

Suites numériques

1 Limite d'une suite

1 Limite d'une suite

→ **Rappel** : toute application de A dans \mathbb{R} où A est une partie de \mathbb{N} , est une suite numérique.

On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cette application.

• Une suite u a une limite L si tout intervalle ouvert contenant L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Si la suite u a une limite L finie, on dit que la suite u est convergente.
On écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ ou bien $\lim(u_n) = L$.

▮ **Remarque** : toute suite non convergente est divergente.

• Une suite u a une limite égale à $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si tout intervalle $]B; +\infty[$ (resp. $] -\infty; C[$) avec B et C deux réels quelconques, contient tous les u_n à partir d'un certain rang.

2 Limite de suites particulières

• Les suites usuelles $n \mapsto \frac{1}{n^p}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $n \mapsto \frac{1}{\sqrt{n}}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ sont convergentes de limite zéro.

• Soit une suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$ avec f définie sur un intervalle $[b; +\infty[$.

Si la limite de f est L , alors la limite de u est L .

3 Théorèmes de comparaison

• Soit deux suites (u_n) et (v_n) convergentes telles que, à partir d'un certain n_0 , pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$, alors $\lim u_n \leq \lim v_n$.

Si $\lim v_n = -\infty$, alors $\lim u_n = -\infty$.

Si $\lim u_n = +\infty$, alors $\lim v_n = +\infty$.

Si à partir d'un certain rang $|u_n| \leq v_n$ et $\lim v_n = 0$, alors $\lim u_n = 0$.

→ Théorème des gendarmes

Soit trois suites (u_n) , (v_n) , (w_n) , telles que u et w convergent vers L .

S'il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n \leq w_n$, alors $\lim v_n = L$.

Exercices résolus

→ 1. Déterminer la limite d'une suite

Énoncé

Soit la suite u définie sur \mathbb{N} par $u_n = \frac{n+3}{n+2}$. Pour un entier naturel p donné, déterminer un entier naturel n tel que : $1 - 10^{-p} < u_n < 1 + 10^{-p}$. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Corrigé commenté

Comme, pour tout n de \mathbb{N} , $n+3 > n+2$, alors $u_n > 1$, et pour tout p de \mathbb{N} , $1 - 10^{-p} < u_n$.

Déterminons n tel que $u_n < 1 + 10^{-p}$

$$\text{soit } \frac{n+3}{n+2} < 1 + 10^{-p} \quad \text{soit } \frac{1}{n+2} < 10^{-p} \quad \text{c'est-à-dire}$$

$$10^p < n+2 \quad \text{car } n+2 > 0 \quad \text{d'où } n > 10^p - 2.$$

Donc si on pose $N = 10^{p+1} - 2$, tous les termes de la suite à partir de u_N sont dans l'intervalle ouvert $]1 - 10^{-p}; 1 + 10^{-p}[$.

La suite (u_n) est donc convergente et sa limite est 1.

Quel que soit l'entier p choisi, donc quel que soit l'intervalle ouvert de centre 1, cet intervalle contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

→ 2. Choisir une méthode pour déterminer une limite

Énoncé

Soit la suite u définie sur \mathbb{N} par $u_n = \frac{n^2+3}{n+1}$.

Déterminer par deux méthodes différentes la limite de (u_n) .

Corrigé commenté

• Comme $u_n = \frac{n^2+3}{n+1}$, alors $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$.

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty, \quad \text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

$$\bullet u_n = \frac{n^2 - 1 + 4}{n+1} = n - 1 + \frac{4}{n+1}.$$

Or, sur \mathbb{N} , $n+1 > 0$ donc $\frac{4}{n+1} > 0$ et par suite $n - 1 + \frac{4}{n+1} > n - 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 1) = +\infty \quad \text{donc par comparaison } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = +\infty.$$

Une fonction rationnelle a même limite à l'infini que le quotient de ses termes de plus haut degré.

2 Monotonie et propriétés des suites

1 Monotonie d'une suite

Soit une suite réelle (u_n) et A l'intersection d'un intervalle de \mathbb{R} et de \mathbb{N} .

- La suite (u_n) est **croissante** sur A , si quel que soit n de A : $u_n \leq u_{n+1}$.
- La suite (u_n) est **décroissante** sur A , si quel que soit n de A : $u_n \geq u_{n+1}$.
- La suite (u_n) est **monotone** sur A , si quel que soit n de A , elle est croissante ou bien décroissante.
- La suite (u_n) est **stationnaire** ou **constante** à partir de u_0 , s'il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n = u_{n_0}$.

2 Suites majorées, minorées, bornées

Suite majorée	Suite minorée	Suite bornée
Soit $A \subset \mathbb{N}$, pour tout n de A , il existe un réel M ou un réel m		
$u_n \leq M$	$u_n \geq m$	$m \leq u_n \leq M$

→ **Théorème** : toute suite croissante et majorée est convergente.
Toute suite décroissante et minorée est convergente.

BAC

Toute suite croissante non majorée tend vers plus l'infini.
Toute suite décroissante non minorée tend vers moins l'infini.

3 Suites adjacentes

→ Définition

Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si :

$$\begin{cases} (u_n)_{n \in A} \text{ est croissante ;} \\ (v_n)_{n \in A} \text{ est décroissante ;} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0. \end{cases}$$

→ Conséquences

- Deux suites adjacentes sont convergentes vers une même limite.
- Les deux suites (u_n) et (v_n) sont telles que, pour tout n de \mathbb{N} , $u_n \leq v_n$.

Exercices résolus

→ 1. Savoir démontrer qu'une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$

Corrigé commenté

Soit un réel A strictement positif.
 La suite (u_n) n'est pas majorée, donc il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} > A$.
 Comme la suite u est croissante, tous les termes de la suite sont contenus dans l'intervalle $]A ; +\infty[$ pour $n > n_0$, ce qui signifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

→ 2. Déterminer la monotonie d'une suite

Énoncé

Soit la suite u définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \frac{n!}{n^n}$.

On rappelle que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = n(n-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$.

Étudier la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Corrigé commenté

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)! \times n^n}{(n+1)^{n+1} \times n!};$$

$$\text{or } (n+1)! = (n+1)n!$$

$$\text{et } (n+1)^{n+1} = (n+1)^n(n+1)$$

$$\text{donc } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^n \times (n+1)} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Or, $n < n+1$ donc $n^n < (n+1)^n$, d'où $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1$. Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

pour tout entier naturel non nul, ce qui signifie que la suite (u_n) est strictement décroissante sur \mathbb{N}^* .

Les u_n sont strictement positifs et se présentent sous la forme d'un quotient donc on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

3 Récurrence

1 Raisonnement par récurrence

Soit un nombre entier naturel n_0 et P_n une propriété.
Démontrer qu'une propriété P_n est vraie pour tout $n \geq n_0$ se fait en trois étapes.

- **Initialisation** : on vérifie que P_{n_0} est vraie.
- **Hérédité** : on suppose pour un entier $n \geq n_0$, que la propriété P_n est vraie (hypothèse de récurrence), puis on démontre, compte tenu de cette hypothèse, que P_{n+1} est vraie.
- **Conclusion** : pour tout $n \geq n_0$, la propriété P_n est vraie.

Remarque : on pense à ce raisonnement par récurrence, dès que l'on veut montrer qu'une propriété P_n est vraie pour tout $n \geq n_0$.

2 Suites récurrentes

Soit une fonction f définie sur un intervalle I tel que pour tout x de I , $f(x)$ est aussi dans I .

On peut définir une suite (u_n) par la donnée de u_0 avec $u_0 \in I$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si u_n converge et si f est continue, alors sa limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.

Remarque : les suites arithmétiques et géométriques sont des suites récurrentes.

Exercices résolus

→ 1. Utiliser le raisonnement par récurrence pour étudier la monotonie d'une suite

Énoncé

Déterminer la monotonie des suites (u_n) et (v_n) définies sur \mathbb{N} par :

$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \sqrt{v_n + 3} \end{cases}$$

Corrigé commenté

• On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = \sqrt{x+3}$.

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}_+ , donc $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$.

$f'(x) > 0$, donc la fonction est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ .

On calcule u_1, u_2 : $u_1 = \sqrt{u_0 + 3} = 3$; $u_2 = \sqrt{u_1 + 3} = \sqrt{6}$.

On conjecture que la suite (u_n) est décroissante et on démontre par récurrence cette propriété.

On pose $P_n : u_n > u_{n+1}$.

• **Initialisation** : P_0 est vraie car $u_0 > u_1$.

• **Hérédité** : on suppose que pour $n \geq 0$, $u_n > u_{n+1}$ et on démontre que $u_{n+1} > u_{n+2}$.

On sait que $u_{n+1} = f(u_n)$ et que f est une fonction croissante sur \mathbb{R}_+ , donc $f(u_n) > f(u_{n+1})$ soit $u_{n+1} > u_{n+2}$ donc P_{n+1} est vraie.

• **Conclusion** : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) est décroissante.

• On conjecture que (v_n) est croissante et on le démontre par récurrence.

Une conjecture ne suffit pas, une démonstration s'impose.

→ 2. Savoir utiliser le raisonnement par récurrence

Énoncé

Démontrer que pour tout n de \mathbb{N} , le nombre $5^{2n} - 3^n$ est un multiple de 22.

Corrigé commenté

Soit P_n la propriété : $5^{2n} - 3^n$ est un multiple de 22.

• **Initialisation**

Pour $n = 0$: $5^0 - 3^0 = 0$, or 0 est multiple de 22, donc P_0 est vraie.

• **Hérédité**

On suppose que pour un entier quelconque $n \geq 0$, la propriété est vraie, puis on démontre compte tenu de cette hypothèse que P_{n+1} est vraie.

Or $5^{2(n+1)} - 3^{n+1} = 5^{2n} \times 5^2 - 3 \times 3^n$ soit :

$$5^{2(n+1)} - 3^{n+1} = (22 + 3) \times 5^{2n} - 3 \times 3^n = 22 \times 5^{2n} + 3(5^{2n} - 3^n).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $5^{2n} - 3^n$ est un multiple de 22, le nombre $5^{2(n+1)} - 3^{n+1}$ étant la somme de deux multiples de 22, est un multiple de 22 d'où la véracité de P_{n+1} .

• **Conclusion**

On a vérifié que P_0 est vraie, on a montré que P_{n+1} est vraie sous l'hypothèse de récurrence que P_n était vraie pour un $n \geq 0$, donc :

$(\forall n \in \mathbb{N}), 5^{2n} - 3^n$ est un multiple de 22.

4 suites particulières

1 Suites arithmétiques et géométriques

Suites arithmétiques

$$n \in \mathbb{N}$$

$$u_{n+1} = u_n + r$$

$r \in \mathbb{R}$, r : raison de la suite

$$n \in \mathbb{N}$$

$$u_n = u_0 + nr$$

$$n \in \mathbb{N}$$

$$p \in \mathbb{N}$$

et $p \leq n$

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

Relation de récurrence

$$n \in \mathbb{N}$$

$$u_{n+1} = qu_n$$

$q \in \mathbb{R}$, q : raison de la suite

Terme général

$$n \in \mathbb{N}$$

$$u_n = u_0 q^n$$

Relation entre deux termes

$$n \in \mathbb{N}$$

$$p \in \mathbb{N}$$

et $p \leq n$

$$u_n = u_p (q)^{n-p}$$

Somme de termes consécutifs

$$\sum_{i=0}^n u_i = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=0}^n u_i = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \text{ et } q \neq 1$$

Si $q = 1$, alors $\sum_{i=0}^n u_i = (n+1)u_0$

Sommages particuliers

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{(1+n)n}{2}$$

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

avec $q \neq 1$

$$n \mapsto u_0 + nr$$

Limites et monotonie

$$n \mapsto q^n$$

Si $r < 0$, la suite est décroissante et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

Si $r > 0$, la suite est croissante et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

$$q < -1$$

Suite alternée divergente (pas de limite).

$$-1 < q < 0$$

Suite alternée convergente de limite nulle.

$$0 < q < 1$$

Suite décroissante convergente de limite nulle.

$$q > 1$$

Suite croissante divergente de limite infinie.

2 Suites définies par $u_{n+1} = au_n + b$

- Si $a = 1$, il s'agit de suites arithmétiques de raison b .
 - Si $a \neq 0$ et $b = 0$, il s'agit de suites géométriques de raison a .
 - Si $b \neq 0$ et $a \neq 0$, on considère la fonction affine f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(x) = ax + b$.
- La représentation graphique de f est une droite \mathcal{D} .
 Soit Δ la droite d'équation $y = x$.
 Les droites \mathcal{D} et Δ sont sécantes en $I\left(\frac{b}{1-a}; \frac{b}{1-a}\right)$ si $a \neq 1$.
 Si la suite (u_n) est convergente, alors sa limite ℓ est telle que $\ell = \frac{b}{1-a}$.

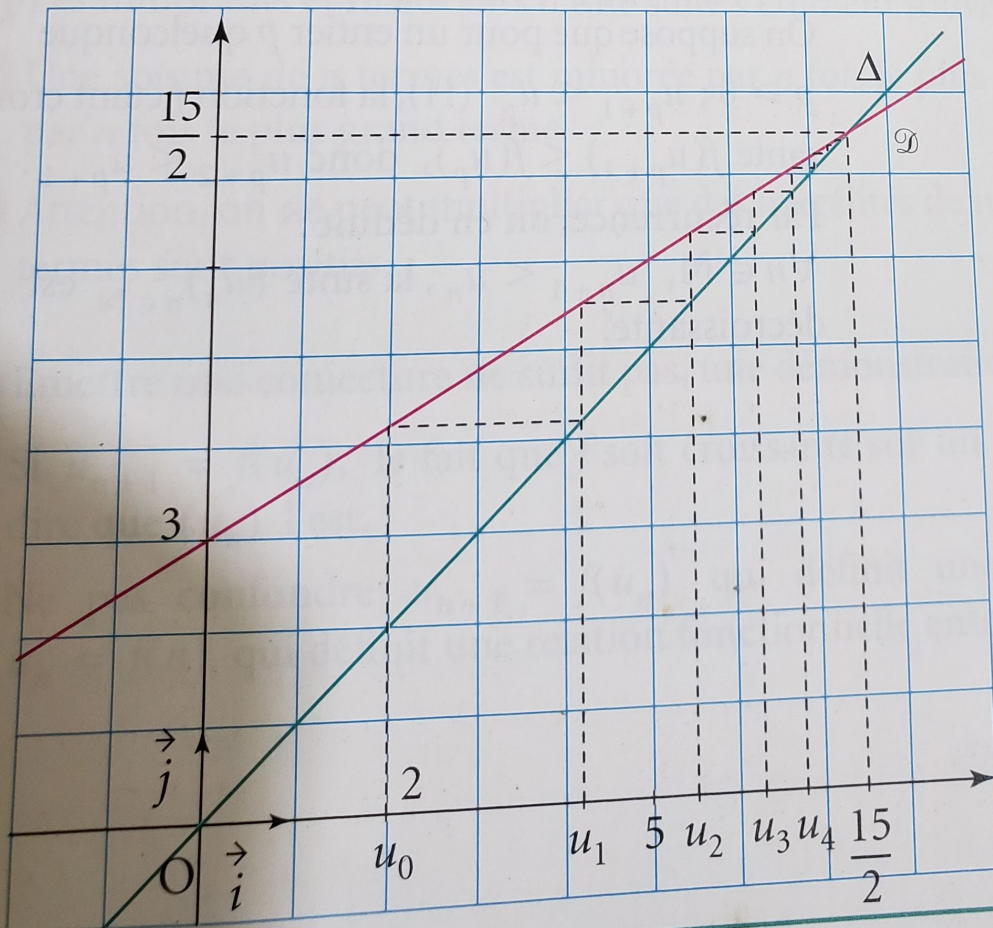
Exercice résolu

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 3$.

Représenter graphiquement la fonction $f: x \mapsto \frac{3}{5}x + 3$ et tracer la droite Δ d'équation $y = x$. Émettre une conjecture concernant la limite de (u_n) .

Corrigé commenté

Les droites \mathcal{D} (représentative de f) et Δ sont sécantes au point d'abscisse $\frac{15}{2}$. On conjecture que la limite de (u_n) est $\frac{15}{2}$.



On représente graphiquement la fonction $f: x \mapsto \frac{3}{5}x + 3$ et on utilise la droite Δ d'équation $y = x$.

Méthode

Méthodes à connaître

M1 Monotonie
d'une suite telle
que u_n est une
somme

Pour étudier la monotonie de la suite, on détermine le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_n = n + \frac{1}{n+1}.$$

On calcule :

$$u_{n+1} - u_n = n + 1 + \frac{1}{n+2} - n - \frac{1}{n+1}.$$

$$u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{1}{(n+2)(n+1)}.$$

$u_{n+1} - u_n > 0$, donc la suite u_n est croissante.

Soit f définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ et (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

pour tout entier n . Grâce à l'étude de la fonction f , on démontre que pour tout x de $]1; +\infty[$; $f(x) \geq e$ et que f est croissante sur $]e; +\infty[$. On en déduit que pour tout n , $u_n \geq e$.

$$u_0 = 5 \text{ et } u_1 = \frac{5}{\ln 5}; \text{ donc } u_1 < u_0.$$

Soit $P_n : u_{n+1} < u_n$, P_0 est vraie.

On suppose que pour un entier p quelconque $p \geq 0$; $u_{p+1} < u_p$ (H), la fonction f étant croissante $f(u_{p+1}) < f(u_p)$, donc $u_{p+2} < u_{p+1}$.

Par récurrence, on en déduit :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

M2 Monotonie
d'une suite récur-
rente

Pour déterminer les variations de (u_n) , si $u_{n+1} = f(u_n)$ et si f est croissante sur un intervalle I , on utilise un raisonnement par récurrence.

M3

Monotonie d'une suite telle que u_n est un produit de termes strictement positifs

Pour étudier la monotonie de cette suite, on compare

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \text{ à } 1.$$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $u_n = \frac{n(n+1)^2}{3}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)(n+2)^2}{3} \times \frac{3}{n(n+1)^2} = \frac{(n+2)^2}{n(n+1)}.$$

Or $\frac{(n+2)^2}{n(n+1)} \geq 1$ car $n^2 + 4n + 4 \geq n^2 + n$.

En effet pour tout n strictement positif, $3n + 4 > 0$.

Par suite, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ et la suite (u_n) est croissante.

Réflexes à avoir et pièges à éviter

R1 Penser au raisonnement par récurrence quand on demande de démontrer une propriété pour tout n .

R2 Dans l'étude d'une suite, ne pas oublier de regarder l'indice du 1^{er} terme.

R3 Le nombre de termes d'une somme $u_p + \dots + u_q$ est $(q - p + 1)$.

Exemple : la somme $u_7 + \dots + u_{2\,007}$ a $(2\,007 - 7 + 1)$, soit 2 001 termes.

R4 Les minorants et majorants d'une suite s'étudient souvent par récurrence.

R5 Une somme de n termes est minorée par n fois le plus petit terme et majorée par n fois le plus grand terme.

R6 Attention, on ne peut multiplier que des inégalités de même sens dont tous les termes sont positifs.

P1 Émettre une conjecture ne suffit pas, une démonstration s'impose.

P2 Si $u_{n+1} = f(u_n)$, le fait que f soit croissante sur un intervalle I , ne veut pas dire que (u_n) l'est.

P3 Ne pas confondre $u_{n+1} = f(u_n)$ qui définit une suite récurrente et $u_n = f(n)$ qui définit une relation fonctionnelle entre u et f .