur	L : inductance de la bobine	m : masse du solide (S)
	$\frac{1}{C}$; C : capacité du condensateur	k : raideur du ressort
Grandeurs Oscillantes	q : charge électrique du condensateur	x : abscisse (ou élongation de S)
	i = $\frac{dq}{dt}$: intensité du courant	v = $\frac{dx}{dt}$: vitesse de (S)
Equation différentielle des oscillations	$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0$	$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$
Pulsation et période propres des oscillations	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L.C}}$ $T_0 = 2\pi \sqrt{L.C}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$
Equation horaire des oscillations	$q(t) = Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi_q)$	$x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_x)$

B / Oscillations libres amorties :

I/ Production d'oscillations libres amorties :



$f = -hV$ (h : constante positive: coefficient d'amortissement); h exprimée en $N.s.m^{-1}$ ou en $kg.s^{-1}$

II / Etude théorique :

1°) Equation différentielle :

$$\text{Système} = \{S\}$$

Bilan des forces ext.: $\vec{P}$, $\vec{R}$, $\vec{T}$ et $\vec{f}$

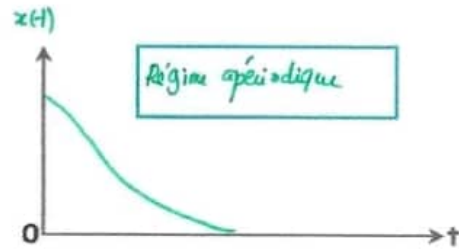
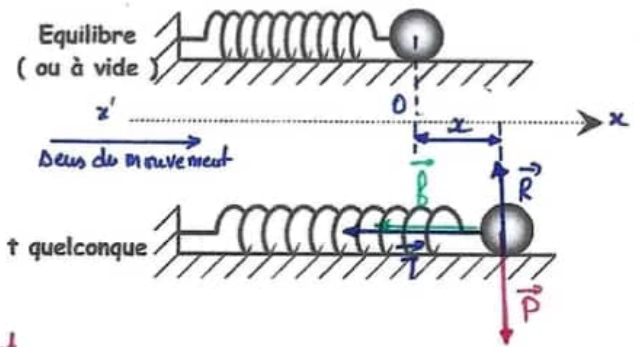
Théorème du centre d'inertie: $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{f} = m\vec{a}$

$$\text{Sur } x'x: -kx - hV = ma$$

$$\Rightarrow kx + hV + m \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$\downarrow$ terme dû à l'amortissement

La solution de l'équation différentielle précédente aura (selon la valeur de h) l'une des formes suivantes:



2°) Energie mécanique et sa non conservation :

$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mV^2$$

$-hV$ (eq. diff.)

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}kx \cdot V + \frac{1}{2}m \cdot 2V \cdot \frac{dV}{dt} = V(kx + m \frac{d^2x}{dt^2}) = -hV^2 \leq 0 \Rightarrow E \text{ décroît au cours du temps; elle est dissipée sous forme de chaleur} \Rightarrow \text{système non conservatif}$$

A l'aide d'un logiciel adéquat, on trace les courbes suivantes :

